**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DOCTORADO EN ENSEÑANZA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES (orientación Matemática)**

# La comprensión de conceptos involucrados en problemas de optimización. Un estudio en primer año de ingeniería a partir de ideas variacionales y diferentes sistemas de representación


Responsable: Mg. Betina Williner

Directora: Dra. Adriana Engler

Codirectores: Dr. Lisandro Curia

Dra. Andrea Lavalle

A mis padres,

esposo e hijos.


## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a la Dra. Adriana Engler, por aceptar dirigir mi trabajo, por todo el conocimiento compartido, por sus ideas, por la paciencia y el apoyo permanente, y sobre todo por su amistad.

A la Dra. Mabel Rodríguez, por sus orientaciones y consejos.

A la profesora María Laura Polero, por ayudarme a llevar adelante la experiencia en el aula.

A los estudiantes que participaron en la implementación de la situación de aprendizaje.

## RESUMEN

Dado que los ingenieros utilizan la matemática como herramienta para resolver problemas, es necesario que cuenten con una formación sólida que les admita discernir con qué concepto matemático y con qué procedimiento pueden abordarlos en cada caso.

El Cálculo Diferencial permite modelar y estudiar la naturaleza de diversos fenómenos. En ese marco, el estudio de los conceptos involucrados en la resolución de problemas de optimización (PO) es fundamental para su formación como futuros profesionales.

Este trabajo de investigación surge con la intención de intervenir en la enseñanza de contenidos relacionados con el estudio del comportamiento de las funciones a fin de favorecer el aprendizaje y aplicación de los mismos. El objetivo general es explorar la comprensión de los conceptos que están involucrados en la resolución de PO cuando los alumnos de primer año de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) interactúan con actividades basadas en ideas de variación y dadas en diversos sistemas de representación.

Para el estudio de la comprensión usamos el marco teórico de Ana Sfard. Esta autora caracteriza la comprensión de un objeto matemático en función de las *concepciones* que se tiene del mismo. La concepción es la idea del concepto que vive en la mente humana y que depende de la experiencia personal. A su vez distingue entre dos concepciones: concepción operacional (CO) y concepción estructural (CE).

La metodología utilizada consta de dos partes. La primera de ellas toma alguno de los aspectos de la ingeniería didáctica como esquema experimental basado en concebir, diseñar, realizar, observar y analizar una situación de aprendizaje referida al tema expuesto anteriormente. La segunda, examina las concepciones en términos de Sfard de los conceptos estudiados mediante el análisis de los ítems que conforman la situación de aprendizaje y su aporte a cada una de dichas concepciones. Con estos datos, a fin de

resumir la información, efectuamos un análisis cuantitativo basado en la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales.

Los resultados obtenidos nos permiten alcanzar los objetivos propuestos y dar respuesta a las preguntas de investigación.

## ABSTRACT

Since engineers use math as the tool to solve problems, it is necessary to have a solid training that allows them decide which math concept and method can use in each case.

Differential Calculus makes possible to shape and study the kind of different phenomena. In that frame, the study of the concepts involved in the resolution of optimization problems is vital for the training of the engineers as future professionals.

This research work arises from the purpose to take part in the teaching of contents related to the study of the performance of the functions, with the aim of favoring the learning and application of them. The objective is to explore the comprehension of concepts involved in optimization problems solutions when 1st year Engineer students from "Universidad Nacional de La Matanza" interact with activities based on ideas of variance, given in different representation systems.

For the comprehension study, we used Ana Sfard´s framework. The author characterizes the comprehension of a math object according to the *conceptions* of itself. The conception is the idea of the concept according to each human being and personal experience. Moreover, the author distinguishes between two conceptions: operational conception and structural conception.

The method used is of two parts. The first one has some aspects of the didactic engineering as experimental scheme based on conceiving, designing, doing, observing and analyzing a learning situation. The second part examines the conceptions, based on Sfard´s framework, studied through the analysis of items in the learning situation and their contribution to those conceptions. With all this data, with the aim to resume the information, we carry on a quantitative analysis based on the statistic technique of Analysis of Principal Components.

The obtained results allow us achieve the objectives proposed and answer the investigation questions.

## INDICE DE SIGLAS Y ABREVIATURAS

CE: concepción estructural

CE-ER: concepción estructural de extremos relativos de una función.

CE-IC: concepción estructural de intervalos de crecimiento.

CE-ID: concepción estructural de intervalos de decrecimiento.

CO: concepción operacional

CO-ER: concepción operacional de extremos relativos de una función.

CO-IC: concepción operacional de intervalos de crecimiento.

CO-ID: concepción operacional de intervalos de decrecimiento.

ER: extremos relativos de una función

IC: intervalos de crecimiento de una función

ID: intervalos de decrecimiento de una función

PO: problemas de optimización

PyLV: Pensamiento y Lenguaje Variacional

UNLaM: Universidad Nacional de La Matanza

# INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática que desarrollamos se concibe como el estudio de la comprensión de los conceptos involucrados en los PO en carreras de ingeniería de la UNLaM, más específicamente en la asignatura Análisis Matemático I.

La Matemática es una ciencia que le brinda al ingeniero herramientas para la formulación y análisis de determinados modelos y para la resolución de problemas. En la actualidad el uso de tecnología le permite, a cualquier profesional, realizar cálculos engorrosos, graficar, derivar funciones complicadas, resolver ecuaciones, pero no le indica qué concepto o procedimiento utilizar cuando se enfrenta a una determinada situación. Para citar algunos casos: un ingeniero industrial puede tener que determinar cuestiones ligadas a la economía como son el establecer el costo o ingreso marginal o la maximización de ganancias o buscar el lote económico que minimice la función costo. Un ingeniero civil puede tener que estudiar el pandeo de una columna en una determinada estructura sometida a carga y de esta forma plantear y resolver ecuaciones diferenciales. Un ingeniero electrónico puede tener que utilizar herramientas matemáticas para el análisis de sistemas eléctricos.

A su vez las empresas requieren profesionales que desplieguen destrezas y habilidades para actualizarse y para que sean protagonistas de su propio aprendizaje y conocimiento. Entonces es importante que el estudiante adquiera una comprensión profunda de los principales conceptos de la materia para poder aplicarlos en situaciones que requieran un pensamiento reflexivo, creativo, crítico y que participe en espacios en los que pueda comunicar sus ideas, defenderlas con sustento y argumentación.

La realidad revela que, en general, no preparamos a los futuros profesionales de acuerdo a las necesidades planteadas. Diversas investigaciones y la propia experiencia como docentes nos muestran que la enseñanza del Cálculo se brinda de manera muy formal y rigurosa, o como un conjunto de recetas y ejercicios rutinarios. Autores como Artigue (1995), Salinas (2010) y Contreras de la Fuente (2001) dan cuenta de que la formalización excesiva o la algoritmación de los contenidos y el discurso simplificado a recetas no producen comprensión de los conceptos.

A su vez Artigue (1998) señala que algunas de las dificultades de los alumnos en el campo conceptual del Análisis Matemático están ligadas a la complejidad de los objetos involucrados y a la necesidad de una ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

La complejidad de un objeto matemático se debe, en parte, a que no es tangible. Esto implica que necesitamos adquirir una representación del mismo para construir su significado o usarlo en diversos procedimientos. Duval (1998) establece los registros de representación como formas que nos permiten acceder a los objetos matemáticos: verbal, analítica, numérica, gráfica e icónica. Este autor considera que la comprensión de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos sistemas o registros de representación.

Respecto a las dificultades ligadas a la ruptura con el pensamiento algebraico, Artigue (1998) indica que, si bien el Análisis se apoya en competencias algebraicas, para realizar una actividad matemática en este campo se necesita un pensamiento analítico que es diferente al anteriormente mencionado. Entre los ejemplos que da la autora menciona la noción de tangente. Los alumnos que terminan el nivel secundario encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. Claramente no hay una identificación directa entre esta tangente y la definida en Análisis caracterizada por una propiedad local: la aproximación afín de orden uno cuya pendiente es la derivada en el punto de tangencia.

Una manera de favorecer el desarrollo del pensamiento analítico es diseñando actividades que promuevan la esencia del Cálculo como un conjunto de conocimientos que permite analizar los cambios que ocurren en los fenómenos, formular modelos para estudiar situaciones de variación y poder predecir comportamientos, resolver PO y de aproximación, entre otros.

Por lo tanto, consideramos encuadrar nuestro trabajo en la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), la cual estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes matemáticos propios del cambio y la variación en el sistema educativo y en el medio social en el que se producen (Dolores, 2010).

Ante esta realidad y conscientes de que no podemos abordar todos los conceptos de la asignatura, decidimos enfocarnos en los involucrados en la resolución de PO, tan importantes en las carreras mencionadas.

Por todo lo anteriormente explicado, la finalidad de este estudio es analizar la comprensión de los conceptos involucrados en la resolución de PO en carreras de ingeniería cuando los alumnos interactúan con actividades en las que se conjugan diversos sistemas de representación y cuyos contenidos están relacionados con el comportamiento variacional de las funciones.

Como marco teórico para la comprensión de objetos matemáticos por parte de los alumnos adoptamos la perspectiva de Ana Sfard, que distingue entre la CO y la CE. La primera corresponde a actividades procedimentales realizadas por el estudiante, mientras que la segunda se refiere a la capacidad que el alumno posee para ver el concepto como un objeto al cual puede manipular teniendo en cuenta teoremas y propiedades definidos por la comunidad matemática.

La metodología de investigación elegida consta de dos partes. La primera toma algunos aspectos de la ingeniería didáctica. Elaboramos una situación de aprendizaje formada por actividades que incorporan elementos variacionales y están dadas en diversos registros.

La implementamos en un curso de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la UNLaM.

En la segunda, examinamos los aportes a las dos concepciones definidas por Sfard de cada uno de los ítems que forman parte de la situación de aprendizaje. El estudio de las producciones de los estudiantes, las observaciones en la puesta en común, todo lo vivenciado en lo que es la puesta en escena nos proporciona elementos para describir dichas concepciones en cada uno de los equipos que intervienen en la experiencia.

En cada uno de los capítulos que conforman la tesis damos cuenta de la investigación realizada cubriendo todos los pasos de la misma.

En el *Capítulo 1* presentamos las ideas generales que conciben el estudio. Planteamos los motivos por los cuales decidimos realizarlo, delimitamos el problema de investigación, formulamos las preguntas que guían el proceso y planteamos los objetivos generales y específicos.

En el *Capítulo 2* analizamos los resultados relevantes de otros estudios referidos al tema que nos ocupa. Comenzamos con investigaciones que tratan sobre la comprensión en matemática. Luego abordamos aquellas que se encuadran en el PyLV y tratan sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de función y derivada. Por último, presentamos investigaciones sobre PO realizadas desde diversos marcos teóricos.

En el *Capítulo 3* desarrollamos los fundamentos teóricos bajo los cuales elaboramos el estudio. En el contexto de la Educación Matemática hacemos especial referencia a la línea del PyLV como marco que permite caracterizar y encuadrar la investigación. Posteriormente exponemos las bases de la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica y la teoría de Ana Sfard como marco teórico de comprensión de los objetos matemáticos.

En el *Capítulo 4* mostramos las cuatro dimensiones que permiten dotar a la investigación de una aproximación holística. Comenzamos con el análisis histórico – epistemológico de los conceptos de extremos de una función y PO. Luego presentamos la dimensión didáctica con el objetivo de estudiar distintos aspectos relacionados con la enseñanza de los conceptos involucrados en la resolución de PO: intervalos de crecimiento (IC) y decrecimiento (ID) y extremos relativos (ER). Describimos la situación de la cátedra y examinamos algunos libros de texto de uso común en nuestro entorno. Con respecto a la dimensión cognitiva, profundizamos acerca de algunos elementos teóricos importantes al momento de explorar los procesos mentales de organización del pensamiento, más específicamente los errores y dificultades que manifiestan los alumnos cuando se enfrentan a situaciones de variación de funciones y a la resolución de PO. Finalmente formulamos la dimensión sociocultural sobre la que se encuadran las anteriores.

En el *Capítulo 5* describimos la metodología utilizada y el diseño de la situación de aprendizaje desarrollada para cumplir con los objetivos de la tesis. Explicamos qué entendemos por situación de aprendizaje y especificamos todos los aspectos que la involucra: los objetivos propuestos, los enunciados de las consignas, las acciones sugeridas para las profesoras y las posibles respuestas de los alumnos. Seguidamente reflexionamos sobre el aporte de cada ítem de la situación de aprendizaje a cada una de las concepciones definidas por Sfard.

En el *Capítulo 6* presentamos los resultados obtenidos en toda la experiencia. En un primer lugar describimos las sesiones desarrolladas y el análisis a posteriori, contrastando las actuaciones de los estudiantes con lo previamente establecido. Luego exponemos los resultados correspondientes a las calificaciones de los niveles de éxito en los estudiantes en las diferentes situaciones, para poder dar un diagnóstico sobre su concepción de los conceptos de IC, ID y ER de una función y su incidencia en la resolución de los PO.

Usamos la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales que permite resumir la información obtenida. A su vez entrevistamos a tres alumnos con el fin de completar el análisis a posteriori y profundizar el estudio de las dos concepciones que describen la comprensión de conceptos.

En el *Capítulo 7* detallamos las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos aportados por los distintos instrumentos, teniendo en cuenta los objetivos planteados y las preguntas de investigación. Exponemos también algunas implicancias de nuestra investigación.

La tesis se cierra con las referencias bibliográficas y los anexos con parte del material empleado.

# CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

*Comenzamos el capítulo con un recorrido sobre las consideraciones generales que nos condujeron a esta tesis. Seguidamente brindamos un panorama de la problemática elegida para luego acotar el planteamiento definitivo del problema de investigación y formular las preguntas que guían el estudio. Finalizamos con el establecimiento de los objetivos generales y específicos que pretendemos lograr a lo largo del desarrollo de la investigación.*

## 1.1 Motivación

Antes de definir el problema de investigación consideramos sumamente importante expresar las motivaciones que nos llevaron al planteo y al estudio del mismo. Éstas tienen sus orígenes y sustento en la docencia y en la investigación en Educación Matemática.

Los resultados de varios trabajos de investigación que dan cuenta que la algoritmación de los contenidos y el discurso simplificado a recetas no producen comprensión de los conceptos (Artigue, 1995; Contreras de la Fuente, 2001; Salinas, 2010), refuerzan la realidad desde la propia experiencia en la docencia universitaria. Cantoral (2013) señala que los profesores estamos presionados por los tiempos institucionales en los que se evidencia un escaso equilibrio entre los contenidos a impartir y la carga horaria destinada. El docente siente la necesidad de cumplir con el programa estipulado. Si no lo hace de esa manera los alumnos perciben que tienen falencias a la hora de abordar el próximo curso, entonces reduce los tiempos de exploración y discusión en la clase de matemática. En general predomina lo que Salinas (2010) llama un “modelo tradicional de enseñanza del Cálculo” (p. 7), que se basa en una estructuración formal y rigurosa y defiende la eficiencia de los cursos al ejercitar en el estudiante procedimientos rutinarios para resolver problemas prototipos.

Desde el propio contexto de la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la UNLaM estamos totalmente interiorizados en el bajo rendimiento de los alumnos en los exámenes, en el abandono de la materia luego del primer parcial, en la cantidad de estudiantes que la cursan tres, cuatro o más veces; en el sentimiento de los profesores desmotivados porque sus alumnos “no le responden” y de la preocupación de todos (docentes y autoridades) sobre la realidad descripta.

Por último, y haciendo referencia a la investigación, en la Educación Matemática existen diversos paradigmas que estudian el fenómeno educativo en sus múltiples aspectos, todos tienen una preocupación común a la cual adherimos y es cómo, desde la investigación, mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Acordamos con Salinas y Alanís (2009) en cuanto a que “la acción de intervenir eficazmente en el sistema didáctico para mejorar el aprendizaje de las matemáticas excede al simple proceder de buena voluntad” (p. 357), por lo cual surge la necesidad de un estudio exhaustivo y basado en la investigación que intente dar alguna respuesta de mejora a la situación planteada.

## 1.2 Una aproximación al problema de investigación

Gran número de investigaciones en Educación Matemática tratan sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo a nivel universitario debido, entre otras causas, a los serios problemas de comprensión por parte de los alumnos de conceptos como límite, derivada e integral (Artigue, 1995). Salinas y Alanís (2009) advierten que el paradigma tradicional de enseñanza del Cálculo deja como secuelas elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia la matemática. Tal como indica Moreno (2005) los métodos tradicionales de enseñanza del Cálculo se centran en la práctica algorítmica y algebraica:

> La enseñanza de los principios del Cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñarles a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, a realizar algunas derivadas e integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las Matemáticas (p. 82).

Por otra parte, Camacho (2011) establece:

> (…) la sola adecuación de nuevos significados en los conceptos de la matemática escolar ha sido inútil, llevando incluso a obstaculizar más su comprensión: la incorporación de tablas de valores y argumentos gráficos no han sido suficientes para que estudiantes universitarios mejoren el aprendizaje del concepto de función como una dependencia entre variables; tampoco lo han sido la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio para la comprensión de la derivada (p. 159).

A esto se suma que la enseñanza tradicional universitaria tiende a evaluar competencias algorítmicas y algebraicas, entrando así en un círculo vicioso: “para tener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa” (Artigue, 1995, p. 97). Otros autores como Vrancken (2011), Sánchez, García y Llinares (2008), García (2011) reafirman esta situación señalando que se logra un dominio razonable de técnicas para calcular límites y derivadas, pero existen serias dificultades en comprender el significado de estos conceptos o de identificar cuándo un problema requiere, por ejemplo, calcular una derivada. Cuevas, Rodríguez y González (2014), Suau y Ferrando (2015) coinciden en que esta problemática se manifiesta actualmente en las aulas de Cálculo en una variable.

Nuestro propio contexto de trabajo, la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la UNLaM no es ajeno a lo manifestado anteriormente: existen problemas de comprensión de los conceptos principales del Cálculo por parte de los alumnos, escasos niveles de aprobación de la materia, gran deserción sobre todo en el primer cuatrimestre del ciclo lectivo y una marcada dependencia del profesor a la hora de "hacer". Es en este contexto donde nuestro problema de investigación surge como interés para mejorar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos del Cálculo en carreras de ingeniería, donde éstos toman un papel fundamental. Tanto en la vida de estudiante de un ingeniero como en la profesión su actividad tiene una estrecha relación con conceptos y modelos matemáticos. Por este motivo es necesario que se logre una comprensión significativa de los mismos para su posterior aplicación en otras ciencias o en problemas de la ingeniería. El Cálculo no es una sucesión de contenidos y técnicas sin sentido, sino una herramienta poderosa que nos permite abordar problemas que surgen en otras disciplinas y requieren de él.

Somos conscientes de que es prácticamente imposible abordar una investigación que contemple todos los objetos matemáticos referidos al Cálculo en una variable, por lo que nos centramos en aquellos que se involucran en la resolución de PO. Una de las razones de esta elección es que el planteo de este tipo de problemas es un primer paso al desarrollo de otros más complejos. Estos aportan una base teórica y metodológica que constituyen la antesala de plantear, analizar y desplegar diversas estrategias de solución en otro tipo de situaciones propias de la ingeniería.

Otro de los motivos por el cual elegimos este tema es la dificultad que tienen los alumnos a la hora de desarrollar y resolver este tipo de problemas. Generalmente los estudiantes actúan en forma memorística, forzando la obtención de una ecuación que involucre las variables intervinientes y otra a la que calculan sus ER, pero sin comprender en profundidad lo que hacen. Es común que confundan cuál es la función a optimizar y en muchos casos sólo obtienen puntos críticos de la misma. Autores como Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto (2011), Malaspina, (2007); Moreno y Cuevas (2004) y Cuesta (2007) avalan lo expuesto.

Entonces, como un primer acercamiento a la pregunta de investigación, formulamos:

*¿Cómo plantear una enseñanza del Cálculo concebida como una organización conceptual que integre el aprendizaje de los conceptos que están involucrados en la resolución de PO y que propicie la comprensión de los mismos por parte de los estudiantes?*

### 1.3 El problema de investigación

Como expresamos anteriormente, el aprendizaje de los conceptos del Cálculo es el foco de atención en gran cantidad de investigaciones. Una de las investigaciones pioneras que se cita en varios estudios es la realizada por Orton (1983, citado en Cardona, 2009) que reporta los errores más comunes que cometen los alumnos en torno a los conceptos de límite, derivada e integrales. La muestra involucra a varios estudiantes de nivel medio y superior. Entre los principales resultados se obtiene que los alumnos tienen un razonable dominio del cálculo de derivadas e integrales, pero evidencian una notable dificultad a la hora de conceptualizar los procesos de límite subyacentes en los conceptos mencionados. García (2011) realiza una encuesta a estudiantes de Licenciatura en Matemática sobre el concepto de derivada en la cual el 85% de los alumnos la identifica con una fórmula y sólo el 15% con una idea más cercana a la definición (como pendiente de la recta tangente, límite o razón de cambio instantánea). El dominio de tipo algebraico o algorítmico y la carencia de significados se manifiestan en otras investigaciones: Dolores (1996), Sánchez et al. (2008), Simón y Miguel (2013), Cuesta (2007), Reséndiz (2006), entre otros. Esta realidad se observa también en nuestras aulas: dificultades en la comprensión, escasez de transferencia de lo aprendido a situaciones nuevas, memorización de fórmulas, inconvenientes para expresarse en forma oral y escrita, poca interpretación de gráficos y deficiencias para argumentar. Los resultados no satisfactorios en el aprendizaje y en las instancias de examen producen baja motivación para el estudio y hasta un efecto de rechazo "colectivo" hacia la disciplina.

También reconocemos que en nuestro contexto la enseñanza se caracteriza, en general, por presentar aspectos teóricos básicos (definiciones, enunciados de teoremas o propiedades), desarrollar ejemplos prototípicos y dejar a los estudiantes ejercicios más o menos parecidos para que resuelvan solos en clase o en forma particular. Acordamos con Okulik (2009) que es importante establecer elementos teóricos, pero una excesiva dependencia de ejemplos paradigmáticos y ejercicios rutinarios impide flexibilizar el pensamiento y adquirir modos diferentes de razonar.

La toma de conciencia sobre estas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha producido el desarrollo de diversas comunidades de investigación cuyo interés es el estudio de esta problemática desde un punto de vista científico. En México, investigadores como Ricardo Cantoral, María Rosa Farfán y Crisólogo Dolores, hace tiempo iniciaron una línea de investigación conocida como PyLV. La misma se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en donde está involucrado el cambio y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio de la variación. En palabras de Cantoral (2004):

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas

asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales (p.1).

Según Cantoral y Farfán (1998) este enfoque procura dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

Al respecto Vasco (2009) propone entender el Cálculo Diferencial no como un ejercicio rutinario de destrezas simbólico sino como un ejercicio mental en el cual se fomenten las ideas variacionales a través de la utilización de sistemas conceptuales para modelar y resolver problemas de la vida diaria o de diferentes ciencias. Cantoral (2013) afirma que las investigaciones recientes encuentran que conceptos como función, límite, continuidad, derivada e integrales no pueden reducirse a su definición ni solamente a la aplicación en diversos contextos si estamos interesados en su aprendizaje. Es necesario una ruptura con las formas algebraicas de tratamiento de esos objetos para dar lugar a ideas de cambio y variación.

El predominio de lo algebraico produce también escasa utilización de otras representaciones de los objetos matemáticos: gráficos, íconos, expresiones simbólicas, verbales y numéricas, cuya coordinación puede ayudar a lograr la comprensión de los mismos (Duval, 1998). Vrancken (2011) indica que en el contexto de la Educación Matemática se reconoce cada vez más la importancia de los sistemas de representación de los objetos matemáticos y que su incorporación en la enseñanza favorece su aprendizaje. Cantoral y Farfán (1998) señalan que la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, no inmediato, que requiere la combinación de diferentes registros de representación y una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito.

A su vez, el hablar de comprensión en matemática nos conduce a indagar sobre ¿en qué consiste la comprensión en matemática?, ¿cómo los seres humanos comprenden la matemática? En el marco teórico exponemos diferentes grupos de investigadores en Educación Matemática que se dedican a dilucidar los procesos mentales que permiten pensar la matemática y exhibimos diversas teorías que estudian la comprensión en matemática desde distintas perspectivas. Para nuestro estudio tomamos las ideas de Ana Sfard.

Sfard (1991) distingue entre concepto como idea matemática en su forma oficial y concepción como la idea del concepto que vive en la mente humana, la cual depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios. Coincide con Duval en el hecho que no podemos ver ni tocar cada entidad abstracta, la cual sólo se hace visible a través de sus representaciones.

Para Sfard existen dos formas de concebir un concepto: como proceso, CO y como objeto, CE. La CO se relaciona con algoritmos, acciones que ocurren a nivel físico o mental, es dinámica, secuencial y detallada. En la misma no es posible notar la relación del concepto con otros, existe sólo una representación del objeto y no hay integración entre el mismo y sus propiedades. En tanto que la CE es más abstracta, es estática, instantánea e integrada; es posible la relación del concepto con otros, se pueden alternar diferentes representaciones y existe una coordinación entre el concepto y sus propiedades.

Entonces la indagación sobre el PyLV, el uso de sistemas de representación y la importancia de la comprensión en matemática, nos permite reformular la pregunta de investigación:

*¿Cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en los PO cuando interactúan con actividades basadas en ideas variacionales y en el uso de diversos sistemas de representación?*

De ella surgen las siguientes preguntas auxiliares:

- ✓ ¿Cómo es posible mejorar la enseñanza de los conceptos involucrados en la resolución de PO, IC, ID y ER de una función, en las carreras de ingeniería de UNLaM a fin de favorecer la comprensión?
- ✓ ¿Qué efectos tiene una situación de aprendizaje basada en ideas variacionales y diversos sistemas de representación en el aprendizaje de dichos conceptos?
- ✓ ¿Cómo estudiar la comprensión de los mismos?
- ✓ Qué concepción tienen los estudiantes sobre los conceptos de IC, ID y ER: ¿operacional, estructural o ambas?
- ✓ ¿Cuál es la incidencia del tipo de concepción que tiene el estudiante de los conceptos de IC, ID y ER en la resolución de PO?

## 1.4 Objetivos

Para dar respuesta a la pregunta de investigación planteamos los siguientes objetivos:

### 1.4.1 Objetivo general

Explorar la comprensión de los conceptos involucrados en los PO cuando los alumnos de primer año de ingeniería de la UNLaM interactúan con actividades basadas en ideas de variación y en el uso de diversos sistemas de representación.

### 1.4.2 Objetivos específicos

- ✓ Describir y analizar el aprendizaje sobre IC, ID y ER de una función mediante el estudio de las producciones realizadas por los estudiantes a partir de la implementación de una situación de aprendizaje basada en ideas variacionales y en el uso de diversos sistemas de representación.

- ✓ Caracterizar la comprensión de los alumnos sobre los conceptos mencionados en términos de sus concepciones.
- ✓ Estudiar la incidencia de la comprensión en la resolución de PO.
- ✓ Valorar la eficacia y el impacto de la situación de aprendizaje propuesta.

# CAPÍTULO 2: ESTADO DEL ARTE

*En este capítulo desarrollamos la revisión bibliográfica de diversas investigaciones relacionadas con la nuestra. Comenzamos estudiando aquellas dedicadas a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, más específicamente las que están ligadas a procesos de comprensión de la matemática. Mostramos el análisis de diversas teorías o modelos que nos brindan múltiples perspectivas en torno al tema.*

*Luego exponemos los trabajos vinculados al PyLV que contribuyen, en su mayoría, con material para el diseño de la situación de aprendizaje. Asimismo, valoramos los resultados obtenidos en dichas investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos y las dificultades detectadas luego de la aplicación de actividades basadas en nociones de cambio y variación.*

*Por último, exponemos estudios referidos a PO que nos aportan, en general, resultados sobre las dificultades y/o errores de los alumnos al resolverlos. Las otras investigaciones refieren a la metodología usada y al estudio histórico efectuado.*

## 2.1 La comprensión en Matemática

La investigación se desarrolla desde la perspectiva de la Educación Matemática. Esta disciplina se propone estudiar y describir los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de contenido matemático en situación escolar. Dentro de la misma, el tema de investigación elegido se enmarca en el denominado Pensamiento Matemático Avanzado.

