ANEXO III

En el Anexo III se encuentran las resoluciones de los TP3, correspondientes a los 20 alumnos que participaron de la experiencia.

CONSIGNA

Consigna 1:

Explicar con palabras y, si te resulta útil podés ejemplificar con un gráfico, qué significa que una función f verifique la siguiente condición: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)$: $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \,.\, (x - x_1) + f(x_1)$

Te pedimos que resuelvas la consigna, y además respondas:

a) Sobre la formulación del enunciado de la consigna: ¿corresponde a una definición, a una propiedad, a una demostración o a otra cosa? Explicá tu respuesta, tratá de indicar qué del enunciado te permite responder esta segunda pregunta.

b) Si pensaras en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, ¿harías algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usarías para explicarlo?

c) Te pedimos que reflexiones sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática. Como guía (y sin la intención que respondas una por una, te proponemos algunas preguntas como para orientar tu reflexión): ¿tienen la misma rigurosidad?, ¿usarías alguno de manera predominante en clases que estén a tu cargo?, ¿es posible prescindir de alguno de ellos?, etc.

Consigna 2:

Se tienen f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b. Responder las siguientes preguntas y explicar las respuestas.

a) ¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?

b) Si en un punto intermedio entre a y b la f es mayor que g, ¿hay alguna condición que deba cumplirse para que en todos los puntos entre a y b, la f siempre sea mayor que g? Si es así, explicitar la condición, enunciar la proposición que la incluya y probarla. La proposición que deben probar les tendría que quedar algo así: si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además ****acá irá la condición que propongan***, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g). Si no hay tal condición, justificar por qué.**

Sobre esta consigna te pedimos que nos entregues:

a) Todos tus intentos en borrador.

b) La consigna resuelta es decir, el enunciado completo y la demostración pasada en limpio.

c) Una explicación aparte sobre cómo se la darías a un compañero que no entendió tu escrito (piensen en grabar un audio y enviarlo por mail, o transcribirlo en papel),

d) Una reflexión sobre el proceso que realizaste para lograr la demostración pedida (para ello, tomá tu borrador, tratá de identificar si usaste heurísticas, pensá si estás seguro de que la demostración es matemáticamente correcta y qué te da la pauta de ello, qué forma de encararla te resultó útil y cuál no, etc.). Este punto no te va a insumir más de media carilla.

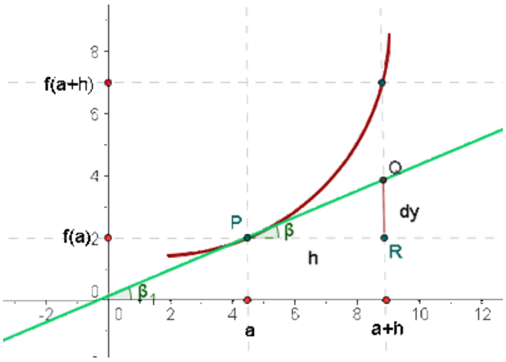
Resolución A1

Resolución de la consigna 1:

Sea f(x) una función derivable. Diferencial de una función correspondiente al incremento h de la variable independiente, es el producto f'(x) · h. Se representa por dy.

$dy = f'(x) \cdot h$

$dy = f'(x) \cdot dx$



$f'(x) = tg\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{h}$

$QR = f'(x) \cdot h;$ $\qquad QR = (dy)_{x=a}$

La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento de la variable independiente.

Para una función *y=f(x)* para un valor inicial x_0 se tiene la pendiente de la línea recta tangente en las coordenadas $[x_0,f(x_0)]$, dada por la $m=f'(x_0)$. Cuya ecuación de la línea recta tangente queda entonces definida como: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$.

Sea *y=f(x)* una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número *x*. Se define a la diferencial de *x* como *dx*, cualquier número real diferente de cero.

Se define a la diferencial de y como dy, dado por dy=f '(x) dx.

Luego la expresión $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1}))\,.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x1})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la forma de la recta donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1})$ es la pendiente y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la ordenada al origen.

Con respecto al uso del lenguaje natural o coloquial y el simbólico, creo que ambos cumplen la misma rigurosidad, aunque es necesario naturalizar el simbólico, o sea, realizar una práctica diaria y constante del mismo, de manera que no sea una pérdida de tiempo el hecho de entender una consigna escrita en este lenguaje.

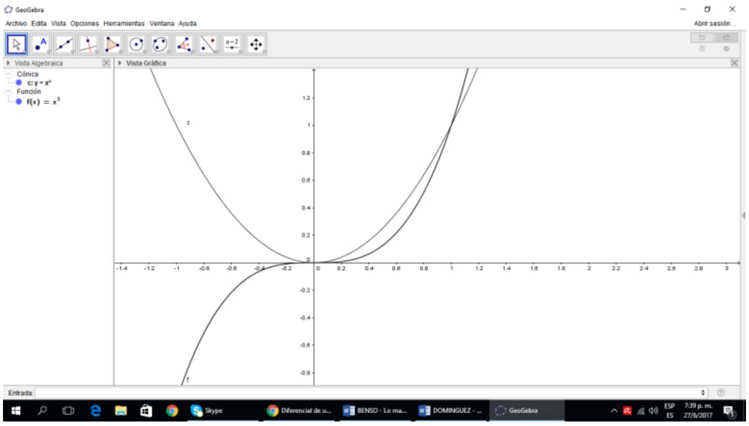
No creo que sea posible prescindir de alguno de ellos, sin embargo el lenguaje simbólico resulta más práctico al momento de resolver o escribir una consigna, ya que ahorra tiempo de escritura.

Resolución de la consigna 2:

Sean: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_mx^m$ con n,m pertenecientes a los números naturales.

Entonces f(a)=g(a) y f(b)=g(b)

Supongamos las siguientes funciones polinómicas $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$ y las graficamos en el geogebra.



En este ejemplo podemos observar como en el intervalo (a,b) la función f es mayor que la función g en todos sus puntos.
Supongo que para que todos los valores entre a y b coincidan f=g.
Para que en el intervalo (a,b) se cumpla que un punto intermedio f sea mayor que g tiene que pasar f(c) tiene que ser mayor que g(c), con c punto intermedio entre a y b. y cualquier otro punto intermedio entre a y b, debe cumplir lo mismo.

$f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, f>g
Luego $x^2>x^3$
Luego $x^2(-x+1)>0$
Caso 1: x>0 ó 1>x, solución: (0,1)
Caso 2: x<0 ó 1<x, solución: vacía
Luego en el intervalo (0,1), sucede que f>g.

Resolución A2

<u>Resolución consigna 1:</u>
Si una función cumple con las condiciones establecidas, que dados dos puntos que pertenezcan a un intervalo al dominio de la función , tal que uno sea menor al otro, la recta que une a dichos puntos (x1; f(x1)) y (x2; f(x2)),

$y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$ estará por encima de la función.

El enunciado hace referencia a la definición de funciones convexas.
$\forall\, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}), \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_{1;}}\, \boldsymbol{x_2})$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})}{\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$$

Da las condiciones que tiene que satisfacer una función para que sean convexas en el intervalo (a,b).

a) Para explicarle a un alumno tendría que explicar bien que significa cada símbolo, como se lee en lenguaje natural, y la significación que tienen como por ejemplo "el para todo" vs "existe alguno".
b) Los símbolos matemáticos son necesarios a la hora de escribir una definición, demostración, propiedad etc. Creo que no podría prescindir de ninguno de ellos en esta definición, si quisiera sacar alguno debería reescribir la definición usando otros cuidadosamente.
Dependiendo del contexto, algunos tendrán más peso que otros. No es lo mismo decir "existe un número que cumple algo" que decir "todo número cumple algo".

Resolución consigna 2:

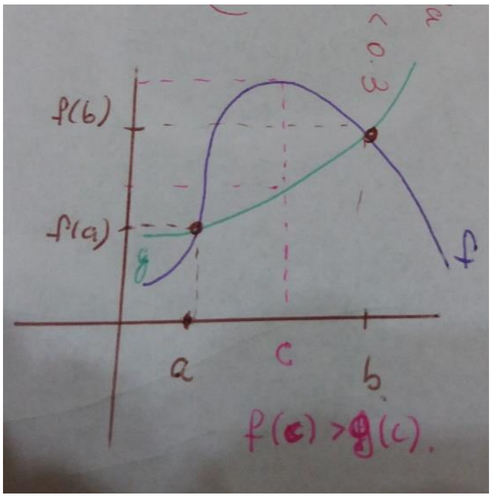
Si quisiera que las funciones coincidan en todos sus puntos entre a y b, estaría pidiendo que f y g sean la misma función, pero si son distintas y cumplen que toman el mismo valor para x=a y x=b no es posible que coincidan en todos los valores entre a y b.

Sean f y g dos funciones polinómicas que cumplen que f(a)= g(a) y f(b)=g(b) y que $f(x) \neq g(x)$ $\forall$ x$\in$ (a,b) si existe un c$\in$ (a,b) talque f(c)>g(c) y f y g solo se cortan en a y b , entonces f(x)>g(x) $\forall x \in$ (a,b)

Demostración:

Si las funciones valen lo mismo solo en los extremos y son distintas entre ellas, si existe un c que pertenece al intervalo (a,b) y si f(c) es mayor que g(c) y como las funciones no se cortan en otro punto necesariamente f(x)>g(x) para todo x perteneciente al intervalo (a,b).

c)



Si las funciones solo se cortan en dos puntos a y b, son distintas y existe un c talque f evaluada en c es mayor que g evaluada en g, entonces no hay otra alternativa de que f sea mayor que g en el intervalo (a,b).

d) Para llevar a cabo la resolución fue necesario empezar cero, empezando por los conocimientos previos, hacer gráficos y buscar generalidades, escribir hipótesis y corregirlas hasta estar maso menos convencida de que la tesis se cumple y poder demostrar porqué.

No me sirvió concentrarme solo en las cuadráticas (que era lo que estaba haciendo en un primer momento) ya que las funciones podrían tener grados mayores.

Si me sirvieron los gráficos para poder analizar cuando se cumplía lo pedido en las hipótesis y ver que condición era necesaria para que f sea mayor que g siempre en un intervalo (a,b).

Se tienen f y g dos funciones polinomicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x=a$ y $x=b$ responder las siguientes preguntas

a) ¿es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b? No es posible,

b) Si en un pto intermedio entre a y b la f es mayor que g ¿hay alguna condición que deba cumplirse para que en todos los puntos entre a y b, la f siempre sea mayor que g?

$f(x) = ax - a$ $\qquad f(x) = 3x^4 + 2$

$g(x) = bx - a$ $\qquad g(x) = 6x^4 + 4$

$b(ax) - a$

$f(x) = 3x^4 + 2$

$f(x) = -2x^2 - 4x$

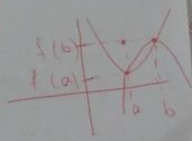
$g(x) = 2x^2 + 4x$

$a = 2$, $b = 0$

$x = a = 0$

$x = b = 0$

$f(x) =$



Si la f tiene que ser una función convexa,

y g es cóncava entonces f siempre es mayor que g.

Con cuadrático (Geogebra)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad g(x) = -(ax^2 + bx + c)$

① ~~con $a>0$~~, $\qquad$ con $a<0$

② con $b>0$ $\qquad$ con $b<0$

con $b=0$ $\qquad$ con $b=0$

③ con $c>0$ $\qquad$ con $c<0$

con $c=0$ $\qquad$ con $c=0$

1º caso $a>0$, $b>0$, $c>0$ ⇒ f es convexa no me sirve

2º caso $a>0$

$a<0$ $b>0$ $c<0$

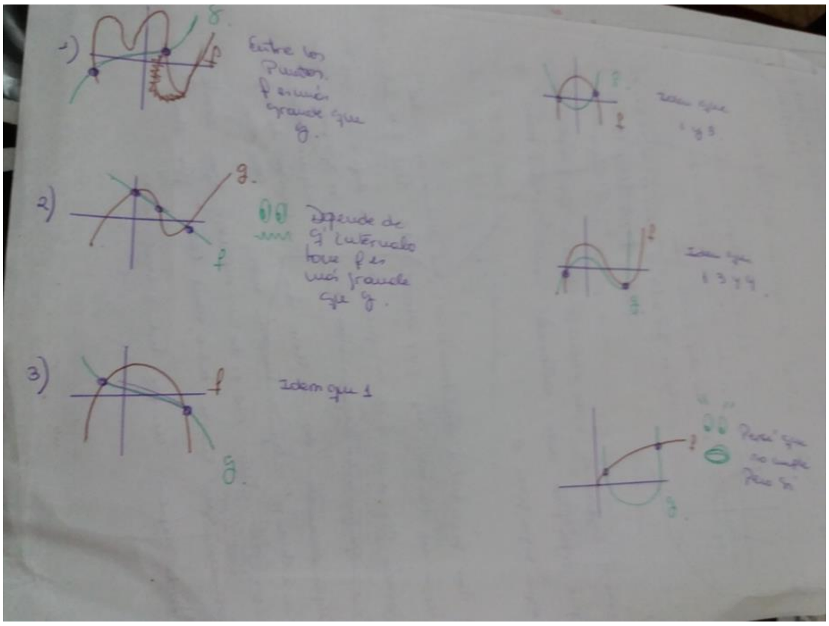
$a<0$, $b>0$, $c>0$ ⇒ f es cóncava y cumple las hipótesis

$a<0$; $b>0$; $c>0$ ⇒ Se tocan en un pto

$a<0$; $b>0$; $c=0$ ⇒ f es convexa y cumple las hipótesis

$a<0$, $b<0$, $c=0$

$a<0$, $b<0$, $c<0$ ⇒ f es convexa y cumple las hipótesis.



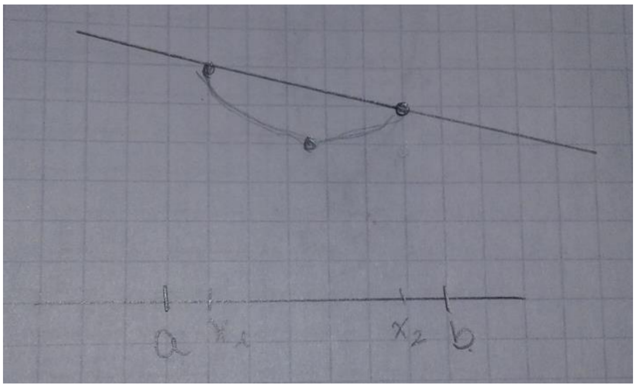
Resolución de A3

Consigna 1

Explicar con palabras y, si te resulta útil podes ejemplificar con un gráfico, qué significa que una función $\boldsymbol{f}$ verifique la siguiente condición:

$$\forall\, x1, x2\ \in (a,b), x1 < x2, \forall x \in (x1, x2):$$

$$f(x) < \frac{f(x_2) + f(x_1)}{x_2 - x_1} \,.\, (x - x_1) + f(x_1)$$



F es menor a la recta que pasa por x_1 y x_2. x_1 es menor a x_2 y la f es menor a esa recta. Es decir, es convexa.

a) Corresponde a una definición porque f se está exponiendo un concepto. En el enunciado se observa en la expresión “una función f verifique esta condición”

b) SI tuviera que exponer esto a un alumno, haría aclaraciones del lenguaje simbólico que el alumno tal vez podría no comprender. El pertenece ($\in$) o el “para todo” ($\forall$) y además los intervalos.

c) Con respecto al lenguaje simbólico y natural, considero que no tienen la misma rigurosidad. El simbólico en este ejercicio es muy riguroso pero convexidad como tema, se puede explicar de otra manera o definir prescindiendo de esta definición. Tal vez utilizando un gráfico y mostrando la recta tangente.

En el lenguaje natural hay más lugar de “escapatoria” es decir, puede ir variando cosas o improvisando un poco más libremente. El lenguaje simbólico no creo que admita tanta versatilidad.

Consigna 2:

a) $f(a) = g(a)\ y\ f(b) = g(b)$

Supongamos que f y g coinciden $\forall\ c\ \in (a, b)$

Sea $P(x) = f(x) - g(x)$ una función polinómica de grado $n, \forall\, n \in \mathbb{N}$

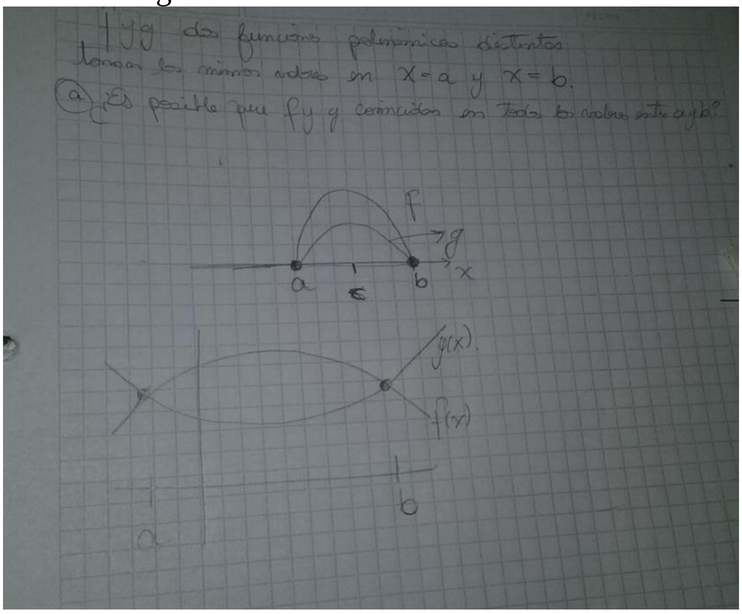
Entonces $P(x) = 0$, $\forall\, x \in (a, b)$lo que daría que tiene infinitas raíces

Pero como es de grado n tiene a lo sumo n raíces no infinitas. Entonces no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b.

b) Para que $f(x) > g(x)$, $x \in (a, b)$, f y g no deberían cruzarse ya que si esto pasada dentro de (a, b) f dejaría de ser mayor que g.

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además $\nexists\, \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c})$, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.

El borrador que usé fueron gráficos auxiliares:



Resolución de A4

1) Consigna:

Explicar con palabras y, si te resulta útil podés ejemplificar con un gráfico, qué significa que una función $\boldsymbol{f}$ verifique la siguiente condición:

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2):$$

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \times (x - x_1) + f(x_1)$$

Te pedimos que resuelvas la consigna, y además respondas:

a) Sobre la formulación del enunciado de la consigna: ¿corresponde a una definición, a una propiedad, a una demostración o a otra cosa? Explicá tu respuesta, tratá de indicar qué del enunciado te permite responder esta segunda pregunta.

