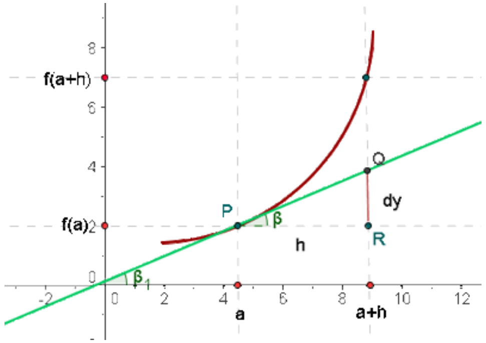
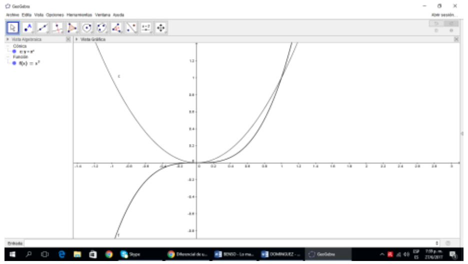
ANEXO VI

En el Anexo VI incluye las tablas que utilizamos para completar el análisis de las producciones de los 20 estudiantes que participaron en la experiencia, correspondientes al TP3.

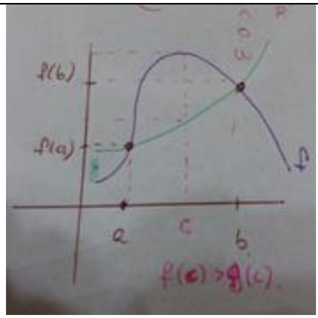
DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A1	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/ demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/ demostración/etc.)	No responde.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	No responde. Con respecto al uso del lenguaje natural o coloquial y el simbólico, creo que ambos cumplen la misma rigurosidad, aunque es necesario naturalizar el simbólico, o sea, realizar una práctica diaria y constante del mismo, de manera que no sea una pérdida de tiempo el hecho de entender una consigna escrita en este lenguaje.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	No responde.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Con respecto al uso del lenguaje natural o coloquial y el simbólico, creo que ambos cumplen la misma rigurosidad, aunque es necesario naturalizar el simbólico, o sea, realizar una práctica diaria y constante del mismo, de manera que no sea una pérdida de tiempo el hecho de entender una consigna escrita en este lenguaje. No creo que sea posible prescindir de alguno de ellos, sin embargo el lenguaje simbólico resulta más práctico al momento de resolver o escribir una consigna, ya que ahorra tiempo de escritura. Le da a los dos tipos de lenguaje la misma rigurosidad. Considera pérdida de tiempo trabajar en lenguaje simbólico. La ventaja del simbólico por sobre el natural es el ahorro de tiempo al escribir.	**Misma rigurosidad. Ventaja del simbólico por sobre el natural por ser más económico de escritura.**

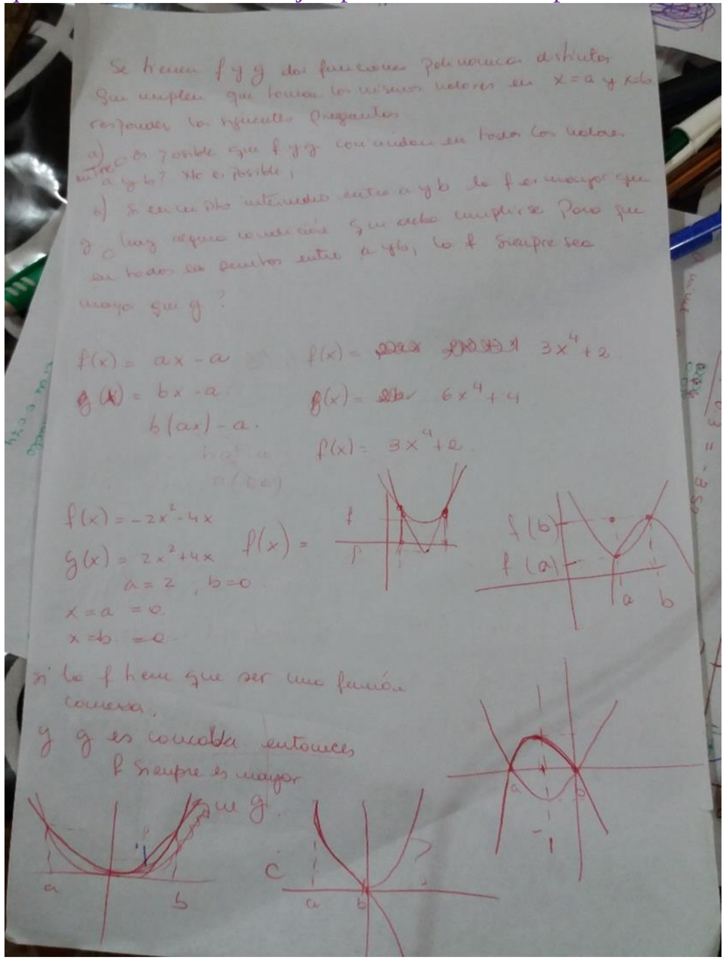
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	Usa lenguaje simbólico y natural. Utiliza gráficos para su explicación. **Consigna 1:** Sea f(x) una función derivable. Diferencial de una función correspondiente al incremento h de la variable independiente, es el producto f'(x) · h. Se representa por dy. $dy = f'(x)\cdot h$ $dy = f'(x)\cdot dx$  $f'(x) = tg\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{h}$ $QR = f'(x)\cdot h;$ $QR = (dy)_{x=a}$ La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento de la variable independiente. Para una función $y=f(x)$ para un valor inicial x_0 se tiene la pendiente de la línea recta tangente en las coordenadas $[x_0,f(x_0)]$, dada por la $m=f'(x_0)$. Cuya ecuación de la línea recta tangente queda entonces definida como: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$. Sea $y=f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x. Se define a la diferencial de x como dx, cualquier número real diferente de cero. Se define a la diferencial de y como dy, dado por dy=f '(x) dx. Luego la expresión $(\boldsymbol{f(x2)-f(x1)/(x2-x1)})\ .(\boldsymbol{x-x1})+\boldsymbol{f(x1)}$ es la forma de la recta donde $\boldsymbol{f(x2)-f(x1)/(x2-x1)}$ es la pendiente y $\boldsymbol{f(x1)}$ es la ordenada al origen.	Que en la consigna se lea un cociente fue interpretado como cociente incremental → relación con la definición de derivadas.

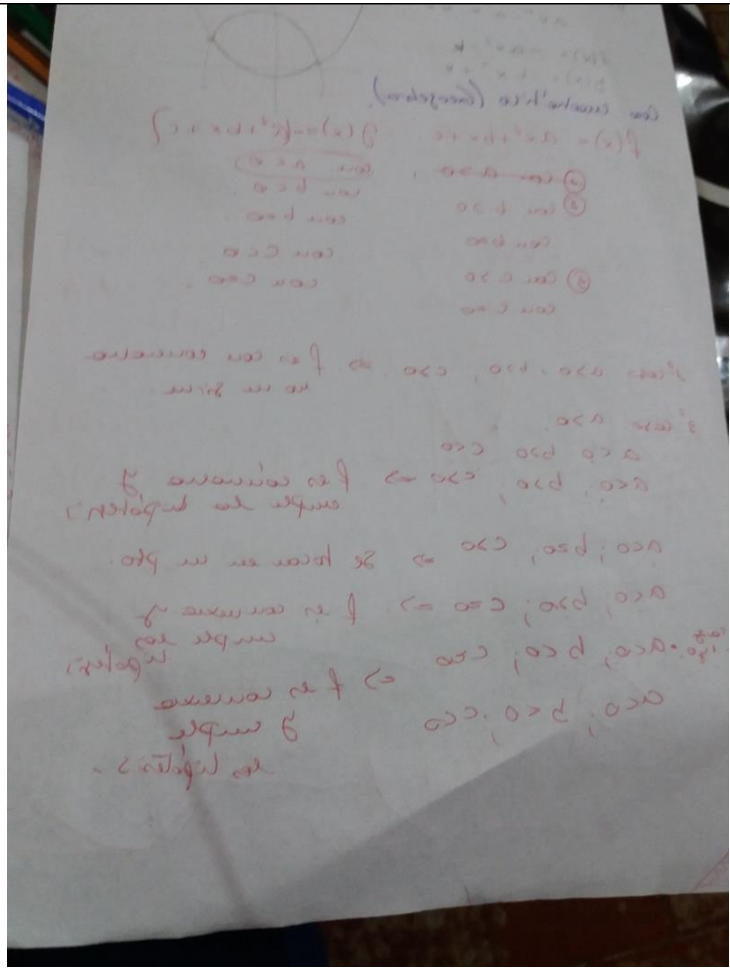
			La consigna está resuelta de manera incorrecta: la teoría relacionada no está relacionada con el tema de la consigna. Utiliza ejemplos para explicar lo que quiere decir (que además está mal) **Consigna 2:** Sean: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_mx^m$ con n,m pertenecientes a los números naturales. Entonces $f(a)=g(a)$ y $f(b)=g(b)$ EL “entonces” hace referencia a lo que quiere probar, cuando en realidad es dato. Supongamos las siguientes funciones polinómicas $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$ y las graficamos en el geogebra.  En este ejemplo podemos observar como en el intervalo (a,b) la función f es mayor que la función g en todos sus puntos. Supongo que para que todos los valores entre a y b coincidan f=g. Para que en el intervalo (a,b) se cumpla que un punto intermedio f sea mayor que g tiene que pasar f(c) tiene que ser mayor que g(c), con c punto intermedio entre a y b. y cualquier otro punto intermedio entre a y b, debe cumplir lo mismo. Uso de lenguaje natural → podría haber escrito esto con símbolos. $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, $f>g$ uso de ejemplos. Luego $x^2>x^3$ Luego $x^2(-x+1)>0$ Caso 1: $x>0$ ó $1>x$, solución: (0,1) Caso 2: $x<0$ ó $1<x$, solución: vacía Luego en el intervalo (0,1), sucede que $f>g$. La resolución es incorrecta. La resolución es un ida y vuelta de implicaciones equivocadas: no sabe qué quiere probar y qué es dato.	**Confusión de hipótesis y tesis.** **Necesidad de usar ejemplos numéricos para resolver.** **¿Por qué no escribe en símbolos?**
		- Explicar su resolución	No resuelve.	

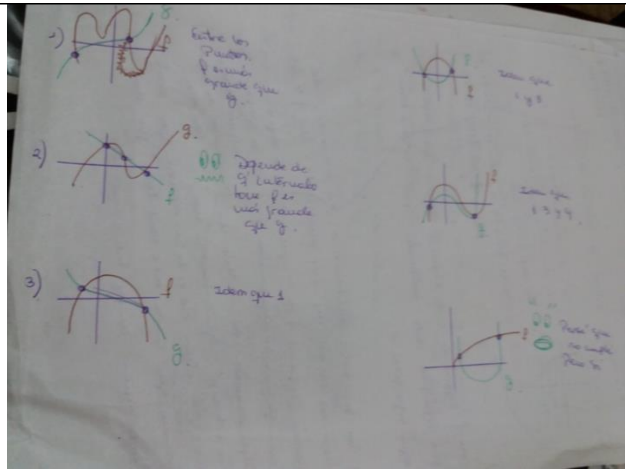
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	No resuelve el punto relacionado con la reflexión. En las resoluciones se puede observar que las conclusiones son a partir de un caso particular que usó para trabajar: no entiende que lo que completó no responde a lo pedido, lo que propone como desarrollo (demostración) no es una sucesión coherente de pasos, confusión entre lo que tiene que demostrar y lo que es dato.	

DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A2**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Si una función cumple con las condiciones establecidas, que dados dos puntos que pertenezcan a un intervalo y al dominio de la función , tal que uno sea menor al otro, la recta que une a dichos puntos (x1; f(x1)) y (x2; f(x2)), $y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$ estará por encima de la función. El enunciado hace referencia a la definición de funciones convexas. $\forall\, x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2, \forall x \in (x_1; x_2)$: $$f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$$ Da las condiciones que tiene que satisfacer una función para que sean convexas en el intervalo (a,b). La explicación tiene que ver con traducir (en parte) lo que está escrito en el enunciado. Comprende a qué se refiere, entiende que es una definición.	**Sabe que es la definición de convexidad.**
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	No responde sobre qué del enunciado le permite responder que es una definición.	**No responde.**
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Sobre la primera consigna: por qué lo que explica se corresponde con la definición: Para explicarle a un alumno tendría que explicar bien que significa cada símbolo, como se lee en lenguaje natural, y la significación que tienen como por ejemplo "el para todo" vs "existe alguno". Indica qué haría pero no lo hace. En la 2da consigna: sobre cómo explicarle a un compañero qué escribió o por qué lo hizo: Si las funciones solo se cortan en dos puntos a y b, son distintas y existe un c talque f evaluada en c es mayor que g evaluada en g, entonces no hay otra alternativa de que f sea mayor que g en el intervalo (a,b).	**Da una indicación de un ejemplo de lo que haría** **Utiliza lenguaje coloquial**

			 Lo que explica es repetición de lo que utilizó para resolver. Usando lenguaje coloquial, repite una relación entre funciones que en la resolución estaba en su mayoría también en lenguaje coloquial.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Los símbolos matemáticos son necesarios a la hora de escribir una definición, demostración, propiedad etc. Pero no dice por qué (*) Creo que no podría prescindir de ninguno de ellos en esta definición, si quisiera sacar alguno debería reescribir la definición usando otros cuidadosamente. Dependiendo del contexto (**), algunos tendrán más peso que otros. No es lo mismo decir “existe un número que cumple algo” que decir “todo número cumple algo”. (*) ¿en qué radica la importancia del uso de los símbolos a la hora de escribir una definición? (**) ¿a qué se refiere con contexto? Debe estar pensando en el tipo de definición/prop/dem/etc.	**Habla sobre la importancia del uso de símbolos como “verso” pero no explica por qué.**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		

	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	<u>Sobre la consigna 1:</u> Se pide explicar con palabras como resolución, está en un indicador anterior. <u>Sobre la consigna 2:</u> En los borradores de la resolución observamos intentos de pensar qué significa lo que está escrito usando ejemplos de funciones polinómicas:  Ejemplos variando parámetros en una función particular:	

			 Utilización de gráficos para analizar distintos casos:		



Resolución consigna 2:

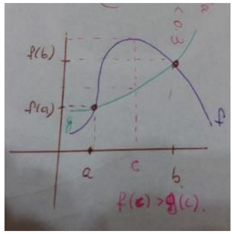
Si quisiera que las funciones coincidan en todos sus puntos entre a y b, estaría pidiendo que f y g sean la misma función, pero si son distintas y cumplen que toman el mismo valor para x=a y x=b no es posible que coincidan en todos los valores entre a y b.

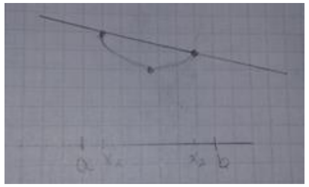
Sean f y g dos funciones polinómicas que cumplen que $f(a)= g(a)$ y $f(b)=g(b)$ y que $f(x)\neq g(x)$ $\forall$ $x\in (a,b)$ si existe un $c\in$ (a,b) talque $f(c)>g(c)$ y f y g solo se cortan en a y b , entonces $f(x)>g(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Demostración:

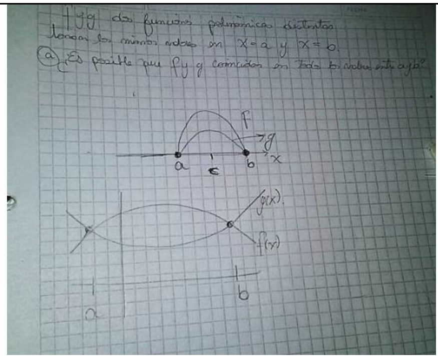
Si las funciones valen lo mismo solo en los extremos y son distintas entre ellas, si existe un c que pertenece al intervalo (a,b) y si f(c) es mayor que g(c) y como las funciones no se cortan en otro punto necesariamente f(x)>g(x) para todo x perteneciente al intervalo (a,b).

Lo que toma como demostración es decir lo mismo, también en lenguaje coloquial, tal cual lo plantea como enunciado.

		- Explicar su resolución	 Si las funciones solo se cortan en dos puntos a y b, son distintas y existe un c talque f evaluada en c es mayor que g evaluada en g, entonces no hay otra alternativa de que f sea mayor que g en el intervalo (a,b). La explicación de la resolución es repetir lo que mostró como resolución	**La explicación de la resolución es repetir, también en lenguaje natural, lo que se supone utilizó como demostración.**
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Para llevar a cabo la resolución fue necesario empezar cero, empezando por los conocimientos previos, hacer gráficos y buscar generalidades, escribir hipótesis y corregirlas hasta estar maso menos convencida de que la tesis se cumple y poder demostrar porqué. No me sirvió concentrarme solo en las cuadráticas (que era lo que estaba haciendo en un primer momento) ya que las funciones podrían tener grados mayores. Si me sirvieron los gráficos para poder analizar cuando se cumplía lo pedido en las hipótesis y ver que condición era necesaria para que f sea mayor que g siempre en un intervalo (a,b). -Duda de la tesis, entonces primero se convence ella de que es cierta: usa gráficos y casos particulares. - Para abordar la consigna 2 simplificó el problema: toma solo cuadráticas. - Fuerte uso de gráficos para: convencerse y demostrar. - No realiza una demostración propiamente dicha y no lo advierte.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A3	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	F es menor a la recta que pasa por x_1 y x_2. x_1 es menor a x_2 y la f es menor a esa recta. Es decir, es convexa.  Puede repetir/traducir lo que se expresa en el enunciado: traduce en lenguaje natural y concluye. *Creo que falta algo en el medio en ese proceso que realiza el estudiante.*	**No sabe qué es una definición.** **Traduce al lenguaje natural, casi en una traducción literal… y concluye.**
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	Corresponde a una definición porque f se está exponiendo un concepto. En el enunciado se observa en la expresión “una función f verifique esta condición” No sabe por qué es una definición.	**Resuelve incorrectamente. No sabe lo que es una definición (mezcla con lo que se dice de función)**
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto al 1b) Sobre lo que le explicaría a los alumnos: SI tuviera que exponer esto a un alumno, haría aclaraciones del lenguaje simbólico que el alumno tal vez podría no comprender. El pertenece (∈) o el “para todo” (∀) y además los intervalos. Realizaría una explicación símbolo a símbolo de lo que se encuentra escrito en lenguaje simbólico. No hay una relación entre las explicaciones (en palabras vs símbolos) Respecto al 2c) Sobre explicarle a un compañero qué escribió: NO resuelve.	**Menciona la explicación de cada símbolo.**