El Pensamiento Matemático Avanzado es propio de los currículos de los últimos años del nivel medio y los primeros años de estudios universitarios y se caracteriza principalmente por abarcar procesos cognitivos en los que se destacan los de abstraer, definir, demostrar y formalizar; como así también aquellos de componente más psicológica como representar, conceptualizar, inducir y visualizar (Azcárate y Camacho, 2003). En el Pensamiento Matemático Avanzado se pretende que el alumno pueda reconocer objetos matemáticos a través de su definición explícita y de sus propiedades en vez de su descripción intuitiva con ejemplos.

Los mencionados autores indican, como primer antecedente de esta línea, el grupo de trabajo homónimo formado en 1985 en el congreso Psychology of Mathematics Education.

Colombano, Formica y Camós (2012) afirman que el Pensamiento Matemático Avanzado es una línea inmersa en el enfoque cognitivista, cuyo objetivo principal es interpretar cómo el estudiante percibe un concepto matemático nuevo y qué modificaciones adopta esa concepción a medida que recibe la enseñanza formal. Estos modelos teóricos que se utilizan en las investigaciones para describir los procesos cognitivos que realizan los estudiantes cuando aprenden un concepto matemático complejo tratan el tema de la comprensión en matemática, central en nuestro estudio.

Uno de los primeros en distinguir entre comprensión y conocimiento fue Skemp (1976, citado en Meel, 2003), quien diferencia entre *comprensión relacional* (saber qué hacer y por qué se debe hacer) y *comprensión instrumental* (efectuar reglas sin una razón determinada). Unos años más tarde se agregan una tercera categoría llamada *lógica* (organizar de acuerdo a una regla formal) y una cuarta categoría llamada *simbólica* (conectar simbolismo y notación con las ideas asociadas a los mismos). Si bien desde ese momento la comunidad de Educación Matemática acepta que no es lo mismo conocimiento que comprensión, no hay un acuerdo unificado sobre el significado de esta última.

Perkins (1999) distingue tres conceptos claves en educación: conocimiento, habilidad y comprensión, de los cuales reconoce que los dos primeros son simples de definir. El conocimiento es la información que dispone una persona y la habilidad constituye el desempeño de rutina. Respecto a la comprensión este autor señala que es un término más sutil y brinda como definición del mismo a “la capacidad de desempeño flexible” (p. 4), es decir es la habilidad de actuar flexiblemente a partir de lo que uno sabe.

Existen otros marcos teóricos inspirados en modelos constructivistas que tratan de esclarecer los fenómenos relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos. Describiremos algunos de ellos citados en Meel (2003).

### 2.1.1 La comprensión según Tall y Vinner

Para poder comprender cómo se construye un concepto matemático Tall y Vinner (1981) proponen una distinción entre el concepto matemático formalmente definido y los procesos cognitivos a través de los cuales es apropiado por la persona que aprende. Es así como introducen las nociones de *imagen conceptual* (concept image) y *definición conceptual* (concept-definition).

La noción de imagen conceptual es utilizada para describir la estructura cognitiva que está ligada al concepto matemático formada por todo lo que el estudiante alude cuando utiliza o se enfrenta al concepto en cuestión. Pueden aparecer en su mente: imágenes, concepciones, gráficos, propiedades, procesos, notaciones, descripciones coloquiales, etc. (Colombano et al., 2012). La imagen conceptual de cada estudiante está construida a través de su experiencia, de sus conocimientos previos y puede ir cambiando a través del tiempo.

En tanto que la definición conceptual es el conjunto de palabras utilizadas para especificar un concepto y cuya precisión varía desde la definición formal matemática aceptada por la comunidad científica hasta la definición individual que un sujeto utiliza para construir o reconstruir la definición formal (Tall y Vinner, 1981). A la forma en la que el estudiante evoca verbalmente su imagen conceptual, es decir el conjunto de palabras que utiliza para explicarla, la denominan *definición conceptual personal*. La *definición conceptual formal*, es decir la definición aceptada por la comunidad matemática, puede diferir de la definición conceptual personal. Saber de memoria una definición conceptual no garantiza entenderla.

Según Tall y Vinner la imagen conceptual determina la manera en la que entendemos el concepto. A su vez esta estructura evoluciona con el tiempo y se va enriqueciendo de las diversas experiencias con el objeto matemático. Tall (1995) indica que en la evolución de la imagen conceptual intervienen diferentes sistemas de representación que se apoyan entre sí para construir estructuras cada vez más complejas. Establece un rango de diferentes tipos de representación en matemática:

- ✓ En el *sistema enactivo* el objeto simplemente se percibe, involucra una serie de acciones físicas para poder probar algo. Se basa en interacciones con el medio ambiente. Por ejemplo, si uno quiere mostrar que un triángulo con dos lados iguales tiene ángulos iguales, uno puede cortar un triángulo en un papel, doblarlo por la mitad en su base por su eje de simetría y mostrar que los ángulos correspondientes a los lados iguales son también iguales.
- ✓ En el *sistema icónico* el objeto se representa en dibujos, gráficas o figuras hechas a mano, se razona sobre los dibujos y figuras y se valida por visualizaciones. Por ejemplo, bajo este sistema se percibe que una función continua cuyo gráfico “va desde negativo a positivo” debe pasar por cero.

Y los siguientes sistemas de representación simbólica:

- ✓ En el *sistema verbal*, el objeto se describe usando palabras y se razona considerando expresiones verbales. La lengua natural es un vehículo para describir imágenes y formular pruebas.
- ✓ En el *sistema proceptual*, el objeto se representa en procesos, se razona sobre manipulaciones y cálculos numéricos y la prueba es por chequeos.

- ✓ En el *sistema lógico*, que es característico del Pensamiento Matemático Avanzado, se define el objeto, las relaciones son deducidas o construidas lógicamente y la validación corresponde a la demostración formal usando lógicas de primer orden.

Mora (2006) explica que el desarrollo de la comprensión según Tall es un proceso que se inicia con la percepción de los objetos, es decir, cuestiones ligadas a esquemas sensoriomotrices que el sujeto ya ha construido progresivamente desde su nacimiento y que evoluciona hacia esquemas operatorios y conceptuales. Dicha evolución no es lineal, sino que resulta de la interacción entre los sistemas de representación que están disponibles de acuerdo con el grado de desarrollo del sujeto.

### 2.1.2 La teoría APOE

La teoría APOE es desarrollada por un grupo de investigadores liderados por el Dr. Dubinsky (grupo RUMEC) con el objetivo principal de estudiar cómo se aprende matemática y se basa en la interpretación de la teoría piagetiana relativa a la *abstracción reflexiva* (Pons, 2014). Para Piaget el desarrollo mental de un niño aparece como una sucesión de estadios donde cada uno amplía al anterior, reconstruyéndolo en un nuevo plano para sobrepasarlo. Los cuatro estadios principales son: el sensomotor, en segundo lugar, el preoperacional, luego el de las operaciones concretas y las estructuras de cooperación y por último el pensamiento formal. La abstracción reflexiva se lleva a cabo cuando hay una proyección del conocimiento existente a un plano superior mediante actividades que conllevan a la reorganización del conocimiento en nuevas estructuras.

Sobre el concepto anteriormente descripto en la teoría APOE se definen dos ideas fundamentales: las construcciones mentales (formas de conocer) y los mecanismos (actos cognitivos) mediante los cuales los estudiantes efectúan las construcciones mentales (Pons, 2014).

Las construcciones mentales son: acciones, procesos, objetos y esquemas, de allí la sigla APOE. La acción es la transformación de un objeto que el estudiante percibe externo a él. Cuando esa acción es repetida y el alumno reflexiona sobre ella puede ser interiorizada como proceso. En el momento que el estudiante razona sobre las operaciones que se aplican a un proceso particular, toma conciencia de ellas como una totalidad, realiza transformaciones que puedan actuar sobre él, decimos que el proceso se encapsuló en objeto. Por último, una colección de objetos y procesos pueden organizarse de una manera estructurada para formar un esquema.

Dubinsky considera siete tipos de mecanismos que permiten a la persona realizar las construcciones mentales: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, tematización y generalización. Meel (2003) explica estos mecanismos de la siguiente manera: el proceso de comprensión comienza con la acción, conforme ésta se interioriza y ya no se maneja por influencias externas se convierte en proceso. El estudiante puede utilizar este proceso para obtener nuevos procesos a través de la coordinación (mediante dos o más procesos se construye otro) y la inversión (la persona es capaz de pensar el proceso en forma inversa y crear un nuevo proceso). La encapsulación es la transformación mental de un proceso a un objeto cognitivo. Una vez encapsulado el objeto existe en la mente del individuo y le coloca una etiqueta. Esta etiqueta permite al estudiante nombrar al objeto y asociarle el proceso sobre el cual lo construyó. Esta visión dual es esencial, ya que permite desencapsular un objeto y regresar al proceso en una forma anterior a su encapsulamiento. El elemento final de la teoría APOE, el esquema, es una colección de procesos y objetos. Tematizar un esquema significa que es posible actuar sobre el mismo para poder desglosarlo, examinar sus partes, reconstruirlo y disponer de él en situaciones problemáticas (Pons, 2014). La generalización de un esquema ya construido se presenta cuando el estudiante amplía el campo de utilización del mismo.

En algunas investigaciones realizadas por el grupo RUMEC la teoría sobre acciones, procesos y objetos no aportaba una explicación suficientemente sólida para los matices encontrados. Esto produjo un retorno a los documentos de Piaget que dio lugar al análisis de tres etapas para describir el desarrollo de un concepto: Intra, Inter y Trans.

Salazar, Díaz y Bautista (2009) los definen como:

- ✓ Nivel Intra: se analizan los objetos en términos de sus propiedades, los ejemplos son locales y cuando se establecen generalizaciones, éstas son simples.
- ✓ Nivel Inter: la persona usa y compara las ideas que tiene aisladas y reflexiona acerca de ellas, lo cual lo lleva a construir relaciones y transformaciones.
- ✓ Nivel Trans: el sujeto reflexiona sobre las relaciones y desarrolla nuevas estructuras. A su vez puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en los otros niveles.

Asiala et al. (1997) definen la construcción del conocimiento matemático desde la teoría APOE de la siguiente manera:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a los problemas matemáticos percibidos mediante el reflejo de los problemas y sus soluciones dentro de un contexto social y por medio de la construcción y reconstrucción de las acciones matemáticas, procesos y objetos y organizándolos en esquemas para utilizarlos en las soluciones de situaciones (p. 5).

Otro elemento esencial en la teoría APOE es la *descomposición genética* de un concepto que es una descripción hipotética, basada en datos empíricos, de la forma que es posible que una persona construya conocimiento matemático. La finalidad es proponer un modelo de cognición (no es único), una descripción de las construcciones mentales que posiblemente un estudiante haga para desarrollar su comprensión sobre un concepto. La descomposición genética inicial se basa en la propia experiencia de los investigadores y en una teoría general de aprendizaje. Luego de ponerse a prueba puede sufrir modificaciones (Pons, 2014).

### 2.1.3 La comprensión durante la operación con representaciones múltiples

La operación con representaciones múltiples se debe a Kaput (1987, citado en Meel, 2003). Para este autor un sistema de representación consta de: dos mundos, el representado y el representante; los elementos del mundo representado, los elementos del mundo representante y la correspondencia que une las conexiones entre los dos mundos. Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representación en los que el mundo representado es una estructura o concepto matemático y el mundo representante es un esquema de símbolos. Cuando el estudiante construye un significado personal se presenta una negociación entre las operaciones físicas que pueden observarse y las operaciones mentales que son hipotéticas. Según Kaput el desarrollo de la comprensión es el cambio de operación en el mundo de las operaciones físicas para operar en el mundo de las operaciones mentales.

### 2.1.4 La comprensión como la superación de obstáculos cognitivos

Los obstáculos cognitivos fueron definidos en primera instancia por Bachelard (1938, citado en Meel, 2003) y se clasificaron en genéticos o psicológicos, didácticos y epistemológicos, de acuerdo si su aparición se debe al desarrollo personal del individuo, a la práctica de enseñanza o a la naturaleza misma del concepto matemático. Para este autor la construcción del conocimiento científico no es un proceso continuo, sino que resulta del rechazo de formas previas de conocimiento: los obstáculos epistemológicos (Artigue, 1998). En matemática algunas dificultades de aprendizaje resultan de aplicar formas de conocimiento que han sido durante un tiempo efectivas, ya sea en un entorno cultural o escolar. En particular los obstáculos epistemológicos tienen dos características: son inevitables debido a que la persona construye la comprensión de un objeto matemático y el desarrollo histórico del concepto refleja su existencia (Cornu, 1991, citado en Meel, 2003).

En esta línea Sierpinska (1990, citado en Meel, 2003) establece que el uso del análisis epistemológico de un concepto matemático ayuda a analizar la comprensión alcanzada por el estudiante mediante la observación de las diferentes maneras de percibir un concepto. El desarrollo de la comprensión puede describirse en algunos casos como la conciencia de un obstáculo lo cual permite nuevas vías de conocimiento. La medición de la profundidad de la comprensión se alcanza mediante la identificación de la cantidad y calidad de actos de comprensión logrados o el número de obstáculos epistemológicos superados.

### 2.1.5 Modelo de comprensión de Pirie y Kirien

Para estos autores la comprensión matemática no es lineal, es un fenómeno recursivo y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia de niveles de complejidad. En palabras de Pirie y Kirien (1989, citados en Meel, 2003):

> La comprensión matemática se puede definir estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él (p. 235).

De esta manera establecen siete niveles potenciales como evolución en la comprensión matemática. El primer estrado es el del *conocimiento primitivo*: toda la información que el estudiante tiene en el momento de aprendizaje. El segundo, llamado *creación de imágenes*, el alumno realiza acciones (mentales o físicas) basadas en sus conocimientos anteriores para obtener una idea del concepto. El siguiente, *comprensión de la imagen*, el estudiante logra obtener una imagen mental del objeto y en el posterior, *observación de la propiedad*, puede examinar dicha imagen y determinar las distintas propiedades asociadas a la misma. El quinto estrado de la comprensión llamado *formalización* se caracteriza porque el estudiante puede extraer cualidades comunes de las clases de imágenes y tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas. En el siguiente estrado, la *observación*, el alumno es capaz de organizar y estructurar los procesos de pensamiento personal. El último nivel, la *estructuración*, en el mismo la comprensión del estudiante trasciende el tema particular para pasar a una estructura mayor. El anillo exterior del modelo sobre la comprensión se llama *invención*. En éste el estudiante se cuestiona haciendo uso de los conocimientos formales que posee y es capaz de dar paso a un nuevo conocimiento, el cual puede dar lugar a una nueva acción primitiva y comenzar nuevamente el recorrido anterior (Meel, 2003).

### 2.1.6 La comprensión según Sfard

Sfard (1991) estudia la comprensión en matemática y apoya su teoría en la de Piaget. Esta autora establece la diferencia entre concepto, que es la idea matemática en su forma oficial, y concepción, definida como la idea del concepto que vive en la mente humana, que depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios. A su vez Sfard introduce dos formas de concebir un concepto matemático: como proceso o CO, producto de un cierto proceso o el proceso en sí mismo y como objeto o CE, entidad concebida como un objeto real. Si el estado de concepción de un objeto es sólo el operacional, la autora establece que la comprensión se encuentra en un estado incipiente y el alumno no es capaz de, por ejemplo, resolver problemas. Es importante aclarar que estas concepciones están descriptas en términos de características externas de los estudiantes como actitudes, habilidades y conductas. Entonces la observación de esas acciones cuando los estudiantes se enfrentan a una tarea matemática es la que permite verificar el grado de comprensión de un concepto matemático.

Tomamos este marco teórico para estudiar la comprensión de los alumnos de ingeniería de la UNLaM sobre los conceptos involucrados en PO cuando interactúan con actividades basadas en la variación y en las que se usan diversos sistemas de representación. Si bien ampliamos esta teoría en el Capítulo 3, queremos mencionar dos trabajos de tesis que se basan en la misma y nos sirven de referencia para nuestro estudio.

Comenzamos por el de Mora (2006) que tiene como objetivo mostrar el nivel de comprensión del concepto de función en los estudiantes que ingresan a los cursos de Cálculo de la universidad y cómo incide éste en el aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo. La investigación de carácter exploratorio se realiza sobre un grupo de 14 estudiantes de ingeniería y ciencias. Se presentan dos resultados: el primero de carácter cuantitativo en el cual se consignan las mediciones que se hacen respecto a la concepción de los alumnos sobre el concepto de función como CO y/o CE de acuerdo a Sfard y cómo incide esa concepción en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. El segundo resultado muestra un estudio de tipo cognitivo efectuado a dos estudiantes en el que se explica la forma en que activan sus esquemas cognitivos en procura de lograr desarrollos exitosos frente a problemas matemáticos, siguiendo una adaptación del modelo piagetiano sobre la comprensión.

Una de las conclusiones a las que arriba el autor es que los instrumentos utilizados permiten observar los esquemas que dirigen las acciones de los estudiantes en las distintas situaciones. Estas últimas, junto con las variables didácticas que se pusieron en juego, posibilitan observar el estado de comprensión no sólo de los conceptos considerados en la investigación, sino el de otros, tales como los conceptos de variable y regla de la cadena.

La otra tesis a la que hacemos mención es la de Murillo (2013). Este estudio establece como objetivo general identificar y caracterizar niveles de comprensión del concepto de función en estudiantes de nivel secundario, a través de sus concepciones CO y CE según el marco teórico de Sfard. La metodología es cuantitativa y se utilizan métodos empíricos como el estudio documental, cuestionarios, encuestas y estadísticos a través de los cuales se analiza el nivel de comprensión del concepto en una muestra representativa de estudiantes.

Las preguntas del cuestionario se estructuran y clasifican teniendo en cuenta las diferentes representaciones de una función y el modelo de construcción de concepciones CO y CE. Una de las conclusiones que extrae la autora es que el concepto de función es visto como una relación de asignación entre dos conjuntos, generando aprendizajes memorísticos, lo cual reduce el desarrollo de aprendizajes significativos que favorezcan la resolución de problemas por parte de los alumnos. La tesis culmina con una propuesta de enseñanza del concepto de función según la teoría de Sfard.

## 2.2 El Pensamiento y Lenguaje variacional

El PyLV permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales basadas en la matemática del cambio y la variación (Cantoral y Farfán, 1998). Aporta una mirada que complementa a la de los enfoques tradicionales mencionados en el apartado anterior que centran su atención en el aspecto cognitivo de la construcción de un objeto matemático ya que estudia la naturaleza del saber desde una visión múltiple: la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza.

Este trabajo incorpora las ideas del PyLV, el cual se interesa por estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación del saber matemático relativos a la variación y el cambio en situación escolar universitaria.

El Cálculo Diferencial es una herramienta poderosa para describir en términos matemáticos ciertos fenómenos de la naturaleza u otras ciencias en los que se involucran situaciones de cambio. Esto nos permite cuantificar, analizar, explicar y predecir estados futuros de dichos fenómenos.

A pesar de esto la enseñanza del Cálculo ha tomado otros caminos: o está muy centrada en aspectos formales y teóricos o prioriza las competencias algorítmicas en el cálculo de límites, derivadas y primitivas. En un curso tradicional de Cálculo se brinda la definición formal de un objeto (por ejemplo, la derivada de una función en un punto), se demuestran propiedades y luego se realizan ejercicios paradigmáticos y rutinarios. Este "círculo" de definición, propiedades, teoremas y ejercitación obstaculiza el uso del Cálculo como herramienta de modelación y predicción.

Diversas investigaciones dan cuenta de que se puede trasmitir la esencia del Cálculo desarrollando en los estudiantes ideas de variación y cambio (Cantoral y Farfán, 1998, Dolores, 1996, Guerrero, 2002, Sánchez y Molina, 2006, García, 2011, Vrancken, 2011, Cardona, 2009, Cabrera, 2009).

A continuación, detallamos algunas investigaciones basadas en el PyLV que son referentes de nuestro estudio.

### 2.2.1 Sobre el concepto de función y variación de funciones

Valero (2004) en su tesis evidencia la necesidad de investigar la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones bajo condiciones determinadas de enseñanza. El término concepciones alternativas describe aquel tipo de conocimiento que difiere del que debiera ser aprendido. Se comprueba que las concepciones alternativas no se abandonan sólo por una exposición a los conceptos científicos correctos. Una de las concepciones alternativas frecuentes es no diferenciar entre el comportamiento de una función (crecimiento o decrecimiento) y la ubicación de su gráfica en el plano cartesiano. El objetivo central de la investigación es remover esas concepciones para sustituirlas por otras acordes con el conocimiento científico. De esta manera se pretende allanar el camino a los estudiantes para cuando llegue el momento de enfrentarse con los conceptos propios de la matemática del cambio puedan llevar a cabo el análisis gráfico de funciones de acuerdo con las concepciones aceptadas por la disciplina. Las actividades diseñadas para la experiencia tratan sobre el signo de una función $f(x)$, su comportamiento (crecimiento, decrecimiento y estabilización) y el trabajo simultáneo de estas dos características.

En la misma línea Guerrero (2002) efectúa un estudio exploratorio sobre el comportamiento variacional de funciones a través de sus representaciones gráficas y analíticas en los profesores de nivel medio superior. Esta investigación está motivada por la confusión manifiesta en alumnos entre los intervalos de positividad y negatividad de una función y las características de crecimiento y de decrecimiento de la misma. El autor realiza un estudio en los profesores para poder evidenciar si tienen el mismo comportamiento que sus alumnos. A través de un cuestionario se analizan las concepciones de los docentes sobre crecimiento y decrecimiento, puntos estacionarios, función positiva, negativa y nula y se tienen en cuenta el tratamiento y la conversión entre registros: gráfico, analítico y verbal. Dentro de las conclusiones más importantes se manifiesta que los docentes confunden signo de una función con su comportamiento cuando la información está dada en cualquier registro. A su vez cuando se les solicita graficar un punto de estabilidad grafican una función constante en un intervalo. La mayoría de los docentes entrevistados no puede graficar una función $f(x)$ de la cual conocen el gráfico de su derivada.

En Vrancken, Engler, Giampieri y Müller (2015); Engler, Vrancken y Müller (2003) y Hecklein, Engler, Vrancken y Müller (2011) encontramos numerosas actividades que tienen como objetivo favorecer el desarrollo del PyLV en estudiantes. El primer trabajo trata sobre el concepto de función, el segundo sobre el estudio del comportamiento de funciones bajo el supuesto de una enseñanza activa en busca de afianzar la relación derivada-función y función-derivada y el tercero sobre la exploración de los conceptos de variable, funciones y cambio en estudiantes de secundaria. Los tres artículos centran la atención en la forma en que el estudio de procesos de variación permite construir acercamientos significativos para la comprensión y el uso de las funciones como modelos de situaciones de cambio.

### 2.2.2 Sobre el concepto de derivada

Engler y Camacho (2012) analizan y describen el aporte de varias investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada desde la perspectiva del PyLV. Estos autores señalan a Crisólogo Dolores como pionero sobre el tema en estudios de habla hispana. De Dolores (1998) rescatamos una investigación que realiza en el bachillerato en la cual toma como supuesto que el desarrollo de ideas variacionales favorece la comprensión del concepto de derivada. El autor diseña lo que él llama una experiencia pedagógica con 32 estudiantes organizada en tres fases. En la primera se estudian las variables y las funciones. La segunda está dedicada a la formación del concepto de derivada partiendo de la determinación de velocidades medias y como necesidad de calcular la velocidad instantánea. En la tercera fase se trabaja con razón de cambio instantánea en problemas que no están necesariamente relacionados con la variación física.

Vrancken (2011) realiza una investigación cuyo propósito es indagar las nociones ligadas a la derivada que construyen los alumnos cuando trabajan con actividades especialmente diseñadas. Plantea la hipótesis: "la comprensión de la derivada se favorece si se propone una situación didáctica que permita a los alumnos manejar y coordinar distintos registros" (p. 102). La autora diseña y pone a prueba una secuencia didáctica que propicia la comprensión del concepto derivada desde la línea del PyLV y en la cual se utilizan varios registros de representación. Plantea una ingeniería didáctica para llevar adelante la investigación. Realiza un análisis a priori, es decir prevé el comportamiento de los alumnos, luego efectúa la experimentación y por último un análisis de los datos o a posteriori, lo cual le permite concluir la validación de la secuencia diseñada. Los instrumentos de recolección de datos son las producciones de 23 alumnos, la observación de la puesta en común de cada actividad, cinco entrevistas y los datos de los exámenes de los estudiantes involucrados. Uno de los resultados principales que arroja la investigación es que si bien, a medida que los alumnos trabajan con la secuencia didáctica, pueden plasmar argumentos de tipo variacional, naturalmente recurren a procedimientos tradicionales o basados en fórmulas o expresiones algebraicas. A su vez la autora valida la hipótesis planteada: las producciones de los alumnos evidencian una evolución positiva en la comprensión del concepto de derivada y de las diferentes interpretaciones en los distintos registros: verbal, numérico, gráfico y analítico, luego de haber trabajado con la secuencia didáctica basada en ideas variacionales.

Otra tesis en la misma línea que la anterior es la de García (2011). En este escrito se exponen los elementos del diseño y puesta en escena de una secuencia de aprendizaje para la enseñanza de la derivada en estudiantes principiantes universitarios. La autora plantea como objetivo general contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes que inician sus estudios en la Licenciatura en Matemática. La hipótesis de la que se parte para la realización de este trabajo es la siguiente: “mediante la introducción a la derivada por la vía variacional, se pueden crear condiciones que ayuden al estudiante a mejorar la comprensión del concepto derivada” (p. 14). En la elaboración de la secuencia se toman como ejes directrices a la variación y a la transición entre registros: geométrico, numérico, algebraico y verbal. Como metodología se siguen los pasos: diseño de la secuencia de aprendizaje, toma de una prueba diagnóstica o pre test a los estudiantes que participan de la experiencia, trabajo con el dispositivo diseñado y por último se toma un pos test a los alumnos involucrados.

Como conclusión principal señala que la secuencia diseñada contribuye a mejorar la comprensión de los estudiantes, aunque no en su totalidad. Según la autora la introducción de la derivada por vía variacional ayuda a la comprensión del concepto, logrando también una interacción con los compañeros y el profesor y en base a los conocimientos previos. Destaca que el estudiante es el último responsable de su proceso de aprendizaje, es él quien construye el conocimiento y nadie puede sustituirle en esa tarea.

La tesis de Vidal (2012) trata sobre el estudio de la derivada vista como razón de cambio afianzando elementos didácticos que conducen a un mejor desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma mostrando su naturaleza variacional. También se hace una aproximación histórica y epistemológica del Cálculo Diferencial.

Debido a que los estudiantes de grado 11 en Colombia estudian conceptos, teoremas, propiedades del Cálculo, pero no aplicaciones, uno de los objetivos del Ministerio Nacional de Educación de Colombia para ese grado es “interpretar la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos” (Vidal, 2012, p. 1).

Entonces el autor describe diversas dificultades que tienen los estudiantes y luego expresa que es pertinente buscar estrategias didácticas diferentes para aproximar a los alumnos en los conceptos del Cálculo Diferencial y en particular al concepto de derivada. Para formular una propuesta didáctica establece profundizar en el análisis histórico del concepto a fin de identificar los orígenes del estudio de la variación y la interpretación de la derivada como razón de cambio.

En el último capítulo desarrolla los objetivos de cada unidad didáctica, las habilidades que espera desarrollar, los contenidos (divididos en conceptuales, procedimentales y actitudinales), metodología, materiales y recursos y la evaluación.

Sánchez (2006) describe una secuencia didáctica para introducir el concepto de derivada usando ideas de variación, diferentes sistemas de representación y dispositivos tecnológicos como calculadoras gráficas y sensores de movimiento. El autor enfatiza que el diseño didáctico mostrado difiere de otros debido a que incluye la utilización de dispositivos tecnológicos que permiten representar y analizar las ideas matemáticas de una manera más ágil y sencilla que en un ambiente de lápiz y papel, además de favorecer el establecimiento de una relación entre representaciones.