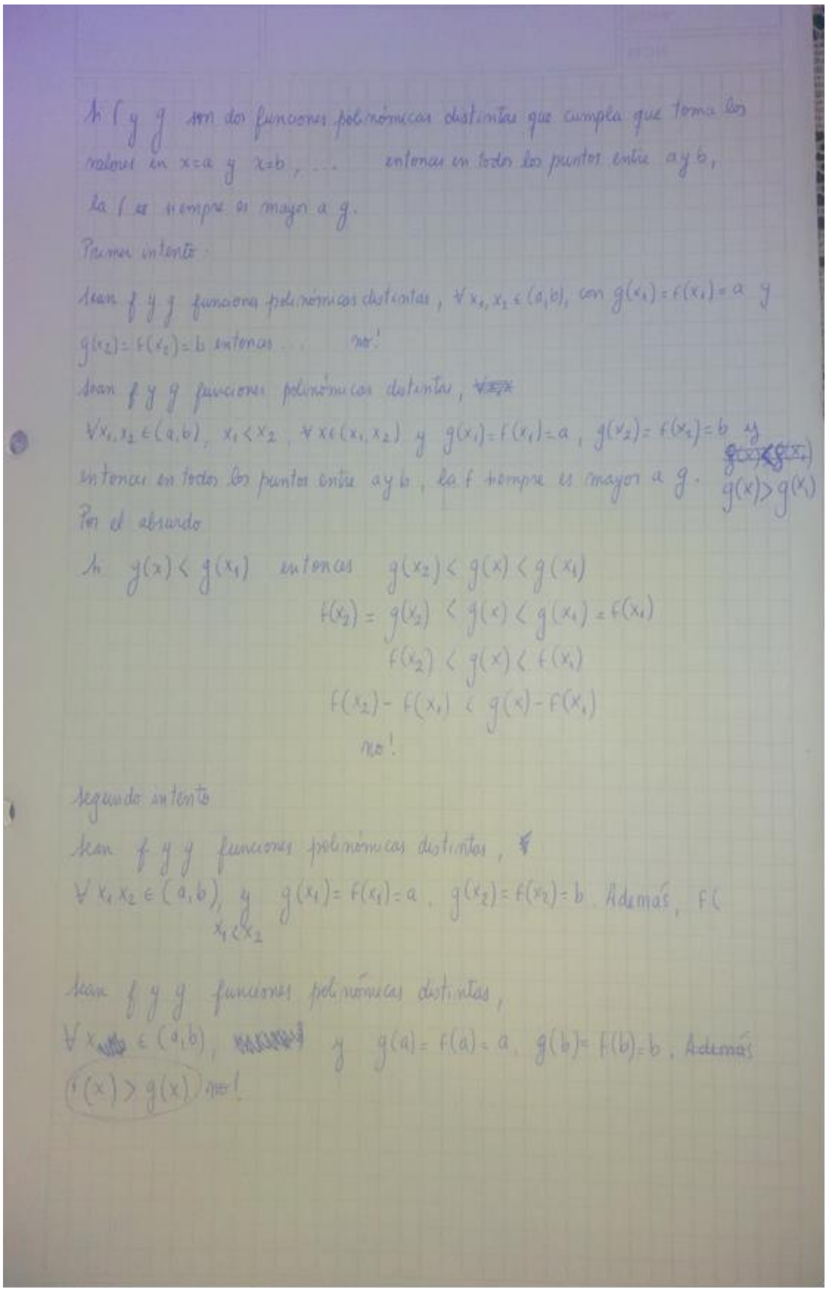
b) Si pensaras en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, ¿harías algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usarías para explicarlo?

c) Te pedimos que reflexiones sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática. Como guía (y sin la intención que respondas una por una, te proponemos algunas preguntas como para orientar tu reflexión): ¿tienen la misma rigurosidad?, ¿usarías alguno de manera predominante en clases que estén a tu cargo?, ¿es posible prescindir de alguno de ellos?, etc.

Explicar con palabras y, si te resulta útil podés ejemplificar con un gráfico, qué significa que una función *f* verifique la siguiente condición:

1) Me resulta útil poder ejemplificar con un gráfico para corroborar o no mi conjetura.
a) Sobre la formulación del enunciado de la consigna creo que corresponde a una propiedad porque dice explicar con tus palabras si la función *f* verifica la siguiente condición. La propiedad surge luego de un teorema previamente demostrado.
La definición es una forma de simplificar un concepto matemático particular y las demostraciones tratan de probar la verdad de enunciados matemáticos. Un lema es el resultado de un teorema y corolario es la consecuencia de un teorema.
b) Si tendría que presentar la consigna a un alumno lo haría en un lenguaje natural y trataría de explicar dando algún ejemplo ó si se puede para que uno utilizaría esa condición. Luego, pasaría al lenguaje simbólico y quedaría plasmado en la carpeta los dos lenguajes.
c) El lenguaje natural ayuda a comprender que estamos haciendo o explicando, y el lenguaje simbólico es muy riguroso ya que los alumnos ni tampoco nosotros estamos acostumbrados a leer símbolos ni a interpretarlos. Previamente, nosotros como futuros profes tenemos que aprender a leer símbolos para luego enseñar a los alumnos.

2) Consigna:
a) Las funciones f y g podrían coincidir en todos los puntos en un intervalo (a,b).
b) la consigna no la pude resolver. La idea era encontrar un punto en el intervalo (a,b) y que se cumpliera que f sea mayor a g, y luego demostrar que vale para todos los puntos de ese intervalo.
Las heurísticas que se pueden encontrar son trabajar hacia adelante, también puede ser trabajar hacia el final y recurrir a la teoría relacionada.


Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumpla que toma los valores en $x=a$ y $x=b$, ... entonces en todos los puntos entre a y b, la f es siempre es mayor a g.

Primer intento:

Sean f y g funciones polinómicas distintas, $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, con $g(x_1)=f(x_1)=a$ y $g(x_2)=f(x_2)=b$ entonces ... no!

Sean f y g funciones polinómicas distintas, $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1<x_2$, $\forall x \in (x_1,x_2)$ y $g(x_1)=f(x_1)=a$, $g(x_2)=f(x_2)=b$ y $\cancel{g(x)<g(x_1)}$ $g(x)>g(x)$

entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor a g.

Por el absurdo

Si $g(x)<g(x_1)$ entonces $g(x_2)<g(x)<g(x_1)$

$f(x_2)=g(x_2)<g(x)<g(x_1)=f(x_1)$

$f(x_2)<g(x)<f(x_1)$

$f(x_2)-f(x_1)<g(x)-f(x_1)$

no!

Segundo intento

Sean f y g funciones polinómicas distintas, $\forall$

$\forall x_1 x_2 \in (a,b)$, y $x_1<x_2$ $g(x_1)=f(x_1)=a$, $g(x_2)=f(x_2)=b$. Además, f(

Sean f y g funciones polinómicas distintas,

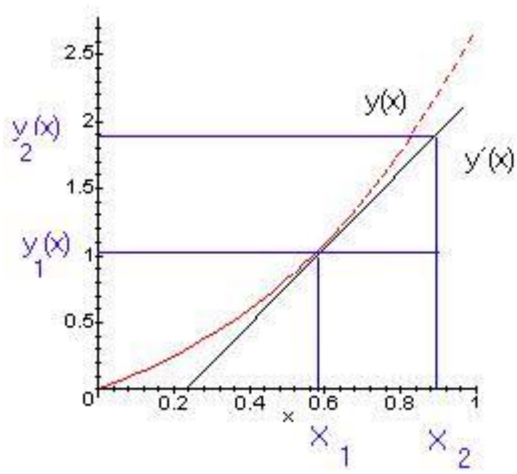
$\forall x \in (a,b)$, y $g(a)=f(a)=a$, $g(b)=f(b)=b$, Además

$f(x)>g(x)$ no!

Resolución de A5

<u>Resolución de la consigna 1:</u>

Encontré la relación de la pendiente de la línea recta $y´ = f´(x)$ que era tangente a la función. Para un punto en particular podemos llegar a la definición de la derivada $f'(x)$ y vimos que $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=x_1$.



En particular, para una función *y=f(x)* para un valor inicial x_0 se tiene la pendiente de la línea recta tangente en las coordenadas [x_0,$f(x_0)$], dada por la $m=f'(x_0)$. Cuya ecuación de la línea recta tangente queda entonces definida como: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$

Ante un cambio en la variable *x* podemos determinar el incremento x_0 por x_0+dx, donde el incremento *dx* es comúnmente un incremento pequeño, pero no cero, llamado diferencial en *x*.

Analizando el sistema función y línea recta tangente a dicha función entonces podemos analizar que existen dos puntos importantes a analizar, los de la función y los de la recta tangente:

(1) Para referirnos al cambio que ocurre en el valor de *f* designaremos la notación *dy*.

(2) Para referirnos al cambio que ocurre en el valor de *y* para la recta tangente utilizaremos la notación *dy*.

Más precisa se encuentra la siguiente definición:

Definición de diferencial.

Sea *y=f(x)* una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número *x*. Se define a la diferencial de *x* como *dx*, cualquier número real diferente de cero.

Se define a la diferencial de y como dy, dado por dy=f '(x) dx.

Luego la expresión $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1}))\ .(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x1})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la forma de la recta donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1})$ es la pendiente y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la ordenada al origen.

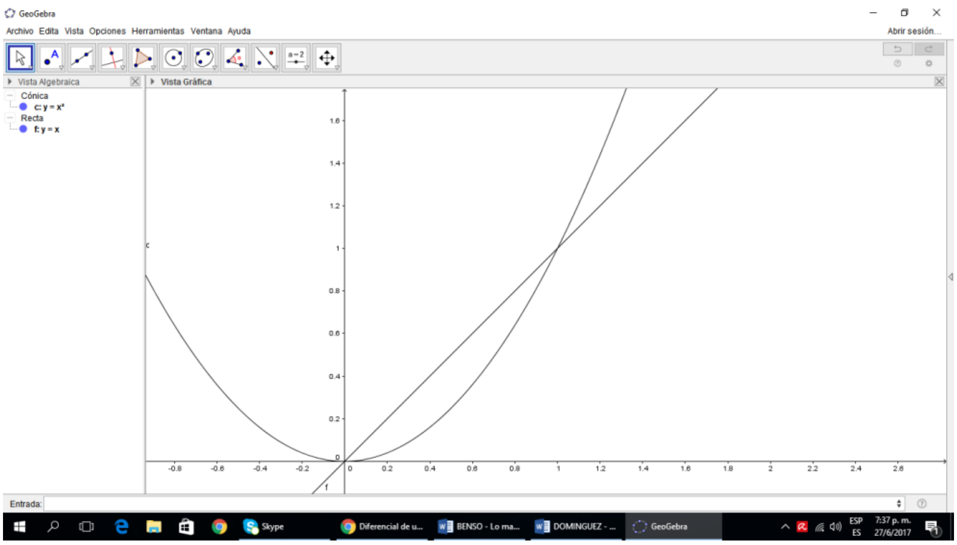
Con respecto al uso del lenguaje coloquial y el simbólico, creo que ambos cumplen la misma rigurosidad, aunque es necesario entender el simbólico, ya que, al momento de explicar una definición o demostración el simbólico es más práctico.

Resolución de la consigna 2:

Sean: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_mx^m$ con n,m pertenecientes a los números naturales.

Entonces f(a)=g(a) y f(b)=g(b)

Supongamos las siguientes funciones polinómicas f(x)=x y $g(x)=x^2$ y las graficamos en el geogebra.



En este ejemplo podemos observar como en el intervalo (a,b) la función f es mayor que la función g en todos sus puntos.
Supongo que para que todos los valores entre a y b coincidan f=g.
Para que en el intervalo (a,b) se cumpla que un punto intermedio f sea mayor que g tiene que pasar f(c) tiene que ser mayor que g(c), con c punto intermedio entre a y b. y cualquier otro punto intermedio entre a y b, debe cumplir lo mismo.

f(x)=x y g(x)=x^2, f>g
Luego x>x^2
Luego x(-x+1)>0
Caso 1: x>0 ó 1>x, solución: (0,1)
Caso 2: x<0 ó 1<x, solución: vacía
Luego en el intervalo (0,1), sucede que f>g.

Resolución de A6

Consigna 1:

$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$

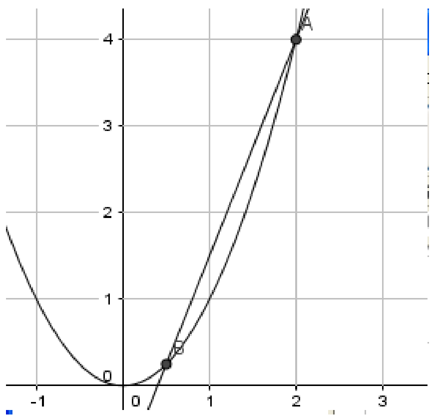
Si $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$

Entonces la función es convexa en el intervalo (a, b).
Si una función f(x) es menor a la recta secante de la misma, dentro de un intervalo (x_1, x_2), entonces la función resulta convexa en ese intervalo.
Por ejemplo tenemos la función x^2. Trabajaremos en el intervalo (1/2; 2)
Primero vemos si verifica

$x^2 < \frac{4-1/4}{2-1/2}(x - 1/2) + 1/4$

$x^2 < 5/2(x - 1/2) + 1/4$

$x^2 < \frac{5}{2}x - 1$



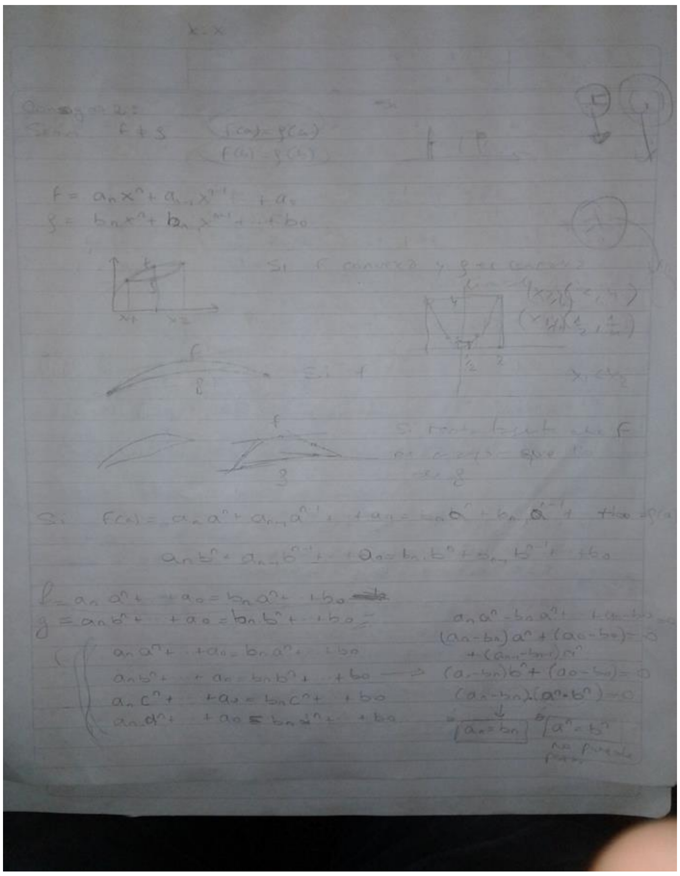
Notamos que en el intervalo la función resulta convexa.

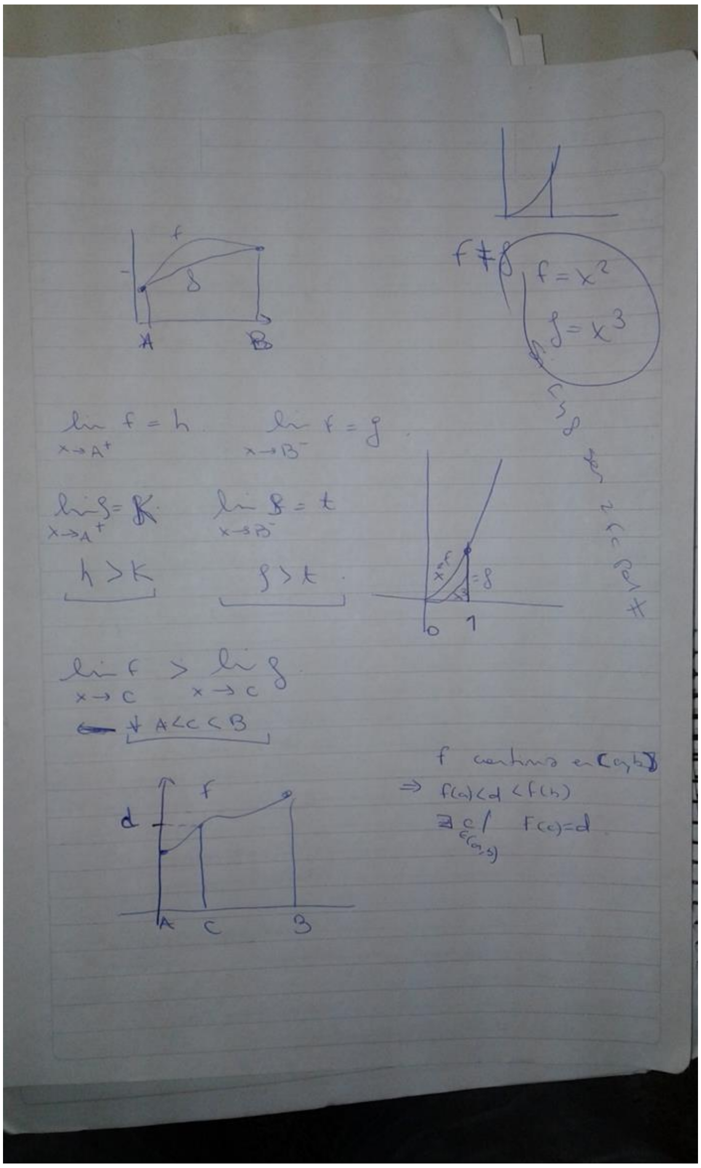
a) La formulación del enunciado de la consigna corresponde a la definición de convexidad.

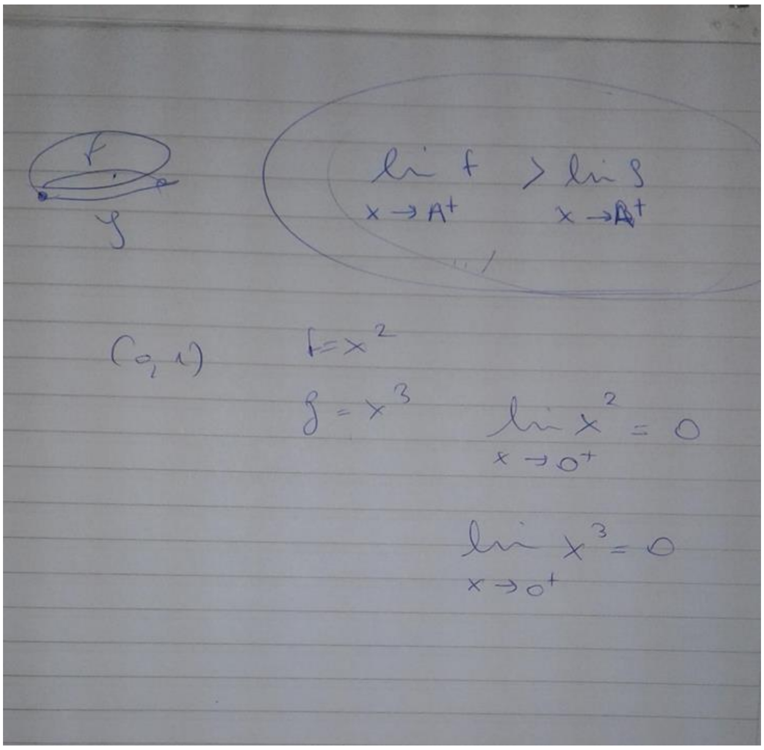
b) Si tendría que explicar la consigna a un alumno, aclararía que lo definido se da en un determinado intervalo. Daría la definición y la fórmula para calcular la recta secante. Lo explicaría con lenguaje natural, ya que a veces a los estudiantes se les dificulta interpretar los símbolos.

c) Respecto al lenguaje simbólico y natural considero que es de suma importancia que ambos se den en el aula. El lenguaje natural es importante para que el estudiante pueda comprender los enunciados, definiciones y ejercicios matemáticos. Por otro lado es necesario que comprenda el lenguaje simbólico para que de manera autónoma logren interpretar los ejercicios, problemas o cualquier enunciado matemático.

Consigna 2: a)




f
g
A
B
f ≠ g
f = x^2
g = x^3
lim f = h
x→A+
lim f = g
x→B−
lim g = k
x→A+
lim g = t
x→B−
h > k
g > t
0
1
lim f > lim g
x→c x→c
∀ A<c<B
f continua en [a,b]
⇒ f(a)<d<f(b)
∃ c / f(c)=d
∈(a,b)
d
A
C
B



b) Si la función coincide en todos los valores de f y g entonces f=g.
Pero f≠g Por lo tanto no es posible que f y g coincidan en todos los valores del intervalo.
Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Si se cumple que

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) + f(x_0) > \frac{g(x_1)g(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) + g(x_0)$$

Es decir, la recta tangente de f es mayor a la recta tangente de g en el intervalo dado entonces en todos los puntos entre a y b la f siempre es mayor que g.