		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Con respecto al lenguaje simbólico y natural, considero que no tienen la misma rigurosidad. El simbólico en este ejercicio es muy riguroso pero convexidad como tema, se puede explicar de otra manera o definir prescindiendo de esta definición. Tal vez utilizando un gráfico y mostrando la recta tangente. (*) En el lenguaje natural hay más lugar de "escapatoria" es decir, puede ir variando cosas o improvisando un poco más libremente. El lenguaje simbólico no creo que admita tanta versatilidad. (**) (*) Dice que reconoce la rigurosidad del uso del lenguaje simbólico pero no lo considera necesario para la definición. (**) "Escapatoria" como posibilidad de decirlo de distintas manera para poder explicar. Menciona antes que no tienen la misma rigurosidad, pero está llevando al lenguaje natural a un nivel superior que el simbólico **(¿?)**	
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	Resolución de la consigna 2: **a)** $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$ Supongamos que f y g coinciden $\forall\, c \in (a, b)$ Sea $P(x) = f(x) - g(x)$ una función polinómica de grado $n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ Entonces $P(x) = 0, \forall\, x \in (a, b)$ lo que daría que tiene infinitas raíces Pero como es de grado n tiene a lo sumo n raíces no infinitas. Entonces no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. **b)** Para que $f(x) > g(x)$, $x \in (a, b)$, f y g no deberían cruzarse ya que si esto pasada dentro de (a, b) f dejaría de ser mayor que g. **Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además $\nexists\, c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$ si de hipótesis dice que son distintas, decir este "además" no es agregar nada!, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.** El borrador que usé fueron gráficos auxiliares: (son los típicos gráficos que se realizan para explicar el tema Bolzano)	**No demuestra.**

			 No demuestra. Usa lenguaje simbólico, pero no demuestra, no propone ejemplos ni contraejemplos. Utiliza unos gráficos a modo de ilustración, o como traducción de lo que entiende porque en realidad no le sirve para lo que quiere mostrar.	
		- Explicar su resolución	NO resuelve.	**No resuelve.**
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al	NO resuelve.	**No resuelve.**

		absurdo y el contrarrecíproco…		

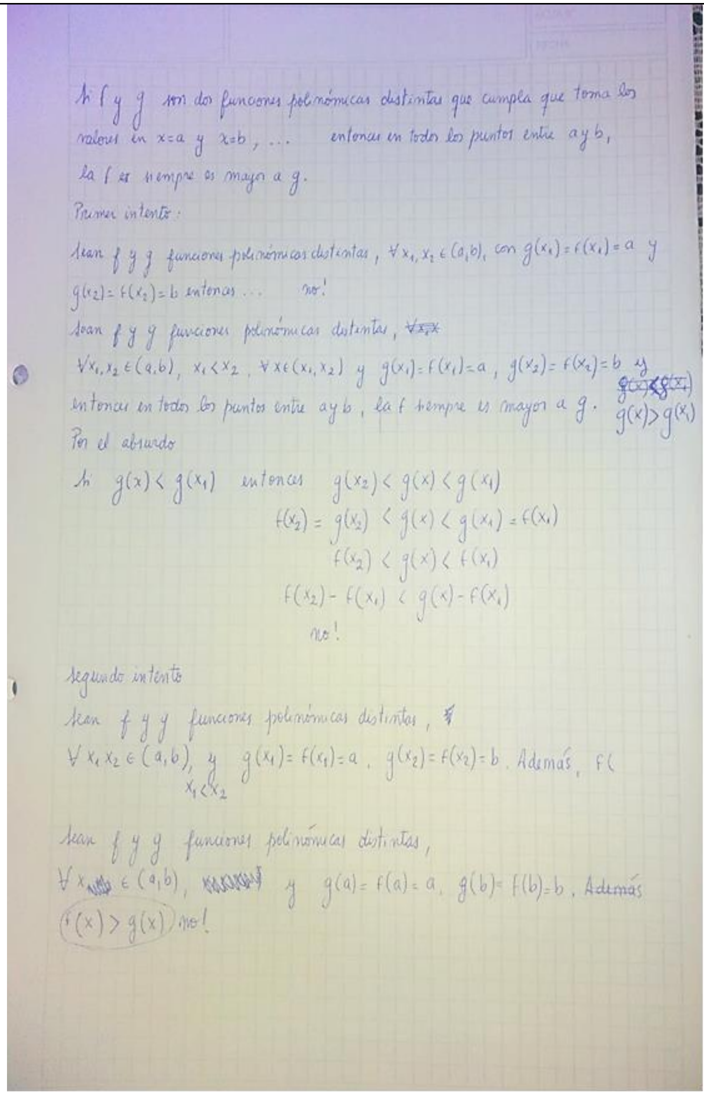
DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A4	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	NO explica lo que dice el enunciado.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	Me resulta útil poder ejemplificar con un gráfico para corroborar o no mi conjetura. (no lo hace, o no lo muestra) Sobre la formulación del enunciado de la consigna creo que corresponde a una propiedad porque dice explicar con tus palabras si la función *f* verifica la siguiente condición. La propiedad surge luego de un teorema previamente demostrado. La definición es una forma de simplificar un concepto matemático particular y las demostraciones tratan de probar la verdad de enunciados matemáticos. Un lema es el resultado de un teorema y corolario es la consecuencia de un teorema. No considera qué es una definición. Asocia el enunciado a una propiedad porque lee que una función debe cumplir una "propiedad". SI bien la propiedad surge después de un teorema demostrado, en todo caso falta eso previo que ella menciona.	**¿Qué es una propiedad matemática?** **Confusión definición-propiedad acá no se lee porque NO considera una definición.**
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto del 1b): cómo le explicaría a los alumnos por qué lo que explica se corresponde a la definición:	

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td>Si tendría (tuviera) que presentar la consigna a un alumno lo haría en un lenguaje natural y trataría de explicar dando algún ejemplo ó si se puede para que uno utilizaría esa condición. Luego, pasaría al lenguaje simbólico y quedaría plasmado en la carpeta los dos lenguajes.

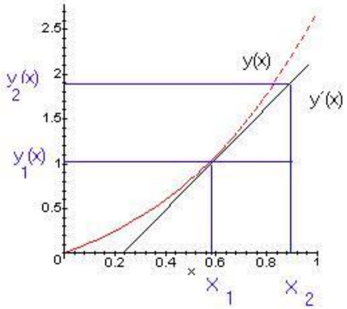
Respecto del 2c): explicarle a un compañero implica explicar qué escribió o porqué lo hizo:
NO lo hizo.</td><td>No menciona explicar el lenguaje simbólico sino comenzar con el natural para pasar luego al simbólico: es distinto de decir que va a marcar o explicar una relación entre ambos.</td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.</td><td>El lenguaje natural ayuda a comprender que estamos haciendo o explicando, y el lenguaje simbólico es muy riguroso ya que los alumnos ni tampoco nosotros estamos acostumbrados a leer símbolos ni a interpretarlos. Previamente, nosotros como futuros profes tenemos que aprender a leer símbolos para luego enseñar a los alumnos.

No considera al lenguaje natural como el primordial porque no están acostumbrados a leer símbolos.</td><td>Lenguaje natural como primordial (en nivel de los alumnos y el propio) por la falta de comprensión de los símbolos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="3">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar</td><td>Esto no se trabaja en el TP3</td><td></td></tr>
<tr><td>- Explicar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I4
Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.</td><td>a) Las funciones f y g podrían coincidir en todos los puntos en un intervalo (a,b). No corresponde
b) la consigna no la pude resolver. La idea era encontrar un punto en el intervalo (a,b) y que se cumpliera que f sea mayor a g, y luego demostrar que vale para todos los puntos de ese intervalo.

Resolución escueta, no está completa.
Con respecto al borrador que se pide incluir:</td><td></td></tr>
</table>

			 Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumpla que toma los valores en $x=a$ y $x=b$, ... entonces en todos los puntos entre a y b, la f ~~es~~ siempre es mayor a g. Primer intento: Sean f y g funciones polinómicas distintas, $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, con $g(x_1)=f(x_1)=a$ y $g(x_2)=f(x_2)=b$ entonces ... no! Sean f y g funciones polinómicas distintas, ~~$\forall x_1 x$~~ $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1<x_2$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ y $g(x_1)=f(x_1)=a$, $g(x_2)=f(x_2)=b$ y ~~$g(x)<g(x_1)$~~ $g(x)>g(x_1)$ entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor a g. Por el absurdo Si $g(x)<g(x_1)$ entonces $g(x_2)<g(x)<g(x_1)$ $f(x_2)=g(x_2)<g(x)<g(x_1)=f(x_1)$ $f(x_2)<g(x)<f(x_1)$ $f(x_2)-f(x_1)<g(x)-f(x_1)$ no! Segundo intento Sean f y g funciones polinómicas distintas, $\forall x_1 x_2 \in (a,b)$, $x_1<x_2$ y $g(x_1)=f(x_1)=a$, $g(x_2)=f(x_2)=b$. Además, f(Sean f y g funciones polinómicas distintas, $\forall x \in (a,b)$, y $g(a)=f(a)=a$, $g(b)=f(b)=b$, Además $f(x)>g(x)$ no! Son intentos que no llevan a ningún lado. Queda incompleta la resolución.	
		- Explicar su resolución	**No** resuelve.	

		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Esto lo veríamos en el punto 2d) Las heurísticas que se pueden encontrar son trabajar hacia adelante, también puede ser trabajar hacia el final y recurrir a la teoría relacionada. Menciona heurísticas puestas en juego al encarar la resolución, pero no puede continuar porque no completó la resolución.	

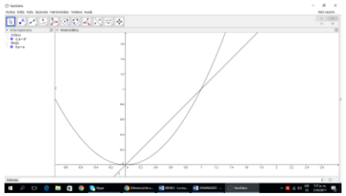
<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A5</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td><td rowspan="2">I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td><td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.</td><td></td></tr>
<tr><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Encontré la relación de la pendiente de la línea recta $y´ = f´(x)$ que era tangente a la función. Para un punto en particular podemos llegar a la definición de la derivada $f'(x)$ y vimos que $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=x_1$.


En particular, para una función $y=f(x)$ para un valor inicial x_0 se tiene la pendiente de la línea recta tangente en las coordenadas $[x_0,f(x_0)]$, dada por la $m=f'(x_0)$. Cuya ecuación de la línea recta tangente queda entonces definida como: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$
Ante un cambio en la variable x podemos determinar el incremento x_0 por x_0+dx, donde el incremento dx es comúnmente un incremento pequeño, pero no cero, llamado diferencial en x.
Analizando el sistema función y línea recta tangente a dicha función entonces podemos analizar que existen dos puntos importantes a analizar, los de la función y los de la recta tangente:
(1) Para referirnos al cambio que ocurre en el valor de f designaremos la notación dy.
(2) Para referirnos al cambio que ocurre en el valor de y para la recta tangente utilizaremos la notación dy.
Más precisa se encuentra la siguiente definición:
Definición de diferencial.
Sea $y=f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x. Se define a la diferencial de x como dx, cualquier número real diferente de cero.
Se define a la diferencial de y como dy, dado por dy=f '(x) dx.
Luego la expresión $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1})).(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x1})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la forma de la recta donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1})$ es la pendiente y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la ordenada al origen.

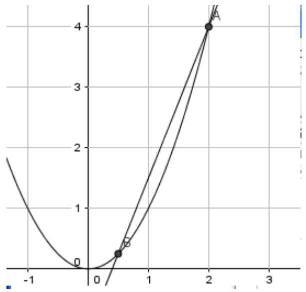
Resolución incorrecta. No explica el enunciado.</td><td>Entiende que es una definición, pero incorrecto.

¿qué concepto matemático se está trabajando?
La resolución indica: “recta tangente”</td></tr>
</table>

		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	**No** resuelve.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	**No** resuelve.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Con respecto al uso del lenguaje coloquial y el simbólico, creo que ambos cumplen la misma rigurosidad, aunque es necesario entender el simbólico, ya que, al momento de explicar una definición o demostración el simbólico es más práctico. Lo que argumenta es confuso: "misma rigurosidad" y "más practicidad" para el simbólico.	**No distingue correctamente características de los distintos tipos de lenguaje.**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		

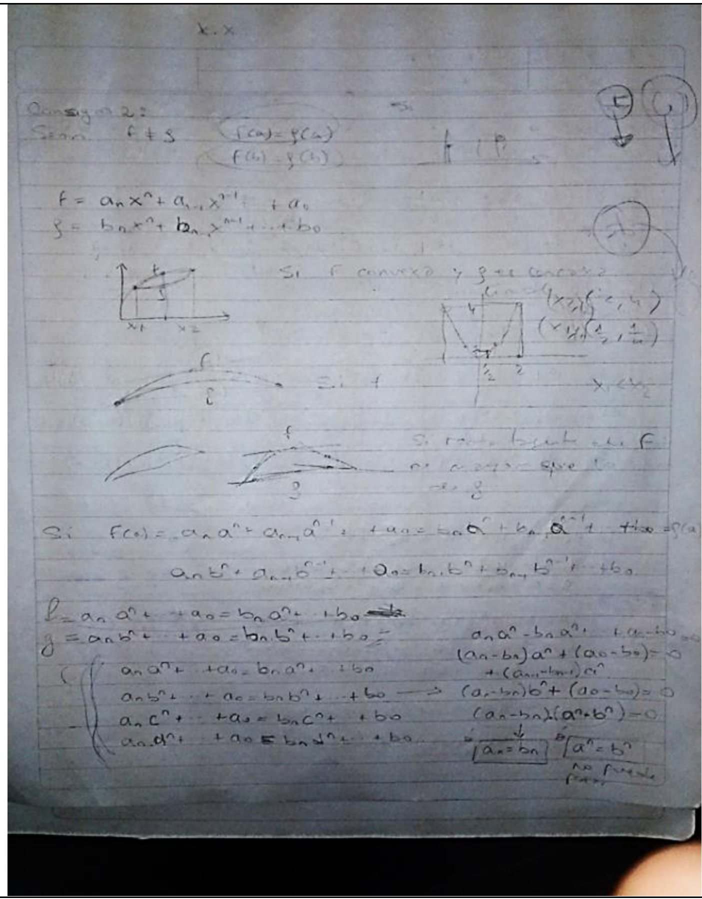
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	Sean: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_mx^m$ con n,m pertenecientes a los números naturales. Entonces $f(a)=g(a)$ y $f(b)=g(b)$ Supongamos las siguientes funciones polinómicas $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ y las graficamos en el geogebra.  En este ejemplo podemos observar como en el intervalo (a,b) la función f es mayor que la función g en todos sus puntos. Supongo que para que todos los valores entre a y b coincidan f=g. Para que en el intervalo (a,b) se cumpla que un punto intermedio f sea mayor que g tiene que pasar f(c) tiene que ser mayor que g(c), con c punto intermedio entre a y b. y cualquier otro punto intermedio entre a y b, debe cumplir lo mismo. $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$, $f>g$ Luego $x>x^2$ Luego $x(-x+1)>0$ Caso 1: $x>0$ ó $1>x$, solución: $(0,1)$ Caso 2: $x<0$ ó $1<x$, solución: vacía Luego en el intervalo $(0,1)$, sucede que $f>g$. No enuncia la propiedad completa. Uso incorrecto de ejemplos para demostrar. Mal resuelvo.	**Uso de ejemplos particulares para demostrar una propiedad.**
		- Explicar su resolución	**No** resuelve.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión	**No** resuelve.	

		coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A6	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$ Si $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$ Entonces la función es convexa en el intervalo (a,b). Entendió sobre qué trata la definición. Si una función f(x) es menor a la recta secante de la misma, dentro de un intervalo (x_1, x_2), entonces la función resulta convexa en ese intervalo. Por ejemplo tenemos la función x^2. Trabajaremos en el intervalo (1/2; 2) Primero vemos si verifica $x^2 < \frac{4-1/4}{2-1/2}(x - 1/2) + 1/4$ $x^2 < 5/2(x - 1/2) + 1/4$ $x^2 < \frac{5}{2}x - 1$  Notamos que en el intervalo la función resulta convexa. a) La formulación del enunciado de la consigna corresponde a la definición de convexidad. ok ➔ Uso de ejemplo para explicar. No explica el lenguaje simbólico, no hace una relación entre lo que comenta y lo que está escrito. Utiliza nuevos conceptos (llama recta secante a la recta del enunciado) que tampoco explica.	**Responde correctamente a la 1ra parte del ítem a) pero NO explica/relaciona la definición que está en lenguaje simbólico.**
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una	**NO** responde.	

		demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto del 1b): sobre cómo le explicaría a los alumnos: Si tendría (tuviera) que explicar la consigna a un alumno, aclararía que lo definido se da en un determinado intervalo. Daría la definición y la fórmula para calcular la recta secante. Lo explicaría con lenguaje natural, ya que a veces a los estudiantes se les dificulta interpretar los símbolos. No explica, y dice que no va a hacerlo, el uso de los símbolos. Prefiere no utilizarlo por la dificultad de su comprensión. Sobre 2c) cómo explica a un compañero lo que escribió: Se que f y g son dos funciones distintas y también se que se cortan en dos puntos, entonces lo que yo pienso es que si la recta tangente de f en cada punto dentro de mi intervalo es más grande que la recta tangente de g en los puntos que se encuentren dentro del intervalo, si pasa eso entonces siempre será mayor que g en el intervalo. También lo pienso con los puntos se que para que f sea más grande en el intervalo para cada valor que le dé a c, con c entre (a,b), tiene que ser mayor que el mismo punto evaluado en g. No considera hipótesis de continuidad implícita. Explica en lenguaje natural el enunciado, no la demostración. No explica el uso del lenguaje, solo traduce lo que está escrito.	**Preferencia de un lenguaje por sobre el otro por la simplicidad o la mejor comprensión… no por la rigurosidad.** **Explicación del enunciado en lenguaje natural, no de la demostración que realicen de la propiedad.**
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Respecto al lenguaje simbólico y natural considero que es de suma importancia que ambos se den en el aula. El lenguaje natural es importante para que el estudiante pueda comprender los enunciados, definiciones y ejercicios matemáticos. Por otro lado es necesario que comprenda el lenguaje simbólico para que de manera autónoma logren interpretar los ejercicios, problemas o cualquier enunciado matemático. Considera el lenguaje natural como una explicación para entender lo que se pide/dice. No aclara algo sobre la rigurosidad de ambos. Hace hincapié en la importancia del natural	**Al hablar de la importancia del lenguaje natural, están hablando de ellos?!?!**

<table>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="3">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar</td><td>Esto no se trabaja en el TP3</td><td></td></tr>
<tr><td>- Explicar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I4
Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Consigna 2:
Sean f y g $f(a)=g(a)$ $f(b)=g(b)$

$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_0$
$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$