Marcolini (2003) basa su investigación en la resignificación del concepto de derivada a través de las derivadas sucesivas y en la serie de Taylor como herramienta de predicción. La motivación del estudio está dada por la fragilidad del conocimiento del Cálculo que evidencian los estudiantes y la dicotomía de la enseñanza de la Matemática y de las ciencias experimentales como Física, Biología y Química. La autora tiene la visión que a través de una reconstrucción del discurso matemático escolar puede lograr que las ciencias experimentales sirvan como complementarias en la construcción de conceptos importantes del Cálculo. Señala que, entre varias investigaciones, la mayoría no plantea que dicho discurso sea susceptible de modificaciones. Según ella lo que se enseña en el aula no logra trasmitir las ideas matemáticas necesarias para hacer frente a los problemas que se plantean en el campo de las ciencias experimentales. El objetivo general que se planea es estudiar las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo en estudiantes de ingeniería. Como uno de los objetivos específicos establece “favorecer en el alumno el pensamiento y lenguaje variacional que le posibilite abordar con éxito los problemas propios de las Ciencias Experimentales” (p. 22).

Basa el estudio en:

- ✓ La resignificación del concepto de derivada a través de las derivadas sucesivas.
- ✓ La serie de Taylor como herramienta de predicción.

Usa como metodología la ingeniería didáctica sustentada en el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas y Transposición Didáctica. En el análisis preliminar analiza en la situación didáctica diseñada en diversos registros, las etapas de la teoría anteriormente mencionada, revisa manuales escolares y muestra la opinión de expertos sobre la misma. Efectúa dos experiencias en grupos distintos, además de una prueba piloto previa.

Como conclusiones importantes establece que el estudio logra centrar la atención en el qué enseñar en vez del cómo enseñar, apoyándose en la visión interdisciplinaria de las ciencias experimentales, donde la matemática tuvo su motor de desarrollo. A su vez aporta un análisis epistemológico profundo de la serie de Taylor, en el cual se identifican dos aspectos centrales: el reconocimiento de las aplicaciones e influencias de la serie en el desarrollo de algoritmos y patrones numérico-algebraicos y el estudio puntual de los fenómenos de movimiento de cuerpos rígidos y del análisis de las curvas. En las situaciones problemas que se les presenta a los estudiantes se involucran las derivadas sucesivas en contextos de Cinemática y Biología. Esto permite a los alumnos interactuar y lograr construir o reconstruir conceptos a través de problemas no rutinarios. En las producciones de los estudiantes se observa el proceso de aprendizaje, la evolución de las estrategias al mostrar sus acciones, ideas y percepciones en que se basan para formular y justificar las respuestas.

Cardona (2009) pretende comprobar de manera experimental un diseño didáctico para estabilizar la noción de derivada. La estabilización de la derivada es cuando una persona al enfrentar una tarea o problema matemático hace un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas consistentemente, sin importar el contexto de representación que se le presente. La propuesta didáctica que hace el autor trata de que el estudiante se apropie del concepto de derivada desde las derivadas sucesivas (no desde la tangente o regla de cuatro pasos) y consiste en el mismo instrumento utilizado en la tesis de Valero (2004). La recolección de los datos se realiza por medio de las producciones escritas por los estudiantes y material de audio, este último sirve para transcribir las conversaciones entre y con los estudiantes. Entre las conclusiones obtenidas tenemos que el proceso de estabilización se "detiene" debido a los siguientes obstáculos:

- ✓ Aparición del teorema factual (mediante el cual se piensa que si la función es positiva su derivada también lo es).
- ✓ Manejo de poco universo de funciones: sólo polinomios de grado 0, 1, 2 y 3, no aparecen funciones exponenciales, logarítmicas ni trigonométricas.
- ✓ Uso de pocos registros, en general el gráfico y el verbal.
- ✓ No entendimiento de las instrucciones de cada problema matemático y algunas dificultades a nivel aritmético o algebraico.

Otra investigación que trata sobre el concepto de derivada en problemas de aplicación y la relación entre la derivada y las derivadas sucesivas es la que efectúan Simón y Miguel (2013). Los autores suponen que el exhaustivo estudio en matemática hace que el alumno no le preste demasiada atención a las situaciones de cambio que se dan en otras disciplinas, por lo que proponen una propuesta didáctica basada en la noción de variación. Como objetivo general de investigación se busca identificar y analizar el tipo de concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto de derivada, analizando para esto el tipo de herramientas de PyLV que ponen en juego y cómo las utilizan, con la finalidad de encontrar elementos que permitan influir en el rediseño del discurso matemático. Una de las conclusiones es que la mayoría de los estudiantes que participan en el estudio carecen de estrategias del PyLV que les admitan pasar del lenguaje algebraico al lenguaje gráfico, además de que no pueden establecer un manejo simultáneo entre las derivadas sucesivas, lo cual indica que su concepción de derivada se muestra frágil. A su vez la interpretación que dan a la definición de derivada es la que tradicionalmente se usa en los libros de texto y por lo tanto la que se observa en la enseñanza tradicional. Muy pocos estudiantes pueden dar una interpretación de razón de cambio, en general no alcanzan a ver que el límite representa variación. Los alumnos que utilizan algún recurso gráfico para trabajar sus ideas muestran resultados más exitosos que los que no lo usan.

Zaldívar (2006) manifiesta que existen, sobre el Cálculo a nivel universitario, varias investigaciones, propuestas y diferentes paradigmas que no llegan a las aulas. En palabras del autor: "…el arduo trabajo desarrollado en didáctica del cálculo, así como los proyectos de *innovación* en su enseñanza, puede decirse que poco han logrado incidir al seno de las prácticas institucionales y prácticas de aula" (p. ii). Preexiste una gran brecha entre la innovación (realidad de aula) y las investigaciones científicas.

El autor discute sobre los beneficios que tiene el poner al alcance del profesorado universitario ciertos elementos de corte didáctico, epistemológico y cognitivo que se encuentran presentes en estudios relacionados con la didáctica del Cálculo. La investigación realizada es de tipo documental y establece un posible eje rector para el empleo de las investigaciones como potenciales herramientas para el profesorado en la generación de alternativas de enseñanza y aprendizaje al interior y exterior de sus aulas.

El objetivo general es buscar conformar a manera de catálogo una serie de elementos que, derivados de la evidencia empírica, se constituyan como un “hilo conductor” del quehacer docente en el Cálculo. Dentro de estos elementos desarrolla conceptos como: visualización, PyLV, obstáculos epistemológicos, registros, entre otros. El autor quiere establecer de esta forma un puente entre la investigación y la docencia, entre la innovación y la aplicación. Muestra también una propuesta didáctica diseñada y la analiza punto por punto a la luz del marco teórico. Termina la tesis con una síntesis de todas las investigaciones estudiadas exponiendo objetivo, marco teórico, público al cual están dirigidas y la propuesta en sí misma.

La tesis de Cabrera (2009) tiene como objetivo realizar un estudio teórico documental donde se analiza el enfoque por competencias y algunos de los resultados del PyLV como línea de investigación. La idea es ver si las situaciones propuestas por el PyLV favorecen el desarrollo de competencias, considerándolas como unidades mínimas requeridas para obtener el título de bachillerato.

El autor desarrolla el marco teórico sobre el enfoque de competencias en forma completa. A su vez establece que la línea de investigación del PyLV muestra la factibilidad de abordar el estudio de la variación y el desarrollo de las estrategias variacionales, como medios adecuados y favorecedores para la construcción y apropiación de conceptos matemáticos tales como las funciones y las derivadas, combinando ésta con registros de representación semiótica. El autor considera que los resultados provenientes del PyLV puede ayudar a ir conformando una adecuada base metodológica para promover el desarrollo de las competencias. Expone diversas secuencias didácticas realizadas sobre la línea de PyLV y resolución de problemas y analiza las competencias en cada una.

Concluye que el PyLV es una competencia matemática importante y transversal a diversas disciplinas.

Martínez (2005) elabora un estudio sobre la didáctica y la cognición de la pendiente y su respectiva variación. El autor se basa en que la variación de la pendiente como número y cambio de signo juega un papel importante en el análisis de funciones, en la determinación de máximos y mínimos de una función a través de la derivada, así como en el Cálculo Diferencial. En la investigación realiza un análisis didáctico profundo de diversos libros de Cálculo y Precálculo.

## 2.3 Otras investigaciones que aportan a nuestro estudio

Los estudios anteriormente citados están enmarcados específicamente en el PyLV. También podemos dar cuenta de investigaciones sobre IC, ID y ER de una función y PO que se encuadran en otros marcos teóricos. Estos nos sirven de referencia por los conceptos matemáticos involucrados en las mismas, por su contribución sobre las dificultades detectadas en los alumnos cuando resuelven este tipo de problemas y por los resultados que obtienen sobre su aprendizaje en las experiencias reportadas.

### 2.3.1 Sobre problemas de optimización

La tesis de Cuesta (2007) trata sobre el concepto de función y ER de una función. Ante la problemática específica de estudiantes de Economía que tienen que adquirir habilidades para plantear y resolver PO propios de su carrera, el autor propone como objetivo general analizar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función en las condiciones del sistema educativo de su universidad, a través de la realización y evaluación de una unidad didáctica que incida en la creación de significados por parte de los estudiantes. La investigación considera necesidades propias del contexto donde se exige una reforma hacia la participación activa del alumno, que sea gestor de su propio desarrollo y formación integral.

Se basa en la teoría constructivista. Parte de ideas, errores y dificultades de los estudiantes sobre el concepto de función y ER con el objeto de describir e interpretar el comportamiento durante y después de aplicar la unidad didáctica. Se crea un ambiente de aprendizaje diferente al de la enseñanza tradicional. La aplicación de la unidad didáctica es el soporte del estudio de campo, para el que se diseñan instrumentos específicos de recogida de información para evaluar el aprendizaje de los alumnos y la unidad didáctica en sí misma.

Para el proceso de aprendizaje se toman datos en los siguientes momentos:

- ✓ Al inicio de la unidad didáctica: prueba diagnóstica.
- ✓ Durante el desarrollo de la unidad didáctica al grupo de estudio: observación no participante, diario del profesor y cuaderno del estudiante donde realiza las tareas extra clase.
- ✓ En las sesiones de trabajo del investigador con una muestra de estudiantes: observación participante (observación directa, entrevistas informales, grabaciones de cintas y notas de los alumnos).
- ✓ Cuando termina la unidad didáctica: prueba final, cuestionario a los estudiantes (ya desde el punto de vista de percepción sobre la unidad didáctica) y entrevista al profesor.

Dentro de las conclusiones principales sobre la identificación de dificultades en el proceso de aprendizaje señala que el esquema conceptual del estudiante sobre el concepto de función sugiere dos aspectos: la existencia de una relación de dependencia entre las dos variables cuyo significado no siempre se comprende, y la evocación de ejemplos vistos en clase como prototipos. Puede corroborar la presencia de dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto de función producida por conocimiento (o no) del contexto dado. Sobre los registros de representación el más afectado es el contexto geométrico. Algunas palabras como “lados adyacentes” crean conflicto en concebir una función desde un contexto geométrico. Muchos estudiantes no pueden transferir una función desde una tabla y/o gráfico a su expresión analítica. En general no tienen habilidad para establecer una relación entre los distintos sistemas de representación.

Respecto al concepto de ER, los alumnos, en la mayoría de los casos, lo explican como el cambio de comportamiento de la función o por su posición en una cierta localidad de valores. La explicación se apoya usualmente en la representación gráfica, como altura de la misma, sin establecer una relación con otro sistema. Para algunos estudiantes el valor máximo relativo de una función se halla en, por ejemplo, el último valor calculado en una tabla.

En los trabajos de Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto (2011, 2013, 2014) se realiza un análisis exploratorio de las dificultades de los alumnos de ingeniería para resolver PO. El primer análisis se basa en el desempeño de un grupo de 38 estudiantes. Se utiliza como instrumento de recolección de datos un protocolo diseñado para operacionalizar los conceptos del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática que pretende captar la configuración epistémica y las configuraciones cognitivas asociadas al problema. El problema que se presenta a los alumnos es el de encontrar un rombo de lado un metro que tenga la mayor área posible. Sólo el 13% de los alumnos lo resuelve correctamente.

Una de las conclusiones más relevantes es que el planteo de la función en una variable se identifica como un procedimiento clave en la resolución de este tipo de problemas ya que, dados los conocimientos matemáticos en juego, es condición necesaria para la obtención de ER.

El segundo trabajo reportado también en Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013), consiste en una investigación exploratoria descriptiva en la que la población está formada por 183 alumnos de la asignatura Análisis Matemático perteneciente al primer año de las carreras de ingeniería. Se administra el instrumento que propone la resolución de dos PO, uno es el del rombo mencionado anteriormente y otro brindado en registro gráfico en el cual se solicita el rectángulo de mayor área con un vértice en una recta dada y los otros sobre los ejes cartesianos. Al momento de la toma de los datos ya habían concluido las actividades teóricas y prácticas referidas al tema en cuestión. Uno de los resultados principales es que quienes pueden establecer correctamente la función en una variable, también derivan y encuentran sin dificultad el punto crítico. El error cometido por los alumnos al considerar el punto crítico como ER, trae aparejado el bajo porcentaje que estudia el signo de la derivada a derecha e izquierda del punto, mostrando la dificultad de los estudiantes en argumentar sus procedimientos en ambos problemas.

En el tercer artículo los autores se basan en el mismo marco teórico y la experiencia se realiza en un grupo de 78 alumnos de carreras de ingeniería. Estos estudiantes se dividen en dos grupos, en uno de los cuales se efectúa una intervención didáctica orientada a producir una mejora en la construcción de significado relativo a PO. Para la recolección de datos se usan tres PO, dos de ellos suministrados antes de la experiencia didáctica y el tercero como ítem de un parcial tomado posteriormente. El análisis realizado sobre las resoluciones de los dos primeros problemas replica lo que acontece históricamente en las evaluaciones de la asignatura al momento de la corrección de los mismos. Esto es, una baja cantidad de estudiantes resuelven los problemas mencionados. Luego de la experiencia didáctica el grupo que intervino en la misma posee mejores resultados en la resolución del tercer problema que el otro grupo. Otra de las conclusiones importantes es similar a la del segundo artículo y establece que muchos estudiantes consideran el punto crítico como ER y por lo tanto no estudian el signo de la derivada primera a derecha e izquierda del valor obtenido.

Otro autor que dedica sus investigaciones a PO es Malaspina (2002, 2004 y 2008). En el primer artículo reporta la síntesis de un curso ofrecido en el marco de un congreso en el que tiene como objetivo principal estimular una perspectiva intuitiva para resolver PO. Según el autor la intuición es fundamental en el quehacer matemático, pero en general no se desarrolla adecuadamente debido a la necesidad prematura de formalizar y de presentar métodos específicos. Se presentan varios problemas con diversos enfoques para su solución. Una de las conclusiones es que, partiendo de problemas apropiados, trabajando en grupos y orientando adecuadamente, es posible obtener en el aula soluciones que parten de la intuición. Luego trabajando interactivamente con los estudiantes, modificando y generalizando problemas sencillos se puede llegar a situaciones que requieren matemática avanzada, que usa y formaliza las percepciones intuitivas.

En el segundo artículo el autor presenta diversos PO con comentarios sobre la resolución de los mismos. La importancia radica en que considera que trabajar con este tipo de problemas es una excelente oportunidad para estimular el desarrollo del pensamiento matemático. Esto es examinar diversos casos, considerar situaciones particulares, hacer representaciones gráficas, abstraer, formalizar, conjeturar y demostrar, buscar contraejemplos, pensar en la existencia de soluciones, plantearse generalizaciones, prever nuevas dificultades. A su vez se motiva el estudio de teorías matemáticas que resuelven rigurosamente los problemas planteados o los problemas derivados de las especulaciones matemáticas a partir de ellos.

En su tesis de doctorado Malaspina (2008) se pregunta, entre otras cuestiones, cuál es el papel de la intuición y el rigor en la resolución de PO en alumnos universitarios. Realiza un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico, histórico, cognitivo, semiótico y didáctico. Tiene en cuenta básicamente la metodología de investigación propuesta en el enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Los principales instrumentos de recolección de los datos son cuestionarios a partir de problemas específicamente diseñados, uno de variable continua y otro de variable discreta. Analiza cualitativa y cuantitativamente las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a esos dos PO.

En el análisis encuentra soluciones individuales en las que los estudiantes hallan lo pedido, pero no justifican sus resultados (soluciones intuitivas); en las soluciones grupales son escasas las soluciones en las que hallan lo pedido, pero no justifican sus resultados; y en las soluciones individuales, aun habiendo argumentaciones explícitas, se encuentran afirmaciones sin justificación, en una línea correcta hacia la solución. A través de esta realidad el autor no rechaza la conjetura sobre la cual existe una intuición optimizadora. También percibe deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los PO propuestos. Se acentúa la escasa presencia de justificación de que el resultado obtenido es óptimo, más aún en el problema de variable discreta.

Moreno y Cuevas (2004) trabajan con dos PO: uno con ER que se puede obtener con el criterio de la segunda derivada y otro con extremo absoluto y no relativo. La muestra está formada por estudiantes que ya aprobaron el primer curso de Cálculo Diferencial e Integral en una variable y docentes. Los resultados son buenos en la resolución del primer problema, no así del segundo. En el mismo todos los involucrados plantean bien el problema y lo resuelven, pero la mayoría no tiene en cuenta el dominio bajo contexto, con lo cual responden de manera errónea. Otro resultado interesante del estudio se refiere a las respuestas obtenidas por los participantes cuando se les pregunta por la definición de máximo o mínimo. Sólo el 10% entre docentes y alumnos, la brinda en forma correcta. La mayoría identifica un ER con punto de derivada cero.

Guzmán, Ortega, Tapia, Rodríguez y Pérez (2010) realizan una investigación en la que estudian qué estrategias usan los alumnos de carreras no matemáticas para decidir sobre los valores ER cuando el punto crítico tiene derivada segunda nula. A su vez analizan si los alumnos reconocen el significado del objeto matemático valor extremo en los registros algebraico-simbólico y registro gráfico. El problema se plantea en registro algebraico simbólico y consiste en mostrar la función $h(x) = x^3$, su punto de derivada cero en $x = 0$ y se pregunta si esto permite asegurar que en $x = 0$ hay un máximo o un mínimo.

La pregunta se aplica a 96 estudiantes pertenecientes a carreras de Tecnología Médica, Bioquímica y de Ingeniería en Transporte y Tránsito, que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial. Los estudiantes responden individualmente y sin intervención del profesor.

De los resultados se desprende que más de un tercio de los alumnos no utiliza criterio alguno en sus estrategias de solución del problema. Los que aplican los criterios lo hacen de manera incompleta y muestran el desconocimiento del criterio mismo en el registro algebraico-simbólico. Tampoco realizan un pasaje al gráfico para coordinar el crecimiento de la función con la visualización de la gráfica de la función. En el caso de la aplicación del criterio de la segunda derivada, derivan dos veces, pero al obtener derivada nula concluyen que el criterio no se puede aplicar. Los estudiantes operan bien las derivadas en el registro algebraico, pero falta el análisis de los signos de la derivada primera y concluir, en este caso, que el valor no es ER. La no coordinación de los registros algebraico-simbólicos con el registro gráfico explica, a juicio de los autores, la falta de dominio de los criterios y la debilidad en la comprensión.

Por último, la investigación realizada por Giné de Lera y Deulofeu (2010) plantea el estudio de estrategias de solución de un problema contextualizado de ER por parte de estudiantes que ya tienen conocimientos sobre derivadas y sus aplicaciones. Más específicamente se preguntan cómo crean los alumnos un modelo matemático de la situación y cómo, luego de solucionarlo, lo traducen o interpretan a la situación real del problema. Utilizan un protocolo de cinco problemas y un cuestionario que aplican a 40 estudiantes. A partir de un análisis cuantitativo pueden determinar tipologías de alumnos cruzando las variables:

1. Saben usar el método estándar. (Sí; No)
2. Plantean correctamente los problemas (tienen una base matemática aceptable). (Sí; No)
3. Interpretan las soluciones (usan razonamientos para contextualizarlas). (Sí; No)

Uno de los resultados es que el 37,5% de los alumnos se encuentra en la tipología valorada con No en las tres variables. Dentro de las conclusiones los autores mencionan que los estudiantes están entrenados para realizar procesos algorítmicos y cuando se les propone un problema no rutinario donde el algoritmo no da directamente la solución, no saben interpretarlo.

### 2.3.2 Sobre otras cuestiones

No queremos dejar de mencionar otras tesis que contribuyen a nuestro estudio. Entre ellas la tesis de González, A. (2006) cuyo objetivo general es elaborar una propuesta de enseñanza del concepto de integral impropia que incorpore los sistemas de representación gráfico y algebraico y que se complemente con sesiones en un entorno computacional para reforzar los contenidos. Este trabajo aporta desde el marco teórico de registros de representación de Duval y desde su metodología, ya que utiliza la ingeniería didáctica. El autor realiza un desarrollo teórico completo sobre la metodología de ingeniería didáctica, estudia ingenierías didácticas que se llevan a cabo en diversas universidades y relata su propia ingeniería con total detalle. Comienza indicando las restricciones consideradas para diseñar la ingeniería: desde lo institucional (por ejemplo, el número de horas destinadas al tema) hasta características de los estudiantes. Divide las elecciones macro-didácticas en decisiones matemáticas y didácticas y efectúa el análisis junto a dos de las hipótesis planteadas. Es de destacar también el análisis a priori de todas las actividades (ocho sesiones en total) con su dimensión matemática, dimensión didáctica, sus objetivos, duración, forma de trabajo, el medio, material del alumno, material del profesor, dificultades, acciones esperadas de los alumnos y del profesor.

La tesis de Castañeda (2004) tiene como propósito la búsqueda de elementos conceptuales del punto de inflexión y las segundas derivadas a través de una perspectiva socioepistemológica con el fin de recuperar y agregar significados, involucrar nuevas estrategias de estudio y redimensionar su conceptualización. Rescatamos de este trabajo el estudio histórico-epistemológico que el autor hace sobre el tratamiento de los temas del Cálculo Diferencial en los primeros libros de difusión, como fueron los de L'Hopital[1] y de Agnesi.

[1] No existe consenso en la bibliografía consultada en la forma de escribir L'Hopital. Optamos por mantener la elegida en todo el escrito.

# CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO

*En este capítulo presentamos los conceptos teóricos a la luz de los cuales realizamos nuestro trabajo.*

*En primer lugar, enmarcamos la investigación en la Educación Matemática como disciplina científica, y dentro de ella, en la línea del PyLV.*

*Posteriormente, ya como marco teórico específico, profundizamos sobre el PyLV, describiéndolo como línea de investigación y forma de pensamiento, caracterizando los elementos que lo conforman y señalando su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Luego exponemos los elementos conceptuales de la teoría de registros de representación de Duval y, dentro de los enfoques que estudian la comprensión en matemática, describimos el desarrollado por Ana Sfard.*

## 3.1 Marco teórico general

La investigación se desarrolla desde la perspectiva de la Educación Matemática. Rico, Sierra y Castro (2000, citado en Godino, 2010) realizan una distinción entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática. Respecto a la primera la consideran como todo sistema de conocimientos, ideas y procesos que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En tanto que la Didáctica de la Matemática es la disciplina científica que estudia e investiga los problemas que surgen en la Educación Matemática.

Nosotros adherimos a la postura de varios autores que toman los dos términos como sinónimos (Falsetti, Rodriguez, Carnelli y Formica, 2007; Godino, 2010; Cantoral, 1995) A su vez Cantoral (1995) expresa que el término dado a esta disciplina evidencia una ubicación geográfica y conceptual. Por ejemplo, en México se la denomina Matemática Educativa, en países anglosajones Mathematical Education, en Europa continental la llaman Didáctica de las Matemáticas, Didactique des Mathématiques, Didaktik der Mathematik, para citar algunos ejemplos.

El objetivo general de la Educación Matemática es crear teorías y modelos sobre cómo se produce el conocimiento matemático a nivel individual y social, y cuál es el conocimiento matemático adecuado para enseñar a nivel escolar.

Sintéticamente la Educación Matemática tiene sus inicios incipientes a comienzos del siglo XX gracias al interés del matemático Klein quien condujo proyectos de renovación en la enseñanza media. Luego en las décadas del 60 y 70 surge la matemática moderna, la cual introdujo reformas profundas en los contenidos y cuyos resultados no fueron muy favorables. Falsetti et al. (2007) consideran las décadas del 70 y 80 como el inicio de la Didáctica de la Matemática con la formación de la escuela francesa liderada por Brousseau y Chevallard. Desde entonces esta disciplina se enriquece con el aporte de investigaciones de todas partes del mundo, dando lugar a diferentes teorías y enfoques.

Villareal (2002) caracteriza la Educación Matemática de acuerdo a las siguientes actividades vinculadas con la misma:

- ✓ La práctica relacionada con el propio acto de enseñar.
- ✓ El desarrollo de materiales didácticos, la elaboración de propuestas curriculares, la puesta en marcha de experiencias innovadoras.
- ✓ La investigación en el área.

Si bien estos tres campos tienen una finalidad común: la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, las reglas de funcionamiento y sus objetivos son esencialmente distintos. El primer campo está limitado al accionar del profesor, quien tiene a su cargo uno o más grupos de estudiantes a los cuales trata de enseñar matemática. El objetivo principal en este caso es mejorar el aprendizaje de los alumnos. El segundo campo, denominado también campo tecnológico, tiene como finalidad producir materiales, recursos, textos, videos y dispositivos propios para la acción. Finalmente, la investigación científica. Al respecto Schoenfeld (2000) establece que la misma tiene dos propósitos: uno puro (o ciencia básica), que pretende comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje y otro aplicado (o ingeniería), que usa ese conocimiento para mejorar la instrucción en matemática.

Como resultados de la investigación pura surgen diversos enfoques, paradigmas o líneas de investigación en los cuales se enmarcan las producciones y aportes para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Entre ellos el enfoque teórico PyLV que propone estudiar los fenómenos de producción y trasmisión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple: epistemológica, cognitiva, didáctica y social. En la componente epistemológica se estudian las prácticas que dan origen al objeto matemático en cuestión. En la cognitiva, los procesos de construcción de conocimiento por parte de los alumnos. En la componente didáctica se analiza cómo se enseña dicho objeto matemático, desde las prácticas en el aula hasta su tratamiento en diversos textos. Por último, la componente social trata cómo viven en el entorno las prácticas que dan lugar a los conocimientos.

Godino (2010) indica que en este marco "se plantea el examen del conocimiento matemático considerándolo como social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión" (p. 22).

Cantoral (2004) expresa que este enfoque:

> Se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista fenomenológico, estudia funciones cognitivas que se desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticos del cambio, y tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio (p. 8-9).

## 3.2 Marco teórico específico

### 3.2.1 Pensamiento y Lenguaje variacional

#### 3.2.1.1 ¿Qué es el Pensamiento y Lenguaje Variacional?

Vivimos en un mundo en el cual hay manifestaciones de *cambio* en diversidad de fenómenos. En fenómenos naturales: aumenta o disminuye la temperatura a lo largo del día, crece o decrece la población de bacterias dentro de un organismo, aumenta o disminuye la población de un determinado país, cambia la posición de la Tierra según pasan los días del año respecto a su órbita alrededor del sol. En fenómenos sociales: aumenta o disminuye el costo de producir determinada cantidad de un producto, varía la posición de un tren cuando se mueve de un destino a otro, entre otros.

La matemática nos permite modelar estos fenómenos, es decir representar o describir un objeto o situación del mundo real donde intervienen relaciones y conceptos matemáticos de manera tal de constituir una herramienta para interpretar y predecir el fenómeno y su comportamiento (Córdoba, 2011). Más específicamente, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral estudian fenómenos de cambio.