Otra forma

Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Si se cumple que para todo c∈(a, b) f(c) > g(c), es decir, para todo c que se encuentre dentro del intervalo (a, b) siempre la función f evaluada en c será mayor que la función g evaluada en c. Entonces en todos los puntos entre a y b la f siempre es mayor que g.

c) Se que f y g son dos funciones distintas y también se que se cortan en dos puntos, entonces lo que yo pienso es que si la recta tangente de f en cada punto dentro de mi intervalo es más grande que la recta tangente de g en los puntos que se encuentren dentro del intervalo, si pasa eso entonces siempre será mayor que g en el intervalo.

También lo pienso con los puntos se que para que f sea más grande en el intervalo para cada valor que le dé a c, con c entre (a,b), tiene que ser mayor que el mismo punto evaluado en g.

d) Al realizar la consigna tuve dificultades en encontrar la solución. Primero trate de relacionarlo con la consigna 1. Pero luego me di cuenta que no me servía, luego pensé en la recta tangente que tenía que ser más grande en f, pero no me gustaba mucho la idea así que decidí desarrollar a f y g como polinomios de grado n, pero no podía llegar a concluir nada. Finalmente me quede con la idea de las rectas tangentes.

También pensé que la condición podría ser que se cumpla para todo c perteneciente al intervalo. La condición que propuse no sé si es correcta, quizá tendría que haber investigado más y probado.
Utilice varias heurísticas como trabajar hacia adelante, generalmente en todos mis intentos partí de los datos dados. También realice un dibujo para ver que podría pasar entre las funciones. Analice ejemplos y descarte una posible solución. Utilice varias heurísticas para realizar el ejercicio.

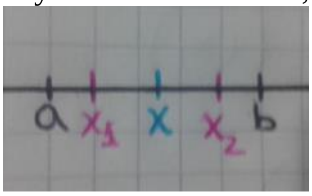
Resolución de A7

Resolución consigna 1:
A continuación explicaré con palabras qué significa qué $\forall\ \boldsymbol{x_1, x_2} \in (\boldsymbol{a; b}), \boldsymbol{x_1 < x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_{1;}\ x_2})$:

$$\boldsymbol{f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$$

Para todo x_1, x_2 que están dentro del intervalo $(a; b)$, x_1 es menor que x_2 y para todo x que está en el intervalo $(x_{1;}\ x_2)$ resulta que una función f es menor que el cociente de la resta entre la función evaluada en x_2 y x_1 y la resta de x_2 y x_1 por el producto de $(x - x_1)$ sumado a f evaluada en x_1.

Veremos en un gráfico la representación de la primera parte, es decir la relación que hay entre los intervalos,

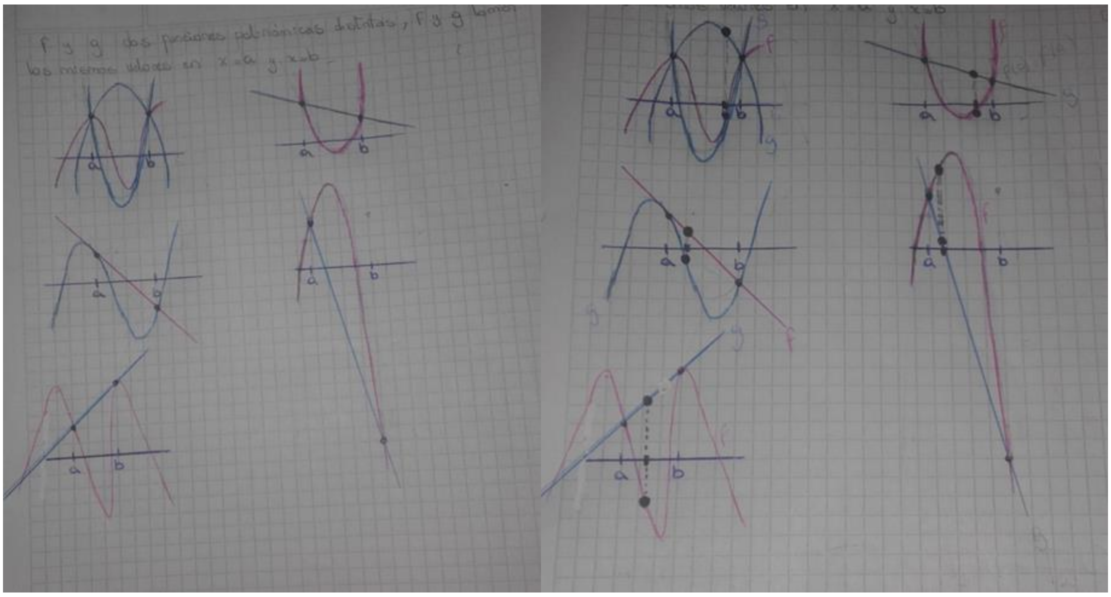


a. Considero que sobre la formulación del enunciado se corresponde a una definición, ya que primero se da pautas $(\forall\ \boldsymbol{x_1, x_2} \in (\boldsymbol{a; b}), \boldsymbol{x_1 < x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_{1;}\ x_2}))$ para luego definir algo, en este caso que $\boldsymbol{f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$.

b. Si explicara lo presentado en una consigna a alumnos sí haría aclaraciones con respecto al lenguaje simbólico puesto que en un ámbito escolar los alumnos no están acostumbrados a este lenguaje, les señalaría qué significa cada símbolo y además aclararía que cuando algo matemático está expresado así es porque vale para todos los números (en el ámbito que estemos trabajando, naturales, enteros, etc) y que los ejemplos sólo sirven en algunos casos.

c. Si bien el uso simbólico es más complicado para los alumnos en una clase, como también el explicarlos, creo que este es más importante que el lenguaje natural (los alumnos están más habituados a este) ya que hace que ellos tengan un más amplio conocimiento sobre lo matemático. En mi caso preferiría utilizar el lenguaje simbólico, no sé si en manera predominante pero siempre presentando todo en este lenguaje para luego pasar al natural.

Resolución consigna 2:



b)

- **I)** Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumple que toman los mismos valores en $x = a$ y $x = b$ no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b.
- **II)** Si en un punto intermedio, al que llamaré p, entre a y b la función f es mayor que la función g, debe cumplirse que ese p evaluado en f debe ser mayor que p evaluado en g, es decir $f(p) > g(p)$.

<u>Proposición:</u>

Si $f\ y\ g$ son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a\ y\ x = b$ y que además $f(x) > g(x)$ evaluada en todos los puntos entre $a\ y\ b$ entonces en todos los puntos entre $a\ y\ b$, la función f es siempre mayor que g.

<u>Demostración:</u>

Sabiendo que $f\ y\ g$ son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a\ y\ x = b$ y que además $f(x) > g(x)$ supongo que existe un punto p tal que $g(p) > f(p)$, pero esto es un absurdo pues contradice a la hipótesis que dice que $f(x) > g(x)$, entonces $f(p)$ es estrictamente mayor que $g(p)$ es decir f es mayor que g evaluada en todos los puntos entre $a\ y\ b$.

c) Pensá en dos funciones polinómicas, podemos pensar en una función cuadrática y una cúbica, voy a decir que la polinómica es f y la cúbica es g, fíjate que f y g coinciden en el punto x=a y x=b y además, f es mayor que g en ese intervalo a, b. si elijo un punto p1 veo que f(p1) es mayor que g(p1), ahora elijo p2 y veo f y g evaluadas en ese punto, ves que f(p2) es mayor que f(p2). Fijate que para todos los p que tome entre a y b, f es siempre mayor que g. (Le iría dibujando el esquema en una hoja mientras se lo explico).

d) Para poder lograr la demostración realizada partí observando los diferentes gráficos realizados, teniendo en cuenta principalmente las hipótesis de la proposición. No estoy segura de que la demostración sea correcta ya que reafirmo lo que ya está escrito de una manera diferente, yo creo que estoy demostrándolo pero a la vez veo que la demostración es la proposición escrita de otra manera.

Resolución de A8

Respuestas:

a) Considero que el enunciado se trata de una propiedad. Digo esto porque en el enunciado dado unas condiciones se muestra que una relación, en este caso la desigualdad, es válida.

No se trata de una demostración porque no hay pasos que se sigan para mostrar la validez del enunciado. Además no se trata de una demostración, un lema, una proposición pienso yo por la forma en que está redactado. Estarían faltando hipótesis con las cuales conjeturar el enunciado.

b) Al momento de explicar la consigna a los alumnos aclararía algunos de los símbolos a los alumnos. Quizás la explique oralmente señalando los símbolos que voy nombrando en la oralidad.

c) Sobre el uso de ambos lenguajes creo que en una clase con alumnos de secundaria es importante que manejen el lenguaje simbólico pero no sería tan estricto como si en niveles más avanzados. En mi caso comenzaría utilizando mayormente el lenguaje natural y de a poco introduciría en lenguaje simbólico. Igualmente al alumno que le interese leer algún libro matemático le va a resultar imprescindible saber el lenguaje simbólico, sobre todo porque este lenguaje es universal. En cambio el lenguaje natural puede variar dependiendo de quién esté hablando sobre alguna cuestión matemática. En esto último me refiero a cuando se usan distintos términos para referirse a un mismo concepto.
Agrego la siguiente foto del borrador en que realice la resolución de la consigna.

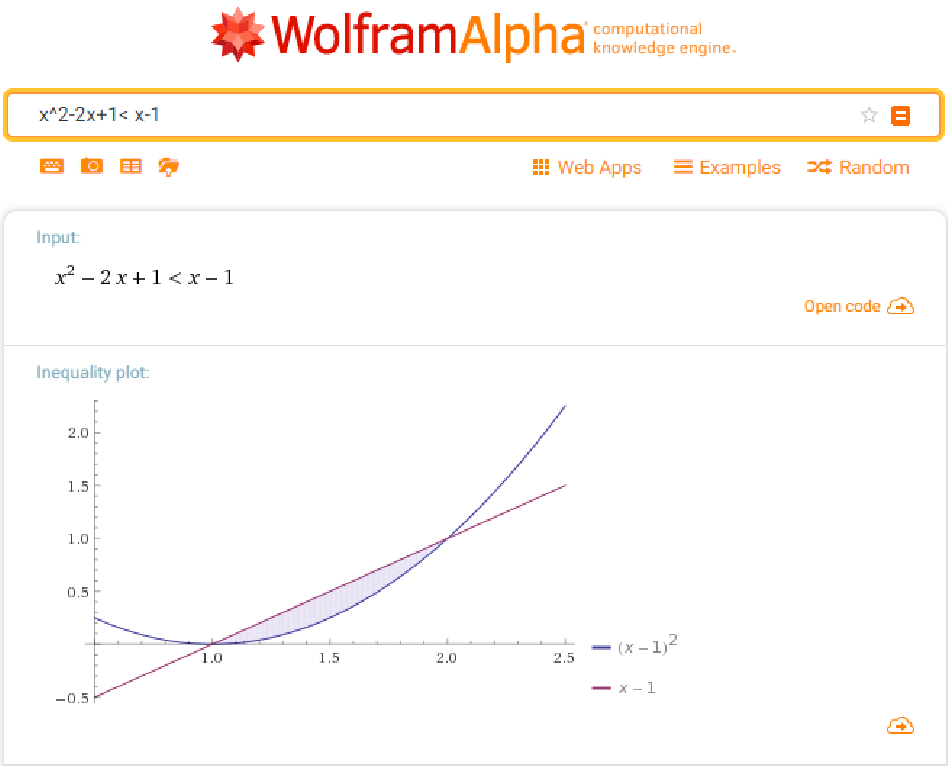
No entrego la consigna dos porque no pude resolverla.

Resolución de A9

<u>Resolución consigna 1:</u>

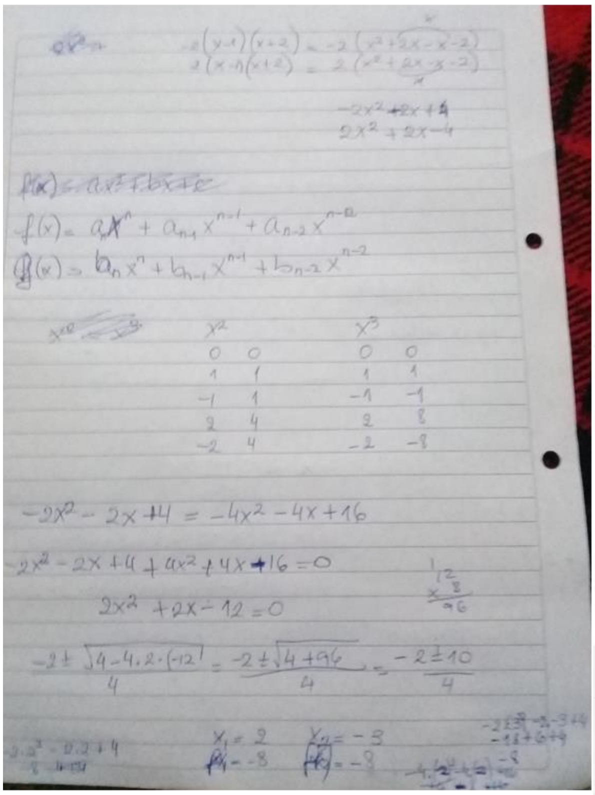
Que una función verifique esa condición, significa que estará por debajo de la recta secante a ella misma, recta que pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

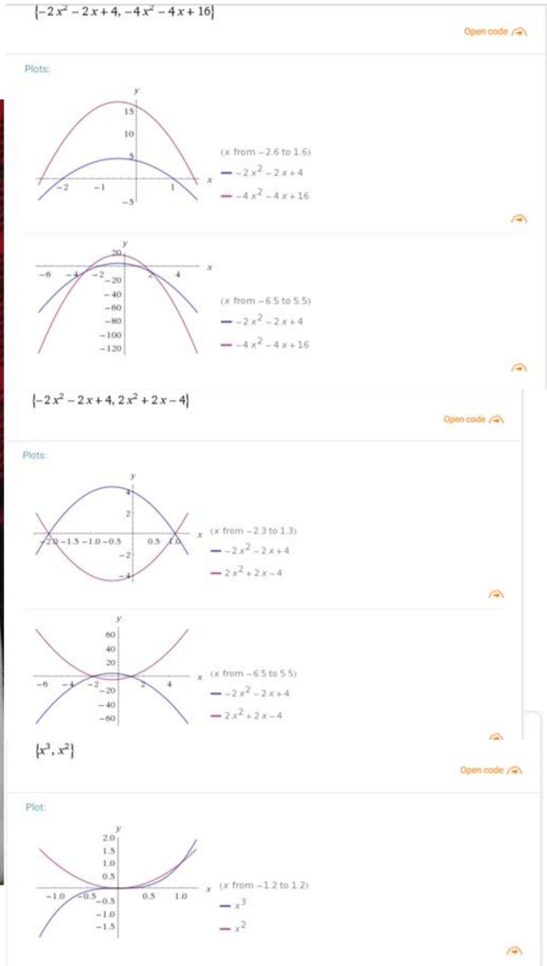
Por ejemplo:



$$(x_1, f(x_1)) = (1,0)$$
$$(x_2, f(x_2)) = (2,1)$$

a) Considero que corresponde a una propiedad, ya que tiene condiciones que hacen que sea válido lo que continúa después.
b) Sí, aclararía que $f(x_1)\ y\ f(x_2)$ son los valores de la función en ese punto, y que cuando dice
$\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2})$ se refiere a un intervalo.
c) Considero que es necesario enseñar el sistema de representación, el código propio de la matemática, para dar una visión completa de la materia. El simbólico es el lenguaje propio de la matemática, universal, que además concreta de manera concisa lo que uno quiere decir en palabras, modeliza. Y el natural a su vez, traduce y hace más cercano lo que los símbolos representan. Puede que el simbólico se vea más riguroso, pero eso es hasta que se le va dando el sentido y comprendiendo por qué hay ciertas reglas para la escritura en símbolos. Usaría ambos lenguajes según lo que necesite en la clase.
Resolución consigna 2:
a) No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b, porque si así lo hicieran las funciones deberían de ser las mismas, y eso contradice el enunciado.
b) “Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b y que además $f(x_1)>g(x_1)$, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.
No hay otra condición más que esa porque ya se sabe que por ser dos funciones polinómicas distintas los puntos entre a y b para las funciones serán distintos, por lo tanto, con decir que f es mayor a g en un punto, ya se sabe que en el intervalo f(x) será mayor a g(x).





No logré demostrar nada, por eso no completo los puntos c) y d). Si puedo ver que en lo mostrado utilicé como heurísticas el hacer gráficos, analizar varios casos, razonar por analogía con el inciso a).

Resolución de A10

1) **Consigna:** Explicar con palabras y, si te resulta útil podés ejemplificar con un gráfico, qué significa que una función $\boldsymbol{f}$ verifique la siguiente condición:
   $\forall\ \boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{x1} < \boldsymbol{x2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}\ )$:
   $\boldsymbol{f(x)} < \frac{\mathbf{f(x2\ ) - f(x1)}}{\mathbf{x2 - x1}}\ \mathbf{.}\ \boldsymbol{(x - x1\ ) + f(x1)}$

   Que la función $\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{(x)}$ verifique las condiciones mencionadas significa que el gráfico de la función evaluada en cualquier valor **x** que se encuentre entre **x_1 y x_2** está por debajo de la recta que contiene a los puntos, **(x_1; f(x_1)) y (x_2; f(x_2))** en el intervalo que tiene como valor mínimo a **x_1** y como valor máximo **x_2**.
   A mi parecer es una proposición ya que se puede verificar si es verdadera o falsa. Y con las condiciones planteadas verificamos que se cumple en el intervalo indicado.
   Para explicar el enunciado a un alumno le explicaría en lenguaje natural a que refiere, le diría que teniendo en cuenta un intervalo que empieza en x_1 y termina en x_2 si se toma un valor cualquiera que pertenezca a dicho intervalo y lo evaluamos en f(x) siempre va a dar como resultado un número menor que al hacer la operación planteada del lado derecho de la ecuación. Es decir que el gráfico de

f en ese intervalo siempre va a estar por debajo de la recta obtenida a partir de la realización de las operaciones resueltas.

Con respecto al lenguaje simbólico y natural que suele usarse en matemática considero que no tienen la misma rigurosidad, el lenguaje simbólico es mucho más riguroso que el natural, por otra parte utilizaría de forma predominante el lenguaje simbólico en matemática porque considero que es un lenguaje abreviado, útil y de carácter universal que ayudara a los chicos a entender cualquier demostración proposición, propiedad, etc. que se les presente o quieran observar de algún libro. Sin embargo me parece de suma importancia ambos lenguajes en el uso matemático. Ya que el lenguaje natural suele ser más claro y sencillo de entender.

2) **Consigna:** Se tienen f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b. Responder las siguientes preguntas y explicar las respuestas. a) ¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b? b) Si en un punto intermedio entre a y b la f es mayor que g, ¿hay alguna condición que deba cumplirse para que en todos los puntos entre a y b, la f siempre sea mayor que g? Si es así, explicitar la condición, enunciar la proposición que la incluya y probarla. La proposición que deben probar les tendría que quedar algo así: si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además *acá irá la condición que propongan*, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g). Si no hay tal condición, justificar por qué.