Si f convexa y g es cóncava

Si recta bajo de f es mayor que la de g

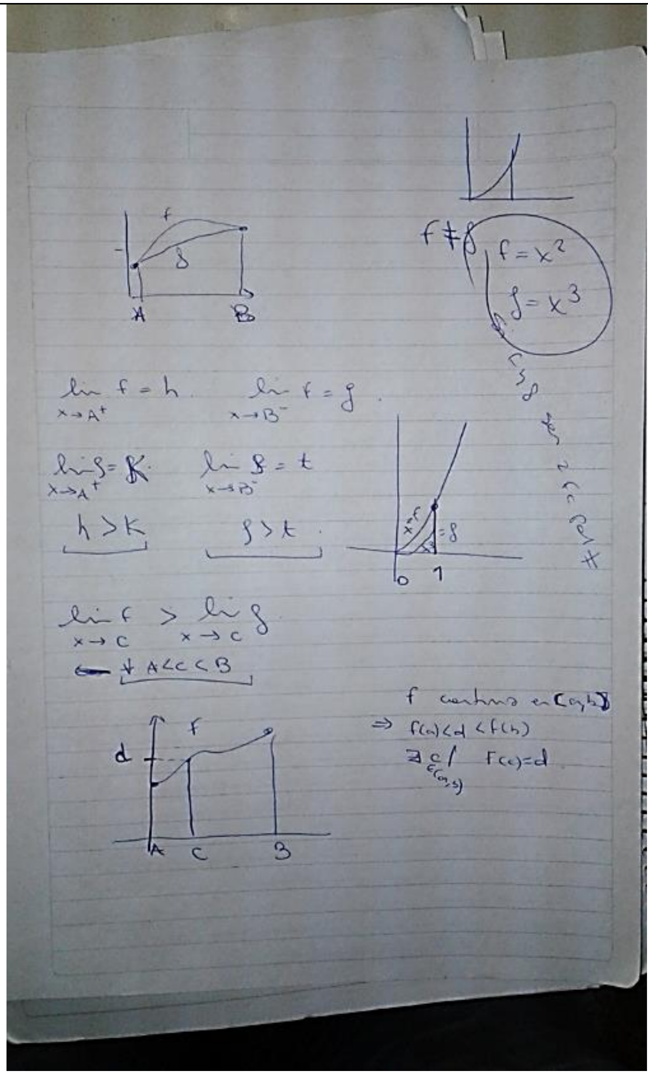
Si $f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} \ldots + a_0 = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} \ldots + b_0 = g(a)$

$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} \ldots + a_0 = b_n b^n + b_{n-1}b^{n-1} \ldots + b_0$

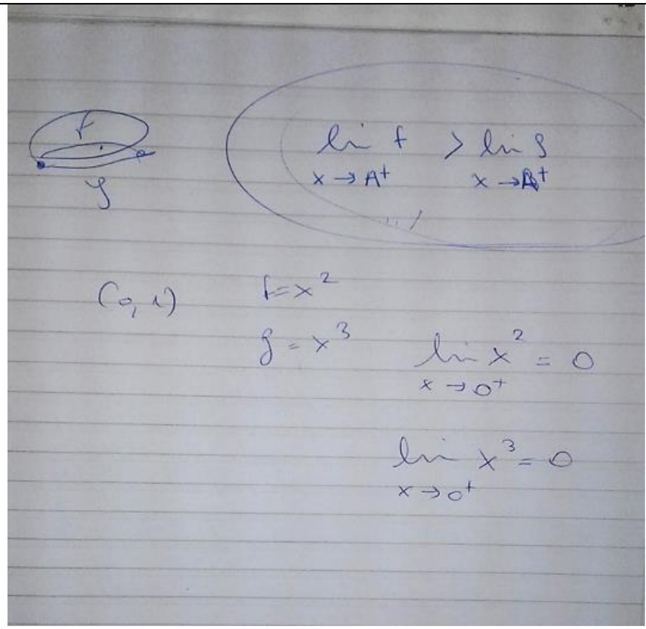
$f = a_n a^n + \ldots + a_0 = b_n a^n + \ldots + b_0$
$g = a_n b^n + \ldots + a_0 = b_n b^n + \ldots + b_0$

$a_n a^n + \ldots + a_0 = b_n a^n + \ldots + b_0$
$a_n b^n + \ldots + a_0 = b_n b^n + \ldots + b_0 \longrightarrow$
$a_n c^n + \ldots + a_0 = b_n c^n + \ldots + b_0$
$a_n d^n + \ldots + a_0 = b_n d^n + \ldots + b_0$

$a_n a^n - b_n a^n + \ldots + a_0 - b_0 = 0$
$(a_n - b_n)a^n + (a_0 - b_0) = 0$
$(a_n - b_n)b^n + (a_0 - b_0) = 0$
$(a_n - b_n)(a^n - b^n) = 0$
$\boxed{a_n = b_n}$ $\boxed{a^n = b^n}$

f
A
B
f ≠ g
f = x2
g = x3
lim f = h
x→A+
lim f = g
x→B-
lim g = K
x→A+
lim g = t
x→B-
h > K
g > t
0
1
lim f > lim g
x → c
∀ A<c<B
d
f
A
C
B
f continua en [a,b]
⇒ f(a)<d<f(b)
∃ c∈(a,b) / f(c)=d



Utilización de ejemplos para pensar la propiedad.
Planteo en general, pero no llega a concluir.

b) Si la función coincide en todos los valores de f y g entonces f=g. Enunciado incompleto. No consideran hipótesis implícita

Pero f≠g Por lo tanto no es posible que f y g coincidan en todos los valores del intervalo.

Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Si se cumple que

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) > \frac{g(x_1)g(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + g(x_0)$

Es decir, la recta tangente de f es mayor a la recta tangente de g en el intervalo dado No corresponde!

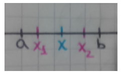
entonces en todos los puntos entre a y b la f siempre es mayor que g.

Otra forma

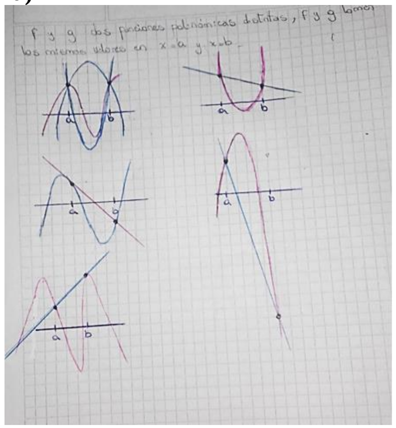
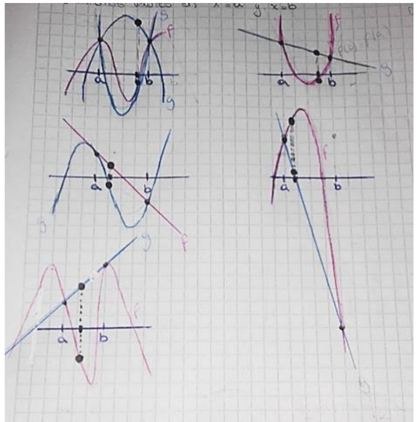
Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Si se cumple que para todo c$\in(a,b)$ f(c) > g(c), es decir, para todo c que se encuentre dentro del intervalo (a,b) siempre la función f evaluada en c será mayor que la función g evaluada en c. Entonces en todos los puntos entre a y b la f siempre es mayor que g. El "entonces" no dice nada nuevo, repite lo anterior.

Plantea otra forma pero lo que quiere decir es distinto a la primera! No son equivalentes.

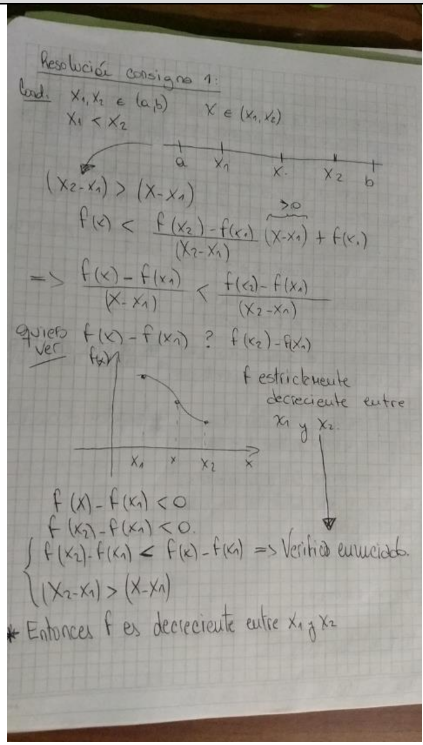
		- Explicar su resolución	Se que f y g son dos funciones distintas y también se que se cortan en dos puntos, entonces lo que yo pienso es que si la recta tangente de f en cada punto dentro de mi intervalo es más grande que la recta tangente de g en los puntos que se encuentren dentro del intervalo, si pasa eso entonces siempre será mayor que g en el intervalo. ¿qué significa que una recta sea "más grande" que otra? También lo pienso con los puntos se que para que f sea más grande en el intervalo para cada valor que le dé a c, con c entre (a,b), tiene que ser mayor que el mismo punto evaluado en g. Intenta explicar en lenguaje natural lo que escribió en natural y simbólico. Es una resolución errónea.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Al realizar la consigna tuve dificultades en encontrar la solución. Primero trate de relacionarlo con la consigna 1. Pero luego me di cuenta que no me servía, luego pensé en la recta tangente que tenía que ser más grande en f, pero no me gustaba mucho la idea así que decidí desarrollar a f y g como polinomios de grado n, pero no podía llegar a concluir nada. Finalmente me quede con la idea de las rectas tangentes. También pensé que la condición podría ser que se cumpla para todo c perteneciente al intervalo. La condición que propuse no sé si es correcta, quizá tendría que haber investigado más y probado. Utilice varias heurísticas como trabajar hacia adelante, generalmente en todos mis intentos partí de los datos dados. También realice un dibujo para ver que podría pasar entre las funciones. Analice ejemplos y descarte una posible solución. Utilice varias heurísticas para realizar el ejercicio. Reflexiona sobre los distintos intentos que realizó, las heurísticas puestas en juego. Entiende que lo que entregó no está correcto, pero decidió hacerlo porque los otros caminos le cerraban menos.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A7	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	A continuación explicaré con palabras qué significa qué $\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2} \in (\boldsymbol{a; b}), \boldsymbol{x_1 < x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_{1;}\, x_2})$**:** $$\boldsymbol{f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$$ Para todo x_1, x_2 que están dentro del intervalo $(a; b)$, x_1 es menor que x_2 y para todo x que está en el intervalo $(x_{1;}\, x_2)$ resulta que una función f es menor que el cociente de la resta entre la función evaluada en x_2 y x_1 y la resta de x_2 y x_1 por el producto de $(x - x_1)$ sumado a f evaluada en x_1. Veremos en un gráfico la representación de la primera parte, es decir la relación que hay entre los intervalos,  La explicación es decir en palabras lo mismo que está escrito en lenguaje simbólico, no pasa al lenguaje natural. SI bien entiende que se trata de una definición, no concluye que es sobre convexidad.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	Considero que sobre la formulación del enunciado se corresponde a una definición, ya que primero se da pautas $(\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2} \in (\boldsymbol{a; b}), \boldsymbol{x_1 < x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_{1;}\, x_2}))$ para luego definir algo, en este caso que $\boldsymbol{f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$**.** La explicación es muy superficial, no sabe qué está definiendo.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto de 1b): sobre la explicación a los alumnos de por qué lo que explica se corresponde a una definición: Si explicara lo presentado en una consigna a alumnos sí haría aclaraciones con respecto al lenguaje simbólico puesto que en un ámbito escolar los alumnos no están acostumbrados a este lenguaje, les señalaría qué significa cada símbolo y además aclararía que cuando algo	

			matemático está expresado así es porque vale para todos los números (en el ámbito que estemos trabajando, naturales, enteros, etc) y que los ejemplos sólo sirven en algunos casos. No explica por qué lo que se da en la consigna se corresponde con una definición, sin embargo explica qué utilizaría al dirigirse a alumnos de colegio. No hay una correspondencia entre las explicaciones entre distintos lenguajes. Respecto del 2c) sobre cómo explicarle a un compañero qué escribió y por qué: Pensá en dos funciones polinómicas, podemos pensar en una función cuadrática y una cúbica, voy a decir que la polinómica es f y la cúbica es g, fíjate que f y g coinciden en el punto x=a y x=b y además, f es mayor que g en ese intervalo a, b. si elijo un punto p1 veo que f(p1) es mayor que g(p1), ahora elijo p2 y veo f y g evaluadas en ese punto, ves que f(p2) es mayor que f(p2). Fijate que para todos los p que tome entre a y b, f es siempre mayor que g. (Le iría dibujando el esquema en una hoja mientras se lo explico). La explicación va directo a lo que escribió, no a cómo se organizó ni lo que quise hacer. Da indicaciones de qué haría porque no termina de explicarlo. Utilización de ejemplos para explicar.	**Utilización de ejemplos para explicar.** **Repetición de lo que está escrito en la resolución.**
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Si bien el uso simbólico es más complicado para los alumnos en una clase, como también el explicarlos, creo que este es más importante que el lenguaje natural (los alumnos están más habituados a este) ya que hace que ellos tengan un más amplio conocimiento sobre lo matemático. En mi caso preferiría utilizar el lenguaje simbólico, no sé si en manera predominante pero siempre presentando todo en este lenguaje para luego pasar al natural. La reflexión sobre el uso del lenguaje está relacionado a cuál es más accesible, cuál es conveniente utilizar con chicos que no están acostumbrados al uso de símbolos. No hace referencia a la rigurosidad de ninguno.	
Conoci miento del	**I3** Resolución de una consigna, actividad	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	

	o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	**a)**   Los intentos en borrador son gráficos para orientar la resolución. No hay desarrollo simbólico. **b)** **I)** Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumple que toman los mismos valores en $x = a$ y $x = b$ no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. No demuestra. **II)** Si en un punto intermedio, al que llamaré p, entre a y b la función f es mayor que la función g, debe cumplirse que ese p evaluado en f debe ser mayor que p evaluado en g, es decir $f(p) > g(p)$. No demuestra. No entiendo a qué se refiere con estos puntos. **<u>Proposición:</u>** Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y $x = b$ y que además $f(x) > g(x)$ evaluada en todos los puntos entre a y b entonces en todos los puntos entre a y b, la función f es siempre mayor que g. **<u>Demostración:</u>** Sabiendo que f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y $x = b$ y que además $f(x) > g(x)$ ¿dónde? supongo que existe un punto p ¿dónde? tal que $g(p) > f(p)$, pero esto es un absurdo pues contradice a la hipótesis que dice que $f(x) > g(x)$, entonces $f(p)$ es estrictamente mayor que $g(p)$ es decir f es mayor que g evaluada en todos los puntos entre a y b.	

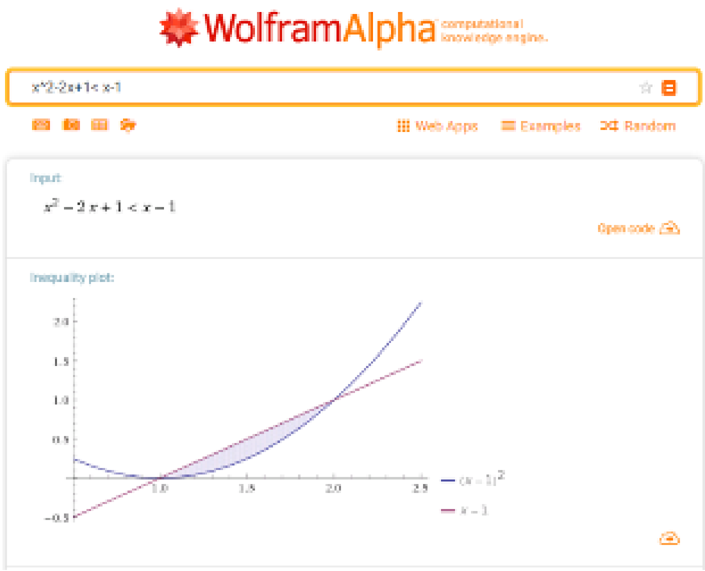
			No utiliza hipótesis implícita de continuidad.	
		- Explicar su resolución	Pensá en dos funciones polinómicas, podemos pensar en una función cuadrática y una cúbica, voy a decir que la polinómica es f y la cúbica es g, fíjate que f y g coinciden en el punto x=a y x=b y además, f es mayor que g en ese intervalo a, b Esto era lo que había que probar, pero el "además" da la sensación de que se refiere a otra hipótesis. si elijo un punto p1 veo que f(p1) es mayor que g(p1), ahora elijo p2 y veo f y g evaluadas en ese punto, ves que f(p2) es mayor que f(p2). Fijate que para todos los p que tome entre a y b, f es siempre mayor que g. (Le iría dibujando el esquema en una hoja mientras se lo explico). Utilización de ejemplos particulares para explicar.	**Utilización de ejemplos particulares para explicar.**
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Para poder lograr la demostración realizada partí observando los diferentes gráficos realizados, teniendo en cuenta principalmente las hipótesis de la proposición. No estoy segura de que la demostración sea correcta ya que reafirmo lo que ya está escrito de una manera diferente, yo creo que estoy demostrándolo pero a la vez veo que la demostración es la proposición escrita de otra manera. Explica cómo pensó la consigna, dice tener en cuenta las hipótesis pero considera solamente las explícitas. No toma en cuenta que se trabaja con funciones continuas. Entiende que su demostración no es correcta: "reafirmo lo que ya está escrito de una manera diferente". Esto puede hacer referencia a dos cuestiones: 1) Que entienda que usa lo que quiere probar 2) Que no entienda que al demostrar un resultado lo que hace es confirmar su veracidad.	**Las reflexiones hacen referencia a lo vivido a la hora de encarar la resolución, no a lo hecho.**

Descriptor		Explicación	Evidencias de A8	En síntesis…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	 Borrador de la consigna 1: escritura incompleta, concepto equivocado. Considero que el enunciado se trata de una propiedad. Digo esto porque en el enunciado dado unas condiciones se muestra que una relación, en este caso la desigualdad, es válida. No sabe qué es una propiedad ni definición.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una	No se trata de una demostración porque no hay pasos que se sigan para mostrar la validez del enunciado. Además no se trata de una demostración, un lema, una proposición pienso yo por la forma en que está redactado. Estarían faltando hipótesis con las cuales conjeturar el enunciado. Explica a través del descarte… dice por qué no es una demostración. Pero tampoco dice por qué no es una definición (no lo considera)	**mal**

		definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)		
		- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto al 1b) Al momento de explicar la consigna a los alumnos aclararía algunos de los símbolos a los alumnos. Quizás la explique oralmente señalando los símbolos que voy nombrando en la oralidad. Hace referencia a una explicación textual del lenguaje, no a una explicación de lo que ello significa. Respecto al 2c) **NO** resuelve.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Sobre el uso de ambos lenguajes creo que en una clase con alumnos de secundaria es importante que manejen el lenguaje simbólico pero no sería tan estricto como si en niveles más avanzados. En mi caso comenzaría utilizando mayormente el lenguaje natural y de a poco introduciría en lenguaje simbólico. Igualmente al alumno que le interese leer algún libro matemático le va a resultar imprescindible saber el lenguaje simbólico, sobre todo porque este lenguaje es universal. En cambio el lenguaje natural puede variar dependiendo de quién esté hablando sobre alguna cuestión matemática. En esto último me refiero a cuando se usan distintos términos para referirse a un mismo concepto. Reflexiona sobre qué usar pero no por qué hacerlo de esa manera. No explica por qué usaría el natural “mayoritariamente”. La forma de elegir una por sobre otra es la “practicidad” para entender. Lenguaje simbólico como “universal”, es decir lo acepta como algo universalmente válido pero no hace referencia a la rigurosidad.	