Ahora bien ¿qué entendemos por *cambio*? Cabrera (2009) hace distinción entre *movimiento, cambio y variación.* Respecto al primero, indica que es un proceso autónomo, es el que realiza un objeto cuando se mueve. Debido a que no sólo estudiaremos situaciones de movimiento, nosotros lo extenderemos a cualquier magnitud o magnitudes (variables) que caracteriza un fenómeno determinado y la relación entre las mismas (función). Cantoral, Molina y Sánchez (2005) definen por cambio "a la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición que experimenta un cuerpo, un sistema o un objeto" (p. 464). Así, por ejemplo, si estamos pensando en una persona que camina de su casa a su trabajo, el cambio de movimiento será el paso de un punto a otro en su camino. Ese movimiento a su vez puede ser uniforme, en ocasiones más rápido, en otras se puede detener, luego puede caminar más lento porque está cansada, etc., es decir podemos analizar el cambio de ese cambio, dando lugar al concepto de variación. Los autores mencionados definen la variación como la "cuantificación del cambio", es comprender cómo y cuánto cambia el fenómeno estudiado.

Podemos hacer una adaptación de la figura que presenta Cabrera (2009, p. 52) para mostrar estos tres conceptos:

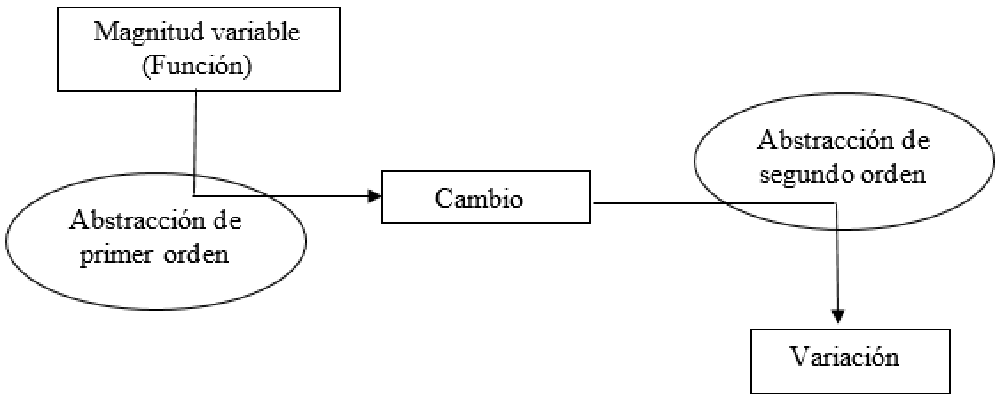



Figura 1. Conceptos base del PyLV

El PyLV es una línea de investigación que estudia las estrategias y acciones que la comunidad educativa (docentes en su enseñanza, alumnos en su aprendizaje) usan cuando se enfrentan a fenómenos de variación. Como expresamos en el apartado anterior, la investigación desde este enfoque tiene una orientación múltiple: epistemológica ya que se estudian procesos de cambio desde su construcción matemática y epistemológica; cognitiva porque analiza los procesos cognitivos que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de variación. A su vez tiene una faceta didáctica desde la cual los docentes diseñan situaciones de aprendizaje donde se usan procesos y actividades basadas en el cambio y una dimensión social, ya que estas situaciones se presentan en un contexto escolar determinado.

Además de un enfoque de investigación es una forma de pensamiento. Éste se identifica por el estudio de situaciones y fenómenos en donde está involucrado el cambio y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio de la variación. El PyLV es parte del Pensamiento Matemático Avanzado ya que combina la matemática de la variación con el pensamiento y a su vez, para su desarrollo, se deben dominar todos los conjuntos numéricos y los conceptos de variable, función, derivada e integral, usando varios registros de representación y un dominio elemental de la modelación (Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002; Cabrera, 2009).

Para Caballero y Cantoral (2013) es la capacidad de trabajar en forma flexible con funciones numéricas para poder entender, analizar y modelar situaciones de cambio.

Para Engler (2014) el PyLV permite analizar el aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio. El propósito es favorecer en el alumno una forma de pensamiento que reconozca fenómenos de cambio para que sea capaz de modelarlos y transformarlos. A partir de las concepciones de los estudiantes y mediante situaciones en las que está involucrado el cambio se estimula a que evolucionen y trabajen las ideas variacionales.

Según Cardona (2009) las investigaciones que se basan en este paradigma analizan desde los errores y concepciones que poseen los alumnos en torno a una situación de variación hasta la propuesta de situaciones didácticas tendientes a favorecer la comprensión del concepto de derivada.

#### 3.2.1.2 Elementos que lo conforman

El PyLV evoluciona desde los primeros trabajos (González, 1999; Dolores, 2000, Cantoral y Farfán, 1998; Salinas, 2003, entre otros) incorporando elementos y características nuevas. Caballero y Cantoral (2013) brindan sus significados y relaciones:

- ✓ *Situación variacional:* es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de *estrategias variacionales* y requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio. No basta saber que algo está cambiando, es necesario conocer el crecimiento relativo del fenómeno en cuestión, analizando cuánto y cómo cambia sus variables. Este tipo de situaciones se pueden presentar tanto en un escenario puramente matemático, como en un contexto relacionado con otros campos científicos o cotidianos.
- ✓ *Argumentos Variacionales*: son argumentos que demandan el análisis del cambio y de su cuantificación, y que son utilizados por las personas cuando hacen uso de ideas, técnicas, o interpretaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando. Estos argumentos son evidencia del entendimiento de los procesos de variación involucrados en una situación variacional.
- ✓ *Códigos Variacionales*: consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que son articulados para generar los argumentos variacionales. Estos códigos pueden ser frases, dibujos, tablas o gestos.
- ✓ *Estructura Variacional Específica*: son herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico que funcionan como punto de apoyo para abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en las situaciones de variación. El uso de estos conocimientos en la situación permite a la persona tener un referente sobre el cual llevar a cabo el estudio de la variación del fenómeno, de manera que el tipo de análisis dependerá de la estructura en la cual se apoye la persona.

- ✓ *Estrategia Variacional*: Cabrera (2009) lo define como una práctica que permite explicar todo fenómeno de cambio, es decir, una forma particular de razonar y actuar ante una situación variacional.

Algunas estrategias variacionales reconocidas son la predicción, la comparación, la seriación y la estimación, aunque no se descarta la existencia de otras estrategias. Estas cuatro estrategias son caracterizadas por Salinas (2003):

*Comparación*: es la acción de establecer diferencias entre estados, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y su variación.

*Seriación*: se vincula con la comparación, es la acción de analizar entre estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos, pero se diferencia en que se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos. Por ejemplo, puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables.

*Predicción:* es la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. A diferencia de la seriación, la predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado. No obstante, hallar esa relación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que la seriación puede ser parte de la predicción.

*Estimación*: conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global, a diferencia de la predicción, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, en el análisis del crecimiento de poblaciones se usa para saber si crecerá o disminuirá, en tanto que la predicción puede servir para decir hasta qué punto crecerá la población dentro de un tiempo específico.

Otro elemento en el PyLV son las tareas variacionales:

- ✓ *Tareas Variacionales:* consisten en actividades, acciones y ejecuciones dentro de una situación variacional, que comparten similitudes en cuanto a sus objetivos y los registros en que se desarrollan. Se caracterizan por el empleo de una o más estrategias variacionales dentro de un mismo registro o contexto de análisis, que puede ser numérico, grafico o analítico.

De esta manera Caballero y Cantoral (2013) construyen un modelo con todos los elementos anteriormente definidos del P y LV:

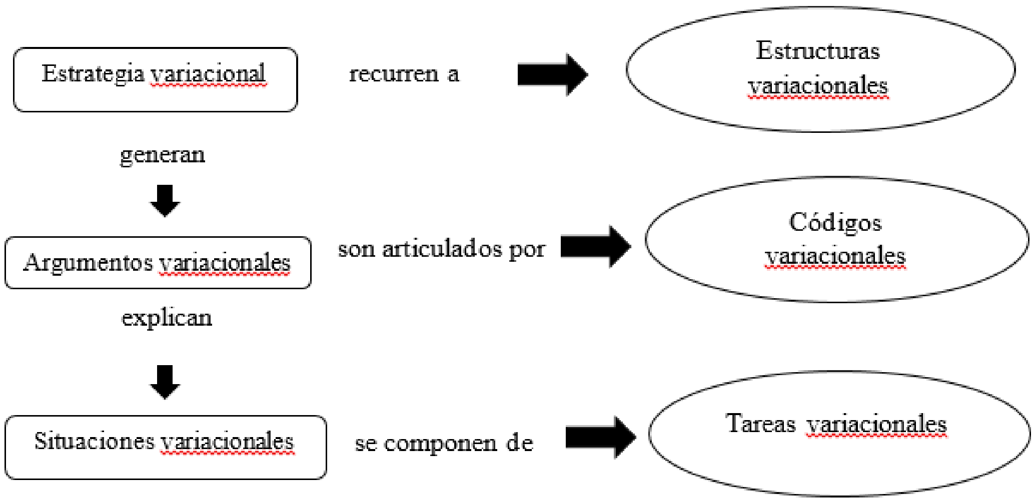



Figura 2. Elementos del PyLV

Los autores indican que el desarrollo del PyLV implica el uso de todos estos elementos en forma sistemática, conjunta y no aislada. A su vez la definición de estos constructos nos permite desde la investigación analizar cada uno de ellos y detectar dónde se encuentran las dificultades.

### 3.2.1.3 Este enfoque en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo

El PyLV, como otras líneas de investigación, intenta dar respuestas ante la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo que evidenciamos en todas las latitudes del planeta.

En general, como describimos anteriormente, en el primer curso de Cálculo en nivel universitario, los estudiantes logran calcular derivadas y primitivas, resolver algunos problemas básicos, desarrollar algunas destrezas algebraicas, pero no logran una comprensión satisfactoria de ideas, nociones y conceptos. Advertimos en los alumnos comportamientos más bien memorísticos, los que les permiten utilizar reglas de derivación o hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, pero que les impiden lograr comprender a la derivada como rapidez de variación e integrarla en diversos problemas, como, por ejemplo, de optimización.

Los trabajos de investigación y tesis expuestas en el Capítulo 2 dan cuenta que fomentar en el alumno ideas variacionales a través de situaciones que permitan modelar y resolver problemas de la vida diaria o de otras ciencias promueven la comprensión de conceptos fundamentales del Cálculo como son el de función y derivada. Se parte de las ideas intuitivas que tienen los alumnos y mediante situaciones que tienen como eje principal el cambio se fomenta el desarrollo de estrategias variacionales como pueden ser la predicción, la estimación, la aproximación, entre otras. Otra cuestión importante es que este proceso de interiorización de las ideas variacionales no es inmediato ni está asegurado por el sólo hecho de incorporar a los programas la matemática de la variación. Cantoral y Farfán (1998) indican:

> Como se puede advertir, el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisan de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por

> ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado por (Artigue, 1998). Esa ruptura, además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación; sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento superficial de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de Análisis (p. 4).

Si queremos desarrollar en el alumno el PyLV debemos incorporar actividades que involucren situaciones de variación en distintos contextos de representación (coloquial, gráfico, numérico y analítico). A su vez tenemos que incluir procesos avanzados de pensamiento como la abstracción, predicción, justificación, estimación, entre otros, lo que implica el manejo de números y magnitudes; además de un universo rico de formas gráficas. Tenemos que ser conscientes de que esto no se produce de manera instantánea, que es necesario incorporarlo a lo largo de distintas etapas de formación.

### 3.2.2 Los registros de representación semiótica

Diversas investigaciones actuales que se centran en el estudio del proceso cognitivo del alumno ponen énfasis en el estudio de representaciones, físicas o mentales, que son indispensables para la construcción de un concepto matemático (Guzmán, 1998; Ibarra, Bravo y Grijalva, 2001; Contreras de la Fuente y Font, 2002; Cuesta, 2007; Sánchez et al., 2008; Cardona, 2009; García, 2011; Vrancken, 2011). En los últimos años se ha fortalecido la postura de que el aprendizaje de la matemática se favorece cuando se incorporan en su enseñanza actividades didácticas en las cuales se usan y articulan diferentes sistemas de representación (Ibarra et al., 2001).

En efecto, los objetos matemáticos son objetos no ostensivos, es decir no tangibles: no los podemos tocar, ni ver, ni manipular, en el sentido físico de estos términos. Duval (2004, citado en González, A., 2006) señala los distintos tipos de objetos:

- ✓ Objetos físicos (podemos tocarlos, actuar sobre ellos).
- ✓ Objetos fenomenológicos (tamaño, color, no se pueden tocar ni separar).
- ✓ Objetos del conocimiento (caracterizados por sus invariantes. Los encontramos en Matemática, Física, Biología, etc.).

Los objetos de la matemática son objetos de conocimiento, de allí que el trabajo sobre éstos se realiza con la manipulación de ostensivos de diversa índole: escrituras simbólicas, dibujos, esquemas, lenguaje natural, gestos, artefactos, entre otros.

Penalva y Torregrosa (2001) distinguen entre representación interna y representación externa. La primera es propia de la mente, es subjetiva y personal. La segunda constituye organizaciones de signos que tienen como finalidad representar externamente alguna realidad matemática, tiene sus propias restricciones de funcionamiento y significado.

La teoría de registros de representación semiótica de Duval es un marco teórico adecuado para estudiar las representaciones que los alumnos y docentes usan cuando hacen matemática.

Este investigador establece como registro de representación a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático (Duval, 1998). A su vez un registro debe permitir la realización de las tres actividades siguientes:

- ✓ La *identificación* de la presencia de una representación: significa la elección de una señal, un trazo, un atributo o rasgo en el contenido a representar que se hace en función del registro semiótico en el que se está trabajando. Por ejemplo, la escritura de una fórmula, el gráfico de una figura geométrica, el enunciado de una frase.
- ✓ El *tratamiento* de una representación: es la transformación de una representación en otra del mismo sistema. Es una transformación interna a un sistema. Es el caso de los cálculos realizados con escrituras simbólicas, los pasos algebraicos en una expresión analítica, la reconstrucción de figuras es un tipo de tratamiento de las figuras geométricas.
- ✓ La *conversión* de una representación: es la transformación de esta representación en una representación de otro sistema conservando la totalidad o sólo una parte del contenido de la representación inicial. Es una transformación externa del sistema de partida. Por ejemplo, la expresión analítica de una fórmula puede ser la conversión de una expresión verbal, el gráfico de una función es una conversión de la fórmula analítica de dicha función.

Según Duval (2001, citado en Rojas, 2012) cada representación tiene los siguientes elementos constitutivos:

- ✓ El objeto representado.
- ✓ El contenido de la representación, es decir lo que una representación particular muestra del objeto.
- ✓ La forma de la representación, su modalidad o registro.

Las diferentes representaciones de un objeto pueden destacar características del mismo que otras no lo hacen, de allí la importancia de manejar varios registros del objeto representado, el cual siempre se mantiene invariante. Por lo tanto, cuantos más sistemas de representación maneje un sujeto y la coordinación entre ellos mejor y más completo será su conocimiento sobre el objeto matemático.

Los registros semióticos no tienen sólo la función de comunicar o exteriorizar una representación mental, son indispensables para la conceptualización y funcionamiento cognitivo, aunque en ciertas ocasiones la enseñanza los reduce a la exteriorización o comunicación (González, A., 2006).

Duval (1998) identifica una actividad ligada a la producción de representaciones y otra ligada a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos representados. Llama *semiosis* al primer tipo de actividad y *noesis* a la segunda. Existe una estrecha relación entre los dos tipos de actividades: la coordinación de varios registros es fundamental para la aprehensión conceptual y, a su vez, es necesario que el estudiante no confunda el objeto matemático con su representación semiótica, ya que esto llevaría a una pérdida de comprensión. Se produce así lo que Duval (1998) llama *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*. El aprendizaje de un objeto matemático se realiza por medio de sus representaciones, ya que es no tangible y no existe otra manera de llegar a él. Es natural que la persona que está en proceso de aprendizaje confunda el objeto con sus representaciones, pero a su vez no es posible que se puedan efectuar operaciones de tratamiento y conversión si no se tiene ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados.

González, A. (2006, p. 49) presenta el siguiente esquema para caracterizar los registros de representación y su relación con el objeto representado:

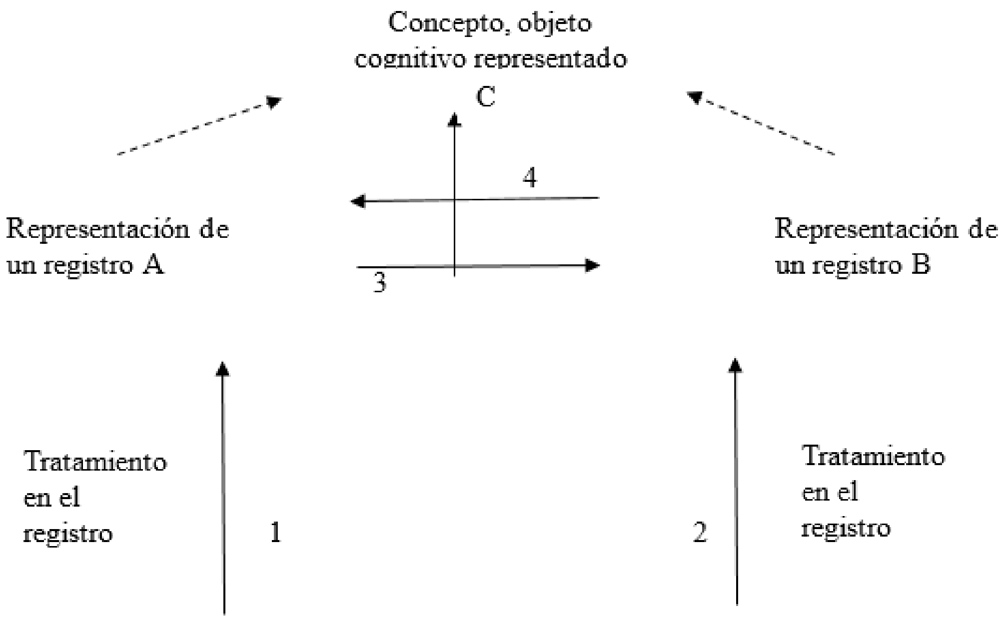



Figura 3. Esquema sobre registros de representación

Las flechas 1 y 2 corresponden al tratamiento, es decir a las transformaciones internas dentro de un registro. Las flechas 3 y 4 a la conversión, esto es a las transformaciones externas de un registro a otro. La flecha C supone una coordinación entre dos registros, lo que se llama *comprensión integradora de una representación.* Las flechas discontinuas simbolizan la distinción entre representante y representado. Este esquema corresponde al caso más simple de coordinación entre dos registros.

Los diferentes sistemas utilizados como sistemas de representación en matemática son: las figuras, las gráficas, la escritura simbólica (sistemas de escritura de números, escritura algebraica, lenguajes formales) y el lenguaje natural. Prieto y Vicente (2006) establecen los siguientes registros de representación:

*Registro verbal*: el lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.

*Registro analítico*: se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.

*Registro gráfico*: es la representación en el eje real, en un par de ejes cartesianos o en el espacio.

*Registro figural*: implica el uso de esquemas o dibujos simplificados de una situación problemática.

Nosotros agregamos:

*Registro tabular o numérico*: cuando se trabaja con datos dados a través de tablas.

Duval (1998), propone en la formación de conceptos.

- ✓ La economía del tratamiento. La existencia de varios sistemas permite cambiar de signos, y ese cambio de signos tiene como finalidad efectuar tratamientos de una manera más económica y más poderosa.
- ✓ La complementariedad de los sistemas. Como expresamos anteriormente: toda representación es parcial en referencia a lo que ella representa, de un sistema a otro puede que no sean los mismos aspectos de un objeto matemático los que son representados.
- ✓ La formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representación. La idea generalmente admitida es que, si el sistema de representación es escogido correctamente, las representaciones en ese sistema son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado.

La comprensión reposa sobre la coordinación de al menos dos sistemas de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognoscitiva de conversión (Duval, 1998).

Si la construcción de conceptos implica una coordinación de sistemas de representación, entonces un reto importante en la enseñanza de la matemática no puede ser solamente brindar situaciones en donde se efectúen en forma mecánica ciertas técnicas operatorias, sino que debe ser ofrecer ambientes de aprendizaje en los que la coordinación de los diferentes sistemas de representación esté presente. Es importante también en las tareas propuestas plantear actividades de identificación, de discriminación de elementos significativos en distintas representaciones y de producción de representaciones.

El mayor problema que tienen los estudiantes es que no son capaces de transferir lo que aprendieron en un contexto a otro, es decir la conversión de representación. Para ellos hay tantos objetos como representaciones. La comprensión no significa dar un salto desde el contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto. Duval (2006) indica que la conversión no se reduce a una codificación. Para ejemplificar esta idea brinda el gráfico de una recta en un sistema de ejes coordenados y la tarea es establecer, de cuatro opciones dadas, a qué expresión analítica corresponde. Entonces, por ejemplo, uno puede descartar una determinada expresión analítica porque "ve" en la gráfica que la pendiente de la recta es positiva, o que esa pendiente tiene módulo mayor o menor que uno, o la ordenada al origen es nula o no. De allí que es necesario establecer características visuales de las gráficas que son importantes para la comprensión, y no mirar dicha gráfica sólo como un conjunto de pares ordenados.

Las ideas expuestas anteriormente pueden asociarse con las que formula Dreyfus (1991, citado en Contreras de la Fuente y Font, 2002). Este autor afirma que la representación y la abstracción son procesos complementarios que van en direcciones opuestas, ya que por un lado es posible realizar la abstracción de un concepto a partir de algunas representaciones y por el otro las representaciones son siempre representaciones de un concepto más abstracto. También distingue cuatro fases en los procesos de aprendizaje:

- ✓ Utilizar una única representación.
- ✓ Utilizar paralelamente varias representaciones.
- ✓ Relacionar representaciones paralelas.

- ✓ Integrar las representaciones y pasar de una a otra con facilidad.

En la primera se trabaja con casos concretos en los que aparece una sola representación del concepto y en la segunda se usan varias representaciones del mismo. Para el paso desde las representaciones al objeto abstracto es fundamental establecer una coordinación entre las representaciones, que estaría involucrada en la tercera etapa. Por último, en la cuarta etapa, debe brindarse el proceso de integración entre dichas representaciones, lo cual supone una síntesis de los vínculos, relaciones y propiedades comunes que desemboca en el concepto abstracto.

### 3.2.3 La comprensión según Ana Sfard

#### 3.2.3.1 Concepto y concepción

Sfard (1991) estudia la comprensión en matemática y apoya su teoría en la de Piaget. Esta autora establece la diferencia entre *concepto* (idea matemática en su forma oficial) y *concepción* (es la idea del concepto que vive en la mente humana, que depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios). En sus palabras:

> ….the word "concept" (sometimes replaced by "notion") will be mentioned whenever a mathematical idea is concerned in its "official" form - as a theoretical construct within "the formal universe of ideal knowledge"; the whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept – the concept's counterpart in the internal, subjective "universe of human knowing" - will be referred to as a "conception (p. 3).

Llamamos concepto o noción a la idea matemática considerada en su forma oficial, es decir como constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento de la disciplina. El grupo de representaciones y asociaciones internas sugeridas por el concepto y que pertenecen al universo del conocimiento humano, subjetivo e interior a la persona, la llamamos concepción.

Entonces tenemos por un lado el conocimiento matemático que se comparte socialmente y que está sujeto a transformaciones para poder ubicarlo como objeto de enseñanza, y por el otro el conocimiento subjetivo que los estudiantes relacionan con el conocimiento oficial. Según Sfard de un objeto matemático tenemos una concepción que "vive" en nuestra mente, que depende de las experiencias que haya tenido el sujeto con todo aquello que se relaciona con el concepto. A su vez es de suponer que esta concepción está sujeta a cambios que dependen de las interacciones entre el sujeto y el objeto matemático en cuestión.

Señala que, a diferencia de los objetos materiales, los conceptos matemáticos avanzados son totalmente inaccesibles a nuestros sentidos, sólo pueden ser vistos con los "ojos de la mente". Cuando graficamos una función o escribimos un número tenemos que enfatizar que el signo en el papel es una de las posibles representaciones de la entidad abstracta, que por sí misma no podemos ver ni tocar. Agrega que ser capaz de ver estos "objetos invisibles" parece ser una componente esencial en la habilidad matemática. La falta de esta capacidad puede ser una de las razones principales a través de la cual la matemática aparece inaccesible a tantas personas.

Desde la perspectiva de Sfard, la comprensión requiere mucho más que ejecutar procesos y aplicar resultados matemáticos. Es un proceso constructivo que implica elaborar un vínculo entre acciones sobre objetos familiares y representaciones internas de la acción, dando lugar a la construcción de una estructura interna asociada a los signos y significados matemáticos externos, en contextos que son objeto de la acción del sujeto y objeto de aprendizaje.

#### 3.2.3.2 Aspecto dual de los objetos matemáticos

Para Sfard (1991) existen dos formas de concebir un concepto: como proceso, CO y como objeto, CE. Por ejemplo, en el caso de una función, no sólo se puede definir como conjunto de pares ordenados (CE) sino también como un método para ir “de un sistema a otro” (p. 4). Esta última definición pone énfasis en un proceso o algoritmo, con lo cual estaríamos considerándola como CO.

En palabras de Sfard:

> Seeing a mathematical entity as an object means being capable of referring to it as if it was a real thing - a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea "at a glance" and to manipulate it as a whole, without going into details (p. 4).

Mora (2006) indica que concebir una entidad matemática como objeto (CE) significa describirla como una cosa real, una estructura estática que existe en alguna parte en espacio y tiempo. Es considerarla como un todo y manipularla sin entrar en detalles.

En tanto que para la CO tenemos:

> In contrast, interpreting a notion as a process implies regarding it as a potential rather than actual entity, which comes into existence upon request in a sequence of actions. Thus, whereas the structural conception is static…instantaneous, and integrative, the operational is dynamic, sequential, and detailed (Sfard, 1991, p. 4).

Es decir que concebir una noción como un proceso implica considerarla como una entidad potencial más que como una entidad actual, que se nos presenta como una secuencia de acciones. Una CO se relaciona con algoritmos, acciones, que ocurren a nivel físico o mental, es dinámica, secuencial y detallada. Una CE es más abstracta, es estática, instantánea e integrada, menos detallada que la otra. Meel (2003) indica al respecto que la CE es isomorfa a la capacidad de “ver” las construcciones matemáticas avanzadas que no son tangibles y que sólo pueden percibirse en el “ojo” de la mente de cada persona.

Sfard (1991, p. 33) hace un cuadro resumiendo estas ideas, cuya traducción extrajimos de Mora (2006):

| | CO | CE |
|---|---|---|
| Característica general | Una entidad matemática es concebida como un producto de un cierto proceso o como el proceso en sí mismo. | Una entidad matemática es concebida como una estructura estática, como si fuera un objeto real. |
| Representación interna | Se apoya en representaciones verbales. | Se apoya en imagen visual. |
| Su lugar en el desarrollo del concepto | Se desarrolla en la primera etapa de formación del concepto. | Evoluciona de la concepción operacional. |
| Su papel en los procesos cognitivos | Es necesario, pero no suficiente para la solución de problemas y el aprendizaje | Facilita todos los procesos cognitivos (aprendizaje y solución de problemas) |

Tabla 1. Concepciones CO y CE

Aunque estas dos formas de concebir un concepto dan la impresión de ser incompatibles, según Sfard, son complementarias, una no excluye a la otra, se las trata como una dualidad, no como una dicotomía. Más aún, enfatiza que la habilidad de ver una entidad matemática como objeto y como proceso es indispensable para una comprensión profunda de la matemática, "cualquiera sea la definición de comprensión que se adopte" (p. 5).

Sfard agrega que la CE es una etapa más avanzada en la formación de conceptos. En otras palabras, la autora afirma que tiene buenas razones para pensar que en el proceso de construcción de un concepto la CO debería preceder a la CE. Es más, da ejemplos sobre la construcción histórica de conceptos como el de número o el de función, que comenzaron siendo operacionales para luego llegar a su definición abstracta o estructural.