No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b ya que son funciones polinómicas distintas.

a)

$f(a) = g(a)$
$f(b) = g(b)$
para todo $x \in (a,b)$ $f>g$
Busco ejemplos para verificar si es posible
si $f(x)$: $3x^3-2$ y $g(x)$: $4x^2-x-2$
$f(1)=1$ $g(1)=1$
$f(0)=-2$ $g(0)=-2$
grafico en geogebra para observar ambos gráficos
Se deberia cumplir que en el intervalo $(0;1)$ la función f siempre ~~esta~~ sea mayor que g y no se cumple

ejemplo 2
$f(x) = 3x^4-x$ y
$f(2)=46$ $g(x) = 11x^2+x$
$f(0)=0$ $g(2) = 11.4+2 = 46$
$g(0)=0$
grafico :
$g>0$ en $(0;2)$

Si $f(x) = 3x^2-1$
y Tomo dos valores de x evaluo en f
· $f(3) = 3.3^2-1$ $(3;26)$
$= 26$
· $f(1) = 3.1^2-1 = 2$ $(1;2)$
Si tengo en cuenta esos dos puntos armo una recta q' pase por esos dos puntos : $m = \frac{26-2}{3-1} = \frac{24}{2} = 12$

$2 = 12.1 + b$
$2 = 12 + b$
$2 - 12 = b$
$10 = b$

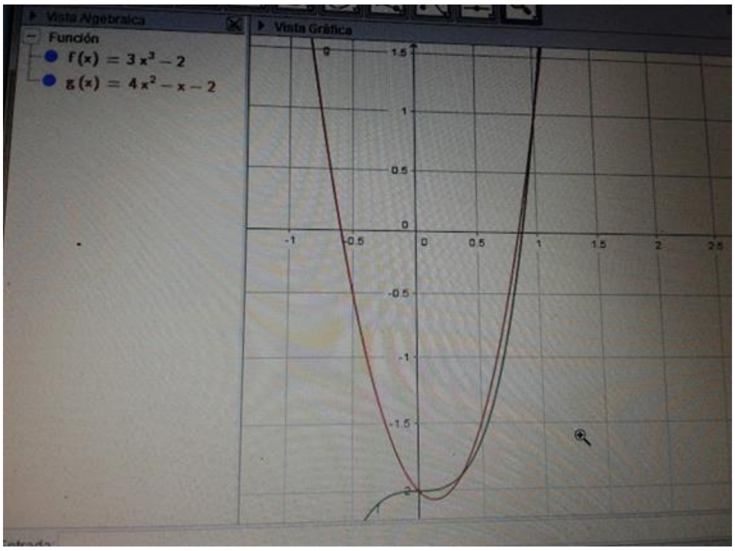
$y = 12x + 10$
Cumple!!

f: es una función lineal estrictamente creciente

$g = -x^2 - x$
$g(1) = -2$
$g(3) = -9 - 3 = -12$

$\frac{-2-12}{1-3} = \frac{-14}{-2} = 7$
$-2 = 7 \cdot \cancel{1} + b$
$-2 - 7 = b$
-9

si $a \neq 0$ tambiom vale.



a) Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además f es la recta que contiene a los puntos (a; g(a)) y (b; g (b)), entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.
b) A partir de realizar varios ejemplos di cuenta que tomando f y g dos funciones polinomicas distintas que cumplían con las condiciones dadas no siempre se cumplía la relación de que f sea mayor que g en un intervalo (a;b) recordando la consigna resuelta anteriormente , vemos que si la función f es una recta , es decir una función lineal siempre se cumple lo antes mencionado.
c) Si bien no pude llegar a una demostración de dicha proposición. Para llegar a deducir cual era la condición adecuada utilicé varias heurísticas, como por ejemplo, trabajar hacia delante, recurrir a teoría relacionada, razonar por analogía ,realizar gráficos, reinterpretar el problema en un lenguaje diferente, analizar ejemplos, verificar la respuesta en casos particulares.

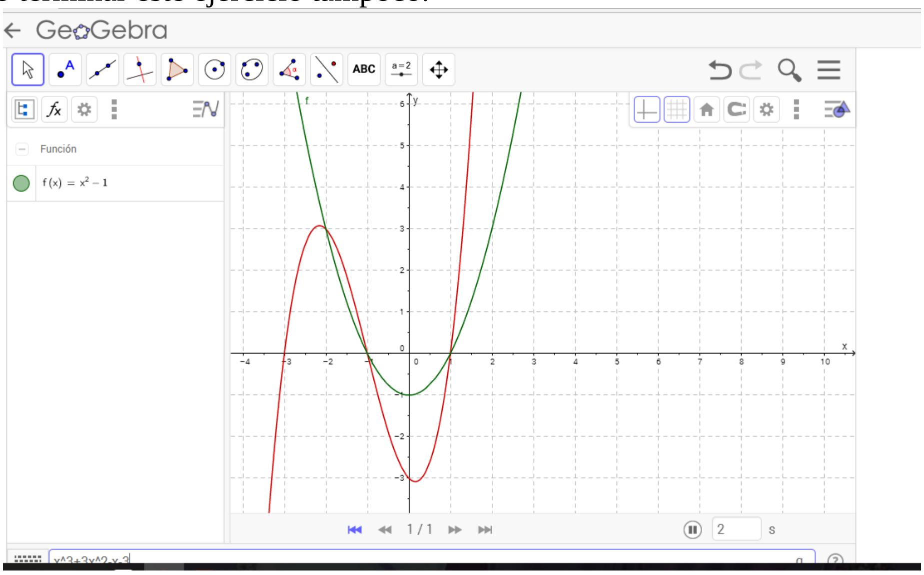
Consigna 1 no pude realizarla

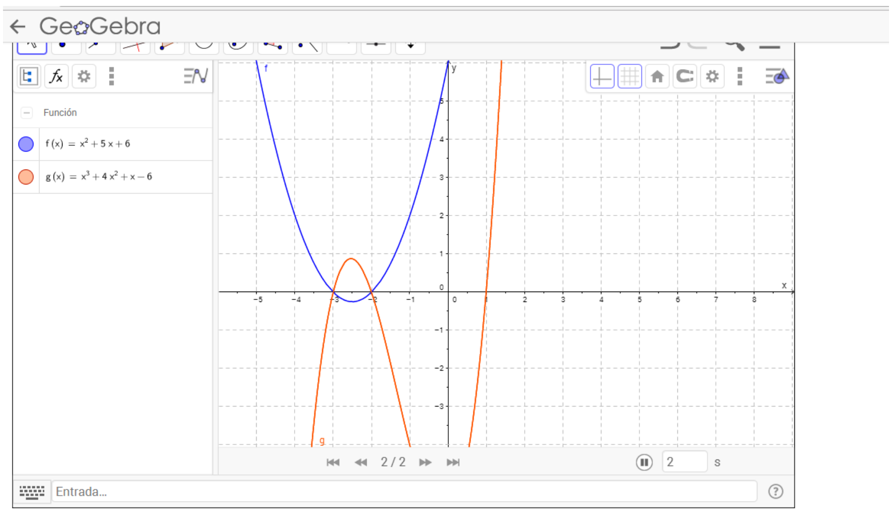
Consigna 2

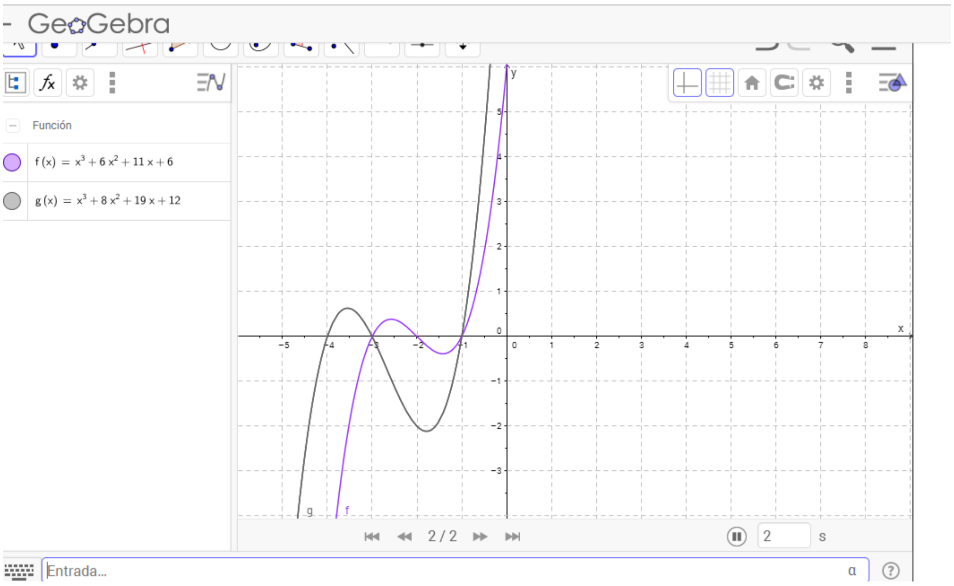
En un principio, para resolver esta consigna, realice varios gráficos en GeoGebra que cumpla con lo pedido. Dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b.

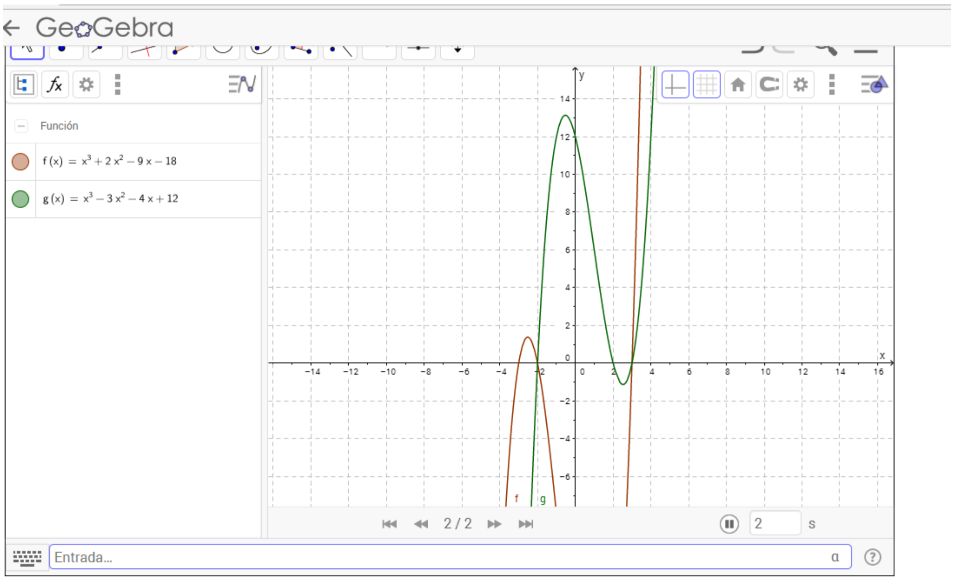
a) No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b.

No logro terminar este ejercicio tampoco.









Resolución de A12

Resolución de consigna 1:

a) La formulación del enunciado corresponde a una propiedad ya que bajo las condiciones ($\forall\ \boldsymbol{x_1, x_2} \in (\boldsymbol{a, b}), \boldsymbol{x_1 < x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_1, x_2})$) se verifica la propiedad de que $\boldsymbol{f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x - x_1) + f(x_1)}$**.** Lo que me lleva a suponer que es una propiedad es la frase "verifique la siguiente condición:".

b) La aclaración que le haría al alumno es que: cuando se habla de x1 y x2 son cualquier número que pertenezcan al dominio de f en el intervalo (a,b), que estos x1 y x2 forman otro intervalo más chico en donde se encuentra x.

c) Sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural, considero que ambos son importantes en una clase de matemática, pero considero que cuando los alumnos están teniendo sus primeras aproximaciones a lo que es el lenguaje simbólico, en las clases debe predominar lo que es el lenguaje natural y a medida que uno avanza en la enseñanza debe ir usando cada vez más el lenguaje simbólico.

2)Consigna

Se tienen f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b. Responder las siguientes preguntas y explicar las respuestas.

a) **¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?**
Si f y g coincidieran en todos los puntos del intervalo (a,b) entonces f y g serian iguales pero como en el enunciado dice que son distintas no puede pasar que coincidan en todos los puntos del intervalo.

b) **Si en un punto intermedio entre a y b la f es mayor que g, ¿hay alguna condición que deba cumplirse para que en todos los puntos entre a y b, la f siempre sea mayor que g? Si es así, explicitar la condición, enunciar la proposición que la incluya y probarla. La proposición que deben probar les tendría que quedar algo así: si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además *acá irá la condición que propongan*, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g). Si no hay tal condición, justificar por qué.**

Respecto a esta consigna no la pude demostrar pero a través de varios gráficos de funciones polinómicas vi que la condición para que en el intervalo (a,b) f sea siempre mayor que g, debe cumplirse que en ese intervalo f y g no tengan otro punto en común.

Resolución de A13

1) $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$:

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + f(x_1)$$

Que una función f verifique la condición anterior significa que se encuentra debajo de la recta secante a la gráfica que une los puntos (x_1, f(x_1)) y (x_2, f(x_2)) pertenecientes al intervalo (a, b), es decir que estaríamos hablando de una *función cóncava hacia arriba* o también conocida como *función convexa*.

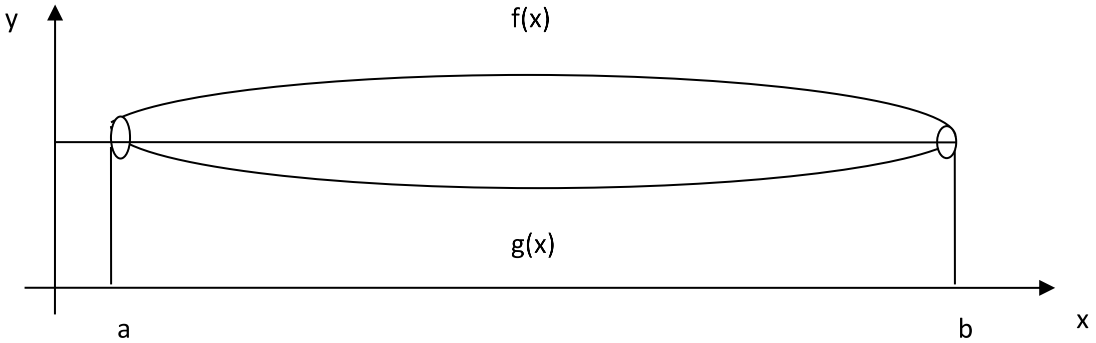
a) La formulación del enunciado de la consigna corresponde a la definición de *función convexa*. Lo que me permitió darme cuenta que el enunciado se trataba de una definición es la “introducción” que se hace en el enunciado, es decir que algo tiene que suceder tal que suceda la otra parte del enunciado.

b) Si pensara en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, sí haría algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usaría para explicarlo. Dicha aclaración sería sobre el uso de notaciones que se hacen, ya que aparecen “símbolos”, los cuales los alumnos tal vez no conozcan/recuerden el significado o no los hayan aprendido previamente, como por ejemplo, el símbolo que representa a la palabra *pertenece* o el símbolo que representa a *para todo*.

c) Con respecto al uso del lenguaje simbólico y natural que suele darse en Matemática y si yo estuviese a cargo de una clase, usaría de forma predominante el lenguaje simbólico para que mis alumnos se acostumbren a escribir de forma adecuada en la materia y no con palabras como sería si usáramos el lenguaje natural. Esto no quiere decir que dejaría de usar el lenguaje natural. Al contrario, en el lenguaje natural hay una intención de comunicación que se da entre partes y además, hay mensajes a transmitir y recibir, ya sea del docente al alumno o viceversa. En cambio, el lenguaje simbólico incluye una serie de significantes con sus significados para cada contexto comunicacional en el que sean utilizados, es decir que hay palabras que están representadas por "símbolos" que algunas personas conocemos (principalmente las que estudiamos "la rama de las ciencias exactas") o que comenzamos a conocer cuando nos introducimos en "el mundo matemático". Dichos símbolos se utilizan para la formulación de enunciados en definiciones, proposiciones, teoremas, lemas, propiedades, entre otros.

2) f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b.
Resolución de la consigna:

a) Es posible que f y g, funciones polinómicas, coincidan en todos los valores entre a y b. Esto quiere decir que una de las funciones sería cóncava hacia abajo y la otra sería cóncava hacia arriba. De este modo, ambas funciones tomarían los mismos valores, que se encuentran ubicados entre x = a y x = b.



b) Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además f es cóncava hacia abajo y g es cóncava hacia arriba entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.

Definición de función convexa:
Para cualesquiera a, b ∈ I con a < b, la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) tiene la ecuación

$$y = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a)$$

Por lo tanto, f será convexa cuando, para cualesquiera a, b ∈ I con a < b se tenga que

$$f(z) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(z - a)\forall z \in [a, b]$$

O equivalentemente,

$$f(z) \leq \frac{b - z}{b - a}f(a) + \frac{z - a}{b - a}f(b)\ \forall z \in [a, b]$$

Demostración:

Dado t ∈ [0, 1] podemos tomar $z = a + t(b - a) \in [a, b]$ y esto nos dice que

$$f\big((1 - t)a + tb\big) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)\ \forall t \in [0,1]$$

Pero recíprocamente, dado z ∈ [a, b] podemos tomar

$$t = \frac{z - a}{b - a}, \quad que\ verifica \quad t \in [0,1] \quad y \quad 1 - t = \frac{b - z}{b - a}$$

con lo que $(1-b)a+tb=z\ \forall\ t\ \in[0,1]$
Finalmente, dado I un intervalo no trivial, tenemos que

$$f\big((1-t)x+ty\big)\leq(1-t)f(x)+tf(y)\ \ \forall x,y\in I,\ \ \forall t\in[0,1]$$

Explicación a un compañero que no entendió mi escrito:

Teniendo f y g dos funciones polinómicas distintas que toman los mismos valores en x = a y en x = b, la consigna pregunta, en el ítem a), si es posible que dichas funciones coincidan en todos los valores entre a y b. Para que eso suceda f y g deberían ser la misma función (y eso no puede suceder ya que en el enunciado dice que ambas son funciones distintas) o, la otra opción, sería que una de ellas sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo (que esta sería la respuesta correcta). Es decir que para que se cumpla que f sea mayor que g, tal como lo pide el ítem b), la función f debe ser cóncava hacia abajo y la función g debe ser cóncava hacia arriba tal que queden representadas como se muestra en el gráfico hecho anteriormente, es decir que f debe estar “por encima” de g y es así que se diferencian, por su tipo de concavidad.

Reflexión sobre el proceso que realicé para lograr la demostración pedida:
Para realizar la demostración utilicé algunas heurísticas, como por ejemplo la que llamamos *trabajar empezando por el final* ya que realicé el “paso a paso” para llegar a lo que quería probar. También *realicé un dibujo* que me sirvió como “guía” para luego poder realizar la demostración. Además, a partir de lo enunciado en la proposición, me pareció adecuado realizar la demostración de una función convexa ya a partir de su enunciado, pude darme cuenta por qué f y g tomaban los mismos valores en un determinado intervalo a, b siendo ambas funciones polinómicas diferentes.

Resolución de A14

Resolución de la consigna 1

Definimos $g(x):=\frac{f(x_{2})-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ donde por enunciado sabemos que $\forall\ x_1,x_2\ \in(a,b),x_1<x_2,\forall\ x\in(x_1,x_2)$.

Donde reconocemos que g(x) es una función lineal por que la expresión $\frac{f(x_{2})-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ tiene el formato m.x+b donde $m=\frac{f(x_{2})-f(x_1)}{x_2-x_1}$ y $b=f(x_1)$.

Luego llamaremos a g(x) recta secante a f(x). Esto lo vemos en el hecho de que la función g(x) es una recta que se armó con los puntos $x_1\ y\ x_2$ usando f(x).

Entonces lo que vamos a tener es una función f que va a ser intersecada para una función g(x).

Notamos que para que esto ocurra sin ningún problema, tenemos que pedir que f(x) sea una función continua. Si f(x) no es continua entonces podría ocurrir que cuando evaluamos $x_1\ y\ x_2$ para armar la ecuación de la recta, esta no interseque a f(x). Por lo tanto, pedimos que f(x) sea una función continua.