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	**NO** resuelve.	
		- Explicar su resolución	**NO** resuelve.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración,	**NO** resuelve. El alumno dice explícitamente que no le salió.	

		formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…		

Descriptor		Explicación	Evidencias de A9	En síntesis…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Que una función verifique esa condición, significa que estará por debajo de la recta secante a ella misma, recta que pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Por ejemplo:  Uso de ejemplos particulares para explicar lo que dijo en lenguaje natural. Considero que corresponde a una propiedad, ya que tiene condiciones que hacen que sea válido lo que continúa después Asocian la idea de “propiedad” a que tenga condiciones el enunciado. No explica sobre qué está diciendo algo esta propiedad.	**Propiedad=enunciado con condiciones.**
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída	**NO** resuelve.	

		demostró el enunciado que dice demostrar…)		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Sobre el ítem 1b) Sí, aclararía que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son los valores de la función en ese punto, y que cuando dice $\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2})$ se refiere a un intervalo. La explicación se reduce a partes de lo que está simbólicamente escrito. Sobre el ítem 2c) **NO** resuelve.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Considero que es necesario enseñar el sistema de representación, el código propio de la matemática, para dar una visión completa de la materia. El simbólico es el lenguaje propio de la matemática, universal, que además concreta de manera concisa lo que uno quiere decir en palabras, modeliza. Y el natural a su vez, traduce y hace más cercano lo que los símbolos representan. Puede que el simbólico se vea más riguroso, pero eso es hasta que se le va dando el sentido y comprendiendo por qué hay ciertas reglas para la escritura en símbolos. Usaría ambos lenguajes según lo que necesite en la clase. ¿Riguroso = sin sentido? Porque aclara que es simbólico hasta que se le va dando sentido y comprendiendo la forma de usarlo. Reconoce las características de cada lenguaje, de manera mecánica. Pareciera que se le mezcla cuando quiere explicarlo. Natural como simplificación del simbólico.	**Saben características de los lenguajes de manera teórica, no pueden explicarlo luego (o mezclan)**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		

	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	**NO** resuelve.	
		- Explicar su resolución	**NO** resuelve.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	No logré demostrar nada, por eso no completo los puntos c) y d). Si puedo ver que en lo mostrado utilicé como heurísticas el hacer gráficos, analizar varios casos, razonar por analogía con el inciso a). Análisis de heurísticas para comenzar a pensar la consigna. No hay evidencias.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A10	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Que la función $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$ verifique las condiciones mencionadas significa que el gráfico de la función evaluada en cualquier valor **x** que se encuentre entre $\mathbf{x_1}$ **y** $\mathbf{x_2}$ está por debajo de la recta que contiene a los puntos, $\mathbf{(x_1; f(x_1))}$ **y** $\mathbf{(x_2; f(x_2))}$ en el intervalo que tiene como valor mínimo a $\mathbf{x_1}$ y como valor máximo $\mathbf{x_2}$. Explicación como traducción literal de lo que está escrito en símbolos.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	A mi parecer es una proposición ya que se puede verificar si es verdadera o falsa. Y con las condiciones planteadas verificamos que se cumple en el intervalo indicado.	**Proposición como enunciado al que se debe verificar su veracidad.**
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Con respecto al 1b): cómo le explicaría a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con una definición: Para explicar el enunciado a un alumno le explicaría en lenguaje natural a que refiere, le diría que teniendo en cuenta un intervalo que empieza en x_1 y termina en x_2 si se toma un valor cualquiera que pertenezca a dicho intervalo y lo evaluamos en f(x) siempre va a dar como resultado un número menor que al hacer la operación planteada del lado derecho de la ecuación. Es decir que el gráfico de f en ese intervalo siempre va a estar por debajo de la recta obtenida a partir de la realización de las operaciones resueltas. No es lo que pensamos lo que explican, sino que cuentan cómo se lo explicarían a un alumno. En este caso, traduce en palabras lo que en símbolos se encuentra en la consigna. Con respecto al 2c) sobre cómo explicarle a un compañero lo que hizo: A partir de realizar varios ejemplos di cuenta que tomando f y g dos funciones polinomicas distintas que cumplían con las condiciones dadas no siempre se cumplía la relación de que f sea mayor que g en un intervalo (a;b) recordando la consigna resuelta anteriormente , vemos	

			que si la función f es una recta , es decir una función lineal siempre se cumple lo antes mencionado Mezcla las consignas, está mal resuelto.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Con respecto al lenguaje simbólico y natural que suele usarse en matemática considero que no tienen la misma rigurosidad, el lenguaje simbólico es mucho más riguroso que el natural, por otra parte utilizaría de forma predominante el lenguaje simbólico en matemática porque considero que es un lenguaje abreviado, útil y de carácter universal que ayudara a los chicos a entender cualquier demostración proposición, propiedad, etc. que se les presente o quieran observar de algún libro. Sin embargo me parece de suma importancia ambos lenguajes en el uso matemático. Ya que el lenguaje natural suele ser más claro y sencillo de entender. Da características de ambos lenguajes pero no los relaciona. Entiende la rigurosidad de cada uno de ellos, la importancia de la conveniencia de uno o de otro, y el carácter universal del simbólico.	

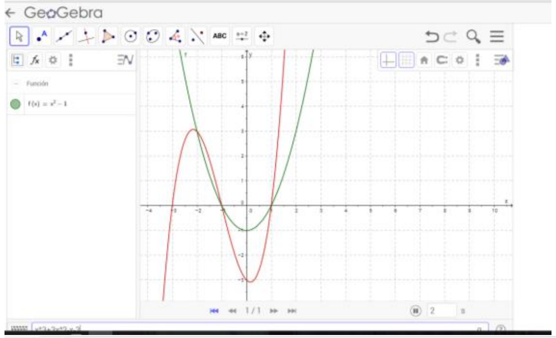
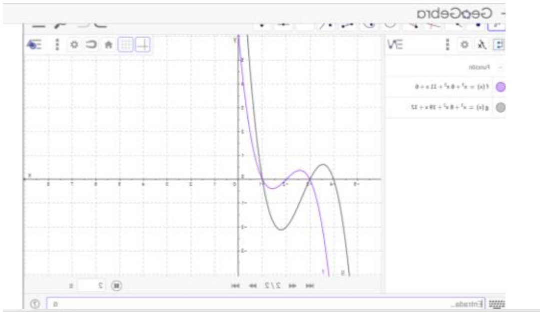
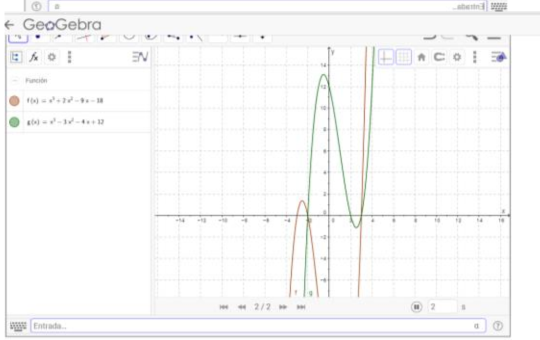
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	$f(a) = g(a)$ $f(b) = g(b)$ para todo $x \in (a,b)$ $f > g$ Busco ejemplos para verificar si es posible si $f(x): 3x^3 - 2$ y $g(x): 4x^2 - x - 2$ $f(1) = 1$ $g(1) = 1$ $f(0) = -2$ $g(0) = -2$ grafico en geogebra para observar ambos gráficos Se debería cumplir que en el intervalo $(0;1)$ la función f siempre ~~esté~~ sea mayor que g y no se cumple ejemplo 2 $f(x) = 3x^4 - x$ y $g(x) = 11x^2 + x$ $f(2) = 46$ $g(2) = 11.4 + 2 = 46$ $f(0) = 0$ $g(0) = 0$ grafico : $g > 0$ en $(0;2)$ Si $f(x) = 3x^2 - 1$ y Tomo dos valores de f evaluo en f · $f(3) = 3.3^2 - 1 = 26$ $(3;26)$ · $f(1) = 3.1^2 - 1 = 2$ $(1;2)$ Si tengo en cuenta esos dos puntos armo una recta q' pasa por esos dos puntos: $m = \frac{26-2}{3-1} = \frac{24}{2} = 12$	

			$2 = 12.1 + b$ $2 = 12 + b$ $2 - 12 = b$ $10 = b$ $y = 12x + 10$ Cumple!! f: es una función lineal estrictamente creciente $g = -x^2 - x$ $g(1) = -2$ $g(3) = -9 - 3 = -12$ $\frac{-2-12}{1-3} = \frac{-14}{-2} = 7$ $-2 = 7 \cdot 1 + b$ $-2 - 7 = b$ -9 si $a \neq 0$ tambien vale. Uso de ejemplos de funciones particulares para la resolución. b) Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además f es la recta que contiene a los puntos (a; g(a)) y (b; g (b)), entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. Mezcló ambas consignas. Mal resuelto. No está demostrado.	

		- Explicar su resolución	A partir de realizar varios ejemplos di cuenta que tomando f y g dos funciones polinomicas distintas que cumplían con las condiciones dadas no siempre se cumplía la relación de que f sea mayor que g en un intervalo (a;b) recordando la consigna resuelta anteriormente , vemos que si la función f es una recta , es decir una función lineal siempre se cumple lo antes mencionado. Mal resuelto, mezcla las consignas. Trata de explicar su enunciado en lenguaje natural, no demuestra.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Si bien no pude llegar a una demostración de dicha proposición. Para llegar a deducir cual era la condición adecuada utilicé varias heurísticas, como por ejemplo, trabajar hacia delante, recurrir a teoría relacionada, razonar por analogía ,realizar gráficos, reinterpretar el problema en un lenguaje diferente, analizar ejemplos, verificar la respuesta en casos particulares. No me queda claro si entiende que haber utilizado esas heurísticas no lo llevó a ningún lado.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS A11	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	**NO** resolvió.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	**NO** resolvió.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto del ítem 1b) **NO** resolvió. Respecto del 2c) sobre cómo le explicaría a un compañero: **NO** resolvió.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	**NO** resolvió.	

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	**NO** resolvió.	
		- Explicar su resolución	**NO** resolvió.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones	En un principio, para resolver esta consigna, realice varios gráficos en GeoGebra que cumpla con lo pedido. Dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b. No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. No logro terminar este ejercicio tampoco.	

		matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	   	

			Uso de ejemplos particulares de funciones para pensar en la consigna. Muestra sus intentos pero no la resolución.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A12	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	La formulación del enunciado corresponde a una propiedad ya que bajo las condiciones $(\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2} \in (\boldsymbol{a,b}), \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_1, x_2}))$ se verifica la propiedad de que $\boldsymbol{f(x)} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})+\boldsymbol{f(x_1)}$. Responde al pedido de indicar qué es el enunciado, pero no explica qué se está trabajando (contenido)	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	Lo que me lleva a suponer que es una propiedad es la frase “verifique la siguiente condición:”.	**Propiedad = enunciado que tiene que verificar una condición.**
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto del 1b) sobre cómo le explica a los alumnos que lo que trabaja se corresponde con la definición: La aclaración que le haría al alumno es que: cuando se habla de x1 y x2 son cualquier numero que pertenezcan al dominio de f en el intervalo (a,b), que estos x1 y x2 forman otro intervalo más chico en donde se encuentra x. Se reduce a la explicación de una parte de los símbolos de la definición. Incompleto y mal. Respecto el 2c) sobre cómo se lo explicaría a un compañero: **NO** resuelve.	

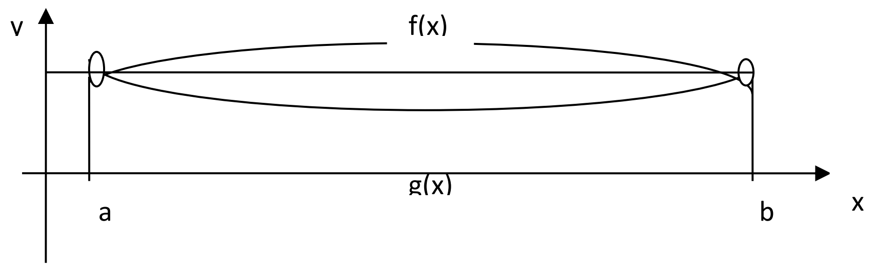
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural, considero que ambos son importante en una clase de matemática, pero considero que cuando los alumnos están teniendo sus primeras aproximaciones a lo que es el lenguaje simbólico, en las clases debe predominar lo que es el lenguaje natural y a medida que uno avanza en la enseñanza debe ir usando cada vez más el lenguaje simbólico. Plantea el lenguaje de a uno, no a la vez. Explica que primero se introduce el tema con lenguaje natural para después, paulatinamente, introducir el otro.	
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	a) Si f y g coincidieran en todos los puntos del intervalo (a,b) entonces f y g serian iguales pero como en el enunciado dice que son distintas no puede pasar que coincidan en todos los puntos del intervalo. b) Respecto a esta consigna no la pude demostrar pero a través de varios gráficos de funciones polinómicas vi que la condición para que en el intervalo (a,b) f sea siempre mayor que g, debe cumplirse que en ese intervalo f y g no tengan otro punto en común. Utiliza lenguaje natural para describir la idea de resolución. No resuelve. No considera hipótesis implícita.	
		- Explicar su resolución	**NO** resuelve.	

		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	**NO** resuelve.	

DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A13**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Que una función *f* verifique la condición anterior significa que se encuentra debajo de la recta secante a la gráfica que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ pertenecientes al intervalo (a, b), es decir que estaríamos hablando de una *función cóncava hacia arriba* o también conocida como *función convexa*. ok La formulación del enunciado de la consigna corresponde a la definición de *función convexa*. Correcto: comprende lo que se encuentra escrito, lo explica en lenguaje natural. Entiende que se trata de una definición.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	Lo que me permitió darme cuenta que el enunciado se trataba de una definición es la "introducción" que se hace en el enunciado, es decir que algo tiene que suceder tal que suceda la otra parte del enunciado. No es claro. Como contraejemplo se puede poner cualquier propiedad!	**Definición: se da cuenta por la forma en que está escrita.**
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Sobre el ítem 1b), respecto a cómo le explicaría a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con la definición: Si pensara en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, sí haría algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usaría para explicarlo. Dicha aclaración sería sobre el uso de notaciones que se hacen, ya que aparecen "símbolos", los cuales los alumnos tal vez no conozcan/recuerden el significado o no los hayan aprendido previamente, como por ejemplo, el símbolo que representa a la palabra *pertenece* o el símbolo que representa a *para todo* Pretende hacer una traducción literal pero no explicar por qué se corresponde con la definición. Sobre el 2c) respecto a cómo se lo explicaría a un compañero: Teniendo f y g dos funciones polinómicas distintas que toman los mismos valores en x = a y en x = b, la consigna pregunta, en el ítem a), si es posible que dichas funciones coincidan en	

			todos los valores entre a y b. Para que eso suceda f y g deberían ser la misma función (y eso no puede suceder ya que en el enunciado dice que ambas son funciones distintas) o, la otra opción, sería que una de ellas sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo (que esta sería la respuesta correcta). Es decir que para que se cumpla que f sea mayor que g, tal como lo pide el ítem b), la función f debe ser cóncava hacia abajo y la función g debe ser cóncava hacia arriba tal que queden representadas como se muestra en el gráfico hecho anteriormente, es decir que f debe estar "por encima" de g y es así que se diferencian, por su tipo de concavidad. Explicación ustilizando lenguaje natural: trata de decir de otra manera lo escrito en lenguaje simbólico (que no es correcto). Acá sí lo utiliza como "sinónimos".	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Con respecto al uso del lenguaje simbólico y natural que suele darse en Matemática y si yo estuviese a cargo de una clase, usaría de forma predominante el lenguaje simbólico para que mis alumnos se acostumbren a escribir de forma adecuada en la materia y no con palabras como sería si usáramos el lenguaje natural. Esto no quiere decir que dejaría de usar el lenguaje natural. Al contrario, en el lenguaje natural hay una intención de comunicación que se da entre partes y además, hay mensajes a transmitir y recibir, ya sea del docente al alumno o viceversa pareciera que con el simbólico no!. En cambio, el lenguaje simbólico incluye una serie de significantes con sus significados para cada contexto comunicacional en el que sean utilizados, es decir que hay palabras que están representadas por "símbolos" que algunas personas conocemos (principalmente las que estudiamos "la rama de las ciencias exactas") o que comenzamos a conocer cuando nos introducimos en "el mundo matemático". Dichos símbolos se utilizan para la formulación de enunciados en definiciones, proposiciones, teoremas, lemas, propiedades, entre otros. Esta alumna no toma a los dos lenguajes para utilizarlos en paralelo, sino que uno para principiantes y otro para los que ya conocen un poco el tema. Reconoce la rigurosidad del lenguaje simbólico, pero lo deja para un nivel superior.	
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		

<table>
<tr><td></td><td></td><td>- reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I4
Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.</td><td>
f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b.

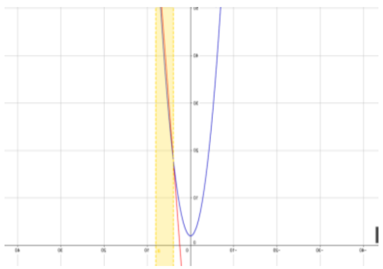
Resolución de la consigna:
a) Es posible que f y g, funciones polinómicas, coincidan en todos los valores entre a y b. Esto quiere decir que una de las funciones sería cóncava hacia abajo y la otra sería cóncava hacia arriba. De este modo, ambas funciones tomarían los mismos valores, que se encuentran ubicados entre x = a y x = b.