Mora (2006) sintetiza las características de las concepciones en el siguiente cuadro (p. 15).

| Proceso (CO) | Objeto (CE) |
|---|---|
| El concepto se percibe como algo que se realiza en el tiempo | El concepto tiene existencia real como cosa |
| El concepto tiene una concepción dinámica, detallada y secuencial | Tiene una concepción estática, que existe en alguna parte en el tiempo y en el espacio |
| No existe una visualización integrada del concepto | Existe una imagen integrada del concepto |
| No es posible notar la relación del concepto con otros | Es posible relacionar el concepto con otros y definir nuevos conceptos a partir de este |
| Existe solo una representación del concepto | Se pueden alternar diferentes representaciones |
| No hay integración entre el concepto y sus propiedades | Existe una coordinación entre el concepto y sus propiedades |

Tabla 2. Características de las concepciones CO y CE

#### 3.2.3.3 Etapas en el proceso de formación de un concepto

De acuerdo con el esquema de desarrollo histórico de los objetos matemáticos, Sfard propone distinguir tres etapas en el proceso de formación de un concepto. Estas tres etapas corresponden a tres grados de estructuración del objeto. Si la conjetura de que la construcción del concepto comienza con la CO es verdadera, entonces primero tiene que haber un proceso realizado con los objetos familiares (conocidos), luego surge la idea de convertir este proceso en una entidad autónoma y, finalmente, debe ser adquirida la capacidad de ver esta nueva entidad como todo el objeto integrado. Llamaremos a estas tres etapas de desarrollo del concepto como *interiorización*, *condensación* y *cosificación* o *reificación*, respectivamente. Cada una de estas etapas de formación del objeto se describe en términos de conductas externas del estudiante tales como habilidades, actitudes y comportamientos. De allí que es importante establecer indicadores que nos permitan caracterizar cada una de estas etapas.

*Interiorización*

Mora (2006) traduce de Sfard (1991) la idea de interiorización de la siguiente manera: "diremos que un proceso ha sido interiorizado si puede llevarse a cabo a través de representaciones [mentales] y para ser considerado, analizado y comparado, este no necesita ser realizado en el acto" (p. 15).

Según Murillo (2013) un estudiante ha interiorizado cuando hace uso de objetos ya familiares y para desarrollar un proceso relaciona las ideas previas que tiene del concepto con la nueva información. Sfard da el ejemplo de los números negativos e indica que en esta etapa la persona es hábil para realizar cualquier tipo de sustracción. En el caso del concepto de función la persona aprende la idea de variable y es capaz de utilizar la regla de asignación para calcular la imagen de cualquier valor de la variable independiente.

*Condensación*

> …es un proceso de secuencias prolongadas "comprimidas" de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa una persona llega a ser más y más capaz de pensar en un proceso dado como una totalidad, sin sentir un impulso de entrar en detalles (Sfard, 1991, traducción de Mora, 2006, p. 15).

Sfard (1991) establece el caso de los números negativos, en los que la condensación puede evaluarse a través de la capacidad del estudiante para realizar manipulaciones aritméticas como sumar y multiplicar números positivos y negativos. En el concepto de función la persona es capaz de interpretar un gráfico en su conjunto, sin necesidad de buscar valores específicos. El estudiante puede graficar, componer funciones, hallar la función inversa de una dada, entre otros.

Para Murillo (2013) en la etapa de condensación el alumno conecta una serie de procesos para dar origen a un objeto a partir del reconocimiento de los conceptos como entidades autónomas. Según Meel (2003) en lugar de trabajar con una secuencia larga de procesos mentales relacionados pero distintos, la condensación permite concebir la secuencia como un solo proceso y relacionar su entrada y salida sin los pasos que intervienen entre las mismas. Pons (2014) agrega que en esta etapa se evidencia facilidad para alternar entre diferentes representaciones del concepto.

*Cosificación o reificación*

> La etapa de condensación dura tanto como la nueva entidad permanezca estrechamente ligada a un cierto proceso. Solamente cuando una persona llega a ser capaz de concebir la noción como un objeto maduro, diremos que el concepto ha sido cosificado. La *cosificación o reificación,* por tanto, se define como un movimiento ontológico una repentina habilidad para ver alguna cosa como familiar con una luz totalmente nueva. Así, mientras la interiorización y la condensación son cambios cuantitativos graduales, más que cambios cualitativos, la cosificación es un salto cuántico instantáneo: un proceso se solidifica en un objeto, en una estructura interna estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser unificadas semánticamente por este constructo, abstracto, puramente imaginario. La nueva entidad es rápidamente separada del proceso del cual es producto y comienza a dibujar su significado a partir del hecho de su existencia como un miembro de una cierta categoría. [...] Nuevos objetos matemáticos pueden ahora ser construidos a partir del presente… (Sfard, 1991, traducción de Mora, 2006, p. 16)

En el caso de los números negativos consiste en la habilidad de reconocerlos como un subconjunto del anillo de los enteros. En el caso de las funciones puede ser evidenciada por el dominio de solucionar ecuaciones donde las incógnitas son funciones (ecuaciones diferenciales), por la capacidad de expresar propiedades generales de diferentes procesos efectuados sobre funciones como la composición y la inversión, etc.

Para Meel (2003) la reificación es un salto cuántico desde la concepción de una nueva entidad estrechamente ligada a un proceso hasta la noción de esa entidad como un objeto sobre el cual se puede actuar. La nueva entidad comienza a presentar su significado a partir de su asociación como un miembro de una categoría de objetos abstractos. Se define como un cambio ontológico, una habilidad súbita para ver algo familiar desde una perspectiva totalmente nueva. En lugar de observar el objeto en forma individual, la persona lo comienza a tratar como parte de un todo con sus propiedades y relaciones.

Sfard remarca que estas tres etapas tienen características de jerarquía, es decir que una no puede llegar hasta que no se haya pasado por las otras. Al respecto Mora (2006) hace notar que la fase de cosificación da lugar a la de interiorización de un concepto de nivel superior, volviendo a comenzar el ciclo, por lo que el proceso de comprensión está en constante evolución. Este autor brinda un esquema similar al que sigue:

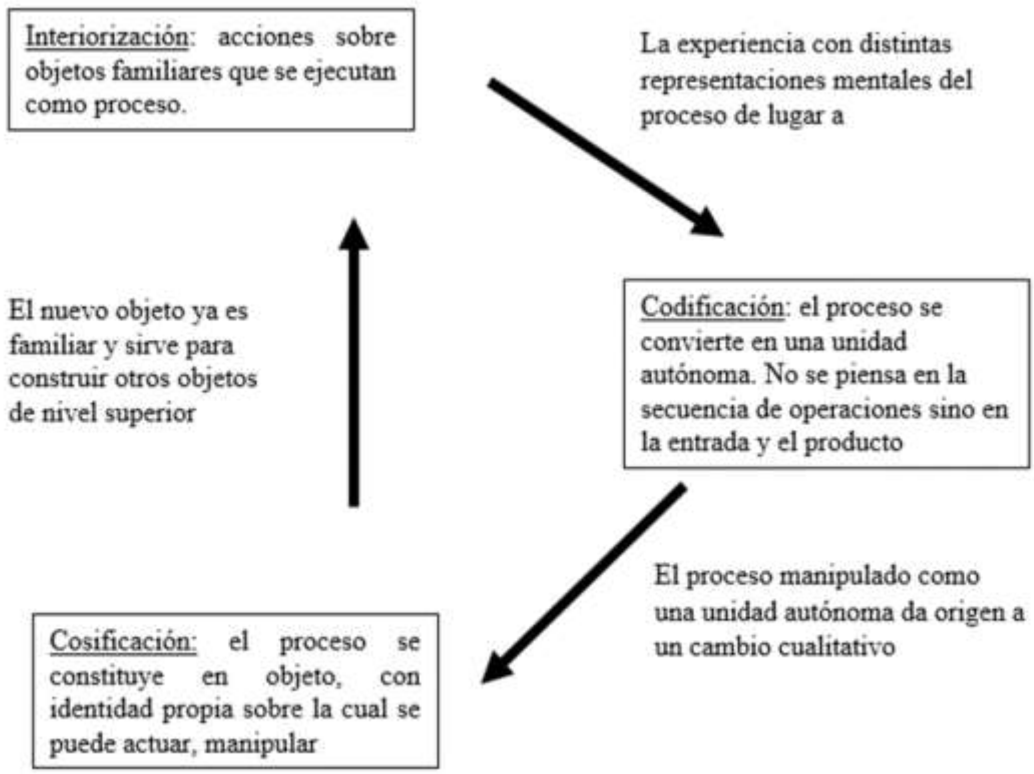



Figura 4. Esquema sobre el proceso de comprensión según Sfard.

Sfard pretende con este modelo contribuir como marco de referencia teórico a las investigaciones sobre cognición en matemática. Indica que puede ser útil como una herramienta para la planificación, integración e interpretación de la investigación empírica. También puede conducir a importantes consecuencias didácticas. Por ejemplo, al momento de presentar un objeto matemático nuevo para el estudiante en vez de hacerlo directamente sobre su CE (definición abstracta) mostrar los procesos subyacentes que dieron lugar a su creación.

#### 3.2.3.4 El rol de la concepción operacional y estructural en el proceso cognitivo

Sfard (1991) señala que el modelo dado en la formación de conceptos implica que ciertas nociones matemáticas deberían considerarse totalmente desarrolladas solamente si se pueden concebir de las dos formas: CO y CE.

El enfoque puramente operacional debería ser bastante apropiado para una persona cuya idea de objeto matemático es superflua y no le preocupan cuestiones filosóficamente problemáticas como los conjuntos infinitos. La historia de la matemática revela que durante mucho tiempo gran parte de la matemática fue puramente operacional, algorítmica. Sólo en tiempos modernos nos encontramos con una matemática que podríamos describir como dialéctica o existencial. Esta matemática se da cuenta que desde un punto de vista filosófico no puede hacer nada sin objetos matemáticos. La visión estructural nos provee de una visión general de manera tal de poder usar nuestro sistema de objetos abstractos de la misma manera que una persona usa un catálogo.

La formación de una CE significa la reorganización del esquema cognitivo mediante la adición de nuevas etapas. Dentro de la misma hay "más espacio" para almacenar información. Como resultado el aprendizaje se vuelve más efectivo y más significativo. Parece ser que sin los objetos abstractos nuestra actividad mental sería más difícil. Para un cierto nivel de formación del conocimiento la ausencia de una CE puede dificultar más aún su desarrollo. La cosificación aumenta la resolución de problemas y la capacidad de aprendizaje.

La autora se pregunta: ¿por qué la cosificación es dificultosa? ¿por qué los matemáticos necesitaron varios siglos para arribar a una versión estructural totalmente completa de la mayoría de los conceptos matemáticos? El problema sería menos desconcertante si recordáramos que la reificación es un salto cualitativo, un cambio ontológico. La habilidad para ver algo familiar de una forma totalmente nueva nunca es fácil de lograr. De acuerdo con el modelo de las tres etapas, la cosificación de un objeto dado ocurre al mismo tiempo que la interiorización de un nivel superior. Esta tesis del "círculo vicioso" implica que una habilidad no puede ser completamente desarrollada sin la otra: por un lado, una persona debería ser muy habilidosa para realizar algoritmos con el fin de alcanzar una buena idea de los objetos involucrados en esos algoritmos. Por el otro lado: para obtener una buena técnica uno ya debe poseer esos objetos dados ya que sin ellos el proceso parecería sin sentido y esto dificulta la memoria y la performance.

Podemos decir entonces que el desarrollo de una habilidad está estructuralmente ligado a la comprensión del concepto que subyace en esa habilidad.

# CAPÍTULO 4: DIMENSIONES DEL ESTUDIO

*En este capítulo presentamos las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento que permiten dotar a esta investigación de una aproximación holística: su naturaleza epistemológica, el plano didáctico y cognitivo y su dimensión sociocultural.*

*El análisis histórico-epistemológico abarca una revisión histórica sobre el planteo de los primeros problemas de máximos y mínimos y la evolución de los métodos usados para hallar ER desde sus comienzos hasta los conocidos actualmente.*

*La dimensión didáctica tiene como objetivo analizar distintos aspectos relacionados con la enseñanza de ER de funciones de una variable y PO. Realizamos un estudio del programa de las carreras de ingeniería en nuestra universidad, un análisis de las situaciones de enseñanza en ese entorno y de algunos libros de texto tomados como bibliografía básica de la asignatura.*

*La componente cognitiva se refiere a los procesos de construcción de conocimiento por parte de los alumnos. En particular en esta sección nos centraremos en los errores y dificultades que evidencian los estudiantes cuando se enfrentan al estudio de funciones y PO.*

*Por último, analizamos algunas cuestiones sobre la componente sociocultural, ya que las prácticas se inscriben en un contexto social concreto y particular que da significado y sentido a la construcción del conocimiento.*

## 4.1 Análisis histórico-epistemológico

Este análisis se centra en "aportar información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios del desarrollo de esta noción" (Ruiz, 1998, citado en Vrancken y Engler, 2013, p. 55).

El estudio de las fuentes primarias y de textos dedicados a la historia de la matemática nos permite percibir la vida del matemático en una determinada época, con las concepciones y formas de pensamiento vigente en ese momento. A su vez nos señala en qué tipo de problemas se trabaja y qué instrumentos se utilizaban para llegar a un modo de solución. De esta manera podemos recuperar ciertas visiones de los conceptos matemáticos y contar con elementos que nos permitan diseñar actividades para el aula con una visión global. La información sobre el desarrollo del conocimiento matemático en una cultura, el saber cómo es el camino que el mismo transita de cambios y surgimiento nos proporciona elementos para su enseñanza.

Un acercamiento a las producciones originales sobre los conceptos de ER de una función nos posibilita entender su evolución, así como también la problemática que dio lugar a la emergencia de dicho conocimiento. Realizar un análisis epistemológico no sólo nos provee de información sobre cómo surgen los objetos matemáticos a través de la historia y sus modificaciones, sino también desterramos la idea de que el saber enseñando es copia fiel del saber científico.

Sierpinska (1990, citado en Meel, 2003) señala que el uso del análisis epistemológico de un determinado objeto matemático ayuda a estudiar la comprensión lograda por parte del estudiante. En efecto, conociendo las dificultades en la evolución de dicho concepto históricamente se logra hacer un "paralelo" con las dificultades a las que se puede enfrentar un alumno en el aprendizaje del mismo.

Los matemáticos han estado siempre ocupados con cuestiones de máximos y mínimos. Los PO fueron y son parte fundamental de la matemática y ya están presentes en los tratados de los griegos de la antigüedad. Algunos ejemplos de estos últimos son los planteados por Euclides y Apolonio. Otros autores consideran el problema de

Regiomontanus que data del año 1471 como el primer problema de ER en la historia de la matemática.

El primer método reconocido para hallar ER data del siglo XVII y se debe a Fermat, el cual contiene imperfecciones que subsistieron por varios años luego de fundado el Cálculo. En un comienzo los matemáticos trabajan con condiciones necesarias, pero no suficientes, inclusive es el planteo del mismo problema el que los lleva a decidir si encuentran un máximo o un mínimo, no el método en sí como lo estudiamos actualmente. En base a lo expuesto decidimos organizar esta parte presentando algunos PO pioneros en la historia, los primeros métodos para calcular máximos y mínimos y su evolución hasta los que aplicamos hoy en día.

Debido a la dificultad de acceder a las fuentes originales nos respaldamos en otras fuentes (libros, documentos, tesis, artículos en revistas) cuyos autores han realizado estudios profundos de este tipo.

### 4.1.1 Algunos ejemplos de los primeros problemas de optimización

Cantor (s.f., citado en Hancock, 1960) establece que el primer ejemplo del concepto de máximo en la historia de la matemática es brindado por Euclides en el libro VI, proposición 27 de los *Elementos* (escrito aproximadamente tres siglos aC):

> De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes y situadas de forma semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto (Euclides, citado en Jiménez, 2010, p. 198).

El enunciado resulta confuso. Jiménez (2010) ilustra la proposición en caso de que los paralelogramos sean rectángulos:

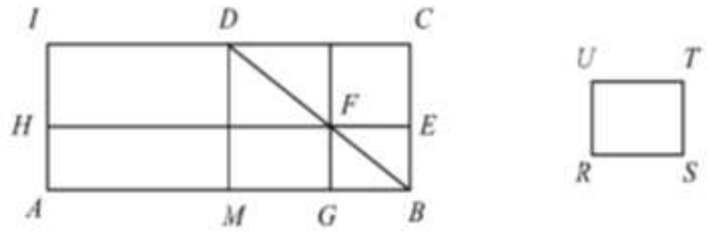



Figura 5. Esquema de proposición VI.27 de Euclides (p. 198)

El mencionado autor explica que si se tiene el segmento $AB$ cuyo punto medio es $M$ y sobre $MB$ se traza un rectángulo $MBCD$ con algún criterio prefijado (por ejemplo, semejante y situado de manera semejante a algún otro rectángulo dado como $RSTU$), quedan determinados dos rectángulos particulares: $AMDI$ rectángulo deficiente respecto al segmento $AB$, cuyo defecto es el propio rectángulo $MBCD$. Ambos rectángulos son semejantes y situados de manera semejante; de hecho, son congruentes. Podemos tomar otro rectángulo, por ejemplo, el $AGFH$ (aceptando que $F$ está en la diagonal $BD$ de $DMBC$). Este es deficiente respecto a $AB$ cuyo defecto es $GBEF$, el cual (por la proposición VI.24 del libro de Euclides) es semejante y situado de manera semejante a $MBCD$. Pues bien, la proposición VI.27 afirma que de los dos rectángulos anteriores el primero siempre es mayor. La demostración euclideana se basa en construcciones geométricas y en proposiciones y definiciones dadas con anterioridad en los Elementos.

Cantor (s.f., citado en Hancock, 1960) plantea esta propiedad en forma simplificada como problema algebraico de la siguiente manera: "$x(x-a)$ tiene su máximo en $x = a/2$" (p. 15). En efecto, si pensamos en la longitud del segmento $AB$ como $a$ y queremos construir un rectángulo dividiendo el segmento en un punto $x$, cuyo perímetro sea dicha longitud y su área máxima, tenemos:

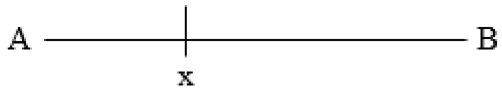


Figura 6. Esquema de la propiedad en forma simplificada.

De allí que la función a la que se le busca el máximo es $x(x-a)$ y que dicho máximo sea $x = a/2$ implica que el rectángulo está construido en el punto medio del segmento (como afirma Euclides en la proposición VI. 27).

Malaspina (2008) y Hancock (1960) indican como otro antecedente sobre ER al libro V de *Las Cónicas* de Apolonio de Perga (262 aC-180 aC), en el cual se mencionan segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Este libro consta de 77 proposiciones y en él Apolonio, XVIII siglos antes de la invención del Cálculo, introduce nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura y logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa (Tapia, 2002).

Según Boyer (1996) los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Para este autor es la matemática pura de Apolonio la que hace posible el surgimiento de los *Principia* de Newton.

Dejando la antigüedad, Dorrie (1965) y Hancock (1960) nombran como primer PO propiamente dicho encontrado en la historia de la matemática al denominado problema de Regiomontanus, planteado en 1471 por el matemático alemán Müller. Se trata de hallar la posición en una recta desde la que se divisa un segmento perpendicular con el mayor ángulo posible.

Pastore (s.f.) enuncia el problema de una manera similar a la que encontramos en varios libros de texto actuales:

> Suponga una estatua de altura $h$ sobre un pedestal de altura $p$. Un hombre de altura $m$ ($m < p$) ve el pie hasta la parte superior de la imagen en un

ángulo que varía según la distancia $d$ entre el hombre y la base del pedestal. Determinar la distancia $d$ para que el ángulo de visión sea el mayor posible. (p. 153).

Y presenta la siguiente imagen:

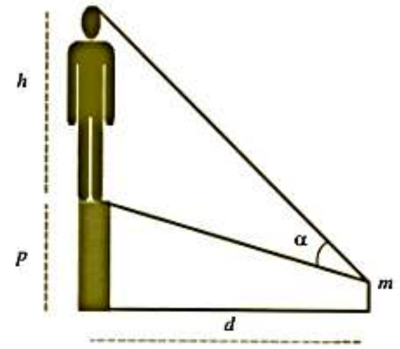



Figura 7. Esquema extraído de Pastore (s.f., p. 153)

Este problema se puede resolver con herramientas de Cálculo (las cuales no existían en esa época), pero este autor presenta una solución usando geometría que brindamos a continuación:

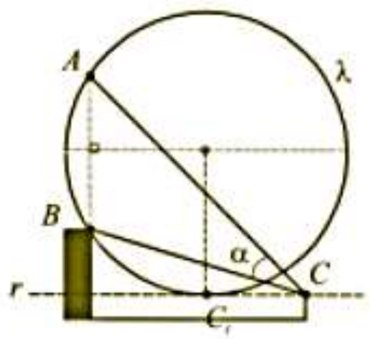



Figura 8. Ilustración extraída de Pastore (s.f., p. 154)

Inicialmente marcamos una figura con los puntos $A$, $B$ y $C$ representando respectivamente la parte de arriba de la estatua, la parte de abajo y el observador. Trazamos una recta $r$ que pasa por $C$ y es paralela a la línea de la tierra. Entonces podemos dibujar la única circunferencia $\lambda$ con centro en la mediatriz del segmento $AB$ que pasa por los puntos $A$ y $B$ y tiene por tangente a $r$. Marcamos el punto de tangencia $C_t$.

Si $C$ recorre libremente la recta $r$ cualquier posibilidad para el ángulo de visión $\alpha$ será dada por una cierta localización de $C$ en $r$. Probamos que $\alpha$ asume su mayor valor cuando $C$ coincide con $C_t$.

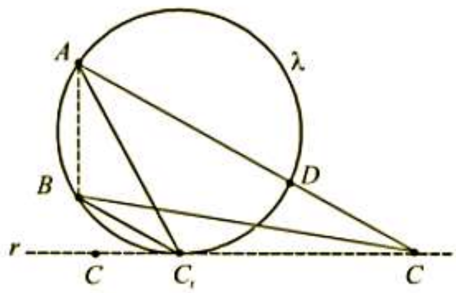



Figura 9**.** Figura extraída de Pastore (s.f., p. 154)

Sea $D$ el punto de intersección de la recta $AC$ con la circunferencia. Si el ángulo $ADB$ es $\delta$, también lo es el $AC_tB$.

Pensemos en el triángulo $BDC$. Llamando $\alpha$ al ángulo $BCD$ y $\beta$ al ángulo $CBD$, tenemos:

$$180° - \delta + \beta + \alpha = 180° \Rightarrow \delta = \beta + \alpha \Rightarrow \delta > \alpha$$

Entonces el mayor ángulo del campo visual es el $AC_tB$.

De los problemas planteados anteriormente podemos deducir que la visualización y el registro gráfico constituyen herramientas muy importantes para la solución de los mismos. En la matemática griega prepondera el carácter geométrico en la resolución. Los procedimientos usados son una combinación entre construcciones geométricas y argumentaciones y lenguajes propios de la geometría sintética, basados en las proposiciones y en las definiciones (Pino, Godino y Font, 2011). A su vez, como indica

Vrancken (2011), uno de los principales obstáculos al que se enfrentan los matemáticos es el escaso desarrollo del simbolismo y también el hecho de que las expresiones algebraicas no existen, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto. Esta falta de simbología impide encontrar métodos de solución más generales, por lo que se dedican a resolver múltiples casos particulares.

Los ejemplos brindados evidencian que los problemas de máximos y mínimos son conocidos mucho antes del descubrimiento del Cálculo Diferencial y se puede mostrar que el intento por desarrollar esta teoría ejerce una influencia notable sobre el descubrimiento del mismo. Fermat, por ejemplo, después de hacer numerosas restauraciones de dos libros de Apolonio, a menudo cita a este geómetra en su *método para determinar máximos y mínimos*, un trabajo por el cual matemáticos como Lagrange, Laplace y Fourier anhelan considerar a Fermat como el descubridor del Cálculo (Hancock, 1960).

### 4.1.2 El método de máximos y mínimos de Fermat

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los Elementos de Euclides, Las Cónicas de Apolonio, las obras de Arquímedes, la aritmética de Diofanto, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète, Fermat desarrolla el primer método general, en la historia de las matemáticas, para la determinación de ER, que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes (González, 2008, citado en Pino et al., 2011). Sus contribuciones al Cálculo (cálculo de máximos y mínimos, el trazado de tangentes y algunos procesos de integración) ocupan un lugar significativo en el desarrollo conceptual del mismo (Cantoral y Farfán, 1999).

En 1629 Fermat desarrolla su geometría analítica y poco tiempo después hace uno de sus descubrimientos más importantes: el primer método general para la determinación de máximos y mínimos de funciones algebraicas que es descripto sin demostración en la memoria *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum,* que data del año 1637 (Collete, 2013).

Los autores de la Torre, Suescún y Alarcón (2005) transcriben parte de la memoria del *Methodus,* respetando la secuencia del contenido y separándolo en párrafos para facilitar su análisis. A saber:

> Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:
>
> 1. Sea $a$ una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
> 2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de $a$ en términos que pueden ser de cualquier grado.
> 3. Se sustituirá a continuación la incógnita original $a$ por $a+e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de $a$ y $e$, en términos que pueden ser de cualquier grado.
> 4. Se "adigualarán", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
> 5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de $e$ o de una de sus potencias.
> 6. Se dividirán todos los términos por $e$, o por alguna potencia superior de $e$, de modo que desaparecerá la $e$ de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
> 7. Se suprimirán a continuación todos los términos donde todavía aparece la $e$ o una de sus potencias y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los

miembros no queda nada se igualarán, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de $a$, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original (p. 32).

En realidad, Fermat usa en la explicación letras mayúsculas: vocales para las incógnitas y consonantes para las cantidades conocidas. El texto anterior es extraído de González (1992, citado en de la Torre et al., 2005), el cual emplea letras minúsculas.

Boyer (1996) expone el método de obtención de máximos y mínimos de Fermat para curvas polinómicas, haciendo un paralelo con las etapas del *Methodus* y con notación que usamos en la actualidad. Primero compara el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor de $f(x+E)$ en un punto próximo. Esto equivale a la etapa 3 descripta anteriormente. Luego el autor aclara que, si bien en general estos valores son distintos, en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva "lisa" la diferencia será casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los valores que son máximos o mínimos, iguala $f(x)$ con $f(x+E)$, completando la etapa 4. La idea de "hacer adiguales" dos expresiones proviene de Diofanto. Boyer entiende la "adigualdad" como una pseudo-igualdad que llega a ser igualdad cuando $E$ se hace cero, e introduce el vocablo inglés *pseudo-equality* para traducir el término latino *adaequalitas*, que es el usado por Fermat en su texto.

Cuanto más pequeña sea la distancia $E$ entre los dos puntos, más cerca está esa pseudo-igualdad de ser una verdadera ecuación, así pues, luego de dividir todo por $E$ (etapa 6) hace $E=0$ (etapa 7). El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica (etapa 8).

Cantoral y Farfán (1999) analizan con una perspectiva de notación y conceptos actuales el procedimiento de Fermat: si $x$ es un punto máximo (o mínimo) entonces cuando $\varepsilon$ se hace infinitamente pequeño los valores de la función en $x$ y $x+\varepsilon$ serán muy próximos:

$$\varepsilon \approx 0 \Rightarrow f(x+\varepsilon) \approx f(x) \Rightarrow f(x+\varepsilon) - f(x) \approx 0 \Rightarrow \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \approx 0$$

Siguiendo la notación moderna y teniendo en cuenta la noción de límite, tenemos que $f'(x)=0$. Es esta la razón por la que algunos matemáticos como Laplace aclaman a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial.

Fermat escoge para ilustrar su método el problema de dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea máximo (equivalente al planteado por Euclides en el libro VI, proposición 27 que mencionamos en el apartado 4.1.1). La resolución se desarrolla en Collete (2013), Cantoral y Farfán (1999) y de la Torre et al. (2005). Seguimos este último haciendo hincapié en las etapas expuestas por Fermat.

Gráficamente el segmento de longitud $B$ se divide por un punto $P$:

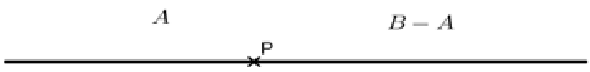



Figura 10. Esquema del planteo.