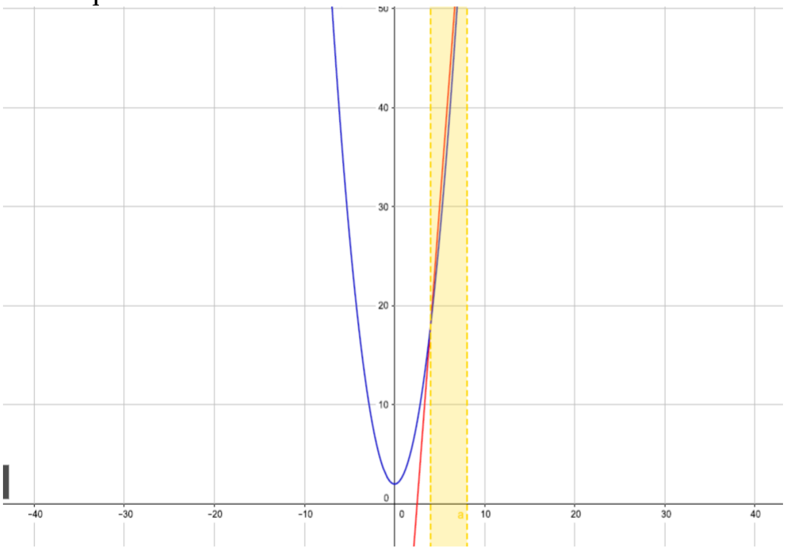
Entonces, decir que $f(x)<\frac{f(x_{2})-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ (es decir f(x)<g(x)) significa que f(x) es menor que la recta secante (a ella) g(x) en un intervalo (a,b).

Usando GeoGebra observamos que gr(f(x))>1 porque si f y g son ambas funciones lineales vamos a obtener la misma función.

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 1: f(x) es una Función Cuadrática

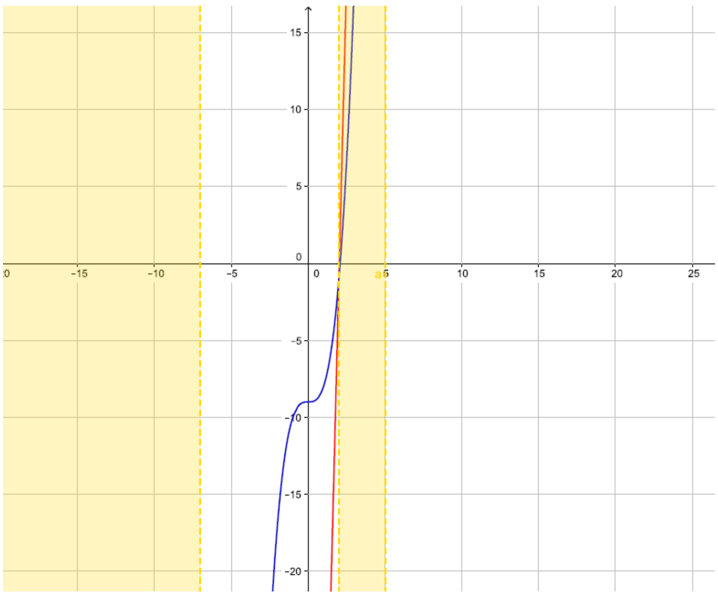
Si $f(x) = x^2 + 2$ entonces la expresión de la recta secante es $g(x) = 12 - 30$. Gráficamente nos queda:



Vemos que efectivamente en el intervalo (4,8) la f<g.

Ejemplo 2: f(x) es una Función Cúbica

Si $f(x) = x^3 - 9$ entonces la expresión de la recta secante es $g(x) = 39x - 79$. Gráficamente nos queda:



En este caso vemos que f<g en los intervalos $(-\infty, -7) y$ (2,5).

Observamos que en varios ejemplos que hemos hecho que para funciones polinómicas de grados pares hay un solo intervalo en el que f>g. En cambio, cuando el grado de la función polinómica es impar tenemos dos intervalos.

a) La formulación del enunciado de la consigna corresponde a una propiedad porque lo que tenemos es una serie de premisas que hacen valer una condición.

Premisas: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$

Condición que se cumple con esas premisas: $f(x) < \frac{f(x_{2)} - f(x_1)}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + f(x_1)$

Creemos que no es una definición por que no se está definiendo ningún concepto matemático y que tampoco es una demostración por que no se demuestra nada ni se pretende hacerlo.

A su vez, creemos que esta "propiedad" debería incluir como bien dijimos en la resolución de la consigna, información sobre si f(x) es una función continua o especificar cuál es el dominio de la función dado que podría pasar que al elegir $x_{1\, y}\ x_2$, este punto, no estén en el dominio de f(x).

b) Si pensará en explicar lo presentado en la consigna a un alumno haría la siguiente aclaración con respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma:

Luego de haber leído la consigna a la clase realizaría la siguiente aclaración: tenemos un punto (x_1, x_2*) en un intervalo (a, b) donde la primera coordenada del punto es menor que la segunda coordenada.*

c) <u>Reflexión sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural</u>

El lenguaje simbólico tiene una mayor rigurosidad con respecto al natural por que exige para el alumno un mayor nivel de abstracción. No es lo mismo decirle a los alumnos que tenemos un punto en un intervalo (lenguaje natural) que decirle tenemos que $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$ (lenguaje simbólico). El lenguaje natural es más comprensible para los alumnos.

Para enseñar matemática no es posible prescindir de alguno de los dos lenguajes. Dependiendo del tema será más apropiado usar algún lenguaje en particular. Lo mejor es complementar ambos lenguajes de forma tal que los alumnos logren la mayor comprensión del tema.

En algunas clases, por ejemplo, conviene explicar el tema usando primero el lenguaje natural y luego profundizarlo con el lenguaje simbólico. Usaríamos esta estrategia para explicar por ejemplo función lineal, probabilidad y estadística, potenciación, etc.

En otras en cambio, "quizás" es conveniente utilizar primero el lenguaje simbólico y luego hacer acercamientos utilizando un lenguaje natural. Usaríamos esta estrategia para explicar por ejemplo sistema de ecuaciones, Teorema de Pitágoras, área y perímetro, etc.

<u>Resolución de la consigna 2</u>

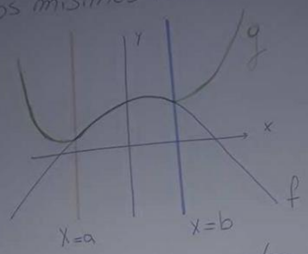
a) <u>Intento en borrador</u>

IDEA 1

f y g dos func. Polinomicas distintas

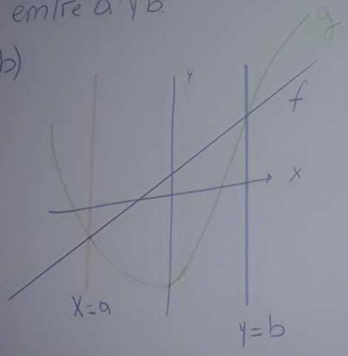
Toman los mismos valores en $X=a$ y $X=b$

a)



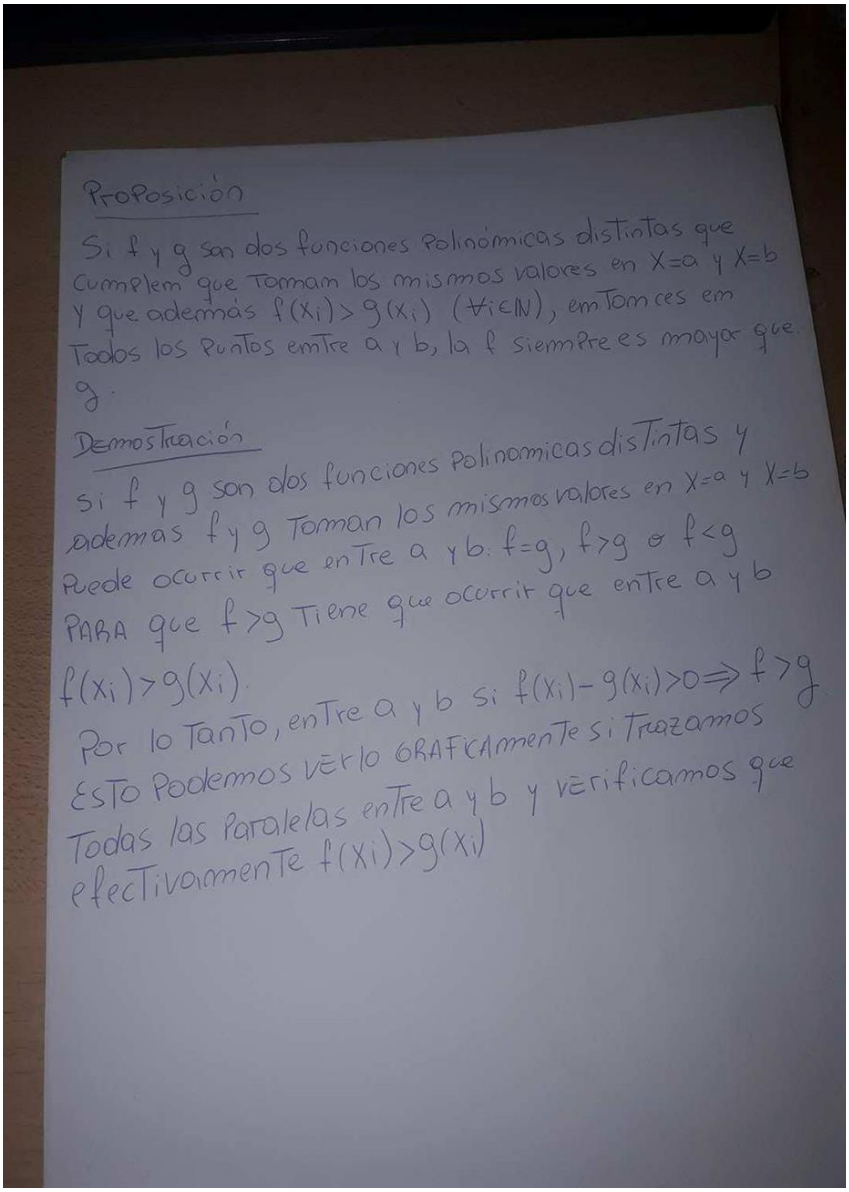
Es Posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b.

b)



- HAY UNA CONDICIÓN QUE DEBE CUMPLIRSE PARA QUE $f>g$ entre a y b.
- CONDICIÓN: $f>g$ entre a y b si PARA TODO $X_i \in (a,b)$ SE VERIFICA QUE $f(X_i)>g(X_i)$ en Todo el intervalo (a,b).

1



Proposición

Si f y g son dos funciones Polinómicas distintas que cumplem que Tomam los mismos valores en $X=a$ y $X=b$ y que además $f(x_i)>g(x_i)$ $(\forall i \in \mathbb{N})$, emTomces em Todos los PunTos emTre a y b, la f siempre es mayor que g.

DemosTración

si f y g son dos funciones Polinomicas disTintas y ademas f y g Toman los mismos valores en $X=a$ y $X=b$ Puede ocurrir que enTre a y b: $f=g$, $f>g$ o $f<g$

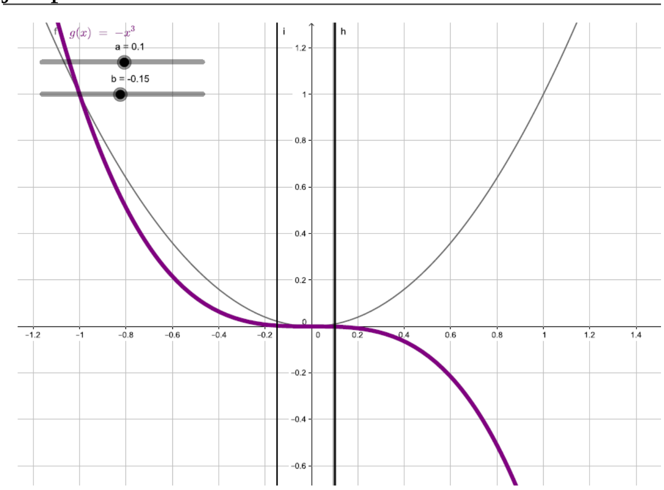
PARA que $f>g$ Tiene que ocurrir que entre a y b $f(x_i)>g(x_i)$.

Por lo TanTo, enTre a y b si $f(x_i)-g(x_i)>0 \Rightarrow f>g$

ESTO Podemos verlo GRAFICAmenTe si Trazamos Todas las Paralelas enTre a y b y verificamos que efectivamenTe $f(xi)>g(xi)$

b) ¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?

Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. Veamos un ejemplo



Estas funciones son iguales en el intervalo [-0,015; 0,015]

Proposición

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b y que además f(xi)<g(xi) $\forall\, xi \in \mathbb{N}$, entonces en todos los puntos entre a y b, f siempre es mayor que g.

Demostración

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas y además f y g toman los mismos valores en x=a y x=b.

Si trazamos rectas paralelas entre a y b y en cada una se verifica que f(xi)-g(xi)>0 entonces f>g entre a y b.

c) Explicación al compañero-transcripción

Esto lo veremos gráficamente de la siguiente manera:

- Primer paso: dibujar el plano cartesiano y trazar dos rectas x=a y x=b.
- Segundo paso: graficar f y g.
- Tercer paso: dibujar rectas paralelas entre a y b
- Cuarto paso: chequear que para cada recta f(xi)>g(xi)
- Quinto paso: concluir que f>g

d) Yo creo que la demostración es matemáticamente correcta. Si bien, no es una demostración gráfica, dejo explicitado que lo puedo identificar gráficamente.

Si tenemos dos funciones en un intervalo entonces trazamos una recta vertical y vemos así cual es la función mayor. Este razonamiento no es matemáticamente incorrecto.

Para lograr esta demostración realice en GeoGebra distintas funciones polinómicas y pensé de qué forma se podía mostrar que f>g en el intervalo (a, b), la mejor opción que encontré fue trazar rectas verticales y comprobar que f(xi)-g(xi)>0 con lo que efectivamente f>g.

Las heurísticas que use fueron:

-Utilizar un método de expresión o representación adecuado: en este caso gráfico.

-Recurrir a dibujos, esquemas o gráficos.

-Considerar casos particulares.

-Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar.

-Introducir un elemento auxiliar: rectas verticales.

Resolución de A15

Consigna 1:

Explicar con palabras y, si te resulta útil podes ejemplificar con un gráfico, que significa que una función f verifique la siguiente condición: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$

$f(\mathrm{x}) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + f(x_1)$

Resolución:

Si una función verifica que es menor que la recta secante de la misma en $x_1 \, y \, x_2$, la función es convexa dado que la recta secante en el intervalo $x_1, \; x_2$ está por encima de la función que forma una curva convexa.

Por ejemplo, si tomamos la función $f(x) = 2x^2$y tomamos los puntos $x_1 = -\frac{1}{2} \; y \; x_2 = 1$. Observamos en el grafico de la función f y la recta secante x+1, en el intervalo (-1/2; 1) es mayor que la función y que la función resulta ser una curva convexa en el intervalo. Si proponemos otra función que cumpla la condición también forma una curva convexa en el intervalo $x_1 \; y \; x_2$.

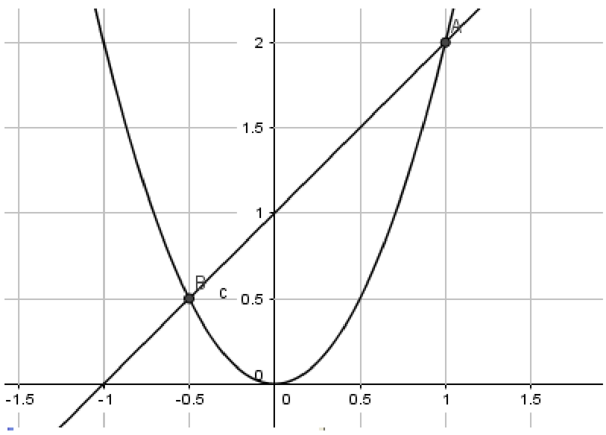
a) La consigna corresponde a una demostración de convexidad, pues la condición de que una función sea menor que una recta secante en los puntos $x_1, \; x_2$ conlleva a que la función sea convexa.

Además con esta consigna es posible llevar a demostrar convexidad y también concavidad, que es el caso contrario a esta condición, es decir que f será mayor que la recta secante en el intervalo $x_1 \,, x_2$. Donde estas condiciones presentan una función convexa o cóncava.

Una función cóncava es cuando dado dos puntos cualesquiera el segmento que los une queda por debajo de la curva. Y una función convexa es cuando queda por encima de la curva.

b) Al explicar la consigna a un estudiante aclararía, en lenguaje natural, que f(x) es una función menor que una recta secante de la forma $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - \; x_1} \; (x - x_1) + \; f(x_1)$ donde $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - \; x_1}$ es la pendiente de la recta secante, $f(x_2)$ es la función evaluada en x_2 y $f(x_1)$ es al función evaluada en x_1, con x_1 y x_2 puntos cualesquiera de la función

c) Pienso que el leguaje simbólico y el lenguaje natural son importantes para la matemática ya que el lenguaje simbólico es propio de la matemática, tiene la ventaja de que prescinde del empleo de expresiones del lenguaje coloquial y permite su comprensión directa independientemente del idioma de la persona que lo emplea pero es imprescindible que sea enseñado y aprendido, para ello es necesario el uso del lenguaje natural.