Tiene la idea pero resuelve incorrectamente.

b) Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además f es cóncava hacia abajo y g es cóncava hacia arriba entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.
Insiste con un tema de concavidad que no es correcto en esta consigna.
Definición de función convexa: No es lo que se pide demostrar!
Para cualesquiera a, b ∈ I con a < b, la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) tiene la ecuación $y = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$
Por lo tanto, f será convexa cuando, para cualesquiera a, b ∈ I con a < b se tenga que
$$f(z) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(z-a)\forall z \in [a,b]$$
O equivalentemente,
$$f(z) \le \frac{b-z}{b-a}f(a) + \frac{z-a}{b-a}f(b)\ \forall z \in [a,b]$$

Demostración: ¿está demostrando la definición? → porque toma una equivalencia de la definición, demuestra eso.
Dado t ∈ [0, 1] podemos tomar z = a + t(b − a) ∈ [a, b] y esto nos dice que
$$f\big((1-t)a+tb\big) \le (1-t)f(a)+tf(b)\ \forall t \in [0,1]$$
</td><td></td></tr>
</table>

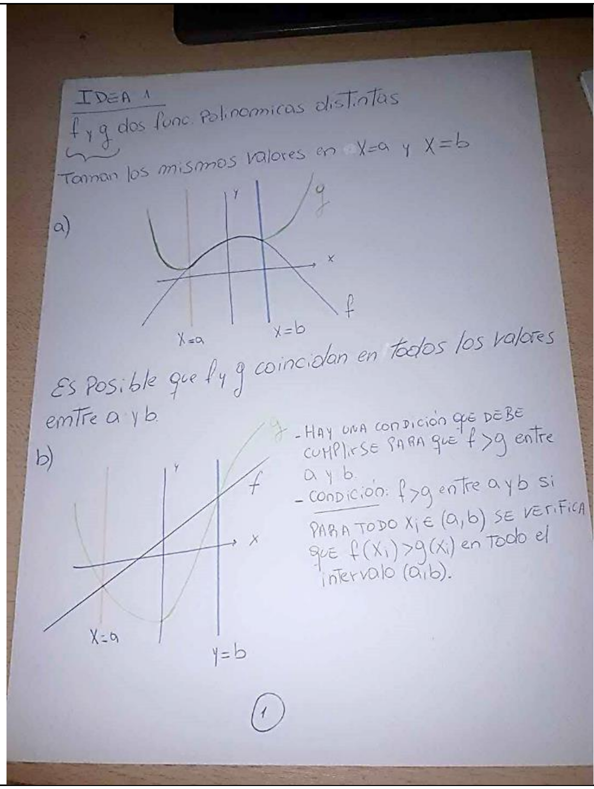
			Pero recíprocamente, dado z ∈ [a, b] podemos tomar $$t = \frac{z-a}{b-a}, \quad que\ verifica \quad t \in [0,1] \quad y \quad 1-t = \frac{b-z}{b-a}$$ con lo que $(1-b)a + tb = z\ \forall\, t\ \in [0,1]$ Finalmente, dado *I* un intervalo no trivial, tenemos que $$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y)\ \ \forall x, y \in I,\ \ \forall t \in [0,1]$$ No demuestra lo pedido.	
		- Explicar su resolución	Teniendo f y g dos funciones polinómicas distintas que toman los mismos valores en x = a y en x = b, la consigna pregunta, en el ítem a), si es posible que dichas funciones coincidan en todos los valores entre a y b. Para que eso suceda f y g deberían ser la misma función (y eso no puede suceder ya que en el enunciado dice que ambas son funciones distintas) o, la otra opción, sería que una de ellas sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo (que esta sería la respuesta correcta). Es decir que para que se cumpla que f sea mayor que g, tal como lo pide el ítem b), la función f debe ser cóncava hacia abajo y la función g debe ser cóncava hacia arriba tal que queden representadas como se muestra en el gráfico hecho anteriormente, es decir que f debe estar "por encima" de g y es así que se diferencian, por su tipo de concavidad. Está mal. La explicación es coherente con lo que quiso demostrar, pero **NO** es lo pedido.	**Mal**
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Para realizar la demostración utilicé algunas heurísticas, como por ejemplo la que llamamos *trabajar empezando por el final* ya que realicé el "paso a paso" para llegar a lo que quería probar. También *realicé un dibujo* que me sirvió como "guía" para luego poder realizar la demostración. Además, a partir de lo enunciado en la proposición, me pareció adecuado realizar la demostración de una función convexa ya a partir de su enunciado, pude darme cuenta por qué f y g tomaban los mismos valores en un determinado intervalo a, b siendo ambas funciones polinómicas diferentes. Mal uso de He. Plantea/cuenta mal lo que quiso demostrar.	**Mal** **Relacionó la convexidad de las funciones (parte 1 de la consigna) con la propiedad de la parte 2.**

DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A14**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Definimos $g(x) := \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ donde por enunciado sabemos que $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1,x_2)$. Donde reconocemos que g(x) es una función lineal por que la expresión $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ tiene el formato m.x+b donde $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ y $b = f(x_1)$. Luego llamaremos a g(x) recta secante a f(x). Esto lo vemos en el hecho de que la función g(x) es una recta que se armó con los puntos $x_1\ y\ x_2$ usando f(x). Entonces lo que vamos a tener es una función f que va a ser intersecada para una función g(x). Explica en lenguaje natural-simbólico lo que la definición presenta. Notamos que para que esto ocurra sin ningún problema, tenemos que pedir que f(x) sea una función continua. Si f(x) no es continua entonces podría ocurrir que cuando evaluamos $x_1\ y\ x_2$ para armar la ecuación de la recta, esta no interseque a f(x). Por lo tanto, pedimos que f(x) sea una función continua. Entonces, decir que $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ (es decir f(x)<g(x)) significa que f(x) es menor que la recta secante (a ella) g(x) en un intervalo (a,b) . La explicación se reduce a traducir lo que dice en el lenguaje simbólico, no habla del concepto en juego. Usando GeoGebra observamos que gr(f(x))>1 porque si f y g son ambas funciones lineales vamos a obtener la misma función. Veamos a continuación algunos ejemplos. Ejemplo 1: f(x) es una Función Cuadrática Si $f(x) = x^2 + 2$ entonces la expresión de la recta secante es $g(x) = 12 -$. Gráficamente nos queda:  Vemos que efectivamente en el intervalo (4,8) la f<g. Ejemplo 2: f(x) es una Función Cúbica Si $f(x) = x^3 - 9$ entonces la expresión de la recta secante es $g(x) = 39x -$. Gráficamente nos queda:	**Explicación de cada parte de la definición, pero no es así con la conclusión (resultado)** **Uso de ejemplos particulares para explicar.**

			 En este caso vemos que f<g en los intervalos $(-\infty,-7) y\ (2,5)$. Observamos que en varios ejemplos que hemos hecho que para funciones polinómicas de grados pares hay un solo intervalo en el que f>g. En cambio, cuando el grado de la función polinómica es impar tenemos dos intervalos. La formulación del enunciado de la consigna corresponde a una propiedad porque lo que tenemos es una serie de premisas que hacen valer una condición. Premisas: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$ Condición que se cumple con esas premisas: $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ La 2da parte de esta explicación no es correcta.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	La formulación del enunciado de la consigna corresponde a una propiedad porque lo que tenemos es una serie de premisas que hacen valer una condición. Premisas: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall\, x \in (x_1, x_2)$ Condición que se cumple con esas premisas: $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)$ Creemos que no es una definición por que no se está definiendo ningún concepto matemático y que tampoco es una demostración por que no se demuestra nada ni se pretende hacerlo. A su vez, creemos que esta “propiedad” debería incluir como bien dijimos en la resolución de la consigna, información sobre si f(x) es una función continua o especificar cuál es el dominio de la función dado que podría pasar que al elegir $x_1\, y\ x_2$, este punto, no estén en el dominio de f(x). Explica qué lo lleva a decidir que es una propiedad y por qué no definición ni teorema. Incorrecto.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	

	y simbólico), notación matemática, convenciones	- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto a 1b) sobre cómo le explicaría a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con la definición: Si pensará en explicar lo presentado en la consigna a un alumno haría la siguiente aclaración con respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma: *Luego de haber leído la consigna a la clase realizaría la siguiente aclaración: tenemos un punto (x_1, x_2) en un intervalo (a, b) donde la primera coordenada del punto es menor que la segunda coordenada.* Hay problemas matemáticos en esta explicación. No se entiende la idea. Respecto del 2c) sobre cómo se lo explicaría a un compañero: Explicación al compañero-transcripción Esto lo veremos gráficamente de la siguiente manera: • Primer paso: dibujar el plano cartesiano y trazar dos rectas x=a y x=b. • Segundo paso: graficar f y g. • Tercer paso: dibujar rectas paralelas entre a y b • Cuarto paso: chequear que para cada recta f(xi)>g(xi) • Quinto paso: concluir que f>g Piensa hacer una explicación gráfica, pero da los pasos usando lenguaje natural. No lo muestra completo.	**Utilización de gráficos para explicar.**
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Reflexión sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural El lenguaje simbólico tiene una mayor rigurosidad con respecto al natural por que exige para el alumno un mayor nivel de abstracción.Identifica al lenguaje simbólico como de mayor rigurosidad pero no es el motivo que utiliza para justificarlo. No es lo mismo decirle a los alumnos que tenemos un punto en un intervalo (lenguaje natural) que decirle tenemos que $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)$ (lenguaje simbólico). El lenguaje natural es más comprensible para los alumnos. Problemas matemáticos con el tema de puntos en un intervalo. Para enseñar matemática no es posible prescindir de alguno de los dos lenguajes. Dependiendo del tema será más apropiado usar algún lenguaje en particular El uso de un lenguaje a la vez, y no los dos como equivalentes. Lo mejor es complementar ambos lenguajes de forma tal que los alumnos logren la mayor comprensión del tema. En algunas clases, por ejemplo, conviene explicar el tema usando primero el lenguaje natural y luego profundizarlo con el lenguaje simbólico. Usaríamos esta estrategia para explicar por ejemplo función lineal, probabilidad y estadística, potenciación, etc. En otras en cambio, "quizás" es conveniente utilizar primero el lenguaje simbólico y luego hacer acercamientos utilizando un lenguaje natural. Usaríamos esta	

			estrategia para explicar por ejemplo sistema de ecuaciones, Teorema de Pitágoras, área y perímetro, etc. Usa ejemplos para los distintos temas! Si bien menciona de usar los dos, sigue haciendo hincapié en que hay que usar primero uno y después el otro.	
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	A) Intentos en borrador:	**Usa lenguaje natural y simbólico, pero ellos apoyados fuertemente en lo gráfico.**

IDEA 1

f y g dos func. Polinomicas distintas

Toman los mismos valores en X=a y X=b

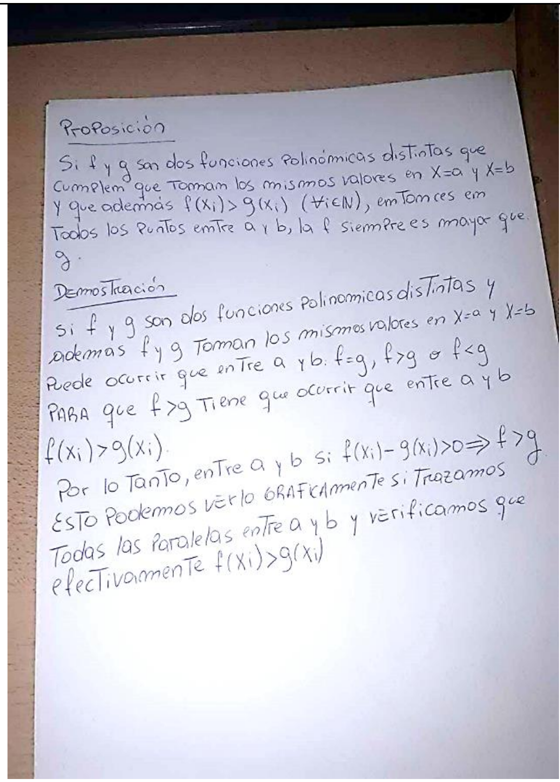
a)

Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b.

b)

- HAY UNA CONDICIÓN QUE DEBE CUMPLIRSE PARA QUE $f>g$ entre a y b.
- CONDICIÓN: $f>g$ entre a y b si PARA TODO $x_i \in (a,b)$ SE VERIFICA QUE $f(x_i)>g(x_i)$ en todo el intervalo (a,b).

1



Proposición

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplem que tomam los mismos valores en $X=a$ y $X=b$ y que además $f(x_i)>g(x_i)$ $(\forall i \in \mathbb{N})$, emtomces em todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g.

Demostración

Si f y g son dos funciones polinomicas distintas y además f y g toman los mismos valores en $X=a$ y $X=b$ puede ocurrir que entre a y b: $f=g$, $f>g$ o $f<g$

PARA que $f>g$ tiene que ocurrir que entre a y b $f(x_i)>g(x_i)$.

Por lo tanto, entre a y b si $f(x_i)-g(x_i)>0 \Rightarrow f>g$

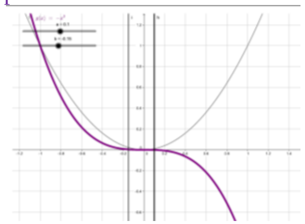
Esto podemos verlo GRAFICAMENTE si trazamos todas las paralelas entre a y b y verificamos que efectivamente $f(x_i)>g(x_i)$

El borrador incluye una primera idea y después lo mismo que realizó como resolución experta.

B) ¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?

Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. Veamos un ejemplo

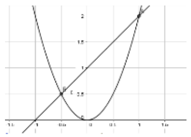
¡Demostración con ejemplos!



Estas funciones son iguales en el intervalo [-0,015; 0,015] Pierde generalidad.

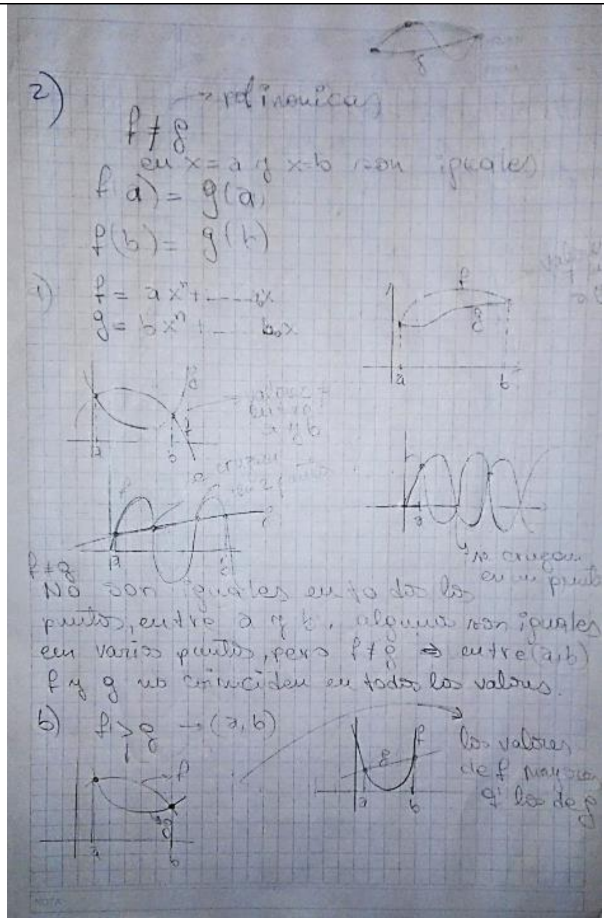
Proposición

			Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b y que además f(xi)<g(xi) $\forall\, xi \in \mathbb{N}$, entonces en todos los puntos entre a y b, f siempre es mayor que g. Incoherente: con respecto a la desigualdad, además pide xi natural? O solo i natural? En el borrador dice solo "i". Demostración Si f y g son dos funciones polinómicas distintas y además f y g toman los mismos valores en x=a y x=b. Si trazamos rectas paralelas entre a y b y en cada una se verifica que f(xi)-g(xi)>0 entonces f>g entre a y b. Impreciso. Además, ¿a qué llega? Se está refiriendo a un método gráfico para demostrar.	
		- Explicar su resolución	La explicación a un compañero (mencionada más arriba) consta de pasos a seguir para realizar con un gráfico de funciones particulares.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Yo creo que la demostración es matemáticamente correcta. Si bien, no es una demostración gráfica, dejo explicitado que lo puedo identificar gráficamente. Su intención siempre fue valerse del gráfico para probar todo. Si tenemos dos funciones en un intervalo entonces trazamos una recta vertical y vemos así cual es la función mayor. Este razonamiento no es matemáticamente incorrecto. Si! Toma un punto de un intervalo (además lo considera punto del plano, con dos coordenadas) Para lograr esta demostración realice en GeoGebra distintas funciones polinómicas y pensé de qué forma se podía mostrar que f>g en el intervalo (a, b), la mejor opción que encontré fue trazar rectas verticales y comprobar que f(xi)-g(xi)>0 con lo que efectivamente f>g. Además del tema gráfico, está el uso de ejemplos particulares para demostrar. Las heurísticas que use fueron: -Utilizar un método de expresión o representación adecuado: en este caso gráfico. -Recurrir a dibujos, esquemas o gráficos. No corresponde, se está refiriendo al anterior. -Considerar casos particulares. Todo el tiempo! -Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar. Los usa, pero no generaliza. -Introducir un elemento auxiliar: rectas verticales. Con respecto a la demostración del ítem b), es claro que no considera a la demostración como una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados. Además, no considera las hipótesis implícitas del enunciado.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS A15	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Si una función verifica que es menor que la recta secante de la misma en x_1 y x_2, la función es convexa dado que la recta secante en el intervalo x_1, x_2 está por encima de la función que forma una curva convexa. Por ejemplo, si tomamos la función $f(x) = 2x^2$y tomamos los puntos $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$. Observamos en el grafico de la función f y la recta secante x+1, en el intervalo (-1/2; 1) es mayor que la función y que la función resulta ser una curva convexa en el intervalo.  Si proponemos otra función que cumpla la condición también forma una curva convexa en el intervalo x_1 y x_2. Utilización de ejemplos para la explicación. La consigna corresponde a una demostración de convexidad, pues la condición de que una función sea menor que una recta secante en los puntos x_1, x_2 conlleva a que la función sea convexa. La explicación no dice nada más que lo que señaló antes: definición de función convexa. Además con esta consigna es posible llevar a demostrar convexidad y también concavidad, que es el caso contrario a esta condición, es decir que f será mayor que la recta secante en el intervalo x_1 ,x_2. Donde estas condiciones presentan una función convexa o cóncava. Una función cóncava es cuando dado dos puntos cualesquiera el segmento que los une queda por debajo de la curva. Y una función convexa es cuando queda por encima de la curva. Utiliza lenguaje natural para explicar el concepto. Trata, a grandes rasgos, de explicar lo que dice la consigna: no en detalle, porque no muestra cómo se lee o qué significan los símbolos. No dice que se trata de una definición, dice que es una "demostración".	**Uso de ejemplos de funciones particulares para las explicaciones.**
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una	**NO** responde.	

		demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Con respecto al 1b) donde tiene que explicarle al alumno porqué lo que le dice se corresponde con la definición: Al explicar la consigna a un estudiante aclararía, en lenguaje natural, que f(x) es una función menor que una recta secante de la forma $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$ donde $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta secante, $f(x_2)$ es la función evaluada en x_2 y $f(x_1)$ es al función evaluada en x_1, con x_1 y x_2 puntos cualesquiera de la función Al explicarle al alumno no usa todo lo que antes mencionó para explicar su conclusión. Utiliza lenguaje más formal. Con respecto al 2c) referido a la explicación de la demostración a un compañero: Si tenemos dos funciones polinómicas f y g distintas que cumple que toman los mismos valores en a y en b es decir que f(a)=g(a) y que f(b)=g(b) y que además también cumple que la recta tangente de f en el punto x_0 es mayor que la recta tangente de g en el punto x_0 , y que además f y g deben ser continuas en el intervalo a, b. Si pasa esto la función f es mayor que la función de g es decir que todos los valores de f en el intervalo son mayores que los valores que toma g en dicho intervalo. No es matemáticamente correcta. Además, cuentan la idea y no el uso del lenguaje.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Pienso que el leguaje simbólico y el lenguaje natural son importantes para la matemática ya que el lenguaje simbólico es propio de la matemática, tiene la ventaja de que prescinde del empleo de expresiones del lenguaje coloquial y permite su comprensión directa independientemente del idioma de la persona que lo emplea pero es imprescindible que sea enseñado y aprendido, para ello es necesario el uso del lenguaje natural. Es coherente, está bien. Ella intenta usar los dos lenguajes cuando explica la definición.	

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.		

			En el borrador no se hace referencia al tipo de función. b) Consigna resuelta: a) No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b, ya que para que coincidan f y g deben ser iguales en ese intervalo pero como las funciones son distintas salvo en a y en b, aunque puede suceder que coincidan en más de un punto no sucede que coincidan en todos los valores en dicho intervalo. Explicación informal. b) si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$ y que además cumple que $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) > \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + g(x_0)$ en el punto x_0 y que las funciones f y g son continuas en el intervalo a, b, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. ¡Es la única que habló de continuidad! Pero mete otras cuestiones que no corresponden.	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Ahora bien: toma la continuidad pero no lo relaciona con lo de que las funciones eran polinómicas.