Dando lugar a dos segmentos: uno de longitud $A$ y el otro $B-A$. El problema equivale a considerar máxima el área del rectángulo:

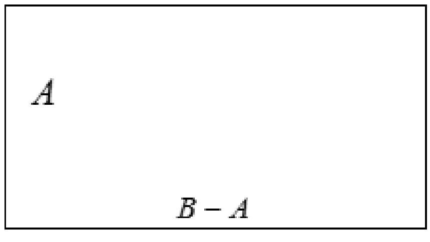



Figura 11. Esquema equivalente al anterior.

Resolviéndolo de acuerdo con las etapas mencionadas de Fermat:

1. La incógnita del problema es $A$.
2. Se desarrolla la cantidad máxima $A(B-A)$ en potencias de $A$, $AB-A^2$ **(1)**
3. Se sustituye en la igualdad anterior $A$ por $A+E$:

$$(A+E)B-(A+E)^2 = AB+EB-A^2-2AE-E^2 \quad \textbf{(2)}$$

4. Se hacen "adiguales" las expresiones (1) y (2):

$$AB+EB-A^2-2AE-E^2 \approx AB-A^2$$

5. Se eliminan los términos comunes y se obtiene: $EB-2AE-E^2 \approx 0$
6. Se dividen los términos por $E$: $B-2A-E \approx 0$
7. Se ignoran los términos que contienen $E$ y las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión $B-2A=0$
8. La resolución de esta última ecuación dará la cantidad de $A$ para la cual $A(B-A)$ es máximo, en este caso: $A=B/2$. Es decir, la figura es un cuadrado de lado $B/2$.

El método introducido por Fermat es más sencillo de aplicar a diversas situaciones que las soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos específicos gracias al desarrollo de coordenadas propuesto por Descartes y Fermat. Éste permite expresar propiedades y formas de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas y es de gran importancia a la hora de traducir cualquier problema geométrico a uno algebraico equivalente, abriendo un amplio espectro de posibilidades en soluciones más genéricas.

Fermat no realiza demostración de su método, sólo explica cómo se aplica. A su vez si consideramos, como diversos autores, que es equivalente a encontrar puntos de derivada cero, brinda una condición necesaria pero no suficiente para hallar ER. Tampoco indica que el valor hallado sea un máximo o un mínimo.

El lenguaje utilizado por Fermat en la solución del problema es algebraico, gráfico y/o descriptivo. Este lenguaje es el que usan la mayoría de los matemáticos del siglo XVII hasta los desarrollos de Newton y Leibniz.

Pino et al. (2011) indican que este método es un punto de partida para el uso de magnitudes infinitamente pequeñas (infinitesimales). En efecto, una de las propiedades principales del método reside en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente o a la magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente.

Otra proposición clave en el método de Fermat, es la adigualdad que establece para "aproximar tanto como sea posible" en el paso 4 dado anteriormente. Esto significa que $E$ es tan pequeña, que ambas cantidades son "casi iguales"; en términos actuales, que $E$ se aproxima a cero. Podemos concluir entonces que en el método subyace una noción intuitiva de límite.

### 4.1.3 Los aportes del Cálculo Diferencial de Newton y Leibniz

Los métodos de análisis promovidos por los precursores de Newton y Leibniz son desarrollados con el objetivo de resolver una serie de problemas bien definidos, tales como la construcción de la tangente a una curva, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas. Gracias a la geometría analítica de Descartes y Fermat, mediante la cual cualquier problema de geometría plana puede traducirse a un problema algebraico equivalente, resulta posible tratar las cuestiones no como problemas específicos de cada curva, sino mediante un método aplicable a una cierta clase de curvas (Collete, 2013).

Se considera tanto a Newton (1643-1727) como a Leibniz (1646-1716) los fundadores del Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad a resolver determinados problemas, a finales del siglo XVII (González, 2011a). La notación y técnicas que utilizan les permiten no sólo emplear una herramienta más eficaz que la geométrica sino también dar respuesta a problemas de la Geometría y la Física mediante el mismo método general.

Su origen se debe al interés en ciertos problemas que se pueden clasificar en dos bloques: problemas mecánico-físicos y problemas geométricos. Dentro de los primeros tenemos aquellos que hacen referencia a cuestiones como el tiro, la caída libre, el movimiento de los planetas y todos los que requieran el estudio de los procesos de movimiento. El segundo tipo de problemas está relacionado con el cálculo de las tangentes y áreas, longitudes o volúmenes. El Cálculo de Newton y Leibniz son radicalmente distintos: el del primero es de carácter dinámico, el segundo concibe las curvas como agregados de segmentos infinitesimales, lo que dota a su Cálculo Infinitesimal de un carácter básicamente estático (González, 2011b).

Leibniz no publica trabajos sobre la nueva materia. Muchos de sus descubrimientos los conocemos a través de cartas que envía a otros matemáticos y gracias a pequeños artículos en *Acta Eruditorum.* En esta revista aparece en 1684 *Nova methodus pro maximis & minimis* la primera publicación oficial sobre Cálculo, donde define las diferencias y las reglas de diferenciación de las operaciones elementales y las aplica a problemas de tangentes y puntos críticos. Es un texto corto. En particular se encuentra allí la condición $dv = 0$ para máximos y mínimos y $ddv = 0$ para puntos de inflexión (Collete, 2013). Hancock (1960) indica que Leibniz en el volumen V del Actas es el primero en establecer una distinción entre máximo y mínimo.

Entre 1669 y 1676 Newton escribe tratados de fluxiones, no publicados hasta 1704. Hallamos la base del método en los *Principia* (1687), muchos años después de descubrir su Cálculo. Se trata de un texto corto y difícil de entender (Blanco, 2001). Para Newton las fluentes son las cantidades generadas por movimientos continuos y las fluxiones son las velocidades de dichos movimientos. En términos actuales tenemos respectivamente las funciones y sus derivadas. Apoyándose en estas ideas determina máximos y mínimos de variables que crecen o decrecen continuamente, puesto que un valor ER lo alcanza cuando su velocidad de variación (fluxión) es nula. Así para determinar el ER de una fluente, se calcula su fluxión y se iguala a cero (Cantoral y Farfán, 1999).

En cuanto al lenguaje simbólico, es Leibniz el que introduce un nuevo lenguaje general, tal como se conoce en nuestros días, que permite escribir con símbolos y fórmulas todos los razonamientos y argumentaciones del Cálculo Diferencial e Integral.

### 4.1.4 El tratamiento de los extremos en el Analyse de L'Hopital

En 1696, a doce años de que los artículos de Leibniz aparecen en Acta Eruditorum, L'Hopital publica de forma anónima el libro *Analyse des infiniment petits puor l'intelligence des lignes courbes* (Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas) (Castañeda, 2004). Este libro es considerado como el primer libro de Cálculo Diferencial escrito con fines didácticos.

González (2011a) manifiesta que la estructura de la obra es la heredada de los matemáticos griegos: a partir de definiciones en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que luego van a aparecer a lo largo del texto, se suceden las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos.

Hacemos hincapié en el capítulo III de la obra que trata sobre el cálculo de máximos y mínimos, basándonos en el desarrollo que hace Castañeda (2004) y González (2011a). El capítulo mencionado se denomina *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas de máximos y mínimos* y en él se pueden distinguir tres aproximaciones distintas como acercamiento al significado de ER de una curva.

La primera es una definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos como descripción del comportamiento de la curva en un entorno de esos puntos. La notación es geométrica y hace referencia a la concepción de curva como traza.

L'Hopital indica:

> Sea $MDM$ una línea curva cuyas ordenadas $PM$, $ED$ y $PM$ sean paralelas entre sí, tal que al incrementarse continuamente la abscisa $AP$; la ordenada $PM$ crece también hasta un cierto punto $E$ después del cual disminuye…Supuesto eso: la línea $ED$ será denominada la mayor o la menor ordenada (L'Hospital, 1696, citado en Castañeda, 2004, p. 131).

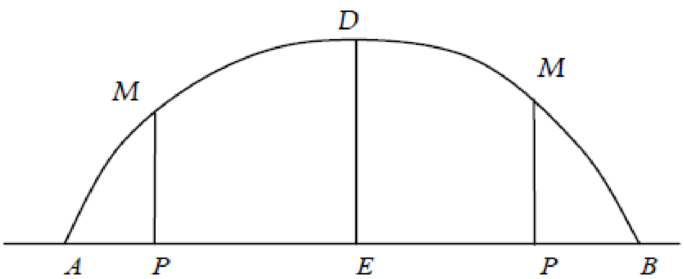



Figura 12. Extraída de Castañeda (2004, p. 131)

Esta definición está fundamentada en la noción de tamaño, basándose en determinar dentro de un conjunto de ordenadas, cuál es la ordenada más grande o más pequeña. Implica un acto visual para el individuo y tiene un carácter geométrico dinámico fundamentado en la descripción del comportamiento de la curva en un entorno del punto. La segunda y tercera aproximación están ligadas al cálculo de máximos y mínimos: una a partir de las diferencias y la otra sobre el concepto de recta tangente.

Respecto a la segunda argumentación se justifica a través del signo de las diferencias infinitamente pequeñas:

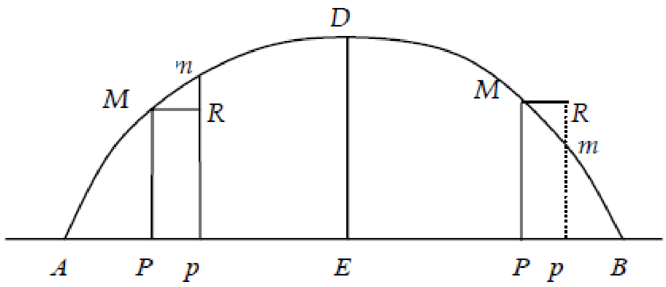



Figura 13. Extraída de Castañeda (2004, p. 131)

En palabras de L'Hopital (1696, citado en Castañeda, 2004, p. 131): "Si al crecer $AP$, $PM$ también crece es evidente que su diferencia $Rm$ será positiva con relación a la de $AP$, y que, por lo contario, cuando $PM$ disminuya al crecer la abscisa $AP$; su diferencia será negativa".

Luego finaliza indicando que una diferencia no puede convertirse en positiva a negativa sin pasar antes por cero o por infinito. De esta manera el punto máximo será aquel en el cual las diferencias cambian de signo.

La tercera caracterización se fundamenta en observar la posición relativa que toman la subtangente y la tangente a medida que se consideran distintos puntos sobre la curva. El máximo se alcanza en el momento en que la tangente se vuelve horizontal y paralela a la subtangente. En forma análoga sucede con el mínimo.

La explicación que da L'Hopital (1696, citado en Castañeda, 2004) es la siguiente: supóngase una tangente en el punto $M$ y su respectiva subtangente $PT$.

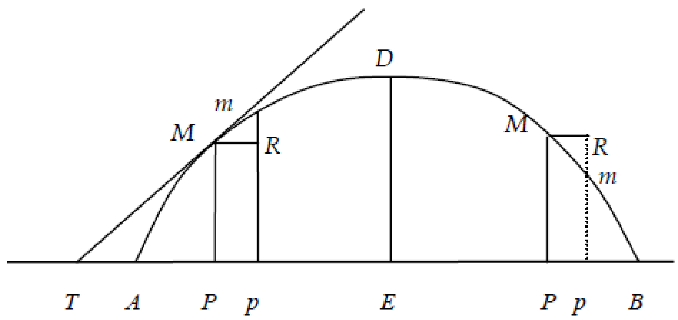



Figura 14. Extraída de Castañeda (2004, p. 132)

La subtangente $PT$ crece (hacia la izquierda) a medida que $M$ y $P$ se acercan a los puntos $D$ y $E$. Es evidente que cuando se construya la tangente en el punto $D$, la subtangente se vuelve infinita, de esta forma, cuando $AP$ rebasa a $AE$, la subtangente $PT$ se vuelve negativa de positiva que era, o el contrario.

González (2011b, p. 92) muestra las figuras que aparecen en el *Analyse* sobre máximo y mínimo con tangente horizontal y vertical. Mostramos aquellas referidas a máximo:

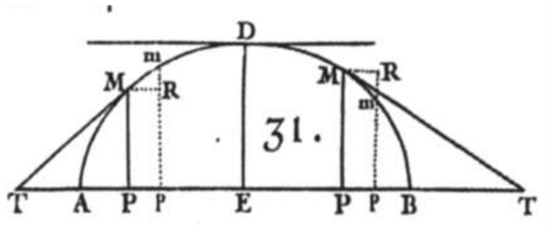



Figura 15. Máximo con tangente horizontal.

Y con tangente vertical (González, 2011b, p. 93):

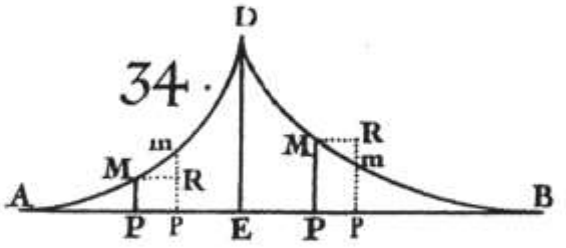



Figura 16. Máximo con tangente vertical.

Castañeda indica que estos tres acercamientos que realiza L'Hopital intentan clarificar lo concerniente a la obtención de máximos y mínimos. El primero y el tercero se basan en argumentos geométricos, el segundo en las propiedades de los infinitesimales. En todos los casos se nota el esfuerzo del autor por brindar múltiples escenarios didácticos para favorecer la comprensión por parte del lector.

Según Blanco (2001) en los ejemplos mencionados ya se presupone si se busca un máximo o un mínimo, sin dar ninguna indicación sobre si es de un tipo o de otro. No se establece un método para saber si el punto hallado es máximo o mínimo.

Luego del desarrollo teórico el texto incluye problemas para practicar y demostrar la potencia de lo explicado. Los ejemplos hacen referencia a situaciones geométricas o fenómenos físico-mecánicos. Los primeros recurren a curvas clásicas expresadas o bien de forma algebraica como el Folium de Descartes o la parábola semicública de Neile, o bien de forma descriptivo-geométrica a partir de la traza de un punto que cumple unas determinadas condiciones. En referencia a los problemas de índole físico-mecánico podemos citar los de recorridos mínimos, por ejemplo, el relacionado con la refracción de la luz (González, 2011b).

Para ilustrar lo expuesto por L'Hopital, desarrollamos un problema geométrico extraído de Castañeda (2004, p. 133), a saber: "…Supposons que $x^3 + y^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$), exprime la nature de la courbe $MDM$ …"

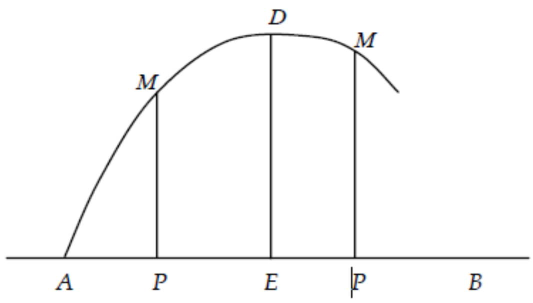



Figura 17. Extraída de Castañeda (2004, p. 133)

Al tomar las diferencias tenemos:

$$3x^2dx + 3y^2dy = a\,y\,dx + a\,x\,dy$$
$$3y^2dy - a\,x\,dy = a\,y\,dx - 3x^2dx$$
$$(3y^2 - a\,x)dy = (a\,y - 3x^2)dx$$
$$dy = \frac{(a\,y - 3x^2)dx}{(3y^2 - a\,x)} = 0$$

Para que la diferencia $dy = 0$ es suficiente que el numerador sea cero, por lo que:

$$(a\,y-3x^2)dx=0$$
$$a\,y-3x^2=0$$
$$y=\frac{3x^2}{a}$$

Al sustituir en la ecuación inicial se halla el valor para $AE$:

$$x^3+\left(\frac{3x^2}{a}\right)^3=a\,x\frac{3x^2}{a}$$
$$x^3+\frac{27x^6}{a^3}=3x^3$$
$$\frac{27x^6}{a^3}=2x^3 \qquad (x\neq 0)$$
$$x^3=\frac{2a^3}{27}\Rightarrow x=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}a$$

Obtenemos el lugar donde la ordenada análoga a $MP$ será mayor que todas.

González, M. (2006) en su análisis epistemológico de este libro, indica que posee una concepción geométrico-dinámica del Cálculo Diferencial. Las proposiciones y las demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico y se realizan consideraciones acerca del cambio que se experimenta en el recorrido de las curvas.

### 4.1.5 Los aportes de MacLaurin

Según Hancock (1960) es MacLaurin el primero en establecer un método correcto para distinguir entre máximo y mínimo.

En el *Tratado de fluxiones* (1742) MacLaurin desarrolla criterios para encontrar máximos y mínimos a través de la serie de Taylor. Taylor y MacLaurin desarrollan sus ideas con el Cálculo newtoniano, por lo que las variables en esta concepción son magnitudes que fluyen con el tiempo.

En notación actual MacLaurin desarrolla una función con su serie de Taylor alrededor de $x=0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Según Cantoral y Farfán (1999), MacLaurin no centra su atención en la convergencia de la serie, inclusive admite casos en los cuales la función no puede ser desarrollada en series. MacLaurin (1742, citado en Cantoral y Farfán, 1999) escribe:

> When the first fluxion of the ordinate vanishes, if at the same time its second fluxion is positive, the ordinate is then a *minimun*, but is a *maximum* if its second fluxion is then negative; that is, it is less in the former, and greater in the latter case than the ordinates from the adjoining parts of that branch of the curve on either side... (p. 93).

Traduciendo parte de este párrafo consideramos que cuando la primera fluxión se "desvanece", es decir es cero, si al mismo tiempo la segunda fluxión (o segunda derivada) es positiva, la ordenada es un mínimo, pero es un máximo si la segunda fluxión es negativa. Este es el criterio que hoy conocemos como método de la derivada segunda para la determinación de ER de una función.

En símbolos actuales: sea $f$ una función cuyo desarrollo en serie alrededor de un punto de abscisa $x=a$ es:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots$$
$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+..$$

Si $f'(a)=0$ tenemos $f(a+h)-f(a)=\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots$

Si $f''(a)>0$ estamos en presencia de un mínimo. Si $f''(a)<0$ la curva presenta un máximo en ese punto.

Con estos acercamientos se trabajó todo el siglo XVIII, en el que al final del mismo se intensificó el trabajo con series de potencias.

### 4.1.6 Reflexiones

Considerando lo expuesto podemos dar cuenta de que los problemas de máximos y mínimos conviven con los matemáticos desde hace siglos.

Los primeros ejemplos mostrados se abordan desde una perspectiva geométrica que es justamente la que prevalece en la época. Los procedimientos usados son una combinación entre construcciones geométricas y argumentaciones y lenguajes propios de la geometría. Uno de los principales obstáculos al que se enfrentan los matemáticos es el escaso desarrollo del simbolismo y también el hecho de que las expresiones algebraicas no existen. Esta falta de simbología impide encontrar métodos de solución más generales, por lo que se dedican a resolver múltiples casos particulares.

La introducción de la representación analítica que realizan Descartes y Fermat facilita, por parte de este último, la creación de un método más general para determinar máximos y mínimos, pero el que tiene sus falencias. Por ejemplo, Fermat no piensa en funciones sino en cantidades y no tiene clara la noción de variable independiente como la concebimos hoy en día. Para algunos autores como Pino et al. (2011), Cantoral y Farfán (1999) en este método hay una idea intuitiva de límite y de magnitudes infinitesimales. Para otros como de la Torre et al. (2005) el método es puramente algebraico y no supone inicialmente ningún concepto de límite ya que para Fermat la variable $E$ no tiende a cero. De todas formas, los trabajos de Newton y Leibniz tienen en Fermat un valioso antecedente.

Por el lado de Newton calcula un ER igualando a cero la fluxión y Leibniz hace lo mismo con el diferencial. En los dos casos son condiciones necesarias, pero no suficientes.

Luego analizamos el tratamiento de los ER en el primer texto didáctico referido al Cálculo, donde se brindan definiciones de los mismos y métodos para calcularlos. A partir de los conceptos primarios o definiciones iniciales que aparecen a lo largo del texto se suceden proposiciones, propiedades, reglas de cálculo en los que están involucrados esos conceptos. El libro posee una concepción geométrica-dinámica del Cálculo Diferencial ya que las proposiciones y demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico. Debido a que en esa época no existe un lenguaje funcional, ni siquiera la noción de función, todo el estudio se basa en el análisis de curvas cuyas representaciones más utilizadas son las gráficas. Las curvas estudiadas son las clásicas como el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile. Respecto a los puntos críticos, estos se clasifican atendiendo a este carácter geométrico, siendo el criterio la posición de la tangente: se distinguen puntos críticos que poseen tangente horizontal o vertical.

En el libro de L'Hopital la condición suficiente de estudiar el cambio de signo de las diferencias no está tan explícita como el análisis del signo de la derivada segunda que realiza MacLaurin para determinar si el punto crítico hallado es máximo o mínimo.

## 4.2 Análisis didáctico

La dimensión didáctica tiene como objetivo analizar distintos aspectos afines con la enseñanza de contenidos sobre el estudio de las funciones desde el punto de vista del PyLV: ER, funciones crecientes, decrecientes, y su posterior utilidad en la resolución de PO en nuestro contexto. Estudiamos la situación en la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la universidad donde se desarrolla la investigación. Por último, analizamos dos de los libros de texto que se proponen como bibliografía básica en la actualidad en la cátedra y a nivel universitario en general.

### 4.2.1 Las carreras de ingeniería en la UNLaM

El contexto de la investigación es la UNLaM, ubicada en la localidad de San Justo, en el conurbano bonaerense de la República Argentina. Esta universidad está organizada por departamentos. Cada uno de ellos agrupa disciplinas afines y provee el equipo de docentes a las distintas carreras. Nuestra experiencia se realiza en el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas, del cual dependen las carreras de Ingeniería Informática, Electrónica, Industrial y Civil. El departamento, bajo el lema “profesionales para el cambio”, tiene como uno de sus objetivos primordiales formar a sus alumnos con sólidos conocimientos en ciencias básicas y formación ingenieril acorde a las necesidades actuales. A su vez trata de consolidar:

- ✓ profesionales formados multidisciplinariamente que comprenden y aplican los principios de la ingeniería, las habilidades para el diseño y las buenas prácticas de la profesión y se desempeñan con idoneidad,
- ✓ con sólida formación teórica y práctica, con capacidad de comprender y actuar en forma innovadora y emprendedora ante las demandas de la sociedad y de los cambios tecnológicos,
- ✓ destacados en las TIC, eje central de su formación,
- ✓ preocupados por su actualización permanente y
- ✓ comprometidos con el correcto y adecuado ejercicio de la profesión.

La formación del ingeniero en nuestro departamento está encauzada a las TIC, debido a que:

- ✓ se consideran de primordial importancia en el desarrollo de la sociedad,
- ✓ son factores de cambio en la ciencia y la tecnología,
- ✓ poseen gran aplicación en la mayor parte del segmento productivo y
- ✓ tienen relación directa con la innovación y competitividad en el país.

La carrera de Ingeniería Industrial forma a los estudiantes en competencias que les permiten insertarse en el sistema productivo, utilizando en forma efectiva los recursos necesarios para la producción: humanos, tecnológicos y financieros. En cuanto a la Ingeniería en Informática, ofrece al alumno la posibilidad de especializarse en alguna de las siguientes orientaciones: Ingeniería de Software, o en Redes y Sistemas Distribuidos. La Ingeniería Civil se caracteriza por su apertura generalista y flexible que prepara al futuro egresado universitario con un profundo conocimiento de las ciencias básicas y de las tecnologías básicas y aplicadas, permitiendo resolver problemas en el campo de las obras edilicias, hidráulicas y viales. La Ingeniería Electrónica aplica los conceptos y métodos de las ciencias fisicomatemáticas y de la ingeniería al análisis, diseño, fabricación, instalación y mantenimiento de dispositivos, equipos y sistemas electrónicos, que se utilizan en el campo de las Tecnologías de la Información y Comunicación, Telecomunicaciones, Robótica, Control Industrial y Multimedios.[2]

#### 4.2.2 La asignatura Análisis Matemático I en el plan de estudio

A partir del año 2009 rige en el Departamento mencionado un plan de estudio para todas las carreras de ingeniería que dependen del mismo, dando respuesta a necesidades como: la implementación de un ciclo general de conocimientos básicos, la cuatrimestralización y compromisos asumidos ante la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Este plan tiene, entre sus objetivos, la constitución de ingenieros innovadores, creadores de tecnologías y emprendedores, con formación más que con información, abiertos al autoaprendizaje, a la interdisciplina, con una alta sensibilidad social y ética profesional.

El ciclo inicial comprende los tres primeros años de la carrera. El mayor énfasis está puesto en la formación en las ciencias básicas (Matemática, Física, Química). Esto le permite al futuro graduado contar con los conocimientos suficientes como para introducirse en el estudio de las tecnologías específicas. En el Ciclo General de Conocimientos Básicos, común a todas las carreras de ingeniería, se ubica la asignatura Análisis Matemático I, en cuyos contenidos basamos nuestra investigación.

[2] Recuperado de http://ingenieria.unlam.edu.ar/index.php?seccion=1 el 31 de mayo de 2016.

Luego de rendir y aprobar el examen de ingreso, los alumnos comienzan el primer año en el cual, por plan de estudios, se dictan las siguientes materias:

| Primer año | |
|---|---|
| Primer cuatrimestre | Segundo cuatrimestre |
| Análisis Matemático I (8 h)<br>Elementos de Programación (8 h)<br>Tecnología, Ingeniería y Sociedad (4h)<br>Sistemas de Representación (4 h) | Álgebra y Geometría Analítica I (8 h)<br>Matemática Discreta (4 h)<br>Química (4 h)<br>Fundamentos de TIC (8 h) |

Tabla 3. Esquema de asignaturas de primer año de carreras de ingeniería de UNLaM

En los últimos años las autoridades de departamento decidieron, ante los elevados índices de deserción y reprobación, alterar el orden anterior y asignar Análisis Matemático I como materia del segundo cuatrimestre. Por esta razón, en el cuatrimestre mencionado, la mayoría de los alumnos cursa la asignatura por primera vez y ya tiene experiencia en la vida universitaria.

La carga horaria de Análisis Matemático I es de 8 horas por semana, divididas en dos días de 4 horas cada uno, durante 16 semanas, haciendo un total de 128 horas. El programa analítico es el tradicional de Cálculo Diferencial e Integral en una variable al que se agrega una Unidad Transversal de resolución de actividades (ver Anexo 1). Esta unidad atraviesa todos los contenidos y tiene sus objetivos propios. En la misma pretendemos que el alumno:

- ✓ utilice diferentes técnicas o heurísticas en la resolución de problemas,
- ✓ trabaje en grupo en la resolución de problemas, fundamentando sus decisiones y aceptando las de los demás miembros con un espíritu crítico y de respeto,
- ✓ identifique fortalezas y debilidades en el proceso propio de resolución de problemas (reflexión metacognitiva).

Combinamos dos o tres clases teórico-prácticas desarrolladas en forma tradicional, expositiva-dialogada, con una clase de resolución de actividades en la que trabajamos bajo modalidad taller. En la clase teórico-práctica tradicional presentamos los objetivos a lograr, así como un breve esquema de las tareas necesarias para conseguirlos. Exponemos los principales conceptos de los bloques temáticos, intercalando ejemplos y/o ejercicios que clarifiquen los temas explicados. Fomentamos la participación del alumno aportando respuestas a preguntas del profesor o ideas para la resolución de las actividades propuestas. Trabajamos con la guía de trabajos prácticos de la cátedra que tiene gran cantidad de ejercicios que le permiten al alumno aplicar los conocimientos adquiridos. Enfatizamos el desarrollo de actitudes y habilidades que busquen la adquisición activa de nuevo conocimiento. Cuando el docente resuelve los ejercicios en el pizarrón, repasa la teoría, refuerza conceptos, estimula el empleo de heurísticas en la resolución de problemas, el control de lo realizado y la verificación de los resultados cuando esto sea posible.

A continuación, explicamos el desarrollo de las diversas unidades hasta llegar a la que nos interesa de acuerdo con el objetivo de la investigación, la unidad 4: "Aplicaciones del Cálculo Diferencial".