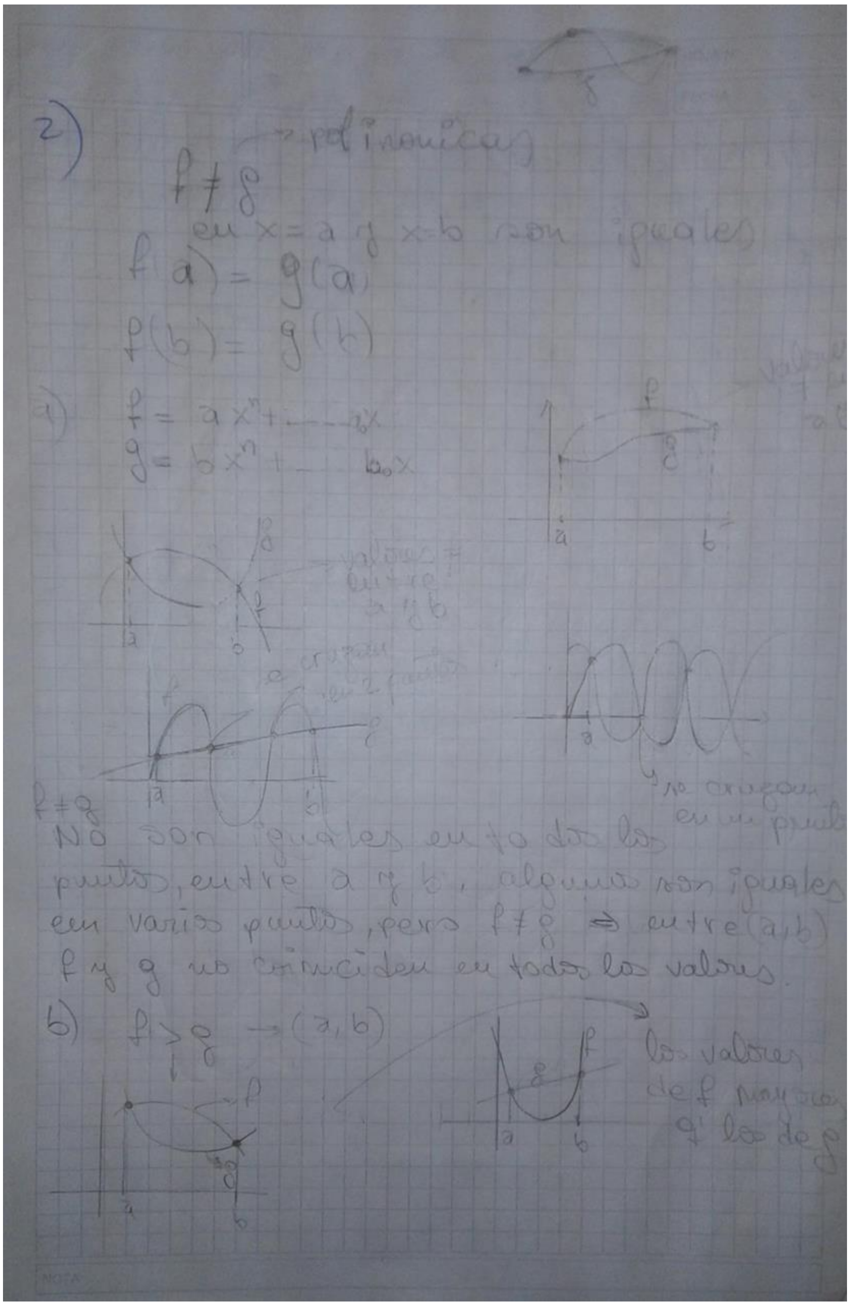
Consigna 2:

Se tienen f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Responder las siguientes preguntas y explicar las respuestas.

a) ¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?

b) Si en un punto intermedio entre a y b la f es mayor que g, ¿hay alguna condición que deba cumplirse para que en todos los puntos entre a y b, la f siempre sea mayor que g? Si es así, explicitar la condición, enunciar la proposición que la incluya y probarla. La proposición que deben probar les tendría que quedar algo así: si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$ y que además * acá irá la condición que propongan*, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. Si no hay tal condición, justificar por qué.

a) Borrador:



b) Consigna resuelta:

a) No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b, ya que para que coincidan f y g deben ser iguales en ese intervalo pero como las funciones son distintas salvo en a y en b, aunque puede suceder que coincidan en más de un punto no sucede que coincidan en todos los valores en dicho intervalo.

b) si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$ y que además cumple que $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) > \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + g(x_0)$ en el puntox_0 y que las funciones f y g son continuas en el intervalo a, b, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.

c) Explicación a un compañero:

Si tenemos dos funciones polinómicas f y g distintas que cumple que toman los mismos valores en a y en b es decir que f(a)=g(a) y que f(b)=g(b) y que además también cumple que la recta tangente de f en el punto x_0 es mayor que la recta tangente de g en el punto x_0 , y que además f y g deben ser continuas en el intervalo a, b. Si pasa esto la función f es mayor que la función de g es decir que todos los valores de f en el intervalo son mayores que los valores que toma g en dicho intervalo.

d) Reflexión:

Para realizar la consigna probé con distintas formas, primero platee que los valores que debe tomar f deben ser mayores a los valores que toma g, pero con eso no pude llegar a deducir nada como condición, luego realice gráficos para ver si podía concluir alguna condición y de allí se me ocurrió que trazando las rectas tangentes a f y a g, el punto por donde pasa la recta tangente de f debería ser mayor al mismo punto por donde trace la tangente a g. No estoy segura de que lo utilizado sea matemáticamente correcto para ello debería investigar sobre si lo es o no. En la realización de la misma utilice algunas heurísticas como trabajar hacia adelante, realizar un grafico, analizar ejemplos,

Resolución de A16

<u>Respuesta consigna 1:</u>

a) La formulación del enunciado de la consigna, corresponde a una definición por que frente a esta condición se define: la función es derivable en el intervalo (x_1, x_2) es cóncava (estrictamente cóncava)en ese intervalo si dado que x ∈ (x_1 , x_2) si : $\boldsymbol{f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_{2-}x_1} . (x - x1) + f(x1)}$.

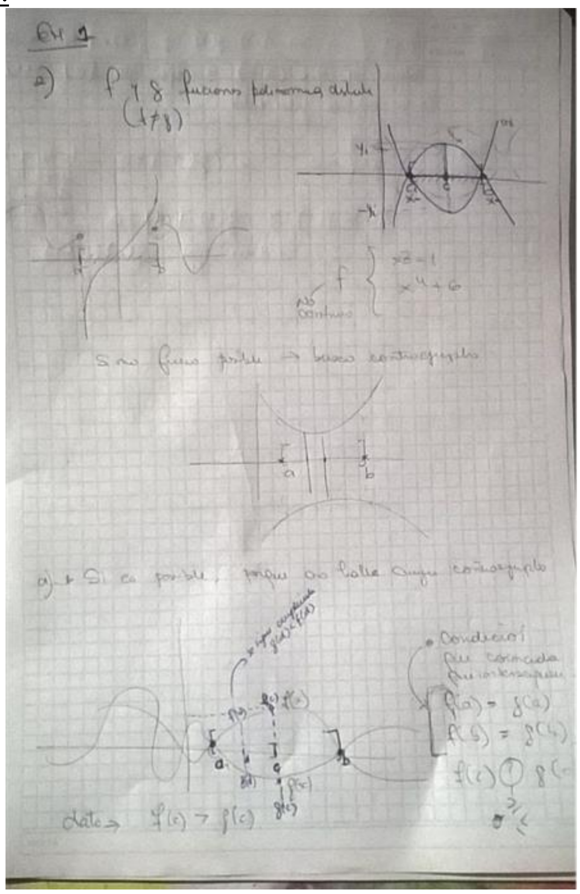
   Es decir, que si la función se encuentra por debajo de su recta tangente es una función cóncava.

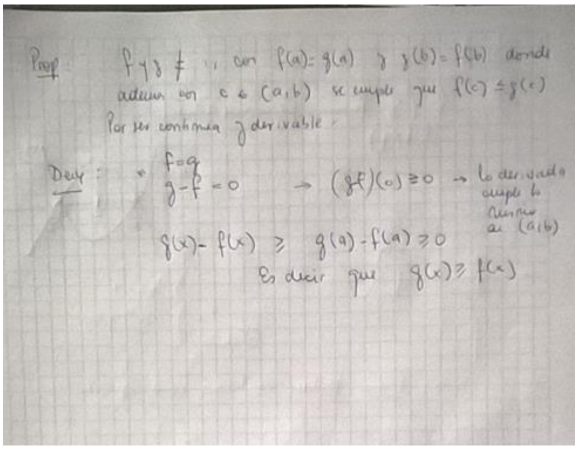
b) En caso de explicar lo presentado en la consigna a un alumno, haría aclaraciones respecto al uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural. Ya que en esta consigna, a simple vista no se podría detectar que estamos hablando de una recta tangente si no se formalizo las definiciones de pendiente y ordenada al origen. Aclararía que cuando estoy mencionando $\boldsymbol{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_{2-}x_1}}$ es la definición de “m” (pendiente) y que esta expresión es lo mismo que definir: y=mx + b. Con la diferencia que en la consigna se expresa con las definiciones formales del formato de la recta tangente de una función. Y si observamos con claridad, deberíamos ejemplificar con un gráfico que nos quiere decir que una función es más chica que la recta tangente de dicha función para concluir lo que expresa la consigna en lenguaje simbólico en relación con el lenguaje natural.

c) Reflexiones:

   Respecto al uso lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática, creo que el simbólico es más riguroso que el natural porque si estoy trabajando con alumnos de secundaria no están acostumbrados a trabajar las expresiones tan formalizadas con sus respectivas definiciones y podría llegar a confundirlos, o simplemente no se darían cuenta de que tema estamos tratando cuando por ahí ya es algo que conocen. Por ejemplo, en este caso, si los alumnos ya trabajaron con rectas tangentes con el formato y-yo=m(x-xo) y no con el formato que da la consigna por ahí no se den cuenta que es lo mismo con lo que venían trabajando. Solo porque no formalizaron las definiciones de pendiente y ordenada al origen. En cambio, si estoy en un ámbito superior no sería tan riguroso trabajar con el uso del lenguaje simbólico. Como mencione antes, usaría un formato u otro dependiendo del nivel en que este trabajando. Aunque se podría ver que el uso del lenguaje simbólico, en este caso, me brinda más información sobre la función que el uso natural, me da datos sobre la recta tangente sin tener que recurrir a un manejo algebraico. Es decir, a simple vista puedo ver quién es el punto (x_1, x_2), puedo reemplazar valores y obtener la pendiente, al ver la desigualdad entre dos funciones puedo deducir si una es mayor que la otra. Por lo cual, creo que el uso del lenguaje simbólico es de gran importancia en matemática.

<u>Respuesta consigna 2:</u>




Prop: f y g ≠ , con f(a)=g(a) y g(b)=f(b) donde además con c ∈ (a,b) se cumple que f(c) ≤ g(c)
Por ser continua y derivable.
Dem: f=g
g−f=0 → (g−f)(c) ≥ 0 → la derivada cumple lo mismo en (a,b)
g(x)−f(x) ≥ g(a)−f(a) ≥ 0
Es decir que g(x) ≥ f(x)

b) Resolución de la consigna:

a) Es posible que las funciones f y g coincidan en todos los valores entre x=a y x=b.

b) **Proposición:**

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas, continuas y derivables en (a,b) donde se cumple que toman los mismos valores en x = a y x = b, es decir f(a)=g(a) y f (b)=g (b) y además, al tomar un punto intermedio x=c ∈ (a,b) tal que f (c) ≤ g (c) y f′ ≤ g′ en (a, b) entonces f ≤ g en (a, b) entonces en todos los puntos entre dicho intervalo, la f siempre es mayor que g.

Demostración:

A partir de tomar que ciertos puntos coinciden, se plantea por el absurdo, es decir que g=f. Entonces se considera la función g−f. De las hipótesis sigue que (g − f) (0) ≥ 0 y que (g − f) ′ = g′ − f′ ≥ 0 en (a, b). Luego (g − f) es creciente en ese intervalo, y por lo tanto también en (a, b). En consecuencia, para todo x, (g − f) (x) ≥ (g − f) (c) ≥ 0. Esto es, f (x) ≤ g (x) para x ∈ (a, b).

c) Explicación a un compañero:

Empiezo contándote como arme la proposición, después de ver un par de ejemplos observe que si era un punto intermedio entre (a,b) selecciono un punto cualesquiera que pertenezca a ese intervalo que se compone por los extremos que coinciden las funciones f y g (x=a y x=b). Ese punto intermedio lo identifico con el nombre “c” y cuando lo evalúas en ambas funciones a una le corresponde un valor en el eje y y a otra le corresponde otro valor, de esos dos me define quien es la mayor y la menor. Es decir, que hago (c, f(c)) y(c, g (c)) y de ahí concluyo cual es la mayor por lo tanto esa sería mi otra condición para la proposición. Además tengo en cuenta que son continuas y derivables las dos funciones que luego sirven para la demostración. Al momento de la demostración, tengo que llegar a que f es mayor que g en cualquier punto del intervalo por lo tanto comencé con el absurdo es decir que f es igual a g en el intervalo (a,b) para luego mediante propiedades de funciones, concluyo que la diferencia de f - g ≥0 al evaluarla en c, se sigue cumpliendo por lo tanto me queda que f(c)≤g(c).

d) La reflexión que realice para llegar a la demostración propuesta, fue empezando a tomar ejemplos que me llevaron a generalizar lo plasmado y recordar un poco lo que se realizaba cuando se analizaba las integrales entre curvas para formar la idea propuesta. También me fue útil ver distintos gráficos. Además, para la demostración de esta proposición me fue útil encarar por el absurdo y así llegar a lo que quería a través de algunas propiedades de suma de funciones, manejo algebraico entre otros. Porque si empezaba por mi afirmación, no sabía cómo incluir las condiciones que había propuesto como hipótesis. En este caso, tuve en cuenta que eran funciones polinómicas continuas y derivables en el intervalo.

Resolución de A17

<u>Resolución consigna 1:</u>

Vamos a reordenar los términos

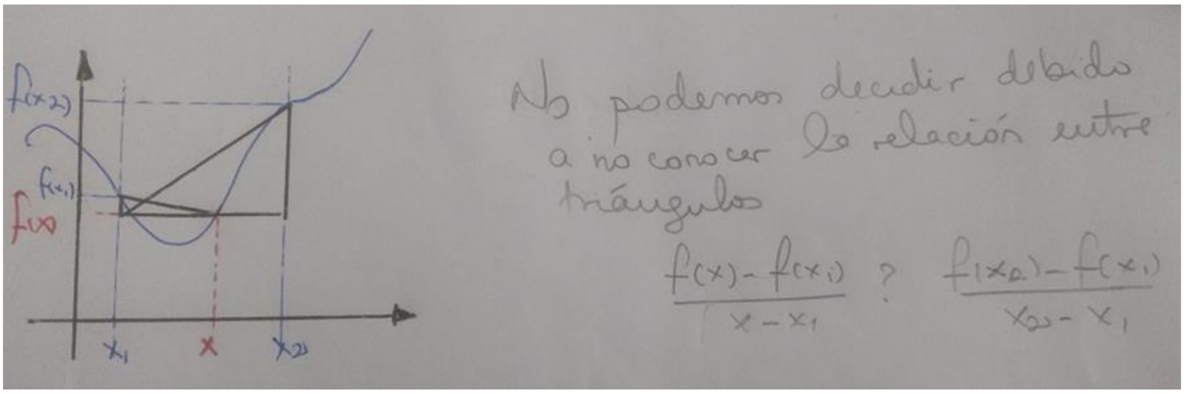
$$f(x) < \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1} \,.\, (x - x1) + f(x1)$$

$$f(x) - f(x1) < \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1} \,.\, (x - x1)$$

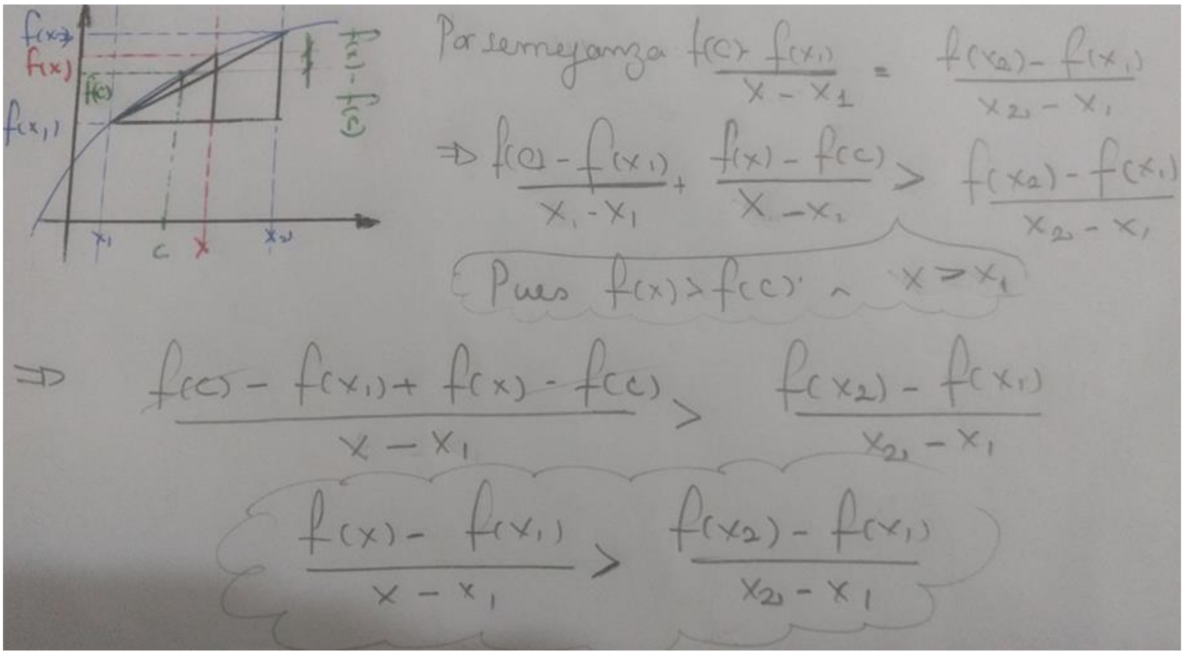
$$\boldsymbol{\frac{f(x) - f(x1)}{(x - x1)} < \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}} \qquad (x - x1) \neq 0$$

Ubiquemos esta relación según el tipo de grafico que tenemos

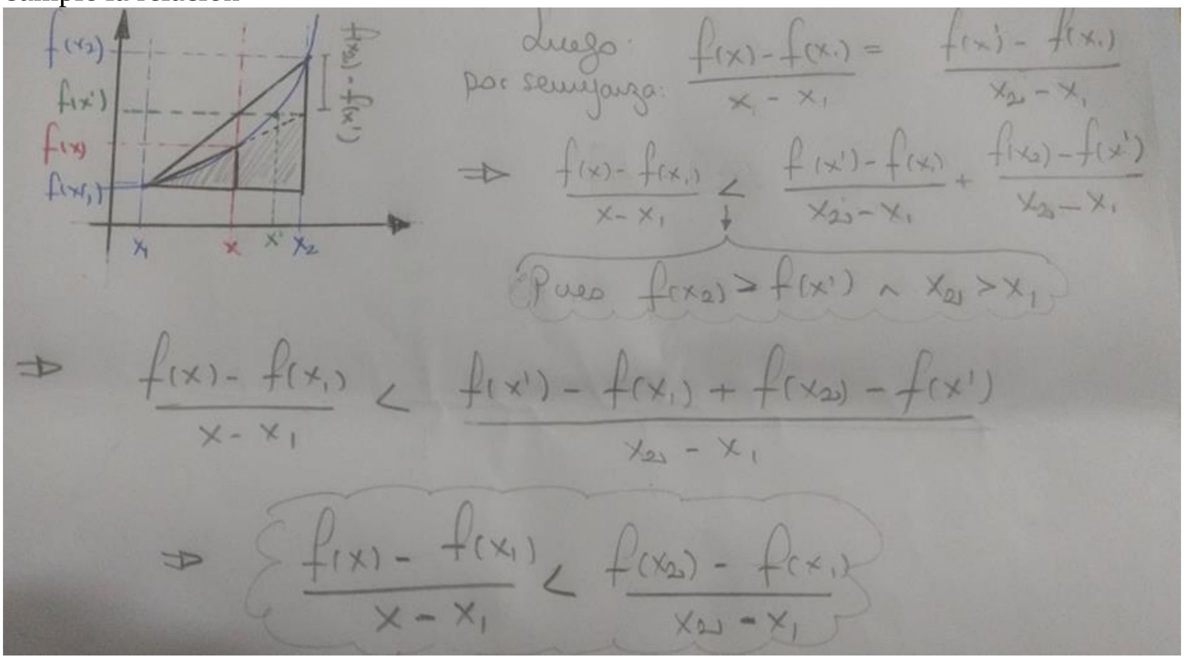
* Si dentro de nuestro intervalo $(\boldsymbol{x1},)$ $\boldsymbol{x1}<\boldsymbol{x}2$ la función no es estricto creciente o decreciente



* Si dentro de nuestro intervalo $(\boldsymbol{x1},)$ $\boldsymbol{x1}<\boldsymbol{x}2$ la función es estricto creciente y cóncava, no podemos establecer dicha relación



* Si dentro de nuestro intervalo ($\boldsymbol{x1}$,) $\boldsymbol{x1}<\boldsymbol{x}2$ la función es estricto creciente y convexa, cumple la relación



Analogamente podemos pensar cuando la función es decreciente

a) Sobre la formulación del enunciado de la consigna: ¿corresponde a una definición, a una propiedad, a una demostración o a otra cosa? Explicá tu respuesta, tratá de indicar qué del enunciado te permite responder esta segunda pregunta.