NO lo demuestra.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- Explicar su resolución</td><td>Si tenemos dos funciones polinómicas f y g distintas que cumple que toman los mismos valores en a y en b es decir que f(a)=g(a) y que f(b)=g(b) y que además también cumple que la recta tangente de f en el punto x_0 es mayor que la recta tangente de g en el punto x_0 , y que además f y g deben ser continuas en el intervalo a, b. Si pasa esto la función f es mayor que la función de g es decir que todos los valores de f en el intervalo son mayores que los valores que toma g en dicho intervalo.
Es matemáticamente incorrecto! Además de considerar las rectas dados dos puntos de la función f (y g), habla de que son tangentes a f.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…</td><td>Para realizar la consigna probé con distintas formas, primero platee que los valores que debe tomar f deben ser mayores a los valores que toma g, pero con eso no pude llegar a deducir nada como condición, luego realice gráficos para ver si podía concluir alguna condición y de allí se me ocurrió que trazando las rectas tangentes a f y a g, el punto por donde pasa la recta tangente de f debería ser mayor al mismo punto por donde trace la tangente a g. No estoy segura de que lo utilizado sea matemáticamente correcto para ello debería investigar sobre si lo es o no. En la realización de la misma utilice algunas heurísticas como trabajar hacia adelante, realizar un grafico, analizar ejemplos,

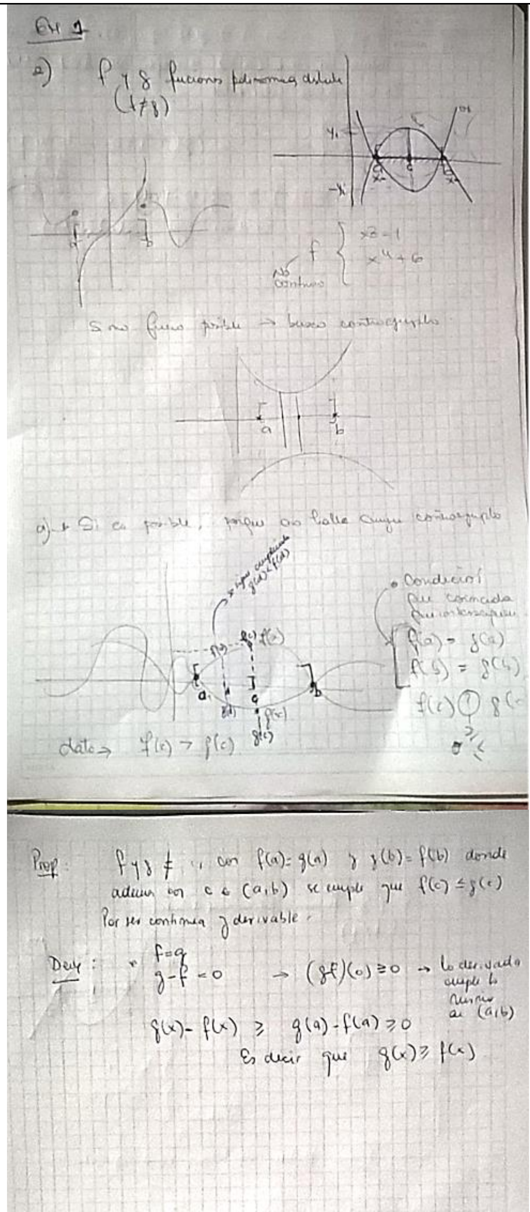
Entiende cuáles son los caminos por los que no pudo avanzar.
No se da cuenta que no presenta una demostración, piensa que lo hizo.
Reflexiona sobre las heurísticas utilizadas.</td><td>Reflexión sobre las He utilizadas.

Duda del desarrollo matemático que presenta.</td></tr>
</table>

DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A16**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	La formulación del enunciado de la consigna, corresponde a una definición por que frente a esta condición se define: la función es derivable en el intervalo (x_1, x_2) es cóncava (estrictamente cóncava) en ese intervalo si dado que x ∈ (x_1 , x_2) si : $\boldsymbol{f(x)} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x1}) + \boldsymbol{f(x1)}$. Es decir, que si la función se encuentra por debajo de su recta tangente es una función cóncava. La explicación tiene errores matemáticos: recta tangente/concavidad. Identifica que es una definición. No explica lo que dice la definición, sino que la repite.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	**NO** resuelve. Entiende que es una definición, pero no explica qué la llevó a pensar en eso.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Con respecto al 1b) relacionado a qué le explicaría a los alumnos sobre la definición: En caso de explicar lo presentado en la consigna a un alumno, haría aclaraciones respecto al uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural. Ya que en esta consigna, a simple vista no se podría detectar que estamos hablando de una recta tangente si no se formalizo las definiciones de pendiente y ordenada al origen. Aclararía que cuando estoy mencionando $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ es la definición de "m" (pendiente) y que esta expresión es lo mismo que definir: y=mx + b. Con la diferencia que en la consigna se expresa con las definiciones formales del formato de la recta tangente de una función. Y si observamos con claridad, deberíamos ejemplificar con un gráfico que nos quiere decir que	

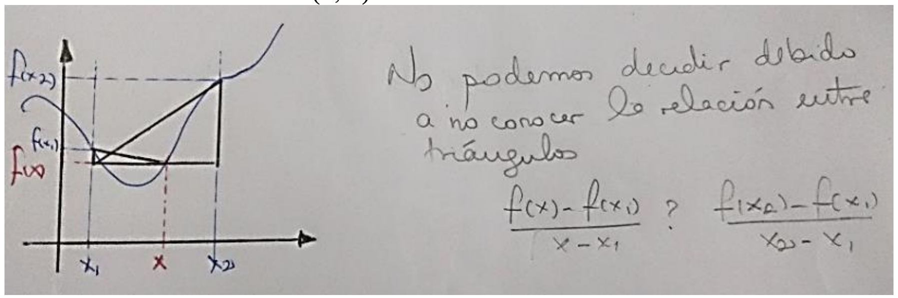
			una función es más chica que la recta tangente de dicha función para concluir lo que expresa la consigna en lenguaje simbólico en relación con el lenguaje natural. Arrastra errores matemáticos. No utiliza gráficos, pero los menciona para explicar. Con respecto al 2c) relacionado a la explicación a un compañero: Empiezo contándote como arme la proposición, después de ver un par de ejemplos observe que si era un punto intermedio entre (a,b) selecciono un punto cualesquiera que pertenezca a ese intervalo que se compone por los extremos que coinciden las funciones f y g (x=a y x=b). Ese punto intermedio lo identifico con el nombre "c" y cuando lo evalúas en ambas funciones a una le corresponde un valor en el eje y y a otra le corresponde otro valor, de esos dos me define quien es la mayor y la menor. Es decir, que hago (c, f(c)) y(c, g (c)) y de ahí concluyo cual es la mayor por lo tanto esa sería mi otra condición para la proposición. Además tengo en cuenta que son continuas y derivables ¿por qué? las dos funciones que luego sirven para la demostración. Al momento de la demostración, tengo que llegar a que f es mayor que g en cualquier punto del intervalo por lo tanto comencé con el absurdo es decir que f es igual a g en el intervalo (a,b) para luego mediante propiedades de funciones, concluyo que la diferencia de f - g ≥0 al evaluarla en c, se sigue cumpliendo por lo tanto me queda que f(c)≤g(c). Hay un error que arrastra considerando las rectas tangentes, pero no está mal la idea de presenta: utiliza el lenguaje natural para contarle a un compañero cuál fue su idea a la hora de demostrar la proposición.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Respecto al uso lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática, creo que el simbólico es más riguroso que el natural porque si estoy trabajando con alumnos de secundaria no están acostumbrados a trabajar las expresiones tan formalizadas con sus respectivas definiciones y podría llegar a confundirlos, o simplemente no se darían cuenta de que tema estamos tratando cuando por ahí ya es algo que conocen Oración incoherente!. Por ejemplo, en este caso, si los alumnos ya trabajaron con rectas tangentes con el formato y-yo=m(x-xo) y no con el formato que da la consigna por ahí no se den cuenta que es lo mismo con lo que venían trabajando. Solo porque no formalizaron las definiciones de pendiente y ordenada al origen. En cambio, si estoy en un ámbito superior no sería tan riguroso trabajar con el uso del lenguaje simbólico La rigurosidad depende del nivel no del lenguaje!. Como mencione antes, usaría un formato u otro dependiendo del nivel en que este trabajando. Aunque se podría ver que el uso del lenguaje simbólico, en este caso, me brinda más información sobre la función que el uso natural eso depende de qué digan!, me da datos sobre la recta tangente sin tener que recurrir a un manejo algebraico. Es decir, a simple vista puedo ver quién es el punto (x_1, x_2), puedo reemplazar valores y obtener la pendiente, al ver la desigualdad entre dos funciones puedo deducir si una es mayor que la otra. Por lo cual, creo que el uso del lenguaje simbólico es de gran importancia en matemática. Arrastra problema matemático. Ver comentarios en el texto.	

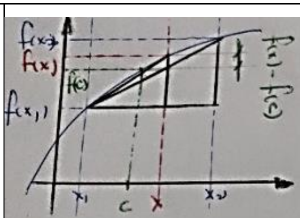
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	a) Borradores	

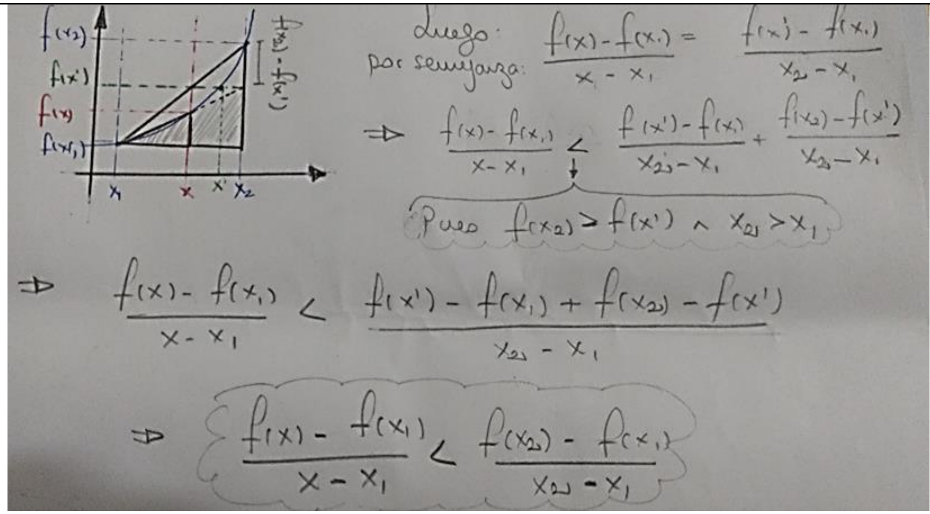
			 b) Resolución: 1- Es posible que las funciones f y g coincidan en todos los valores entre x=a y x=b. No justifica.		

			La resolución de la primera parte de la 2da consigna no es tal, solo hay una afirmación. 2- **Proposición:** *Si f y g son dos funciones polinómicas distintas, continuas y derivables* agregado bien, lo utiliza en su demostración *en (a,b) donde se cumple que toman los mismos valores en x = a y x = b, es decir f(a)=g(a) y f (b)=g (b) y además, al tomar un punto intermedio x=c* $\in$ *(a,b) tal que* $f(c) \leq g(c)$ *y* $f' \leq g'$ *en (a, b) entonces* $f \leq g$ *en (a, b) entonces en todos los puntos entre dicho intervalo, la f siempre es mayor que g.* ¿por qué agrega la derivada? **Demostración:** *A partir de tomar que ciertos puntos coinciden, se plantea por el absurdo, es decir que g=f. Entonces se considera la función g−f. De las hipótesis sigue que* $(g - f)(0) \geq 0$ *y que* $(g - f)' = g' - f' \geq 0$ *en (a, b). Luego (g − f) es creciente en ese intervalo, y por lo tanto también en (a, b). En consecuencia, para todo x,* $(g - f)(x) \geq (g - f)(c) \geq 0$*. Esto es,* $f(x) \leq g(x)$ *para* $x \in (a, b)$. No concluye: ¿qué significa haber llegado a esto?	
		- Explicar su resolución	Empiezo contándote como arme la proposición, después de ver un par de ejemplos observe que si era un punto intermedio entre (a,b) selecciono un punto cualesquiera que pertenezca a ese intervalo que se compone por los extremos que coinciden las funciones f y g (x=a y x=b). Ese punto intermedio lo identifico con el nombre “c” y cuando lo evalúas en ambas funciones a una le corresponde un valor en el eje y y a otra le corresponde otro valor, de esos dos me define quien es la mayor y la menor. Es decir, que hago (c, f(c)) y(c, g (c)) y de ahí concluyo cual es la mayor por lo tanto esa sería mi otra condición para la proposición. Además tengo en cuenta que son continuas y derivables ¿por qué? las dos funciones que luego sirven para la demostración. Al momento de la demostración, tengo que llegar a que f es mayor que g en cualquier punto del intervalo por lo tanto comencé con el absurdo es decir que f es igual a g en el intervalo (a,b) para luego mediante propiedades de funciones, concluyo que la diferencia de f - g ≥ 0 al evaluarla en c, se sigue cumpliendo por lo tanto me queda que $f(c) \leq g(c)$. Cuenta claro cuál es su intención, pero ver la resolución. Da por sentado que el lector entiende el absurdo.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a	La reflexión que realice para llegar a la demostración propuesta, fue empezando a tomar ejemplos que me llevaron a generalizar lo plasmado y recordar un poco lo que se realizaba cuando se analizaba las integrales entre curvas para formar la idea propuesta. También me fue útil ver distintos gráficos. Además, para la demostración de esta proposición me fue útil encarar por el absurdo y así llegar a lo que quería a través de algunas propiedades de suma de funciones, manejo algebraico entre otros. Porque si empezaba por mi afirmación, no sabía cómo incluir las condiciones que había propuesto como hipótesis. En este caso, tuve en cuenta que eran funciones polinómicas continuas y derivables en el intervalo. Usa heurísticas (según su relato) que no menciona. Al hablar de la demostración dice que usa el absurdo para “llegar a lo que quería”. No me queda claro si entiende que llegó a lo contrario por el tipo de demostración usada, y que por eso es absurdo.	

		concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Ahora explica por qué tomo sus funciones continuas y derivables… toma la hipótesis implícita!	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A17	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Vamos a reordenar los términos $f(x) < \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}.(x-x1)+f(x1)$ $f(x)-f(x1) < \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}.(x-x1)$ $\frac{\boldsymbol{f(x)-f(x1)}}{\boldsymbol{(x-x1)}} < \frac{\boldsymbol{f(x2)-f(x1)}}{\boldsymbol{x2-x1}} \qquad (x-x1) \neq 0$ Ubiquemos esta relación según el tipo de grafico que tenemos * Si dentro de nuestro intervalo $(\boldsymbol{x},??)$ $\boldsymbol{x1}<\boldsymbol{x}2$ la función no es estricto creciente o decreciente  * Si dentro de nuestro intervalo $(\boldsymbol{x1},)$ $\boldsymbol{x1}<\boldsymbol{x}2$ la función es estricto creciente y cóncava, no podemos establecer dicha relación	

			 Por semejanza $\frac{f(c)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\Rightarrow \frac{f(c)-f(x_1)}{x_1-x_1} + \frac{f(x)-f(c)}{x-x_1} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ Pues $f(x)>f(c)$ ∧ $x>x_1$ $\Rightarrow \frac{f(c)-f(x_1)+f(x)-f(c)}{x-x_1} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ * Si dentro de nuestro intervalo ($x1$,) $x1$<x2 la función es estricto creciente y convexa, cumple la relación ¿cuál?	

			 Analogamente podemos pensar cuando la función es decreciente. Corresponde a una propiedad de la curva una función. Dependiendo de la concavidad que tenga dentro de un intervalo cuando la función es estricatamente creciente o decrececiente, podemos establecer esta relacion, vale aclarar que no debe haber puntos de inflexion, asi tenemos una cancavidad (o convexidad) estricta.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	**NO** responde.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	

	simbólico), notación matemática, convenciones	- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto del 1b) sobre cómo explicaría a los alumnos que lo que dice se corresponde con la definición: Si los alumnos ya han visto funciones y sus respectivos gráficos, quizas no sea necesario ningún tipo de aclaración, la mayor dificultad que pueden encontrar es tomar la inecuación tal como nos la dan, para una mejor visualizacion lo ideal sería un reordenamiento de los términos y establecer una relacion más simetrica por asi decirlo, usaría el lenguaje natural para que pensemos, por ejemplo, en proporciones de un triangulo. Si no manejan concavidad y convexidad, les plantearía la idea de como seria mi curva si es “feliz” o “triste”. Este texto me hace pensar que usa la concavidad, no que es lo que quiere mostrar. Respecto del 2c) sobre cómo se lo explicaría a un compañero: **NO** resuelve.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Pensado en ambos lenguajes debemos ver en que ámbito nos encontramos para hacer un uso mas eficaz de ambos, si estamos frente a pibes de la escuela, es probable un uso predominante del lenguaje natural, si bien no es riguroso, es más eficaz explicarle a personas que recien se están formando academicamente, es probable que enganchemos y hagamos entender de una manera mas coloquial los conceptos matemáticos mas relevantes que quisieramos que se lleven nuestros alumnos, la rigurosidad debe estar presente pero lo prescindiría después de hacer un cierre, e institucionalizar el saber. Ahora si estamos en un ambito académico, el lenguaje simbólico sería el predominante, esto es por una cuestión de poder apelar a ciertas propiedades, teoremas y fórmulas que son necesarios para seguir avanzando en la materia, el lenguaje natural no descarto usarlo, pero a medida que profundizamos un tema, se vuelve casi imposible no apelar a lo ya visto y recordarlo en lenguaje simbólico. Está bien lo que dice: lo piensa según el nivel por la complejidad que cada lenguaje implica.	
Conocim iento del	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	

	resulte cognitivamente exigente.	- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	**NO** resuelve.	
		- Explicar su resolución	**NO** resuelve.	
		- reflexionar	**NO** resuelve.	

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A18</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**</td><td rowspan="2">**I1**
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td><td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.</td><td></td></tr>
<tr><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>

Hay problemas matemáticos en la resolución.

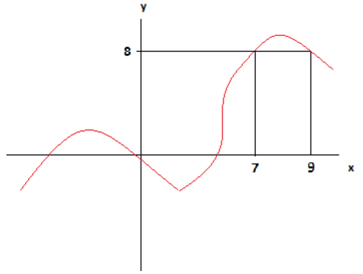
Al tratar de resolver esta función voy a intentar simplificar la expresión

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \, . (x - x_1) + f(x_1)$$

$$f(x) < \frac{f(x_2)\,(x - x_1) \; - f(x_1)\,(x - x_1) + f(x_1)\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) < \frac{f(x_2)\,(x - x_1) \; - f(x_1)\,(x - x_2)}{x_2 - x_1}$$

A continuación voy a probar con ejemplos conocidos de función para ver cuales casos cumple la desigualdad. La primera que se me ocurre es una cuadrática con Yv=5, Xv=1 y raíces en X1=-2 y x2=4 Con estos datos no es única. Reemplazando dichos valores me queda que la función es menor que cero (¿?). Lo cual es absurdo porque en el intervalo de x (-1,4) la función es mayor que cero con los datos dados no hay suficiente información para concluir esto!. No conforme con este resultado hago un segundo intento pero de una función cualquiera no definida pero cuyo grafico se me ocurre podría ser de la siguiente forma. Pretende tomar una función en general pero usa una particular.