Iniciamos la asignatura con el estudio de funciones, presentando las mismas en diversos registros de representación y enfatizando su comportamiento a través de las gráficas. Hacemos hincapié en la utilidad de las funciones para modelizar situaciones de la vida diaria o de otras ciencias mostrando modelos sencillos (exponenciales, logarítmicos, cuadráticos, lineales). Las actividades con las que trabajan los alumnos en la Unidad Transversal se basan en diversos modelos simples en los cuales analizan dominio e imagen bajo contexto, identifican variable independiente y dependiente, interpretan gráficas y tablas, calculan cambios de la variable, entre otros.

El concepto de límite se enseña anterior al de derivada. Damos una idea intuitiva basada en registros numérico y gráfico y si bien mostramos y explicamos la definición formal, no hacemos hincapié en la misma. Enfatizamos el cálculo de límites a través de interpretación de gráficos y de técnicas algebraicas. En esta unidad introducimos los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea.

Comenzamos el estudio de la derivada a partir de la razón de cambio media y su relación con la pendiente de la recta secante, llegando a definir la razón de cambio instantánea o derivada y su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto. Paralelamente retomamos velocidad media e instantánea. Estos conceptos, razón de cambio media e instantánea, son estudiados en el marco de diversos problemas (desde la Física, Ciencias Naturales, Economía), y trabajados en clase y en la Unidad Transversal. Ponemos énfasis en la relación entre las gráficas de una función y su derivada.

Empezamos la unidad de aplicaciones a la derivada, central en nuestro estudio, con las definiciones de ER y extremos absolutos, brindando ejemplos en funciones conocidas. Enunciamos y demostramos la condición necesaria de ER para funciones derivables para luego dar lugar a dos teoremas: teorema de Rolle y de Lagrange. De estos últimos ponemos hincapié en sus hipótesis y su interpretación geométrica, quedando el docente a cargo de la comisión en libertad de realizar o no las demostraciones.

El crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo abierto se definen formalmente en esta unidad, si bien damos una idea intuitiva en unidades anteriores. Relacionamos el signo de la derivada primera con el crecimiento o decrecimiento de la función desde el registro analítico (demostración basada en el teorema del valor medio de Lagrange) y también interpretando gráficos. Trabajamos condiciones necesarias y suficientes para el cálculo de ER y resolvemos diversos PO. La actividad de la Unidad Transversal correspondiente versa sobre PO.

Evidenciamos, de lo expuesto, la intención desde hace algunos años de dar a la materia una impronta desde el PyLV y desde la articulación de diversos registros de representación.

Como bibliografía básica utilizamos un libro redactado especialmente para la cátedra, de acuerdo con sus necesidades y a la orientación que se le da a la materia:

Williner, B. (2015). *Apuntes de clase: Análisis Matemático I.* San Justo: Ediciones UNLaM.

### 4.2.3 Análisis de dos libros de texto

Revisamos dos libros de texto disponibles en la biblioteca de la UNLaM, recomendados por la cátedra como bibliografía básica y usados frecuentemente por los alumnos:

Stewart, J. (1999). *Cálculo: conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores.

Larson, R y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9na. Ed.). China: Mc Graw Hill.

El objetivo de este análisis es indagar cómo se introduce y desarrolla el contenido sobre funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos, la secuencia con la que está ordenado, su relación con la resolución de los PO, como así también el uso de diversos registros de representación y estrategias variacionales. Decidimos organizar los siguientes puntos:

- ✓ Motivación al estudio, reseñas históricas
- ✓ Registros de representación
- ✓ PyLV

- ✓ Orden y desarrollo de los contenidos previos a estudio completo de funciones y PO
- ✓ Cómo se tratan los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos
- ✓ Cómo se explican los métodos para hallar ER
- ✓ Cómo se introducen y resuelven los PO

*Motivación al estudio, reseñas históricas*

Stewart exhibe un capítulo denominado "Presentación preliminar del Cálculo" en el cual muestra los problemas que dieron origen a las ideas fundamentales del Análisis Matemático: el problema del área, el problema de la recta tangente, la velocidad, las paradojas de Zenón para introducir el límite de una sucesión y la suma de una serie. A su vez, el párrafo inicial de cada uno de los capítulos motiva al lector sobre el estudio del mismo desde aplicaciones a la vida real o en diversas disciplinas.

Las reseñas históricas son escasas. En el capítulo de límites el autor brinda una síntesis sobre la vida y el trabajo de Newton. Cuando se introduce la notación de derivada usando diferenciales informa sobre la labor de Leibniz y en la condición necesaria de ER hace alusión a Fermat.

El libro de Larson y Edwards comienza con un capítulo preliminar: "Preparación para el Cálculo", donde se revisan conceptos que disponen al lector al estudio del mismo: el dibujo de gráficas y funciones y el ajuste de modelos matemáticos a conjunto de datos. Es recién en el capítulo sobre límites y sus propiedades, bajo el título "¿Qué es el Cálculo?", donde se exponen una serie de problemas que se estudiaron a lo largo de la historia de la matemática: recta secante y tangente, velocidad media e instantánea, área de un rectángulo y área bajo una curva cualquiera, etc. Es interesante el paralelo que muestran los autores entre el estudio "sin Cálculo" y "con Cálculo" como motivación al lector.

Al comienzo de cada capítulo se exponen las secciones en las que éste está dividido y se brinda una pregunta o problema de la vida real u otra ciencia relacionada con los temas a desarrollar.

Las referencias históricas son varias, pero muy breves. Por ejemplo, en los capítulos analizados: Descartes y su aporte sobre las coordenadas cartesianas, Leibniz como el primer matemático que usó el término función y Euler el que lo formalizó; Cauchy como el precursor sobre el concepto de función continua, Newton y el problema de la recta tangente y Fermat con su método de máximos y mínimos.

*Registros de representación*

El uso de registros de representación es rico en los dos libros. Se trabaja desde el capítulo preliminar con los registros gráfico, analítico y numérico, con explicaciones verbales y con diversos diagramas. Larson y Edwards, en el primer apartado de dicho capítulo, en forma explícita, explican que se favorece la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo si se los aborda de diversas perspectivas: gráfica, analítica y numérica.

Stewart presenta cuatro maneras de definir una función: verbal, numérica, visual y algebraica y brinda ejemplos en diversas ciencias y propios de la matemática.

El concepto de límite se ofrece en los dos libros desde una definición intuitiva a través de registro numérico, formando tablas, con varios ejemplos y gráficos, para luego dar una definición no formal en registro verbal. El problema de la recta tangente y la velocidad también se tratan desde varios registros de representación.

En el libro de Stewart predomina el registro gráfico cuando se explica la relación entre $f'$ y $f$ o entre $f''$, $f'$ y $f$, así como también cuando se definen ER de una función. Este último caso se trabaja también en forma analítica. La relación gráfica entre una función y sus derivadas primera y segunda no se exhibe en el libro de Larson y Edwards, en el cual se trata solamente en forma analítica.

*PyLV*

La sección en la cual se vislumbran ideas variacionales es llamada, en el libro de Stewart, "Razones de cambio en ciencias naturales y sociales", y en ella se analizan funciones como modelo de situaciones de cambio en diversas ciencias: Física, Química, Biología, Economía y otras. Antes de comenzar con el desarrollo de los ejemplos se recuerda los conceptos de:

Cambio en $x$ $\Delta x = x_2 - x_1$

Cambio en $y$ $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

Cociente de diferencias $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ como razón de cambio media y como pendiente de la recta secante.

Luego el límite:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$ como razón de cambio instantánea y pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$ (p. 208).

Se brindan ejemplos resueltos, explicados totalmente con gráficos, esquemas y desarrollo analítico. En todos los casos se interpretan los conceptos anteriores bajo el contexto del problema.

Larson y Edwards no hacen demasiado énfasis en el Cálculo como la matemática del cambio y la variación. Definen cociente de incrementos o de diferencias cuando especifican la pendiente de la recta secante entre un punto $P(c, f(c))$ y otro $Q(x, f(x))$. Este concepto se retoma como razón de cambio media en el problema de la velocidad. Hay ejercicios al respecto en los que se brindan ejemplos en otras ciencias.

*Orden y desarrollo de los contenidos previos a estudio de funciones y PO*

En los dos libros el concepto de función de un conjunto $A$ en otro $B$, se define como regla de asignación tal que a cada elemento de $A$ le hace corresponder un único elemento en $B$. Si bien queda relegada la definición como pares ordenados que cumplen determinadas condiciones, Stewart define la gráfica de una función como el conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$ con $x$ perteneciente al dominio de la misma. Larson y Edwards no hacen referencia a esto.

Entre los ejemplos dados sobre funciones es interesante observar, en los dos libros, varios que pueden considerarse como anticipo a un PO. Entre ellos:

> Un recipiente rectangular para almacenamiento con su parte superior abierta tiene un volumen de $10\,m^3$. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base (Stewart, 1999, p. 17).

En este capítulo Stewart define funciones crecientes y decrecientes en un intervalo cerrado de la siguiente manera:

- ✓ Se dice que una función es creciente en un intervalo $I$ si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en $I$.
- ✓ Se dice que una función es decreciente en un intervalo $I$ si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en $I$. (p. 23).

En los dos libros se presentan funciones de uso frecuente como la función constante, las potenciales $y = x^n$, con $n$ natural, $n = -1$, $n = 1/2$ y $n = 1/3$, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas. Luego se definen transformaciones como desplazamientos horizontales y verticales, reflexiones, contracciones y dilataciones, enfatizando que de esta manera se pueden conocer muchas funciones a través de las ya conocidas.

Se presentan las operaciones algebraicas y la composición entre funciones.

En el libro de Stewart existe un apartado especial para las funciones exponenciales relacionadas con determinados modelos matemáticos y las logarítmicas como inversas de éstas. Termina el capítulo con funciones como modelos matemáticos y ajuste de curvas.

Se hace una exposición de lo que es resolver un problema, las etapas definidas por Polya y se presentan diversas heurísticas, algunas con ejemplos.

En el libro de Larson y Edwards se introduce el uso de un software para graficar una función de la cual se quiere obtener su máximo, el que luego se corrobora con tabla numérica. En este apartado se enuncian varios PO en los que se solicita resolución gráfica, algunos con la ayuda de un software, otros sin uso del mismo.

En los dos libros seleccionados se introduce el estudio de límite de una función citando aplicaciones de este concepto. Los autores retoman el problema de calcular la pendiente de una curva en un punto o el de la velocidad instantánea, en los cuales es necesario calcular un límite. En ambos casos el concepto se brinda desde una definición intuitiva a través de varios registros: numérico (formando tablas), gráfico y analítico, con varios ejemplos introducen la idea de límite como el valor al que se acerca la función a medida que la variable independiente se acerca a cierto número.

Stewart lo define en forma verbal pero no formal, dejando la definición épsilon-delta en un apéndice al final del libro. Por su parte Larson y Edwards brindan dicha definición y desarrollan varios ejemplos en donde se utiliza.

Luego en los dos libros se presentan las propiedades de límites sin demostración, pero aplicándolas a varios ejercicios. Se explican algunas técnicas de resolución de límites sin llamarlos casos de indeterminación.

Se trata el tema de continuidad antes del límite infinito y de variable infinita, los que se exponen con numerosos ejercicios en registros analítico, gráfico y numérico. Posteriormente se explican los límites que comprenden el infinito, ya sea como variable independiente o dependiente. Stewart lo hace sin definiciones formales, usando diversos registros y definiendo simultáneamente asíntotas verticales y horizontales. Larson y Edwards ofrecen las definiciones formales.

En la sección siguiente, en los dos libros, se trabaja con tangentes, para introducir el concepto de derivada, desde todos los registros. Se comienza con la derivada de una función en un punto y su interpretación como razón de cambio instantánea y como pendiente de la recta tangente. Luego se define la derivada como función.

Stewart a su vez introduce aquí el concepto de velocidades y razones de cambio media e instantánea. Expone una función en registro gráfico y solicita esbozar desde ella su función derivada. Hace hincapié en tangentes horizontales en máximos y mínimos relativos, sin definirlos.

Los autores analizan la diferenciabilidad de una función para lo cual estudian la relación entre derivabilidad y continuidad y el concepto de derivadas laterales. Desarrollan las reglas de derivación, demostrando algunas de ellas y las derivadas de orden superior.

En el libro de Stewart se explica un ejemplo donde se interpreta la segunda derivada como derivada de la primera, realizando el gráfico de las tres funciones en un mismo par de ejes. En el problema de la velocidad se define la segunda derivada como la aceleración. Muchos ejercicios propuestos se basan en la relación entre el gráfico de una función y el de sus derivadas sucesivas.

*Cómo se tratan los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos*

Stewart enfatiza en reiteradas oportunidades las relaciones entre los gráficos de $f'$ y $f$ donde se involucran ER.

Luego de explicar el concepto de aproximación lineal y bajo el título *¿qué dice* $f'$ *acerca de* $f$ *?* explica de manera intuitiva varios conceptos importantes en nuestro estudio. Comienza considerando el gráfico de una función (sin su expresión analítica) en el cual se marcan algunos puntos y se estudia el signo de la pendiente de la recta tangente en dichos puntos, determinando de esta forma intervalos donde $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$. Completa el párrafo con la expresión "parece que si $f'(x) > 0$ $f$ crece y que si $f'(x) < 0$ $f$ decrece" (Stewart, 1999, p. 175), expresándolo luego como resultado general.

Este análisis es tratado de manera inversa: se da el gráfico de $f'$ y se solicita graficar $f$ Se analizan aquí intervalos de derivada positiva indicando que $f$ crece en dichos intervalos, de derivada negativa, subrayando que $f$ decrece en esos intervalos y puntos de derivada cero en los cuales la recta tangente es horizontal. Uno de esos puntos es un máximo local y el otro un mínimo local. Se brindan las definiciones de estos dos conceptos en forma intuitiva.

Luego bajo el título *¿qué dice* $f''$ *acerca de* $f$ *?* se explica cómo el signo de $f''$ afecta el aspecto de la gráfica de $f$. Se analiza la derivada segunda como información del crecimiento o decrecimiento de la derivada primera. Entonces si $f''$ es positiva, $f'$ crece, indicando que las pendientes de las rectas tangentes crecen de izquierda a derecha. Se brinda un gráfico y se define a la curva de este tipo como cóncava hacia arriba. Cuando $f''$ es negativa la función derivada decrece, por lo que las pendientes decrecen de izquierda a derecha y se expone un gráfico con esta situación definiendo a la curva como cóncava hacia abajo**.** Esto se indica en forma general:

- ✓ Si $f''(x) > 0$ en un intervalo entonces $f$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

- ✓ Si $f''(x) < 0$ en un intervalo entonces $f$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo (Stewart, 1999, p. 177).

El libro de Larson y Edwards no cuenta con este análisis gráfico. El capítulo denominado "Aplicaciones de la derivada" es el que contiene todos estos conceptos y comienza definiendo extremos absolutos de una función:

- ✓ Sea $f$ definida en un intervalo $I$ que contiene a $x = c$.
- ✓ $f(c)$ es el mínimo de $f$ en $I$ si $f(c) \leq f(x)$ para toda $x$ en $I$.
- ✓ $f(c)$ es el máximo de $f$ en $I$ si $f(c) \geq f(x)$ para toda $x$ en $I$.
- ✓ Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los valores extremos o simplemente extremos de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de mínimo absoluto y máximo absoluto en el intervalo (Larson y Edwards, 2010, p. 164).

En ningún momento se aclara si el intervalo anterior es abierto o cerrado ni se explicita el dominio de la función. Luego se enuncia el teorema de funciones continuas y la existencia de extremos absolutos. A continuación, se da la definición de ER:

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a $c$ en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de máximo relativo de $f$, o se podría afirmar que $f$ tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a $c$ en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de mínimo relativo de $f$, o se podría afirmar que $f$ tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$ (Larson y Edwards, 2010, p. 165).

*Cómo se explican los métodos para hallar ER*

El capítulo del libro de Stewart "Aplicaciones de la derivación" comienza con preguntas que motivan al lector: ¿cuál es la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?, ¿cuál es la aceleración máxima de un transbordador espacial?, ¿cuál es el radio de la tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?, ¿qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear sangre?

Luego se definen los conceptos de extremos absolutos y ER:

> Una función $f$ tiene un máximo absoluto (o máximo global) en $c$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ en $D$, donde $D$ es el dominio de $f$. El número $f(c)$ se llama valor máximo de $f$ en $D$. De manera análoga $f$ tiene un mínimo absoluto (o mínimo global) en $c$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x$ en $D$ el número $f(c)$ se denomina valor mínimo de $f$ en $D$. Los valores máximos y mínimos de $f$ se conocen como valores extremos de $f$ (Stewart, 1999, p. 274).

Posteriormente el autor brinda una gráfica de una función donde resalta el valor máximo absoluto y mínimo absoluto y llama la atención sobre el comportamiento en otros puntos, aquellos que son ER. Para luego definir:

> Una función $f$ posee un máximo local (o máximo relativo) en $c$ si $f(c) \geq f(x)$ cuando $x$ está cercano a $c$. (Esto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ en algún intervalo abierto que contiene a $c$). De manera análoga, $f$ tiene un mínimo local en $c$ si $f(c) \leq f(x)$, cuando $x$ está cercano a $c$ (Stewart, 1999, p. 275).

Se enuncian los teoremas del valor extremo y de Fermat, dando ejemplos gráficos al respecto. Se señala que puede haber un ER en un punto donde no exista derivada, dando el ejemplo de la función valor absoluto de $x$ en $x = 0$. Posteriormente se define número crítico de una función $f$ al número $c$ del dominio de $f$ tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Se menciona el siguiente método:

Método del intervalo cerrado para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua $f$ sobre un intervalo cerrado $[a, b]$

1. Encuentre los valores de $f$ en los números críticos de $f$ en $(a, b)$.
2. Halle los valores de $f$ en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, el más pequeño, el valor mínimo absoluto (Stewart, 1999, p. 278).

En la ejercitación correspondiente a esta parte se solicita determinar máximos y mínimos de diversas funciones en contexto, pudiendo ser considerada como resolución de PO.

La próxima sección comienza con el teorema del valor medio y su interpretación geométrica. Repite la prueba para funciones crecientes y decrecientes, pero en esta oportunidad con su demostración formal utilizando el teorema del valor medio.

A través de un ejemplo de una función polinómica de grado 3 se analizan máximos y mínimos locales para luego dar lugar al primer método que aparece en el libro para determinar ER:

Prueba de la primera derivada

Supóngase que $c$ es un número crítico de una función continua $f$.

a) Si $f'$ cambia de positiva a negativa en $c$ entonces $f$ tiene un máximo local en $c$.
b) Si $f'$ cambia de negativa a positiva en $c$ entonces $f$ tiene un mínimo local en $c$.

c) Si $f'$ no cambia de signo en $c$ (es decir, $f'$ es positiva a ambos lados de $c$ o negativa en ambos lados), entonces $f$ no tiene máximo ni mínimo en $c$ (Stewart, 1999, p. 286).

En cambio, en el libro de Larson y Edwards, para estudiar el valor de la derivada en los ER se parte de tres ejemplos: dos con ER de funciones derivables en su dominio y el caso de la función valor absoluto de $x$ en $x = 0$. Luego se define punto crítico y se enuncia y demuestra el teorema de Fermat sobre la condición necesaria de ER con derivada. Para determinar ER y extremos absolutos en un intervalo cerrado se formula:

Determinación de extremos en un intervalo cerrado

Para determinar los extremos de una función continua $f$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ se siguen estos pasos:

1. Se encuentran los puntos críticos de $f$ en $[a, b]$
2. Se evalúa $f$ en cada punto crítico de $(a, b)$
3. Se evalúa $f$ en cada punto extremo de $[a, b]$
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo y el más grande es el máximo (Larson y Edwards, 2010, p. 167).

Se resuelven algunos ejemplos, entre los cuales intervienen PO.

Es recién en el apartado posterior al enunciado e interpretación geométrica de los teoremas de Rolle y de Lagrange donde se trata sobre funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada. Hasta este momento no se definieron este tipo de funciones.

Una función $f$ es creciente sobre un intervalo si para cualesquiera dos números $x_1$ y $x_2$ en el intervalo, $x_1 < x_2$, implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función $f$ es decreciente sobre un intervalo si para cualesquiera dos números $x_1$ y $x_2$ en el intervalo, $x_1 < x_2$, implica $f(x_1) > f(x_2)$ (Larson y Edwards, 2010, p. 179).

Se expone un solo ejemplo gráfico indicando los IC e ID y en el mismo se indica el signo de $f'$ sin graficar rectas tangentes para comprender la relación entre el signo de esta última y la original.

A continuación, se enuncia el criterio para las funciones crecientes y decrecientes y se demuestra usando el teorema de Lagrange del valor medio.

Se dan ejemplos en los que se calcula los IC e ID de una función en forma analítica. No se muestran, por ejemplo, los gráficos de $f$ y $f'$ en el mismo par de ejes para poder relacionarlos, o a partir del gráfico de $f'$ estudiar el comportamiento de $f$.

Se enuncia el criterio de la derivada primera para calcular máximos y mínimos junto a gráficos que ilustran cada situación:

Sea $c$ un punto crítico de una función $f$ que es continua en un intervalo abierto $I$ que contiene a $c$. Si $f$ es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en $c$, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue:

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $c$, entonces $f$ tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $c$ entonces $f$ tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva a ambos lados de $c$, o negativa en ambos lados de $c$, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo (Larson y Edwards, 2010, p. 181).

Luego se resuelven ejemplos en registro analítico y un problema de aplicación: la trayectoria de un proyectil. En los ejercicios nuevamente se proponen PO.

En cuanto a la concavidad de una curva Stewart retoma lo ya desarrollado cuando relaciona los gráficos de $f$, $f'$ y $f''$. Define punto de inflexión como aquel donde la curva cambia su concavidad para pasar al método de la derivada segunda para ER:

> Prueba de la segunda derivada
>
> Supóngase que $f''$ es continua cerca de $c$.
>
> a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces $f$ tiene un mínimo local en $c$
>
> b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $f$ tiene un máximo local en $c$
>
> (Stewart, 1999, p. 287).

Se efectúa el estudio completo de diversas funciones desde registros analítico y gráfico.

Larson y Edwards definen la concavidad como el crecimiento o decrecimiento de la derivada primera y luego explican la relación de la concavidad con la posición de las rectas tangentes respecto a la curva. Expresan el criterio de concavidad y el de la derivada segunda para cálculo de ER en forma similar a la que lo hace Stewart.

*Cómo se introducen y resuelven los PO*

Como indicamos anteriormente, desde el capítulo de funciones, los autores de los dos libros anticipan PO.

En el caso de Stewart, al comenzar la sección denominada “Problemas de optimización” hace una introducción con los pasos que guían la solución de los mismos:

1) Comprenda el problema: el primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas ¿cuál es la incógnita? ¿cuáles son las cantidades dadas? ¿cuáles son las condiciones dadas?

2) Dibuje un diagrama: en la mayor parte de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3) Introduzca notación: asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla $Q$ por ahora). Asimismo, seleccione símbolos para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar el uso de iniciales como símbolos sugerentes; por ejemplo: $A$ para el área, $t$ para el tiempo.
4) Exprese $Q$ en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5) Si en el paso 4 $Q$ se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre esas variables. Enseguida use esas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para $Q$. De esta suerte, $Q$ se expresará como función de una variable $x$, digamos. $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6) Aplique los métodos de las secciones 4.2 y 4.3 para hallar el valor máximo o el mínimo absolutos de $f$. En particular, si el dominio $f$ es un intervalo cerrado, entonces se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.2. (Stewart, 1999, p. 310).

Luego resuelve cinco ejemplos diversos con todo detalle: diagramas, gráficos, nombre de incógnitas y variables. Se brindan 36 problemas como ejercitación más un proyecto de investigación. Termina la sección con aplicaciones propias de la economía.

En el libro de Larson y Edwards se resuelven 5 problemas, con diagramas, gráficos y en forma analítica. En el momento de la resolución se define ecuación primaria como aquella que brinda la fórmula que hay que optimizar. No se explicita el concepto de ecuación secundaria, pero se usa en la resolución de los ejemplos: es aquella ecuación que relaciona las variables que intervienen en el problema con algún dato. Luego los autores brindan las siguientes indicaciones:

Estrategias para resolver problemas aplicados de máximos y mínimos:

1. Identificar todas las cantidades dadas y las que se van a determinar. Si es posible, elaborar un dibujo.
2. Escribir una ecuación primaria para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una sola variable independiente. Esto quizás implique el uso de ecuaciones secundarias que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas en las secciones 3.1 a 3.4. (Larson y Edwards, 2010, p. 219).

La ejercitación al respecto está formada por 60 problemas.

### 4.2.4 Reflexiones

El análisis realizado sobre la enseñanza de la materia Análisis Matemático I en carreras de ingeniería de la UNLaM y de dos libros de texto usados en la cátedra muestra que la enseñanza del Cálculo está, quizás de a poco y tímidamente, cambiando. Pasó de ser una sucesión de contenidos formales, demostraciones y gran cantidad de ejercicios rutinarios con énfasis en el trabajo algebraico a una presentación en la que, mediante situaciones cotidianas, se introducen los conceptos. Se busca mostrarlos de manera más intuitiva que formal, tratando de involucrar diversos registros de representación, destacando las interpretaciones de los teoremas y propiedades en vez de sus demostraciones, brindando ejemplos de diversa índole y aplicaciones. Si bien estos rasgos se evidencian, resta mucho por hacer.

Coincidimos con Vrancken (2011) en el hecho que la enseñanza del Cálculo Diferencial debe propiciar la comprensión de los conceptos básicos, disminuyendo la cantidad de tiempo dedicada a la transmisión de temas y al aprendizaje de algoritmos y realizando una selección de contenidos mínimos indispensables a ser tratados. La propuesta consiste en involucrar al alumno en actividades que le permitan descubrir conceptos incluidos en situaciones de cambio cotidianas o referidas a otras disciplinas, para luego en un ambiente de discusión con el profesor, se puedan formalizar ideas y profundizarlas. La capacidad de interpretar la relación entre el signo de las razones de cambio media, de la derivada o razón de cambio instantánea con el comportamiento de crecimiento, decrecimiento o "no cambio" de una función desde diversos contextos, usando distintos registros de representación, tiene como objetivo propiciar en el estudiante condiciones favorables para poder resolver problemas más complejos, entre ellos los PO.

### 4.3 Análisis cognitivo

En esta sección estudiamos los procesos cognitivos que están presentes cuando las personas asignan y comparten significados usando distintas estructuras y lenguaje variacional e integrando diferentes representaciones semióticas en el tema que nos compete en la investigación. Analizamos el punto de vista del que aprende para, a la luz de los resultados obtenidos, poder diseñar una situación de aprendizaje que promueva la comprensión de los conceptos que intervienen en la resolución de PO. Como indicamos en diversas oportunidades, los rasgos característicos del comportamiento de funciones de nuestro interés son: IC, ID y ER.

Según Lupiañez, Rico, Gómez y Marín (2005) en el análisis cognitivo el profesor debe estudiar toda la complejidad de significados que posee la estructura matemática a enseñar desde la perspectiva del que aprende. Es decir, el docente debe describir qué habilidades y competencias tienen que desarrollar los estudiantes mediante esa estructura matemática, como así también qué errores pueden cometer y cuáles son las dificultades de aprendizaje que hay detrás de éstos.

Los autores mencionados distinguen dos componentes en el análisis cognitivo. Una constituye la parte *positiva* del aprendizaje: qué es lo que el profesor desea que los estudiantes sean capaces de hacer a partir de los contenidos enseñados, cómo pueden usar los conocimientos aprendidos y cómo pueden relacionarlos con conocimientos ya existentes.

La parte *negativa* se refiere al estudio de los errores que los alumnos pueden cometer en la elaboración de las tareas relacionadas con el concepto en cuestión y el análisis de las dificultades que subyacen a esos errores y permiten su interpretación.

Gómez (2002) indica que el análisis cognitivo parte de una posición constructivista del aprendizaje y que, basado en investigaciones, estudia las dificultades que los estudiantes tienen con respecto a la estructura matemática involucrada y los errores que pueden cometer cuando abordan tareas que la incluyen.