Corresponde a una propiedad de la curva una función. Dependiendo de la concavidad que tenga dentro de un intervalo cuando la función es estricatamente creciente o decrececiente, podemos establecer esta relacion, vale aclarar que no debe haber puntos de inflexion, asi tenemos una cancavidad (o convexidad) estricta.

b) Si pensaras en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, ¿harías algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usarías para explicarlo?
Si los alumnos ya han visto funciones y sus respectivos gráficos, quizas no sea necesario ningún tipo de aclaración, la mayor dificultad que pueden encontrar es tomar la inecuación tal como nos la dan, para una mejor visualizacion lo ideal sería un reordenamiento de los términos y establecer una relacion m{as simetrica por asi decirlo, usaría el lenguaje natural para que pensemos, por ejemplo, en proporciones de un triangulo. Si no manejan concavidad y convexidad, les plantearía la idea de como seria mi curva si es "feliz" o "triste".
c) Te pedimos que reflexiones sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática. Como guía (y sin la intención que respondas una por una, te proponemos algunas preguntas como para orientar tu reflexión): ¿tienen la misma rigurosidad?, ¿usarías alguno de manera predominante en clases que estén a tu cargo?, ¿es posible prescindir de alguno de ellos?, etc.
Pensado en ambos lenguajes debemos ver en que ámbito nos encontramos para hacer un uso mas eficaz de ambos, si estamos frente a pibes de la escuela, es probable un uso predominante del lenguaje natural, si bien no es riguroso, es más eficaz explicarle a personas que recien se están formando academicamente, es probable que enganchemos y hagamos entender de una manera mas coloquial los conceptos matemáticos mas relevantes que quisieramos que se lleven nuestros alumnos, la rigurosidad debe estar presente pero lo prescindiría después de hacer un cierre, e institucionalizar el saber.
Ahora si estamos en un ambito académico, el lenguaje simbólico sería el predominante, esto es por una cuestión de poder apelar a ciertas propiedades, teoremas y fórmulas que son necesarios para seguir avanzando en la materia, el lenguaje natural no descarto usarlo, pero a medida que profundizamos un tema, se vuelve casi imposible no apelar a lo ya visto y recordarlo en lenguaje simbólico.

Resolución de A18

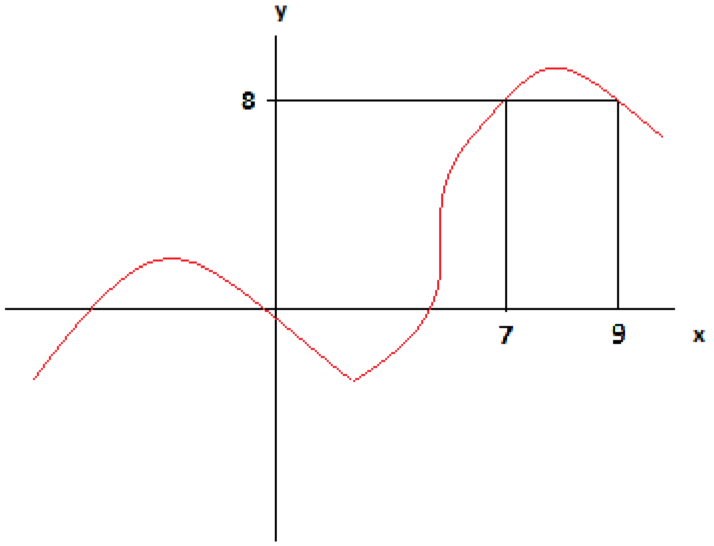
<u>Resolución consigna 1</u>
Al tratar de resolver esta función voy a intentar simplificar la expresión

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \,.\, (x - x_1) + f(x_1)$$

$$f(x) < \frac{f(x_2)\,(x - x_1) \;- f(x_1)\,(x - x_1) + f(x_1)\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) < \frac{f(x_2)\,(x - x_1) \;- f(x_1)\,(x - x_2)}{x_2 - x_1}$$

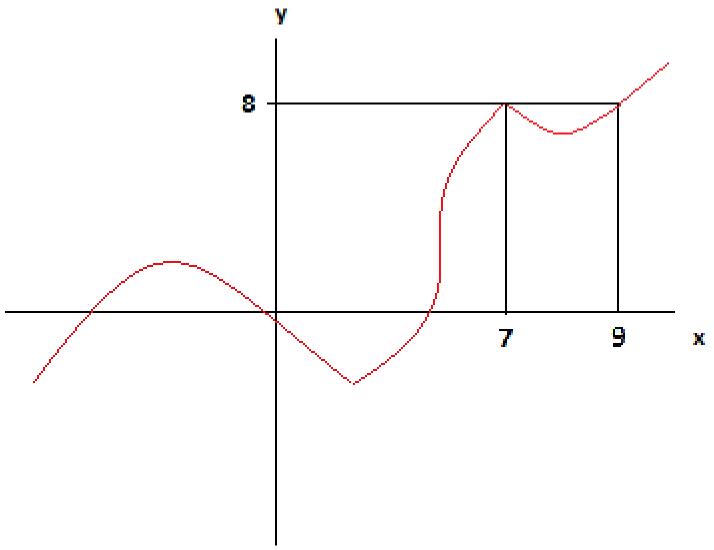
A continuación, voy a probar con ejemplos conocidos de función para ver cuales casos cumple la desigualdad. La primera que se me ocurre es una cuadrática con Yv=5, Xv=1 y raíces en X1=-2 y x2=4. Reemplazando dichos valores me queda que la función es menor que cero. Lo cual es absurdo porque en el intervalo de x (-1,4) la función es mayor que cero. No conforme con este resultado hago un segundo intento pero de una función cualquiera no definida pero cuyo grafico se me ocurre podría ser de la siguiente forma.



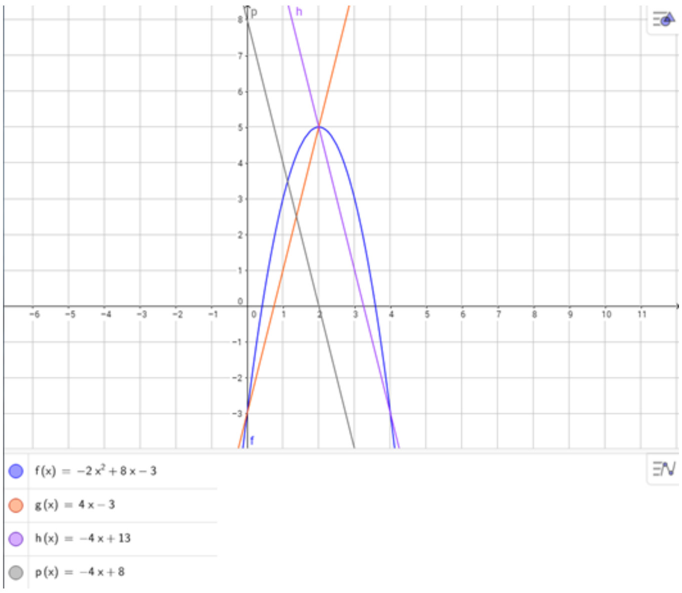
Si bien no sé cuál sería la función puedo saber que en F(7)=F(9)=8. Reemplazando en la función veo que me queda la siguiente desigualdad.

$$f(x) < \frac{8\ (x-7)\ -\ \ 8\ (x-9)\ }{9\ -7} = 8$$

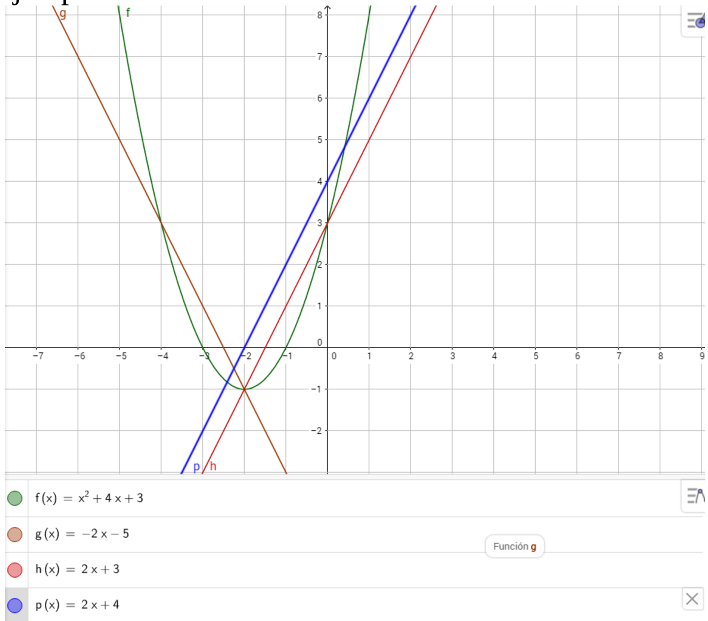
Esto seria cierto si la curva en ese intervalo fuese esta otra.



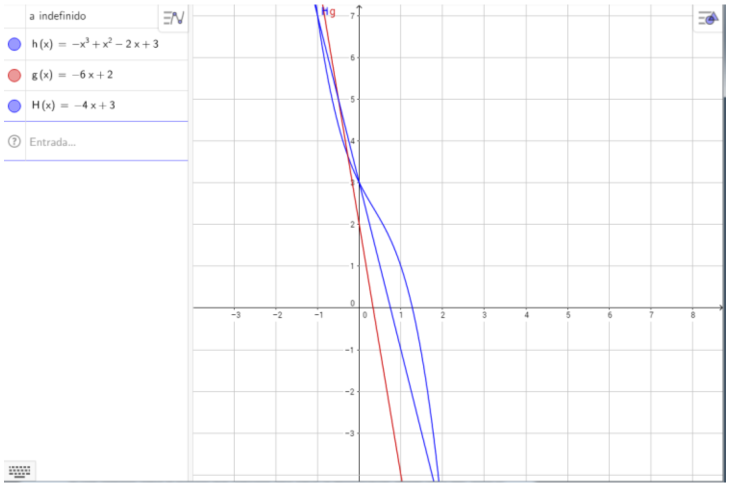
Entonces se me ocurrió utilizar el Geogebra para analizar casos específicos y obtuve los siguientes resultados



Donde f(x) es la función cuadrática, g(x) el resultado de la derecha de la desigualdad para x1=0 y x2=2, h(x) el resultado de la derecha de la desigualdad para x1=2 y x2=4, y p(x) la derivada de la función. Vemos que para dicho caso no se cumple la desigualdad incluso si eligiera X1=r1 y X2=r2 (raíces de la función) la desigualdad me queda f(x) < 0.
Luego hice otro ejemplo donde la función cuadrática es cóncava hacia arriba:



En este caso vemos que la desigualdad se cumple pues f(x) <g(x) en el intervalo (-4,-2), f(x) < h(x) en el intervalo (-2,0). Incluso si utilizara x1=-3 y x2=-1 la desigualdad me queda f(x) < 0 lo cual es cierto en el intervalo (x1,x2). ¿Pero cuál es la diferencia? Observando las derivadas de veo que la pendiente de la segunda es positiva mientras que la de la primera es negativa. Entonces vemos que si bien es una propiedad, solo se cumple para algunas funciones. Voy a tratar de ir un poco más lejos y voy a analizar que sucede para la siguiente y voy a mostrar los siguientes dos ejemplos



En este caso h(x) es lo que resulta del lado izquierdo de la desigualdad al elegir x1=0 y x2=1. Vemos que no se cumple la desigualdad. Por estos casos puedo llegar a concluir que la desigualdad se va a cumplir o no dependiendo de la concavidad de la función cuando sea cóncava hacia afuera f(x) < a la expresión dada, mientras que f(x) será > que la otra expresión cuando sea cóncava hacia adentro. Por otro lado dicha expresión será igual a la función cuando esta no tenga curvatura es decir sea una recta.

b) Sería bueno hacer una lectura en lengua natural del enunciado, para que sea más "familiar" para ellos y se entienda bien que es lo que se pide. Igual esto dependerá del nivel en el que se encuentren en cuanto al uso del algebra y estudio de funciones.

c) Me parece que el uso del lenguaje simbólico es una importante herramienta para la comprensión y validación de problemas matemáticos. Es importante que los alumnos puedan entender un enunciado dado en lenguaje algebraico o transformar el lenguaje natural a simbólico. Sin embargo, esto debe ser gradual, es decir, introduciendo conceptos, definiciones y luego dárselos en forma conjunta introduciendo poco a poco nuevos términos.

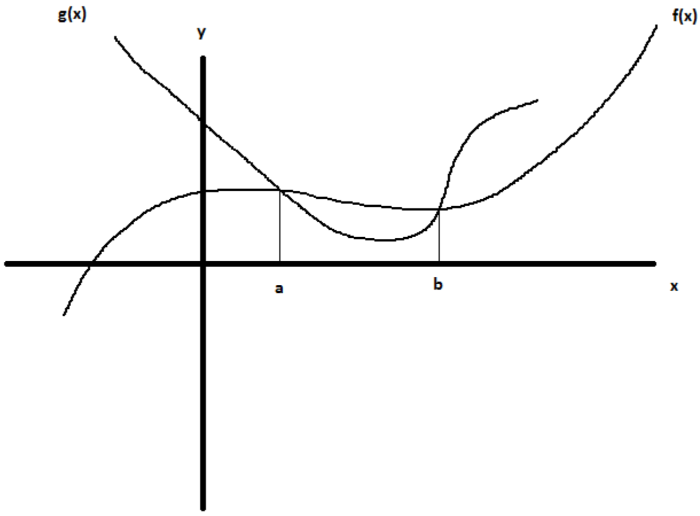
<u>Resolución consigna 2:</u>

1. Es posible que dos funciones distintas tomen valores iguales en dos extremos de un intervalo (a,b) y dentro de él también coincidan todos sus valores. Por ejemplo podemos ejemplificar esto con una función cualquiera f(x) y luego otra g(x) función partida determinada por f(x) en un intervalo cerrado [a,b] y h(x) en los demás puntos. Dicha función tomaría los mismos valores en todo el cerrado [a,b].
2. Dada una función f(x) y g(x) definida en un intervalo (a,b), en el cual existe un punto en el cual f(x) >g(x) es condición para que siempre f >g que la intersección en ese intervalo de ambas funciones sea cero. Esto es necesario ya que de haber intersección podrían cruzarse y g(x) > f(x) y de no ser así, f(x)=g(x) en ese punto de todas formas por lo tanto tampoco f(x) > g(x).

   Enunciado

   Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x1=a y x2=b y además se sabe que f >g en un punto del intervalo (a,b)y son continuas, entonces f >g en todos los puntos de dicho intervalo si y solo si no existe intersección de las funciones en dicho intervalo.

3. Borrador



Si tengo dos funciones continuas que tienen los mismos valores en dos puntos a y b, y sabemos que en un punto del intervalo (a,b) f es mayor que g entonces para que todos los valores de f en ese intervalo sean mayor que g no tienen que intersecarse porque podrían pasar dos cosas:

a) Que se crucen entonces habría puntos donde g es mayor que f porque f paso “abajo” y g quedo “arriba”.
b) También podría pasar que no se crucen, sino que solamente se toquen y luego f sea nuevamente mayor a g pero así habría puntos donde f=g y no queremos esto.

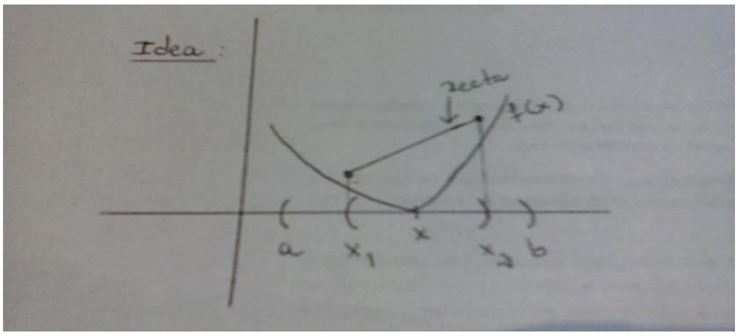
Por eso al descartar la intersección nos aseguramos que TODOS los puntos de la función de f son mayores que g en el intervalo (a,b).

4. Para la resolución del problema y encontrar una condición para que la propiedad se cumpla use la heurística *trabajar hacia adelante* ya que aborde el problema partiendo de las condiciones iniciales. Luego *realice un dibujo* de dos funciones que cumplían con los datos que me daba el enunciado. Y finalmente considere dos funciones que se intersecan en dos puntos como por ejemplo una lineal y una cuadrática que sirvan para ejemplificar y explorar el problema.

Resolución de A19

Resolución consigna 1:

Significa que al considerar un intervalo abierto (a,b) y elegir dos elementos cualesquiera denotados $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ que están dentro del intervalo con $\mathbf{x_1}$ menor que $\mathbf{x_2}$, se puede ver que para cada uno de los elementos $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x_1 < x < x_2}$, es decir que está entre los valores elegidos, se cumple una relación. Esta relación se define de forma tal que dada una función que depende del elemento $\mathbf{x}$ es menor que la recta definida por esos elementos en el intervalo determinado.



Considero que la consigna corresponde a un Lema o parte de una demostración. Al tener la puntuación "**:**" podría pensar que se trata de una definición, pero sin los datos precisos de caracterización de la función ***f*** introducida, afirmo que una definición no podría ser.

En relación a la explicación a un alumno, aclararía que lo que básicamente se dice es que: *si elijo un intervalo y un número dentro de él, obtengo que la función en ese valor es siempre menor a la recta definida como se muestra, en el intervalo elegido.*
Creo que, si tendría una clase a cargo, usaría de igual manera el lenguaje simbólico y el natural. El lenguaje simbólico es propio de nuestro lenguaje como futuros profesores y trataría de enseñarles de la manera en cómo me lo enseñaron o lo aprendí. Además de esto, si en algún momento quieren independizarse del profesor y recurrir a libros, los cuales usan parte simbólica, resulta necesario mostrar y enseñar la simbología con la que se trabaja en matemática. Sin embargo, esto no des amerita el uso del lenguaje natural, ya que la explicación en un lenguaje común a todos es necesario para establecer la comunicación y la comprensión de lo que resulta extraño o ajeno a identificar a simple vista. En éste caso, el objetivo es que el alumno aprenda el uso de la simbología y a entender qué está escribiendo.

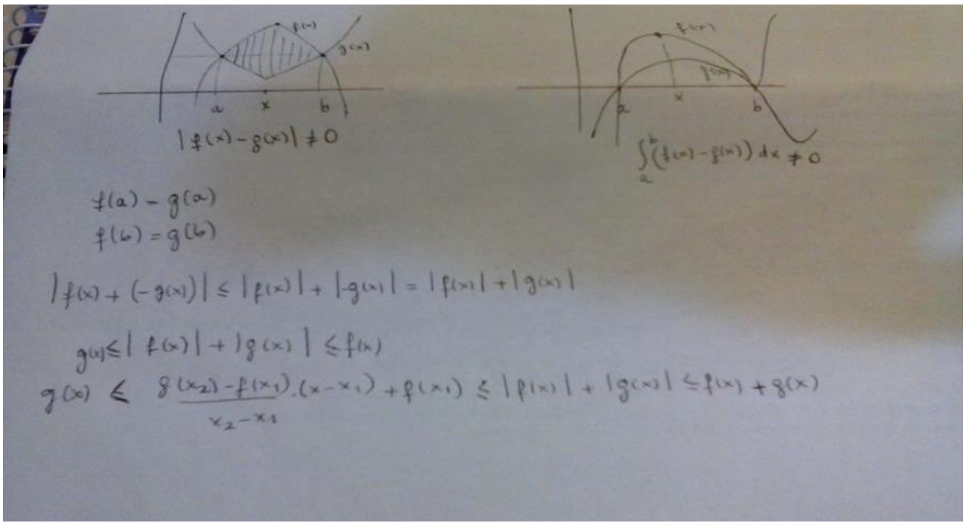
<u>Resolución consigna 2:</u>
DATOS:

- *f(x) y g(x) distintas*
- *f(a)= g(a)   y   f(b)= g(b)*

a) No es posible que las funciones coincidan en todos los valores que hay entre a y b ya que las funciones son distintas. En caso de coincidir serían la misma función, lo que sería una contradicción a la hipótesis de que son distintas.

b) si a < c < b y *g(c) < f(c)* la condición que debe cumplirse para que f sea siempre mayor que g es la siguiente: ***para cada x en (a,b) f(x) ≠ g(x)***

<u>Proposición:</u>
Si *f* y *g* son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en *x=a* y *x=b* y que además para cada x en (a,b) *f(x) ≠ g(x),* entonces en todos los puntos entre *a* y *b,* la *f* siempre es mayor que *g.*
<u>Intentos:</u>



Demostración:
Considero la siguiente función auxiliar h(x)= f(x)- g(x).

Sé que f y g son polinomios y que h es continua en el intervalo [a,b] ya que es resta de f y g, funciones continuas en [a,b].