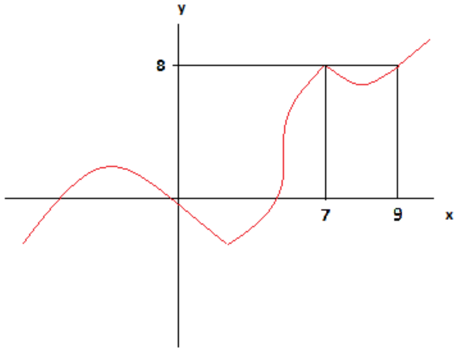
Si bien no sé cuál sería la función puedo saber que en F(7)=F(9)=8. Reemplazando en la función veo que me queda la siguiente desigualdad.

$$f(x) < \frac{8 \;\; (x - 7\,) \; - \quad 8\,(x - 9\;)}{9 \; - 7} \; = \; 8$$

¿y esto qué significa? Hace cuentas pero no sabe para qué!

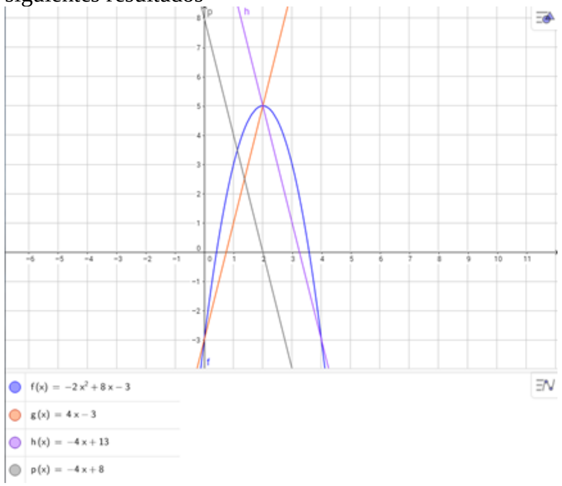
Esto seria cierto si la curva en ese intervalo fuese esta otra.

</td><td></td></tr>
</table>



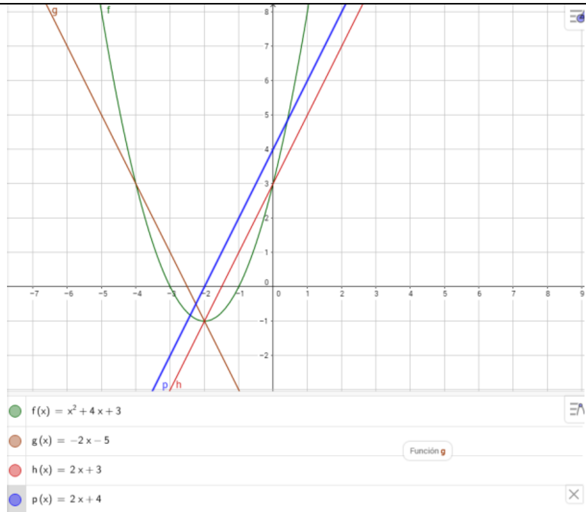
¿Y esto qué significa?

Entonces se me ocurrió utilizar el Geogebra para analizar casos específicos y obtuve los siguientes resultados

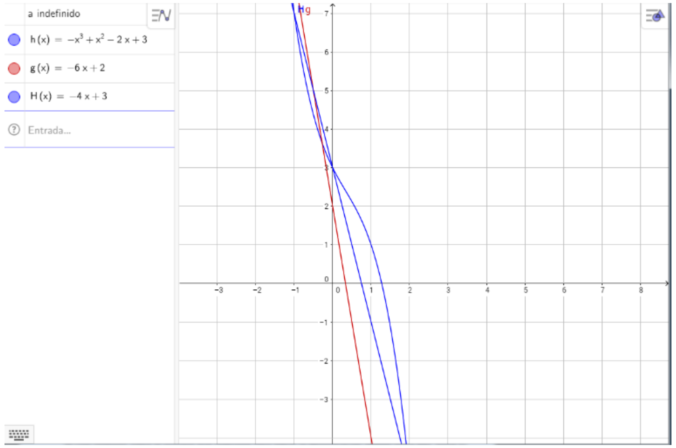


Pero no retoma lo que quedó de su análisis anterior…

Donde f(x) es la función cuadrática, g(x) el resultado de la derecha de la desigualdad para x1=0 y x2=2, h(x) el resultado de la derecha de la desigualdad para x1=2 y x2=4, y p(x) la derivada de la función. Vemos que para dicho caso no se cumple la desigualdad incluso si eligiera X1=r1 y X2=r2 (raíces de la función) la desigualdad me queda f(x) < 0.
Luego hice otro ejemplo donde la función cuadrática es cóncava hacia arriba:

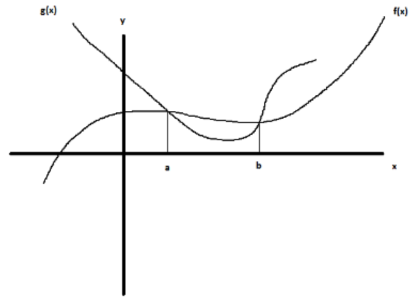


En este caso vemos que la desigualdad se cumple pues f(x) <g(x) en el intervalo (-4,-2), f(x) < h(x) en el intervalo (-2,0). Incluso si utilizara x1=-3 y x2=-1 la desigualdad me queda f(x) < 0 lo cual es cierto en el intervalo (x1,x2). ¿Pero cuál es la diferencia? Observando las derivadas de veo que la pendiente de la segunda es positiva mientras que la de la primera es negativa. Entonces vemos que si bien es una propiedad, solo se cumple para algunas funciones propiedad que se cumple solo para algunos casos. Voy a tratar de ir un poco más lejos y voy a analizar que sucede para la siguiente y voy a mostrar los siguientes dos ejemplos

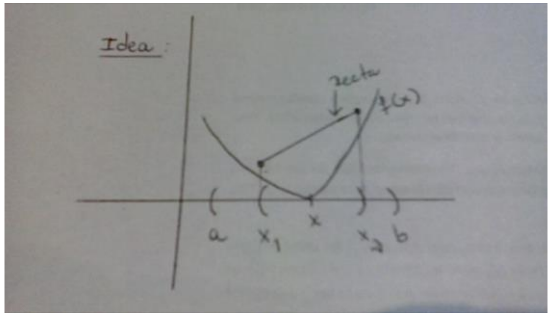


En este caso h(x) es lo que resulta del lado izquierdo de la desigualdad al elegir x1=0 y x2=1. Vemos que no se cumple la desigualdad. Por estos casos puedo llegar a concluir que la desigualdad se va a cumplir o no dependiendo de la concavidad de la función cuando sea cóncava hacia afuera f(x) < a la expresión dada, mientras que f(x) será > que la otra expresión

			cuando sea cóncava hacia adentro. Por otro lado dicha expresión será igual a la función cuando esta no tenga curvatura es decir sea una recta. Con todo su estudio de casos, no concluye (no indica el concepto en juego) No responde lo pedido: no señala qué es el enunciado.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	**NO** responde.	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Con respecto al 1b), donde le explicaría a un alumno porqué lo que dice se relaciona con la definición: Sería bueno hacer una lectura en lengua natural del enunciado, para que sea más “familiar” para ellos y se entienda bien que es lo que se pide. Igual esto dependerá del nivel en el que se encuentren en cuanto al uso del algebra y estudio de funciones. Propone hacer cosas que él no hizo para su resolución. Da indicaciones pero no responde. Con respecto al 2c), donde tienen que explicarle a un compañero. **NO** resuelve.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Me parece que el uso del lenguaje simbólico es una importante herramienta para la comprensión y validación de problemas matemáticos. Es importante que los alumnos puedan entender un enunciado dado en lenguaje algebraico o transformar el lenguaje natural a simbólico. Sin embargo, esto debe ser gradual, es decir, introduciendo conceptos, definiciones y luego dárselos en forma conjunta introduciendo poco a poco nuevos términos. Dice cosas desde lo teórico, pero que él no lleva a la práctica. No dice nada.	

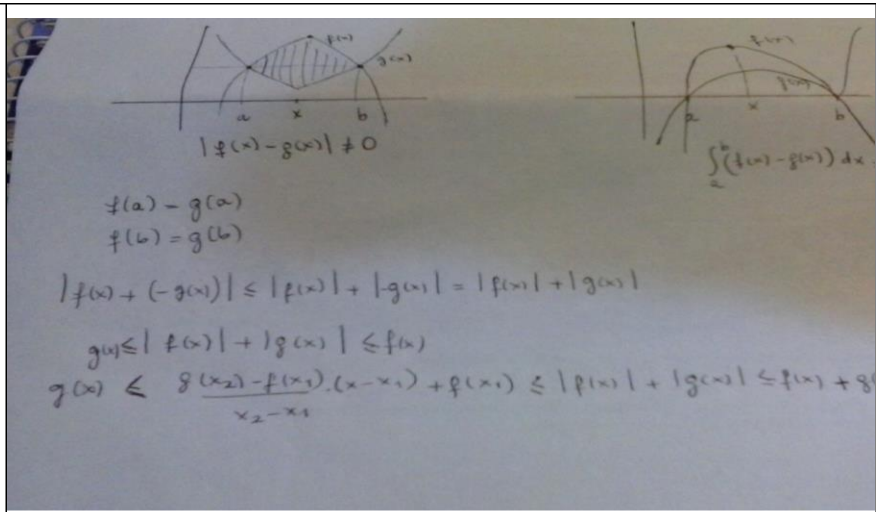
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	1. Es posible que dos funciones distintas tomen valores iguales en dos extremos de un intervalo (a,b) y dentro de él también coincidan todos sus valores. Por ejemplo podemos ejemplificar esto con una función cualquiera f(x) y luego otra g(x) función partida determinada por f(x) en un intervalo cerrado [a,b] y h(x) en los demás puntos (¿?). Dicha función tomaría los mismos valores en todo el cerrado [a,b]. 2. Dada una función f(x) y g(x) definida en un intervalo (a,b), en el cual existe un punto en el cual f(x) >g(x) es condición para que siempre f >g que la intersección en ese intervalo de ambas funciones sea cero. Esto es necesario ya que de haber intersección podrían cruzarse y g(x) > f(x) y de no ser así, f(x)=g(x) en ese punto de todas formas por lo tanto tampoco f(x) > g(x). **Enunciado** ***Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x1=a y x2=b y además se sabe que f >g en un punto del intervalo (a,b)y son continuas, entonces f >g en todos los puntos de dicho intervalo si y solo si no existe intersección de las funciones en dicho intervalo.***  <u>Borrador</u> es lo mismo que dice antes. Si tengo dos funciones continuas que tienen los mismos valores en dos puntos a y b, y sabemos que en un punto del intervalo (a,b) f es mayor que g entonces para que todos los valores de f en ese intervalo sean mayor que g no tienen que intersecarse porque podrían pasar dos cosas:	

			a) Que se crucen entonces habría puntos donde g es mayor que f porque f paso "abajo" y g quedo "arriba". b) También podría pasar que no se crucen, sino que solamente se toquen y luego f sea nuevamente mayor a g pero así habría puntos donde f=g y no queremos esto. Por eso al descartar la intersección nos aseguramos que TODOS los puntos de la función de f son mayores que g en el intervalo (a,b). **NO** demuestra.	
		- Explicar su resolución	**NO** resuelve.	
		- reflexionar	Esto lo veríamos en el punto 2d) Para la resolución del problema y encontrar una condición para que la propiedad se cumpla use la heurística *trabajar hacia adelante* ya que aborde el problema partiendo de las condiciones iniciales. Luego *realice un dibujo* de dos funciones que cumplían con los datos que me daba el enunciado. Y finalmente considere dos funciones que se intersecan en dos puntos como por ejemplo una lineal y una cuadrática que sirvan para ejemplificar y explorar el problema. Uso del ejemplo como forma de probar algo. Se centra en las heurísticas utilizadas, pero no repara en que NO demostró su propiedad.	

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A19	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Significa que al considerar un intervalo abierto (a,b) y elegir dos elementos cualesquiera denotados $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ que están dentro del intervalo con $\mathbf{x_1}$ menor que $\mathbf{x_2}$, se puede ver que para cada uno de los elementos **x** tal que $\mathbf{x_1 < x < x_2}$, es decir que está entre los valores elegidos, se cumple una relación. Esta relación se define de forma tal que dada una función que depende del elemento **x** es menor que la recta definida por esos elementos en el intervalo determinado.  La alumna intenta traducir en palabras lo que dicen los símbolos, pero al no entender no puede evitar repetir lo que está en el enunciado. El dibujo que utiliza para darse una idea es incorrecto (los puntos no son considerados puntos de la función). Considero que la consigna corresponde a un Lema o parte de una demostración.	
		- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	Al tener la puntuación “**:**” podría pensar que se trata de una definición, pero sin los datos precisos de caracterización de la función ***f*** introducida, afirmo que una definición no podría ser. No lo considera una definición porque no se especifica la función: entonces tenemos definiciones según el tipo de función con la que trabajemos.	

	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que "reproducir" nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Respecto a 1b), relacionado con la explicación a un alumno: En relación a la explicación a un alumno, aclararía que lo que básicamente se dice es que: *si elijo un intervalo y un número dentro de él, obtengo que la función en ese valor es siempre menor a la recta definida como se muestra, en el intervalo elegido.* La lectura que realiza, intenta ser una aclaración en lenguaje natural, pero dice lo mismo que en símbolos, no hace referencia al concepto en juego. Respecto del 2c) relacionado con la explicación a un compañero: Considero distintos ejemplos sobre dos funciones que cumplan con lo pedido con las condiciones planteadas en la proposición. Descarto las posibilidades de funciones partidas porque no cumplen con las hipótesis dadas ¿cuáles son?. La condición adicional que determino que es necesaria para poder cumplir lo requerido tiene que ver con los valores que toman las funciones en un intervalo elegido. Todo el párrafo es general, podría ser aplicable a otra consigna. Lo que se quiere demostrar es que, a partir de las hipótesis, se llegue a que en todos los puntos entre *a* y *b*, la *f* siempre es mayor que *g*. Para plantear la demostración lo que hice fue guiarme por medio de distintos gráficos y así determinar alguna regularidad para luego determinar de alguna manera lo que observaba. Luego de esto, considero una función auxiliar h determinada por las dos funciones dadas, la cual es la resta de las funciones. Esto fue para utilizar las hipótesis planteadas. Las funciones valen lo mismo en los extremos del intervalo, son distintas en todo el intervalo y en un punto intermedio f es mayor que g. Las hipótesis plantadas cumplen también con las del Corolario y concluyo que h es positiva en (a,b). Pero como h estaba definida como la resta de f y g, entonces se tiene que la resta de las funciones es mayor a cero y al despejar obtuve que f es más grande que g en todo el intervalo dado (a,b). Por lo tanto, queda demostrado lo enunciado. El lenguaje natural le sirve para contar de manera general cuál fue su idea de desarrollo.	
		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Creo que, si tendría (tuviera) una clase a cargo, usaría de igual manera el lenguaje simbólico y el natural. El lenguaje simbólico es propio de nuestro lenguaje como futuros profesores (*) y trataría de enseñarles de la manera en cómo me lo enseñaron o lo aprendí. Además de esto, si en algún momento quieren independizarse del profesor y recurrir a libros, los cuales usan parte simbólica, resulta necesario mostrar y enseñar la simbología con la que se trabaja en matemática. Sin embargo, esto no des amerita el uso del lenguaje natural, ya que la explicación en un lenguaje común a todos es necesario para establecer la comunicación y la comprensión de lo que resulta extraño o ajeno a identificar a simple vista. En éste caso, el objetivo es que el alumno aprenda el uso de la simbología y a entender qué está escribiendo. (*) Lenguaje simbólico como lenguaje de futuros profes, no de la matemática.	

			No reconoce la conveniencia de elegir notación, la rigurosidad de cada uno de los lenguajes (aunque hace referencia a cuándo se usa cada uno). El texto parece más una redacción para convencer que algo propio.	
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar	Esto no se trabaja en el TP3	
		- Explicar		
		- reflexionar		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	DATOS: se queda con los datos relacionados con la función, no menciona que a y b son los límites del intervalo a considerar. • *f(x) y g(x) distintas* • *f(a)= g(a) y f(b)= g(b)* a) No es posible que las funciones coincidan en todos los valores que hay entre a y b ya que las funciones son distintas. En caso de coincidir serían la misma función, lo que sería una contradicción a la hipótesis de que son distintas. Intenta plantearlo usando el absurdo pero está mal hecho. b) si a < c < b y *g(c) < f(c)* la condición que debe cumplirse para que f sea siempre mayor que g es la siguiente: ***para cada x en (a,b) f(x) ≠ g(x)*** ***Proposición:*** Si *f* y *g* son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en *x=a* y *x=b* y que además para cada x en (a,b) *f(x) ≠ g(x),* entonces en todos los puntos entre *a* y *b,* la *f* siempre es mayor que *g*. **Intentos:**	

			 ***Demostración:*** Considero la siguiente función auxiliar h(x)= f(x)- g(x). debería mencionar quiénes son f y g. Sé que f y g son polinomios y que h es continua ¿por qué? en el intervalo [a,b] ya que es resta de f y g, funciones continuas en [a,b]. ¿por qué lo son? Sabiendo además que en un valor c, con a < c < b, f(c) > g(c) entonces h(c)> 0. también, por hipótesis *f(x) ≠ g(x)* en (a,b) y por esto, h(x) ≠ 0 en (a,b). No entiendo… si era >0 entonces era distinta de cero. Luego, h(x) cumple con el Corolario del Teorema de Bolzano, con lo que h(x) > 0 en (a,b). Es decir, f(x)-g(x) > 0 y por lo tanto f(x) > g(x). Así queda demostrada la preposición. Bien la idea.	
		- Explicar su resolución	Considero distintos ejemplos no consideró distintos ejemplos, tomo una función auxiliar! sobre dos funciones que cumplan con lo pedido con las condiciones planteadas en la proposición. Descarto las posibilidades de funciones partidas porque no cumplen con las hipótesis dadas. La condición adicional que determino que es necesaria para poder cumplir lo requerido tiene que ver con los valores que toman las funciones en un intervalo elegido. Lo que se quiere demostrar es que, a partir de las hipótesis, se llegue a que en todos los puntos entre *a* y *b*, la *f* siempre es mayor que *g*. Para plantear la demostración lo que hice fue guiarme por medio de distintos gráficos eso fue la prueba, pero no indicó que lo usó en la demostración! y así determinar alguna regularidad para luego determinar de alguna manera lo que observaba. Luego de esto, considero una función auxiliar h determinada por las dos funciones dadas, la cual es la resta de las funciones. Esto fue para utilizar las hipótesis planteadas. Las funciones valen	

			lo mismo en los extremos del intervalo, son distintas en todo el intervalo y en un punto intermedio f es mayor que g. Las hipótesis plantadas cumplen también con las del Corolario y concluyo que h es positiva en (a,b). Pero como h estaba definida como la resta de f y g, entonces se tiene que la resta de las funciones es mayor a cero y al despejar obtuve que f es más grande que g en todo el intervalo dado (a,b). Por lo tanto, queda demostrado lo enunciado. Rara la explicación, en la 1ra parte parece que habla de otra cosa.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	La demostración realizada utiliza heurísticas a lo largo del planteo. Comienzo planificando la organización de prueba colocando los datos presentados. Procedo a realizar dibujos y gráficos para visualizar el problema o idea a plasmar. Recurro a teoría relacionada ya que las manipulaciones algebraicas y los fundamentos están extraídos de ejercicios resueltos anteriormente donde involucra funciones: sus caracterizaciones y condiciones. En esta manipulación algebraica y teórica, introduzco un elemento auxiliar, el cual sería la función h(x) determinada por los datos. Se refiere a algo más gráfico. Entiendo que ninguno de los intentos me resultó fácil para llegar a la demostración requerida, pero el primer intento pautó la utilidad del planteo sobre la distancia entre las funciones que se desprendió en la demostración realizada. Describe las heurísticas utilizadas, bien. No hacer referencia al tipo de demostración que utilizó.	