Sabiendo además que en un valor c, con a < c < b, f(c) > g(c) entonces h(c)> 0. también, por hipótesis *f(x) ≠ g(x)* en (a,b) y por esto, h(x) ≠ 0 en (a,b).

Luego, h(x) cumple con el Corolario del Teorema de Bolzano, con lo que h(x) > 0 en (a,b). Es decir, f(x)-g(x) > 0 y por lo tanto f(x) > g(x). Así queda demostrada la preposición.

Explicación:

Considero distintos ejemplos sobre dos funciones que cumplan con lo pedido con las condiciones planteadas en la proposición. Descarto las posibilidades de funciones partidas porque no cumplen con las hipótesis dadas. La condición adicional que determino que es necesaria para poder cumplir lo requerido tiene que ver con los valores que toman las funciones en un intervalo elegido.

Lo que se quiere demostrar es que, a partir de las hipótesis, se llegue a que en todos los puntos entre *a* y *b*, la *f* siempre es mayor que *g*.

Para plantear la demostración lo que hice fue guiarme por medio de distintos gráficos y así determinar alguna regularidad para luego determinar de alguna manera lo que observaba. Luego de esto, considero una función auxiliar h determinada por las dos funciones dadas, la cual es la resta de las funciones. Esto fue para utilizar las hipótesis planteadas. Las funciones valen lo mismo en los extremos del intervalo, son distintas en todo el intervalo y en un punto intermedio f es mayor que g.

Las hipótesis plantadas cumplen también con las del Corolario y concluyo que h es positiva en (a,b). Pero como h estaba definida como la resta de f y g, entonces se tiene que la resta de las funciones es mayor a cero y al despejar obtuve que f es más grande que g en todo el intervalo dado (a,b). Por lo tanto, queda demostrado lo enunciado.

Reflexión:

La demostración realizada utiliza heurísticas a lo largo del planteo. Comienzo planificando la organización de prueba colocando los datos presentados. Procedo a realizar dibujos y gráficos para visualizar el problema o idea a plasmar. Recurro a teoría relacionada ya que las manipulaciones algebraicas y los fundamentos están extraídos de ejercicios resueltos anteriormente donde involucra funciones: sus caracterizaciones y condiciones. En esta manipulación algebraica y teórica, introduzco un elemento auxiliar, el cual sería la función h(x) determinada por los datos.

Entiendo que ninguno de los intentos me resultó fácil para llegar a la demostración requerida, pero el primer intento pautó la utilidad del planteo sobre la distancia entre las funciones que se desprendió en la demostración realizada.

Resolución A20

<u>Resolución de la consigna 1:</u>

Sean x_1 y x_2 dos valores cualquiera pertenecientes al intervalos (a, b), con x_1 menor a x_2, y sea x un valor cualquiera perteneciente al intervalos (x_1, x_2). La función f evaluada en cualquiera de los valores que puede asumir x, es menor a la función lineal que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, evaluada en ese mismo valor de x.

a) En el enunciado se pide que f verifique una condición, podríamos cambiar la palabra "condición por "propiedad" y al idea sería la misma.

Por ejemplo:

Toda función que cumplan con esta condición [...] le pasará tal o cual cosa.

Toda función que cumpla con esta propiedad [...] le pasará tal o cual cosa.

Las dos frases trasmiten la misma idea.

Por otra parte, si fuese una definición se tendría que nombrar algo de lo que se presenta y si fuese una demostración, tendría que mostrarse un resultado en base a relaciones u operaciones. Ninguna de estas dos cosas ocurre.

Conclusión: El enunciado hace referencia a una propiedad de la función.

b) Si uno presenta esta propiedad en clase, se supone que los estudiantes reconocen y manejan la mayoría de los símbolos:

- $f(x)$ como una función de variable independiente x;
- Los símbolos de ">" y "<".
- Y aunque en el enunciado no lo dice, la expresión mostrada tiene toda la pinta de hablar de x como una variable continua (si no es así, haría la aclaración correspondiente);

En cuanto a los símbolos: $\forall, \in$ y (a, b), los iría presentando en forma gradual, de uno en uno y después de haber escrito varios enunciados en forma literal.

Por ejemplo:

- Enunciado en forma oral:
  En el conjunto de los números reales, entre cualquier par de valores x_1 y x_2 ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$.

  Y escribo en el pizarrón mientras explico el significado del símbolo:
  $\forall\ x_1, x_2$ (<u>*Para todo*</u> x_1 y x_2) perteneciente al conjunto de los números reales ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$.
  De ahora en adelante, utilizo el símbolo $\forall$ en los enunciados escritos.

- Más adelante, introduzco otro símbolo de los mencionados
  Para todo x_1, x_2 pertenecientes al intervalos abierto a, b, <u>*pero no los extremos del intervalos, es decir ni a, ni b*</u>, ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$.

  Y escribo en el pizarrón mientras explico el significado del símbolo:
  $\forall\ x_1, x_2\ pertenecientes\ al\ intervalo\ (a, b)$, Ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$.

- Siguiendo con la misma rutina presento el símbolo de pertenencia.
  Oralmente:
  Para todo x _perteneciente_ al intervalo abierto x_1, x_2, se verifica que x es mayor que x_1 pero menor que x_2.
  $\forall\, x \in (x_1, x_2), con\ x_1 < x_2$; se verifica que: $x_1 < x < x_2$.

c) El lenguaje simbólico tiene la ventaja de condensar información más eficientemente que el lenguaje cotidiano, se expresa una idea con mínima cantidad de símbolos y sin ambigüedad. Por supuesto, esta se ve como una ventaja cuando uno comienza a dominar, o ya domina, el lenguaje simbólico. Pero para el estudiante que recién se inicia en el área, el precio que hay que pagar por esta ventaja se ve reflejado en un retraso en la comprensión de las ideas que se quieren trasmitir, ya que el simbolismo, en principio, se presenta como una barrea a superar antes que un allanamiento del camino hacia las ideas matemáticas.
En consecuencia, el equilibrio entre tiempo, orden y forma en que se le presentan los contenidos al estudiante es clave para lograr un abordaje "suave" hacia un nivel de conocimiento superior.
El simbolismo es una característica positiva de la disciplina pero que tendrá que venir después de presentar las ideas matemáticas en lenguaje cotidiano y escritura literal. Una vez que el estudiante domine las ideas y haya escrito largas freces para trasmitirla, recién entonces podrá ver al simbolismo como una ventaja, y en base a esta valoración, abocarse a su apropiación.
Resolución de la consigna 2:

<u>Resuelvo la consigna, (parte a)</u>
Supongo que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con sus respectivos coeficientes, también reales.

1°) Si $a = b,\ \nexists\, x \in (a, b)\ ya\ que\ el\ conjunto\ (a, b) = \emptyset.$ Respondiendo a la pregunta, no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b ya que, para este caso, nos existen dichos valores.

2°) Si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq \emptyset$ y existen infinitos valores de x tal que $a < x < b$.

2.1. Por el enunciado sabemos que $f(x) \neq g(x)$.

2.2. a) Supongamos que $\exists (a, b)\ /\ \forall x \in (a, b)$: $f(x) = g(x)$ y $gr(f) \neq gr(g)$. (Sin perder generalidad, podemos suponer que $gr(f) > gr(g)$).

Sean
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ \ con\ a_n \neq 0$$
y
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m,\ \ con\ b_m \neq 0$$

Entonces, tomando un valor cualquiera $x \in (a, b)$, se tiene que:
$$f(x) - g(x) = 0$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_n x^n) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m) = 0$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n = 0$$

Como esto debe cumplirse $\forall x \in (a,b)$, entonces:

$$(a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \dots, a_m - b_m = 0)\ y\ (a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n = 0)$$

Pero si

$$a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n = 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

Entonces

$$a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = a_n x^n, \quad (recordemos\ que\ a_n \neq 0)$$

Los dos polinomios deben ser iguales, lo cual es falso, ya que:

$$gr(a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = n - 1 < n = gr(a_n x^n)$$

Este camino nos lleva a una contradicción. Es decir, no es posible que:

$\forall x \in (a,b)$: $f(x) = g(x)$, cuando $gr(f) \neq gr(g)$.

2.2.b) Supongamos que $\exists (a,b)\ /\ \forall x \in (a,b)$: $f(x) = g(x)$ y $gr(f) = gr(g)$.
En este caso tendríamos:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \ \ con\ a_n \neq 0$$

y

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \ \ con\ b_n \neq 0$$

Operando bajo la suposición hecha

$$f(x) - g(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_n x^n) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) = 0$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = 0$$

Nuevamente, para que la igualdad se verifique $\forall x \in (a,b)$, necesariamente:

$$(a_0 - b_0) = (a_1 - b_1) = \cdots = (a_n - b_n) = 0$$

Pero si los coeficientes de los respectivos términos de f y de g son iguales y ambos polinomios tienen el mismo grado, entonces son iguales. Esto contradice la hipótesis 2.2.1.
Este camino también nos lleva a una contradicción, por lo cual concluimos que:

Si $f(x) \neq g(x)$, no es posible hallar un intervalo (a, b) tal que $\forall\ x \in (a,b)$: $f = g$.

Resuelvo la consigna, (parte b)
Condición: $Si\ [\, f(x_0) > g(x_0)$ para algún $x_0 \in (a,b)]\ y\ [\forall x \in (a,b): f(x) - g(x) \neq 0]$, entonces $f(x) > g(x), \ \forall x \in (a,b)$.
Demostración:
Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces, por la primera condición $h(x_0) > 0$, y por la segunda condición $h(x)$ no tiene raíces en el intervalo (a,b).

Supongamos que $\exists\, x_1 \in (a,b)\ /\ h(x_1) < 0$.
Como $h(x_0) > 0$ y $h(x_1) < 0$, por el teorema del valor intermedio,

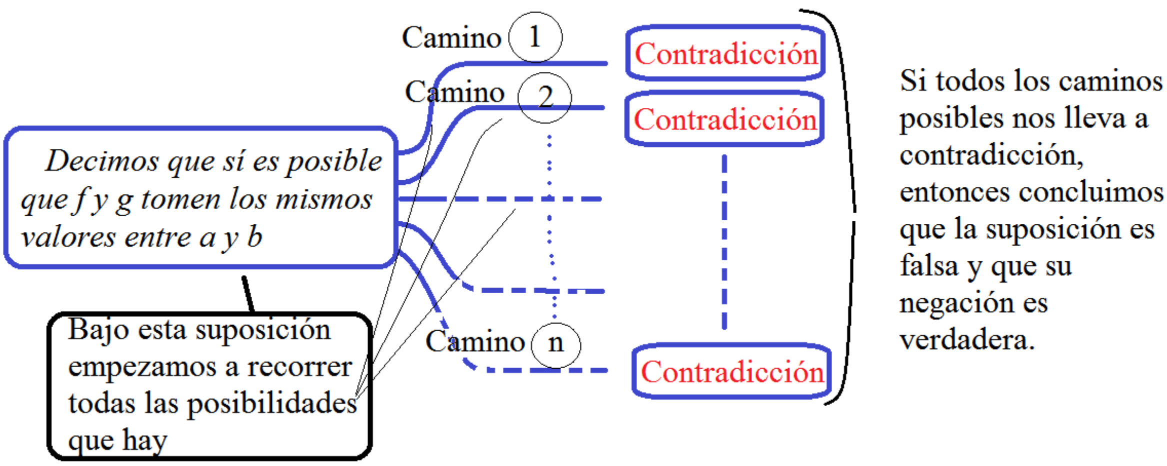
$$\exists\, x_2 \in (a,b) \ /\ h(x_2) = 0$$

Pero esto no es posible por la segunda condición. Esta contradicción proviene de suponer que

$$\exists\, x_1 \in (a,b)\ /\ h(x_1) < 0.$$

Como esta suposición es falsa, su negación será verdadera, es decir:
$\forall x \in (a,b): h(x) > 0$,
Y por lo tanto
$f(x) > g(x)\ \forall x \in (a,b)$.

c) Explicación a un compañero.
Supongo que mi compañero está sentado al lado mío y tenemos la hoja donde desarrollo la solución. Puedo reescribir sobre lo escrito y hacer dibujos o esquemas como los que muestro más abajo.
En la consigna nos dan dos funciones polinómicas f y g, y nos dicen que valen lo mismo cuándo se evalúan en a y b.
En el ítem (a) nos preguntan si es posible que coincidan en todos los valores para todos los x entre a y b.
Bueno, en principio vamos a descartar el caso trivial que es cuando a es igual a b. Si a es igual a b no hay valores entre medio y por lo tanto f no puede ser igual a g, porque no hay valores de x para evaluar.
Segundo, ahora a y b son distintos, entonces, como estamos en los reales hay infinitos valores entre a y b.
Como a priori no sabemos si f puede ser igual o no a g para todos los valores de x dentro del un intervalo a, b; vamos a suponer que sí es posible y vamos a intentar probar la proposición. Una proposición matemática es una oración de la cual puede decirse si es verdadera o falsa, es decir, si nosotros suponemos algo y en base a eso hacemos un desarrollo matemático y llegamos a una contradicción, entonces la suposición no es verdadera y si no hay otra posibilidad para explorar, la negación de la suposición ha de ser verdadera.
La idea esquemática es la siguiente:

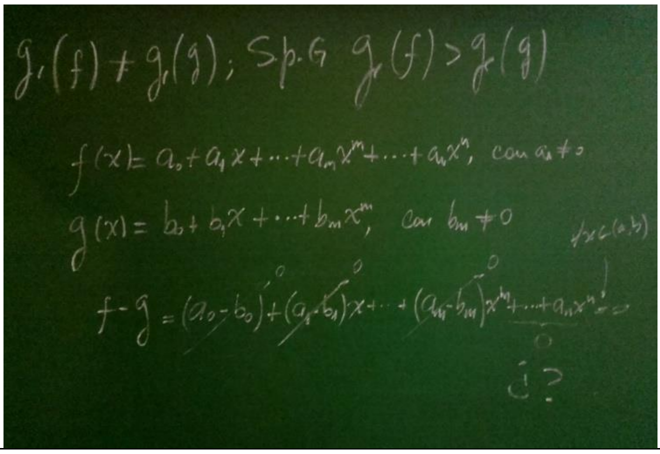


Recorramos el primer camino, supongamos que existe un intervalo a, b para el cual f y g son iguales si los evaluamos en todos los x que están dentro del intervalo. A demás,

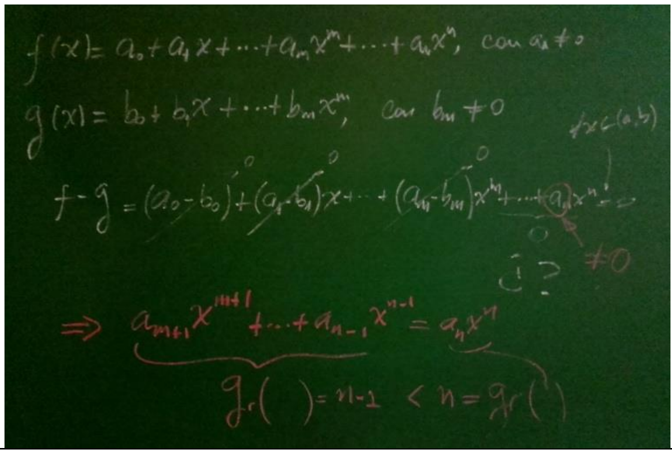
supongamos que los grados de los polinomios son distintos, por ejemplo que el grado de f es mayor al de g.
Bajo esta suposición tenemos que f menos g nos da cero para todos los valores de x entre a y b. reemplazando y operando llegamos a una contradicción: “dos polinomios son iguales pero tienen distintos grados”. Este camino nos lleva a una contradicción, por lo tanto, la suposición no es verdadera. Modifiquemos la suposición y recorramos otro camino.
El segundo camino, supongamos que existe un intervalo a, b para el cual f y g son iguales si los evaluamos en todos los x que están dentro del intervalo, pero ahora los grados de los polinomios son iguales.
Otra vez, f menos g nos da cero para todos los valores de x entre a y b. reemplazando y operando llegamos a otra contradicción: “los dos polinomios son iguales, pero el enunciado nos decía que los polinomios eran distintos”. O sea que esta suposición, tampoco es verdadera.
Y como ya no hay más caminos por explorar, entonces concluimos que si f y g son dos polinomios distintos, no existe un intervalo a, b, tal que para todos los x dentro de ese intervalo f sea igual a g.
Para resolver la parte b de la consigna utilizamos la misma idea. Suponemos algo como verdadero y operamos a partir de ahí, si llegamos a una contradicción, la suposición no era verdadera y por lo tanto su negación si será verdadera.
En el enunciado nos dan un dato “existe un valor x_0 entre a y b tal que $f(x_0)$ es mayor que $g(x_0)$” y nos piden que agreguemos una condición (si es que se puede), para que en todos los puntos entre a y b, f sea mayor que g.
Nos inventamos una función $h(x) = f(x) – g(x)$ y pedimos que h no tenga raíces entre a y b (esta es la condición que ponemos).
Supongamos que existe un valor x_1 entre a y b tal que $h(x_1) < 0$.
Por el dato que nos dan, sabemos que $f(x_0) - g(x_0) > 0$, y por lo tanto $h(x_0) > 0$.
Por la suposición, tenemos que $h(x_1) < 0$.
Si $h(x_0) > 0$ y $h(x_1) < 0$ para x_0 y x_1 dentro del intervalo a, b. Por el teorema del valor intermedio, existe un x_2 perteneciente al intervalo a, b. Tal que $h(x_2) = 0$. Pero esto contradice la condición que pusimos, llegamos a una contradicción y por lo tanto la suposición que hicimos “existe un valor x_1 entre a y b tal que $h(x_1) < 0$” es falsa y su negación ha de ser verdadera.
La negación de un operador existencial nos da un operador universal seguido de la negación de la proposición, así llegamos a que:
Para todo x entre a y b, no es cierto que $h(x) < 0$ y como tampoco puede ser igual a cero por la condición que pusimos solo queda la posibilidad de que $h(x) > 0$, o lo que es los mismo, $f(x) > g(x)$ para todos los x entre a y b
d) Reflexión sobre los procesos de demostración.
La heurísticas que utilice fueron: Planificar (trabajar hacia adelante), Activar experiencias previas (recurrir a teorías relacionadas, razonar por analogía) y modificar el problema (dividir el problema en sub problemas). Pero de esta tres, creo que la que más utilice fue la de activar experiencias previas al recordar y utilizar las resoluciones de hechas en análisis matemático y álgebra. No estoy cien por ciento seguro de que mis demostraciones son correctas, pero tengo confianza en que mi razonamiento, en general, si lo es. Según creo, la seguridad llega con el tiempo y después de mucho trabajo sobre el tema y todavía no me veo en ese lugar. Lo que más me resultó útil es sentarme a pensar, recordar demostraciones, tomarme un tiempo entre resolución y resolución, mis borradores son partes inconclusas de lo que presento aquí. También me resulto útil el consultar algunas definiciones en libros y apuntes bajados de internet.

Anexo.
Imágenes de alguno de mis borradores.

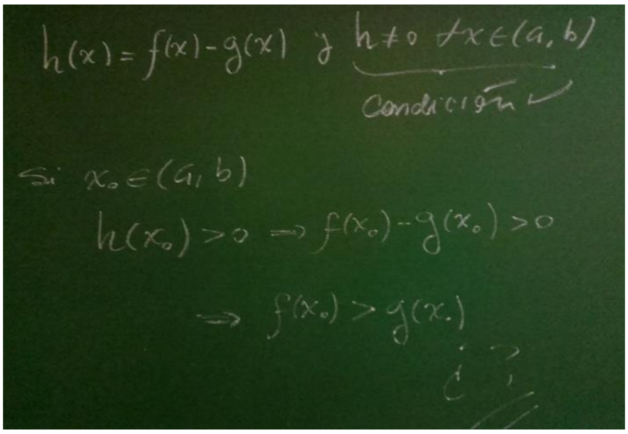
Parte a



Parte a



Parte b



Parte b