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A20</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td><td rowspan="3">I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td><td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.</td><td></td></tr>
<tr><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Sean x_1 y x_2 dos valores cualquiera pertenecientes al intervalos (a, b), con x_1 menor a x_2, y sea x un valor cualquiera perteneciente al intervalos (x_1, x_2). La función f evaluada en cualquiera de los valores que puede asumir x, es menor a la función lineal que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, evaluada en ese mismo valor de x.

La explicación no muestra comprensión: traduce de un lenguaje a otro. Es lo que considera como “resolución de la consigna”.</td><td>Explicación como sinónimo de la traducción/decodificación de lenguaje simbólico al coloquial.</td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)</td><td>Se lee en el punto 1a)
En el enunciado se pide que f verifique una condición, podríamos cambiar la palabra “condición” por “propiedad” y al idea sería la misma.
Por ejemplo:
Toda función que cumplan con esta condición […] le pasará tal o cual cosa.
Toda función que cumpla con esta propiedad […] le pasará tal o cual cosa.
Las dos frases trasmiten la misma idea.
Por otra parte, si fuese una definición se tendría que nombrar algo de lo que se presenta y si fuese una demostración, tendría que mostrarse un resultado en base a relaciones u operaciones. Ninguna de estas dos cosas ocurre.
Conclusión: El enunciado hace referencia a una propiedad de la función. **me sorprende el “la”, como que no advirtió la generalidad

El alumno muestra qué cuestiones considera para decidir cómo clasificar la condición del enunciado: “propiedad”: “Propiedad” como “Condición”.
Sobre definición: solo menciona que debería decirse qué se está definiendo.
Sobre demostración: ok.</td><td>¿Qué es una “definición”?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I2
Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones</td><td>- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos</td><td>Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.</td><td></td></tr>
<tr><td>- b) explicar el uso del lenguaje</td><td>1b) Explicación a un alumno:
Si uno presenta esta propiedad en clase, se supone que los estudiantes reconocen y manejan la mayoría de los símbolos:
• $f(x)$ como una función de variable independiente x;
• Los símbolos de “>” y “<”.</td><td>Una explicación textual: pasaje de un lenguaje a otro en cada parte de la propiedad.
En ningún momento “mira el todo”, no se da cuenta que debe hacerlo</td></tr>
</table>

			• Y aunque en el enunciado no lo dice, la expresión mostrada tiene toda la pinta de hablar de x como una variable continua (si no es así, haría la aclaración correspondiente); En cuanto a los símbolos: $\forall, \in$ y (a, b), los iría presentando en forma gradual, de uno en uno y después de haber escrito varios enunciados en forma literal. Por ejemplo: • Enunciado en forma oral: En el conjunto de los números reales, entre cualquier par de valores x_1 y x_2 ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$. Y escribo en el pizarrón mientras explico el significado del símbolo: $\forall\, x_1, x_2$ (*Para todo* x_1 y x_2) perteneciente al conjunto de los números reales ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$. El “para todo” como una traducción literal: ¿de qué otra forma podría decirse? ¿decir “para cualquier”? De ahora en adelante, utilizo el símbolo $\forall$ en los enunciados escritos. • Más adelante, introduzco otro símbolo de los mencionados Para todo x_1, x_2 pertenecientes al intervalos abierto a, b, *pero no los extremos del intervalos, es decir ni a, ni b*, ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$. Y escribo en el pizarrón mientras explico el significado del símbolo: $\forall\, x_1, x_2\ pertenecientes\ al\ intervalo\ (a, b),$ Ha de ocurrir alguna de las siguientes relaciones: $(x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2)$ ó $(x_1 > x_2)$. Por qué se relaciona lo que subraya con lo que escribe en símbolos? Qué tiene de distinta la oración con respecto a la anterior? Digo, no tienen por qué reparar en el paréntesis… • Siguiendo con la misma rutina presento el símbolo de pertenencia. Oralmente: Para todo x *perteneciente* al intervalo abierto x_1, x_2, se verifica que x es mayor que x_1 pero menor que x_2. $\forall\, x \in (x_1, x_2), con\ x_1 < x_2$; se verifica que: $x_1 < x < x_2$. La explicación de los símbolos utilizados de manera textual. Pero siempre “en una mirada absolutamente atomizada. No diría ni siquiera “local”. No advirtió “la recta”, por ejemplo 2c) Explicación a un compañero: utiliza el lenguaje natural (no toma lo que escribió e lenguaje simbólico en la resolución). Supongo que mi compañero está sentado al lado mío y tenemos la hoja donde desarrollo la solución. Puedo reescribir sobre lo escrito y hacer dibujos o esquemas como los que muestro más abajo. La idea, entonces, parece ser explicar qué escribió o por qué lo hizo.	**Este es un caso que “cree que logrando comprender cada símbolo” basta**

<table>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.</td><td>Reflexión sobre el uso del lenguaje (1c)
El lenguaje simbólico tiene la ventaja de condensar información más eficientemente que el lenguaje cotidiano, se expresa una idea con mínima cantidad de símbolos y sin ambigüedad. Por supuesto, esta se ve como una ventaja cuando uno comienza a dominar, o ya domina, el lenguaje simbólico. Pero para el estudiante que recién se inicia en el área, el precio que hay que pagar por esta ventaja se ve reflejado en un retraso en la comprensión de las ideas que se quieren trasmitir, ya que el simbolismo, en principio, se presenta como una barrea a superar antes que un allanamiento del camino hacia las ideas matemáticas.
En consecuencia, el equilibrio entre tiempo, orden y forma en que se le presentan los contenidos al estudiante es clave para lograr un abordaje "suave" hacia un nivel de conocimiento superior.
El simbolismo es una característica positiva de la disciplina pero que tendrá que venir después de presentar las ideas matemáticas en lenguaje cotidiano y escritura literal. Una vez que el estudiante domine las ideas y haya escrito largas freces/frases para trasmitirla, recién entonces podrá ver al simbolismo como una ventaja, y en base a esta valoración, abocarse a su apropiación.</td><td>Lenguaje simbólico más <u>eficiente</u> (mínima cantidad de símbolos y sin ambigüedad)

Para alumnos de nivel inicial, comenzar con el lenguaje natural antes que el simbólico.

¿no considera que se pueda enseñar? No lo menciona, ni advierte que en la clase de mate no se puede prescindir del "lenguaje natural". Sí ve que "el natural debe preceder al simbólico" (como en todo idioma)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="3">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar</td><td>Esto no se trabaja en el TP3</td><td></td></tr>
<tr><td>- Explicar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I4
Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.</td><td>Esto se vería en el punto 2a) y 2b) donde se pide resoluciones:

Supongo que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y que $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con sus respectivos coeficientes, también reales.
1°) Si $a=b,\ \nexists\, x\in(a,b)$ $ya\ que\ el\ conjunto\ (a,b)=\emptyset$. Respondiendo a la pregunta, no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b ya que, para este caso, nos existen dichos valores.

2°) Si $a\neq b$, entonces $(a,b)\neq\emptyset$ y existen infinitos valores de x tal que $a < x < b$.
2.1. Por el enunciado sabemos que $f(x)\neq g(x)$.
2.2. a) Supongamos que $\exists(a,b)\ /\ \forall x\in(a,b): f(x)=g(x)$ y $gr(f)\neq gr(g)$.
(Sin perder generalidad, podemos suponer que $gr(f)>gr(g)$). Falta aclarar que pasa en los otros casos o decir que es "análogo":
Sean</td><td>Ver escritura</td></tr>
</table>

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad con\ a_n \neq 0$$

y

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m, \quad con\ b_m \neq 0$ con n>m

Entonces, tomando un valor cualquiera $x \in (a,b)$, se tiene que:

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_n x^n) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m) = 0$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n = 0$$

Como esto debe cumplirse $\forall x \in (a,b)$, entonces:

$$(a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_m - b_m = 0\ )\ y\ (a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n = 0)$$

Pero si $a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n = 0, \ \forall x \in (a,b)$

Entonces $a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = a_n x^n, \ (recordemos\ que\ a_n \neq 0)$

Los dos polinomios deben ser iguales, lo cual es falso, ya que:

$$gr(a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = n - 1 < n = gr(a_n x^n)$$

Este camino nos lleva a una contradicción. Es decir, no es posible que:

$\forall x \in (a,b)$: $f(x) = g(x)$, cuando $gr(f) \neq gr(g)$.

2.2.b) Supongamos que $\exists (a,b)\ /\ \forall x \in (a,b)$: $f(x) = g(x)$ y $gr(f) = gr(g)$.

En este caso tendríamos:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad con\ a_n \neq 0$$

y

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \quad con\ b_n \neq 0$$

Operando bajo la suposición hecha

$$f(x) - g(x) = 0, \qquad \forall x \in (a,b)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_n x^n) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) = 0$$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = 0$$

Nuevamente, para que la igualdad se verifique $\forall x \in (a,b)$, necesariamente:

$$(a_0 - b_0) = (a_1 - b_1) = \cdots = (a_n - b_n) = 0$$

Pero si los coeficientes de los respectivos términos de f y de g son iguales y ambos polinomios tienen el mismo grado, entonces son iguales. Esto contradice la hipótesis 2.2.1.

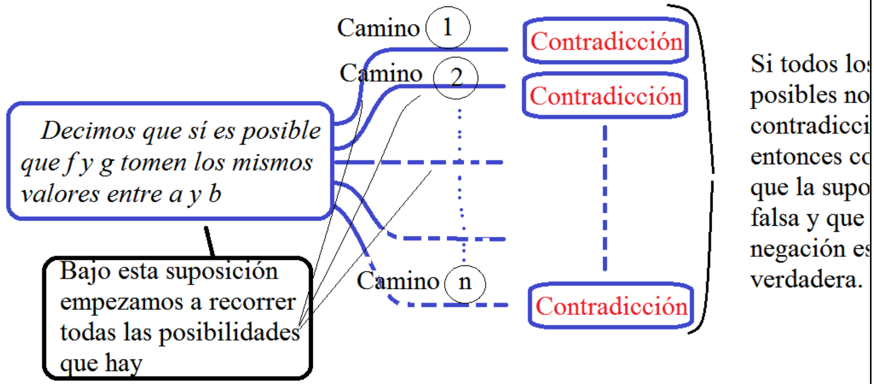
Este camino también nos lleva a una contradicción, por lo cual concluimos que:

Si $f(x) \neq g(x)$, no es posible hallar un intervalo (a, b) tal que $\forall\ x \in (a,b)$: $f = g$.

Resuelvo la consigna, (parte b)

¿Podría relacionarse esto con lo que pasó en el TP2 en donde se concluye o se trabaja sobre lo explícito y no se considera lo implícito?

			Condición: $Si\ [\ f(x_0) > g(x_0)$ para algún $x_0 \in (a,b)]\ y\ \ [\forall x \in (a,b): f(x) - g(x) \neq 0]$, entonces $f(x) > g(x),\ \ \forall x \in (a,b)$. Escritura incompleta! No toma la continuidad ni los datos del enunciado (no consideró la sugerencia del enunciado de cómo escribirla) De todos modos, está bien la idea! Demostración: Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces, por la primera condición $h(x_0) > 0$, y por la segunda condición $h(x)$ no tiene raíces en el intervalo (a,b). Supongamos que $\exists\ x_1 \in (a,b)\ /\ \ h(x_1) < 0$. Como $h(x_0) > 0$ y $h(x_1) < 0$, por el teorema del valor intermedio, No considera hipótesis → pasa de largo la continuidad de las funciones. $\exists\ x_2 \in (a,b)\ /\ h(x_2) = 0$ Pero esto no es posible por la segunda condición. Esta contradicción proviene de suponer que $\exists\ x_1 \in (a,b)\ /\ \ h(x_1) < 0$. Como esta suposición es falsa, su negación será verdadera, es decir: $\forall x \in (a,b): h(x) > 0$, Y por lo tanto $f(x) > g(x)\ \forall x \in (a,b)$. El alumno utiliza lenguaje simbólico, trata de abarcar todos los casos. Presenta una demostración en cada caso, pero no utiliza las hipótesis implícitas en el enunciado.	**(en TP2 relacionado con el discriminante y en TP3 la continuidad de las funciones)**
		- Explicar su resolución	Sobre la explicación de su resolución a un compañero (2c) En la consigna nos dan dos funciones polinómicas f y g, y nos dicen que valen lo mismo cuándo se evalúan en a y b. En el ítem (a) nos preguntan si es posible que coincidan en todos los valores para todos los x entre a y b. Bueno, en principio vamos a descartar el caso trivial que es cuando a es igual a b. Si a es igual a b no hay valores entre medio y por lo tanto f no puede ser igual a g, porque no hay valores de x para evaluar. Esto no está en su resolución. Segundo, ahora a y b son distintos, entonces, como estamos en los reales hay infinitos valores entre a y b. Como a priori no sabemos si f puede ser igual o no a g para todos los valores de x dentro de un intervalo a, b; vamos a suponer que sí es posible y vamos a intentar probar la proposición. Una proposición matemática es una oración de la cual puede decirse si es verdadera o falsa, es decir, si nosotros suponemos algo y en base a eso hacemos un desarrollo matemático y llegamos a una contradicción, entonces la suposición no es verdadera y si no hay otra posibilidad para explorar, la negación de la suposición ha de ser verdadera. Explica un tipo de demostración (la que usó) Quiere explicar “el absurdo”!!!! pero no se da cuenta que lo que hace no es eso La idea esquemática es la siguiente:	**Algo que pasaba en otros TP: la explicación incluye cosas que no están en la resolución.**

			 “De todos los caminos posibles”: ¿está dando a entender que debe probar varias veces? ¿no le alcanza hacer una demostración por el absurdo para demostrar la “proposición”? → llama “caminos” a los casos que se dan al demostrar (se lee en la resolución de la consigna) Serían “los casos” y pienso que él entiende que debe ser exhaustivo (porque eso lo hace bien) Recorramos el primer camino, supongamos que existe un intervalo a, b para el cual f y g son iguales si los evaluamos en todos los x que están dentro del intervalo. A demás, supongamos que los grados de los polinomios son distintos, por ejemplo que el grado de f es mayor al de g. Bajo esta suposición tenemos que f menos g nos da cero para todos los valores de x entre a y b. reemplazando y operando llegamos a una contradicción: “dos polinomios son iguales pero tienen distintos grados”. Este camino nos lleva a una contradicción, por lo tanto, la suposición no es verdadera. Modifiquemos la suposición y recorramos otro camino. El segundo camino, supongamos que existe un intervalo a, b para el cual f y g son iguales si los evaluamos en todos los x que están dentro del intervalo, pero ahora los grados de los polinomios son iguales. Otra vez, f menos g nos da cero para todos los valores de x entre a y b. reemplazando y operando llegamos a otra contradicción: “los dos polinomios son iguales, pero el enunciado nos decía que los polinomios eran distintos”. O sea que esta suposición, tampoco es verdadera. Y como ya no hay más caminos por explorar, entonces concluimos que si f y g son dos polinomios distintos, no existe un intervalo a, b, tal que para todos los x dentro de ese intervalo f sea igual a g. Para resolver la parte b de la consigna utilizamos la misma idea. Suponemos algo como verdadero y operamos a partir de ahí, si llegamos a una contradicción, la suposición no era verdadera y por lo tanto su negación si será verdadera.	**Creo que explica bastante bien!**

			En el enunciado nos dan un dato "existe un valor x_0 entre a y b tal que $f(x_0)$ es mayor que $g(x_0)$" y nos piden que agreguemos una condición (si es que se puede), para que en todos los puntos entre a y b, f sea mayor que g. Nos inventamos una función $h(x) = f(x) – g(x)$ y pedimos que h no tenga raíces entre a y b (esta es la condición que ponemos). Supongamos que existe un valor x_1 entre a y b tal que $h(x_1) < 0$. Por el dato que nos dan, sabemos que $f(x_0) - g(x_0) > 0$, y por lo tanto $h(x_0) > 0$. Por la suposición, tenemos que $h(x_1) < 0$. Si $h(x_0) > 0$ y $h(x_1) < 0$ para x_0 y x_1 dentro del intervalo a, b. Por el teorema del valor intermedio, existe un x_2 perteneciente al intervalo a, b. Tal que $h(x_2) = 0$. Pero esto contradice la condición que pusimos, llegamos a una contradicción y por lo tanto la suposición que hicimos "existe un valor x_1 entre a y b tal que $h(x_1) < 0$" es falsa y su negación ha de ser verdadera. La negación de un operador existencial nos da un operador universal seguido de la negación de la proposición, así llegamos a que: Para todo x entre a y b, no es cierto que $h(x) < 0$ y como tampoco puede ser igual a cero por la condición que pusimos solo queda la posibilidad de que $h(x) > 0$, o lo que es los mismo, $f(x) > g(x)$ para todos los x entre a y b.	
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	Esto lo veríamos en el punto 2d) La heurísticas que utilice fueron: Planificar (trabajar hacia adelante), Activar experiencias previas (recurrir a teorías relacionadas usa propiedades de los polinomios, razonar por analogía) y modificar el problema (dividir el problema en sub problemas son sus casos). Pero de esta tres, creo que la que más utilice fue la de activar experiencias previas al recordar y utilizar las resoluciones hechas en análisis matemático y álgebra. No estoy cien por ciento seguro de que mis demostraciones son correctas, pero tengo confianza en que mi razonamiento, en general, si lo es. Según creo, la seguridad llega con el tiempo y después de mucho trabajo sobre el tema y todavía no me veo en ese lugar. Lo que más me resultó útil es sentarme a pensar, recordar demostraciones, tomarme un tiempo entre resolución y resolución, mis borradores son partes inconclusas de lo que presento aquí. También me resulto útil el consultar algunas definiciones en libros y apuntes bajados de internet. Los borradores muestran parte de la resolución final tal cual fue presentada, él no evidencia las heurísticas que menciona, pero se pueden leer en su desarrollo. Es consciente de que puede tener problemas en la resolución, pero apela a su razonamiento: considera que lo que está correcto es la idea que presenta (no cómo lo hace). No considera si lo hecho responde a lo pedido. No toma, ni considera en la reflexión, las hipótesis de las consignas.	**Reconocimiento de la necesidad de buscar material para ayudarse a resolver la consigna.** **No se da cuenta que si usa una propiedad debe indicar que se cumplen las hipótesis**