Por su parte Cabrera (2009) explica, haciendo referencia a la teoría de la evolución del conocimiento de Piaget, que se pasa de un estado de equilibrio a otro por medio de una etapa de desequilibrio provocada al entrar en conflicto las relaciones que posee la persona con otras nuevas, por el intento de coordinarlas. El equilibrio se alcanza de nuevo por medio de una fase de reorganización y coordinación. De esta manera el aprendizaje no es un proceso secuencial y en su desarrollo es natural que existan dificultades y obstáculos que impiden la apropiación de un conocimiento.

El aprendizaje de la matemática origina muchas dificultades en los alumnos. Como establece Socas (1997) las dificultades se conectan formando redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. Para este autor el error es considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como la falta de conocimiento o una distracción.

Socas (1997) indica que las dificultades en el aprendizaje de la matemática son de diversa naturaleza y las organiza en líneas generales en los siguientes tópicos:

- ✓ dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos,
- ✓ dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático,
- ✓ dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática,
- ✓ dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos,
- ✓ dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Bachelard (1938, citado en Rico, 1998) plantea la noción de obstáculo epistemológico como explicación para la aparición inevitable de errores que constituye una parte importante del avance en el conocimiento. González, A. (2006) los caracteriza como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento; tienen un dominio de eficacia; son tenaces y resultan más resistentes cuanto mejor adquirido estén o cuanto mejor hayan demostrado su eficacia.

Si bien estas tres nociones (dificultades, errores y obstáculos) son distintas, no es el objetivo de la investigación realizar un análisis exhaustivo de las diferencias y clasificaciones de las mismas. Pretendemos estudiar qué errores y dificultades están presentes en el proceso de aprendizaje de las nociones subyacentes en el análisis de funciones para ofrecer a los alumnos nuevas situaciones que los desestabilicen, que produzcan la reconsideración o el olvido.

### 4.3.1 Errores y dificultades en el estudio de funciones

#### 4.3.1.1 Sobre el teorema factual en el estudio de funciones

Uno de los errores presentes en el análisis de funciones es confundir crecimiento con positividad de la función y decrecimiento con negatividad. Marcolini (2003) llama teorema factual a aquel utilizado por los estudiantes, sin justificación, que no ha sido objeto de enseñanza, que se basa en una teoría implícita.

Cardona (2009) establece como teorema factual en el estudio de funciones al siguiente:

> …el estudiante cree que cuando $f(x) > 0$, entonces las derivadas sucesivas también son mayores a cero, ahora también aplica para el caso inverso cuando $f(x) < 0$, entonces las derivadas primera, segunda, tercera, …, n-ésima de dicha función son menores que cero (p. 19).

La propuesta didáctica en la investigación de Cardona trata de que el estudiante se apropie del concepto de derivada desde las derivadas sucesivas y no desde la noción de tangente o la regla de cuatro pasos. Se aplica un instrumento formado por 10 problemas ya utilizado en otras investigaciones y se analizan los resultados en cuatro estudiantes a la luz del marco teórico. Una de las conclusiones a las que arriba el autor es que uno de los obstáculos que interviene en la estabilización del concepto derivada a través de las derivadas sucesivas es la aparición del teorema factual anteriormente mencionado.

Dolores y Guerrero (2004) realizan una investigación en profesores y alumnos de educación media sobre análisis de funciones. En particular estudiaron IC, ID, puntos estacionarios, región donde la función es positiva, negativa o nula en diversos registros de representación. En una primera etapa aplican un cuestionario a 16 profesores y en una segunda, un cuestionario a 100 estudiantes cuyos profesores son los entrevistados en la etapa previa. Una de las conclusiones obtenida es que se observan ciertas tendencias como la de confundir el crecimiento de una función ( $f'(x)>0$ ) con su ubicación en el semieje positivo de las abscisas, en tanto que el decrecimiento de la función ( $f'(x)<0$ ) es asociada con las gráficas cuya ubicación es el semieje negativo de las abscisas. Con mayor porcentaje (poco más del 50%) se percibe la tendencia a relacionar la expresión $f'(x)>0$ con una gráfica cuyas ordenadas sean positivas, mientras que, aquella función que posea ordenadas negativas es asociada con la expresión $f'(x)<0$. Estos autores concluyen que es probable que esté fuertemente arraigada la idea de asociar crecimiento con positividad y de crecimiento con negatividad de la función.

La tesis de Guerrero (2002) tiene como objetivo explorar cómo interpretan los profesores del bachillerato aspectos del análisis de funciones a partir de sus representaciones gráfica, analítica y verbal y el tratamiento y/o conversión entre los diferentes sistemas de representación. Una de las conclusiones que extrae el autor es que en la conversión de registro gráfico a analítico observa la aparición del teorema factual anteriormente enunciado. Por otro lado, la expresión $f(x+h)-f(x)>0$ se asocia con las gráficas donde la función es positiva; análogamente $f(x+h)-f(x)<0$ con gráficas donde la función es negativa.

Marcolini (2003) diseña e implementa una situación didáctica con el objetivo de resignificar al concepto de derivada a través de las derivadas sucesivas situándolas en el registro gráfico. La serie de Taylor se toma como elemento de predicción y se trabaja con problemas contextualizados, principalmente sobre movimiento desde la Física. Una de las conclusiones a las que arriba la autora es la presencia del teorema factual. En el caso del modelo tratado, se traduce en: si el espacio recorrido es nulo, entonces también son nulas la velocidad y la aceleración.

#### 4.3.1.2 Sobre la búsqueda de extremos y la resolución de problemas de optimización

Guzmán et al. (2010) y Guzmán y Rodríguez (2013) analizan las dificultades que presentan los alumnos del primer año universitario en la determinación de ER de una función desde la teoría de registros de representación. En el caso de estas dos investigaciones se brinda al alumno un problema que consiste en hallar el ER de una función que tiene la característica que, el punto crítico de derivada primera cero, también tiene derivada segunda nula. Los alumnos calculan la derivada, la igualan a cero y, como criterio para determinar si el punto crítico hallado es máximo o mínimo o no es ER, aplican el criterio de la derivada segunda. Los estudiantes no continúan con la ejercitación debido a que este criterio no brinda información en este caso. En general responden que la información dada no es suficiente para establecer si el punto crítico es o no ER. Una de las conclusiones a la que llegan los autores es que el alumno opera mecánicamente ante un problema que contenga la palabra máximo o mínimo, sin tener en cuenta lo que el problema realmente está solicitando. En general no recurren al registro gráfico para corroborar lo obtenido analíticamente, terminando esto en conclusiones incompletas o erradas. La no coordinación de los registros algebraico-simbólicos con el gráfico explica, al juicio de los autores, la falta de dominio de los criterios y la debilidad en la comprensión.

Moreno y Cuevas (2004) presentan a alumnos y profesores de nivel universitario dos PO: uno tradicional y uno no rutinario. En el primero no se evidencian inconvenientes en su resolución. El segundo consiste en determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa con una lámina cuadrada de 13 cm de lado donde la base esté formada por una esquina de la lámina. En la consigna se les proporciona el dominio de la función, así como también un diagrama de lo pedido. Del grupo de 8 profesores el 75% resuelve el problema mecánicamente, obteniendo un punto crítico fuera del dominio y aplican el criterio de la derivada segunda para concluir que es máximo. Del grupo de estudiantes de maestría (9 ingenieros), ninguno resuelve bien el problema. Del grupo de estudiantes de ingeniería (los autores no especifican la cantidad), tres evidencian que el punto crítico está fuera del dominio e indican que el problema no tiene solución. Luego se suministra al mismo grupo de profesores y estudiantes, un cuestionario donde se solicita la definición de ER de una función. El 90% de los entrevistados indica que son puntos de derivada cero. Los autores concluyen que una posible causa de la concepción errónea de máximos y mínimos la proporciona Tall (1996, citado en Moreno y Cuevas, 2004) al indicar que habitualmente el estudiante aprende rutinas para ser exitoso en los exámenes y esas rutinas dejan de ser exitosas para responder preguntas que conceptualmente son desafíos. El proceso de instrucción donde más que enseñar se los entrena a los alumnos en procedimientos algorítmicos mediante la memorización de definiciones y propiedades, convierte a la matemática en algo rutinario, sin sentido para el que aprende, lo que conlleva, de acuerdo con los resultados del estudio, a la mala interpretación de conceptos importantes.

Baccelli et al. (2014) llevan adelante una investigación con estudiantes de ingeniería con el objetivo de analizar los obstáculos en la construcción de significados que dificultan la resolución de PO. Estas autoras señalan que en las evaluaciones la mayoría de los alumnos ni siquiera aborda estos problemas, mientras que los que lo hacen evidencian serias dificultades en el planteo, desarrollo y verificación de los resultados obtenidos. Para evaluar el desempeño de los alumnos diseñan y administran un instrumento formado por dos PO dados en diferentes registros y analizan los mismos y los resultados utilizando la teoría del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Según esta teoría se dividen los pasos para resolver estos problemas en las llamadas funciones semióticas. En este caso son: F1 (establecer la relación entre las variables intervinientes); F2 (indicar la función a optimizar en dos variables); F3 (despejar una variable en función de la otra de manera tal que la función a optimizar quede expresada en una sola variable); F4 (derivar la función obtenida en F3); F5 (obtener el punto crítico); F6 (criterio para determinar si el punto crítico hallado es o no ER y, si lo es, de qué tipo). La mayor dificultad detectada en la investigación es en la función F3. Las autoras concluyen que éste es un procedimiento clave para la resolución satisfactoria de los problemas planteados. Si el alumno logra este paso, las restantes funciones semióticas se van estableciendo en forma secuencial, aunque también es alto el porcentaje de alumnos que olvida aplicar un criterio luego de obtener el punto crítico.

En otro estudio realizado por Baccelli et al. (2011) sobre los mismos PO planteados en la investigación anterior, además de las conclusiones ya expuestas, señalan que ningún alumno usa como estrategia de resolución un tanteo o tabla. A su vez en uno de dichos problemas se debe optimizar una función cuadrática. Todos los estudiantes que lo resuelven aplican mecánicamente los pasos de derivación y criterio, ninguno usa sus conocimientos previos para hallar el vértice de dicha parábola y así resolver el problema.

Malaspina (2007) realiza una experiencia didáctica en la universidad en la cual observa que alumnos que ya han estudiado los conceptos de máximos y mínimos en los cursos de Cálculo Diferencial, al resolver PO usan casi mecánicamente los criterios conocidos de la primera y segunda derivada sin desarrollar una actitud que conjugue la intuición, la conjetura, la formalización y el rigor ante otros PO, donde la dificultad no radique en obtener el valor óptimo de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado. Se proponen dos PO, uno con variable continua y otro con variable discreta, a 38 alumnos que cursan el segundo o tercer ciclo universitario en sus estudios de diversas especialidades de ingeniería y que ya han aprobado el curso de Cálculo en una variable.

Se les pide que resuelvan los problemas individualmente y manifiesten en la hoja todos sus cálculos, diagramas o dibujos, tanto los preliminares como los definitivos. Para analizar las producciones de los alumnos se concentran en tres preguntas: ¿halla lo pedido?, ¿qué procedimiento sigue?, ¿argumenta por qué el valor obtenido es óptimo?

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- ✓ En el problema de variable continua el 37% de los alumnos sólo muestra el resultado, un 29% para el de variable discreta. En el primer caso un 51% indica respuesta correcta y en el segundo, un 73%. Estos alumnos sólo dan la respuesta, no hay procedimientos ni argumentos en sus producciones. Al ser alumnos que ya aprobaron un curso de Cálculo Diferencial se puede observar que existe una débil influencia de la enseñanza y el aprendizaje para ir más allá de una solución intuitiva.
- ✓ El 55% de los alumnos presenta algún tipo de formalización en el problema de variable continua y un 24% en el de variable discreta, ya sea con el uso de lenguaje formalizado y/o uso de argumentos. La solución correcta a un PO debe incluir la justificación de que el resultado obtenido es óptimo, pero se observa que hay un porcentaje considerable de alumnos que no lo hacen, sobre todo en el problema con variable discreta, a pesar de que formalizan. Esto nos lleva a afirmar que se requiere prestar más atención a la preparación en el pensamiento riguroso y al uso adecuado de la formalización.

Como resumen sobre los resultados de esta investigación, la primera conclusión a la que arriba el autor es que se perciben deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los PO propuestos. La segunda se refiere a que una insuficiencia específica de argumentación radica en la poca presencia de justificación de que el resultado es óptimo, lo cual es más notorio al resolver el problema de variable discreta.

La tercera conclusión es que no se observan capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, quizás porque no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado.

Gine de Lera y Deulofeu (2010) realizan un estudio exploratorio con 40 alumnos de nivel secundario con conocimientos sobre derivada y sus aplicaciones con el objetivo de observar cómo intentan resolver un PO contextualizado. En particular se preguntan sobre cómo el alumno crea un modelo matemático para el abordaje del problema y cómo interpretan la solución obtenida al problema real. Trabajan con dos tipos de problema:

- ✓ Problemas tipo 1: fáciles de plantear (por tal motivo se marcan en el enunciado los pasos a seguir), pero la interpretación de los resultados es vital para obtener la solución correcta.
- ✓ Problemas tipo 2: la dificultad radica en el planteamiento del problema, la interpretación del texto es imprescindible para resolverlo.

El instrumento para la obtención de datos consiste en un protocolo con cinco problemas y un cuestionario. Dentro de los problemas tipo 1, uno tiene la particularidad de que la solución es un número natural siendo el máximo obtenido en forma analítica un número racional no natural. El otro problema tipo 1 es el dado en Moreno y Cuevas (2004), que tiene la característica que el máximo de la función está en el extremo del intervalo dominio (es máximo absoluto y no relativo), por lo cual el método de buscar punto crítico y aplicar algún criterio, falla.

Los problemas tipo 2 son problemas usuales en la literatura sobre PO, uno es extraído de un texto de nivel medio y los otros dos del examen de ingreso a la universidad.

Los autores analizan las siguientes variables:

- ✓ Saben usar el método estándar (si/no).

- ✓ Plantean correctamente los problemas (tienen una base matemática aceptable: si/no).
- ✓ Interpretan las soluciones (usan razonamientos para contextualizarlas: si/no).

Del análisis de los resultados pueden obtener tipologías de alumnos cruzando estas variables. La tipología que más alumnos presenta es para la cual las tres variables estudiadas están ausentes (37,5%). El 40% de los estudiantes sabe usar el método estándar, el 30% plantea correctamente los problemas y el 42,5% interpreta las soluciones.

Los problemas de tipo 1 brindan más posibilidades de ser abordados de diversas formas, no siendo imprescindible el método estándar para encontrar la solución correcta. Estos problemas son menos comunes en los libros de textos y no se encuentran en la prueba de acceso a la universidad del lugar donde se hace la investigación. Los autores concluyen que el hecho de haber solucionado los problemas tipo 1 es independiente de la base matemática que tienen los alumnos. En este caso coinciden con Moreno y Cuevas (2004) en el hecho que los estudiantes están entrenados para desarrollar procesos algorítmicos y cuando se los saca de ese contexto no aplican lo que aprendieron en su clase de matemática.

#### 4.3.1.3 Sobre el concepto de función

Cuesta (2007) señala que las dificultades en el concepto de ER derivan del conocimiento que se tiene del concepto de función, hasta el punto de que la propia definición de función constituye un conflicto en el aprendizaje del mismo. El autor indica que, si bien el estudiante identifica el concepto de función como una relación entre dos variables, no es capaz de comprender la regla que domina dicha relación. Esta falta de comprensión se acentúa en contextos concretos. Por ejemplo: un problema presentado en la investigación que el autor lleva a cabo trata sobre un ciclista que sube una montaña y se estudia la velocidad del ciclista. Para varios alumnos la velocidad no depende del tiempo. Es decir, no se logra asociar el concepto de función con otros conocidos en otros ámbitos. El alumno evoca ejemplos de funciones que les fueron dados desde la instrucción, pero no desarrolla la capacidad de usar este concepto de una manera flexible en situaciones conocidas o problemas que forman parte de su experiencia personal.

#### 4.3.1.4 Sobre el manejo de poco universo de funciones

Cantoral y Farfán (1998) exponen que para acceder al PyLV se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del alumno pues el conocimiento superficial de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de Cálculo. Esta afirmación es corroborada por Simón y Miguel (2013). Estos autores realizan una investigación que tiene como objetivo el estudio de la función y la información que proporcionan sobre ésta sus derivadas sucesivas y cómo la articulación entre ellas ayuda a establecer la noción de derivada y favorece el desarrollo del PyLV de los estudiantes. Uno de los resultados que obtienen es que la mayoría de los alumnos que usan diversas gráficas para trabajar sus ideas, muestran resultados más exitosos que aquellos que no las utilizan. Por lo tanto, concluyen que, para acceder al PyLV, es necesario un universo rico de formas gráficas por parte del que aprende.

Por su parte Cardona (2009) establece que una de las dificultades que impide la articulación de una función con sus derivadas sucesivas es que los alumnos poseen un escaso manejo de universo de funciones: sólo polinomios de grado 0, 1, 2 y 3. Los estudiantes no aluden a funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

#### 4.3.1.5 Sobre los registros de representación

En los apartados anteriores ya mencionamos algunas investigaciones que dan cuenta que la escasa conversión de registros de representación dificulta el proceso de comprensión de ER de una función. En efecto, los estudiantes usan pocos registros de representación, tienen dificultad para expresar relaciones planteadas verbalmente o en el entorno geométrico en lenguaje algebraico y tienen una manipulación excesiva sobre la expresión analítica de la función inducida por la necesidad de realizar operaciones con las variables (Cardona, 2009; Cuesta, 2007; Marcolini, 2003; Simón y Miguel, 2013; Vrancken, 2011, García, 2011).

Cuesta (2007) introduce el ejemplo sencillo de expresar como función el costo total de la compra de libros si cada uno cuesta tres dólares, el cual es resuelto por muy pocos alumnos. Esto implica conversión del registro verbal al analítico. Tall (1989, citado en Cuesta, 2007) adjudica esta dificultad al currículo de enseñanza: el alumno está acostumbrado a trabajar ejemplos simples, conocen la ecuación de una recta, pero la trabajan en general sin contexto. Esto último provoca una dificultad hasta muchas veces insuperable cuando intentan diseñar una función lineal en un contexto económico, en este caso.

Una de las conclusiones que extrae Guerrero (2002) en su tesis es la dificultad en la conversión de registro gráfico a analítico evidenciada, por ejemplo, al confundir el crecimiento o decrecimiento de una función con el signo de la misma. A su vez en la construcción de gráficas con condiciones dadas en lenguaje analítico, la mayoría de los profesores asocia $f'(a)=0$ con una función constante y no conciben la idea de punto estacionario.

Ariza y Llinares (2009) realizan un estudio sobre la aplicación y el uso del concepto de derivada en conceptos de microeconomía en alumnos del bachillerato y del primer año de Ciencias Empresariales. A través de tareas y entrevistas estudiaron cómo los alumnos utilizan los significados del concepto de derivada en los registros analítico y gráfico al resolver situaciones de economía. Una de las conclusiones extraídas es que existe en los estudiantes el predominio del manejo del registro analítico y que un buen manejo de este registro y del gráfico garantiza un mayor grado de comprensión y de aplicación de la derivada como concepto matemático.

#### 4.3.1.6 Sobre las consignas y el lenguaje común

Tanto Cardona (2009) como Cuesta (2007) evocan el no entendimiento de las instrucciones de cada problema matemático y algunas dificultades a nivel aritmético o algebraico. Algunas expresiones en lenguaje verbal no son comprendidas por los alumnos, por ejemplo: “expresar el número de metros de cerca requerido como una función de la longitud del lado frontal” (Cuesta, 2007, p. 124). Para este autor la falta de comprensión de un término del lenguaje corriente crea un conflicto en la resolución de la tarea e influye también en la construcción del concepto de función. Preguntas como “¿cuál es la mínima longitud de cerca necesaria para cercar el camping?” (Cuesta, 2007, p. 124) no produce en el alumno la idea de hallar el valor mínimo de una función.

### 4.3.2 Reflexiones

Cada uno de nuestros alumnos, como todo ser humano, desarrolla a lo largo de su vida y de acuerdo a su experiencia, una visión del mundo. Se construyen significados para términos científicos y explicaciones de por qué las cosas se comportan de determinada manera. Todas estas creencias, teorías, significados y explicaciones son consideradas como ideas o concepciones. Reflexionar sobre las concepciones de nuestros alumnos nos permite crear las condiciones propicias para, de ser necesario, cambiarlas.

Las diversas investigaciones analizadas tanto en el Capítulo 2 como en este apartado nos dan cuenta de los errores o dificultades más comunes que manifiestan los alumnos participantes sobre los conceptos de IC, ID, ER y la resolución de PO.

Algunas de estas dificultades están ligadas a la escasa conversión entre registros y al no poder contar con la estrategia de obtener diferente información sobre el objeto matemático en cuestión desde distintos sistemas de representación. Ejemplo de este accionar es, entre otros, la aparición del teorema factual.

Otro punto importante es el concepto de función. En general los alumnos no asocian este concepto a situaciones de la vida cotidiana, lo que les dificulta la modelación o la traducción de un problema en términos matemáticos. A su vez es muy limitado el universo de funciones que manejan, lo que les impide crear ejemplos y contraejemplos y los limita a desarrollar un pensamiento variacional, esencial en el estudio del Cálculo.

La actitud memorística y la necesidad de tener "recetas" o pasos en la solución de problemas conduce, por ejemplo, a la falta de análisis de un punto crítico en un PO o a considerar como respuesta un valor que no está en el dominio estipulado.

En cuanto a la parte positiva del análisis cognitivo, es decir, lo que deseamos que los estudiantes sean capaces de hacer a partir de sus conocimientos previos y de los contenidos enseñados, la desarrollamos en el Capítulo 5 referido a la situación de aprendizaje.

### 4.4 Análisis de la componente sociocultural

La dimensión sociocultural atiende al ser humano en la construcción de conocimiento matemático dentro de un determinado contexto social.

Cantoral (2001) estable que la expresión construcción social del conocimiento matemático avanzado es el conjunto de las interacciones que se establecen entre los siguientes polos: Pensamiento Matemático Avanzado, epistomología de la matemática avanzada y las prácticas humanas especializadas.

Reconocemos así la naturaleza de construcción social del conocimiento priorizando la actividad humana, en contraste con aquellos enfoques que centran su atención en el objeto matemático en estudio.

Para atender la complejidad del saber matemático en sus cuatro dimensiones (epistemológica, didáctica, cognitiva y social) hay que situarlo en el entorno del aprendiz, donde se conciben cuestiones como su cultura, sus conocimientos, su historia, su presente y la propia historia que permitió la emergencia de ese saber matemático (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015). A esto agregamos que en ese entorno se encuentra el profesor, quien posee conocimientos y creencias que le dan al saber enseñado una determinada impronta. A su vez de él depende la organización de la clase, su dinámica y las actividades que en ella se realizan.

Acordamos con Vrancken (2011) que, a partir de estos argumentos, es importante plantear una propuesta didáctica en torno a un determinado aprendizaje que se vea favorecida por la construcción social mediante la interacción alumno-alumno y alumno-docente.

En particular para nuestro trabajo debemos considerar la dimensión sociocultural en el sentido de ser un estudio situado en el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la UNLaM, cuyos alumnos reflejan características particulares

# CAPÍTULO 5: LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

*En este capítulo describimos los aspectos metodológicos de la investigación, así como el diseño de la situación de aprendizaje elaborada para cumplir con el esquema enunciado. Las dimensiones del estudio y el marco teórico expuestos en los capítulos anteriores brindan la información que sirve como base de su estructuración y análisis.*

## 5.1 Principios metodológicos

La metodología para llevar adelante el estudio consta de dos partes. La primera de ellas toma alguno de los aspectos de la ingeniería didáctica como esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula (Artigue, 1995). Esto es concebir, diseñar, realizar, observar y analizar una situación de aprendizaje de los conceptos involucrados en la resolución de PO basada en ideas variacionales y dada en diferentes registros de representación.

La segunda parte examina las concepciones en términos de Sfard de los conceptos de IC, ID y ER mediante el análisis de los ítems que conforman la situación de aprendizaje y su aporte a cada una de dichas concepciones. De esta manera cada equipo que participa en la experiencia tiene una puntuación sobre la CO y la CE de los tres conceptos. Con estos datos efectuamos, a fin de resumir la información, un análisis cuantitativo basado en la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales.

En los apartados siguientes profundizamos las dos etapas descriptas anteriormente.

## 5.2 Primera parte.

### 5.2.1 Descripción general

Consideramos adecuado tomar aspectos de la ingeniería didáctica como metodología de investigación ya que en la misma se tiene en cuenta la complejidad de los fenómenos que se dan en el aula y en el aprendizaje de los conceptos matemáticos de acuerdo a las características sociales del entorno donde tiene lugar.

El término ingeniería didáctica se utiliza tanto como metodología de investigación, como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1995) al referirse a "un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos" (p. 61).

Como metodología Artigue (1995) indica las cuatro fases de las que se compone:

- ✓ Primera fase: análisis preliminares.
- ✓ Segunda fase: concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.
- ✓ Tercera fase: experimentación.
- ✓ Cuarta fase: análisis *a posteriori* y evaluación.

Los análisis preliminares tienen que ver con: el contenido implementado en la enseñanza (dimensión epistemológica), la enseñanza tradicional y sus efectos (dimensión didáctica), las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y obstáculos (dimensión cognitiva), y las restricciones provenientes del contexto donde se va a realizar la experiencia didáctica. Consideramos que este último análisis se relaciona con una cuarta componente, la sociocultural, como integradora de las otras tres, completando de esta manera el enfoque sistémico de los fenómenos abordados.

González, A. (2006) señala que en esta etapa también se establecen las restricciones particulares, es decir aquellas relativas al contexto en el que se desarrolla la ingeniería. Las mismas pueden deberse a factores institucionales y a las características de los alumnos con los que se lleva a cabo la experimentación.

En la segunda fase Artigue (1995) sugiere establecer dos tipos de variables de comando:

- ✓ variables macro didácticas o globales, concernientes a la organización general de la ingeniería. Las mismas tienen que ver con las limitaciones en la complejidad de los contenidos, los sistemas de representación que son convenientes articular, la organización de la secuencia de actividades, el uso o no de alguna herramienta tecnológica auxiliar, la resolución por parte de los alumnos (en forma individual o grupal), en qué momento (presencial, domiciliario), entre otros.

- ✓ variables micro didácticas o locales, relativas a la organización local de la ingeniería, es decir, a la de cada sesión o episodio.

El análisis a priori prevé el comportamiento de los alumnos. Comprende una parte descriptiva y una predictiva, en las que se analizan básicamente las características de una situación que se desea constituir y que se va a tratar de llevar a los alumnos. Se identifican los posibles comportamientos esperados, intentando mostrar en qué medida el análisis realizado permite controlar su significado (Artigue, 1995).

En cuanto a la fase de experimentación, De Faria (2006) señala que es la realización de la ingeniería con un cierto grupo de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto entre el investigador-profesor-observador con el conjunto de estudiantes objeto de la investigación.

Por último, el análisis a posteriori y validación se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

Valorando el esquema anteriormente expuesto, en el Capítulo 4 presentamos los análisis preliminares correspondientes a nuestra investigación. Brindamos aquí una síntesis de los mismos:

- ✓ En el plano histórico epistemológico los problemas de máximos y mínimos tienen larga data. Los primeros ejemplos se abordan principalmente desde un plano geométrico, impidiendo el hallazgo de un método general. La introducción del simbolismo da fruto en el primer método para calcular ER debido a Fermat, pero éste tiene falencias y sólo trabaja con la condición necesaria en casos particulares. A partir del Cálculo de Newton y Leibniz y diversos desarrollos posteriores en los cuales prima el registro analítico, se llega a la condición necesaria igualando a cero la derivada o en puntos de “derivada infinita”. Posteriormente es MacLaurin el que hace explícita la condición suficiente a través de la derivada segunda.

- ✓ En el plano didáctico en general prevalece la fuerza de la enseñanza algorítmica y con ella el registro analítico. Gracias a las investigaciones en Educación Matemática es incipiente la introducción de situaciones de variación, el desarrollo intuitivo de conceptos y la visualización a través de registro gráfico.
- ✓ En el plano cognitivo los alumnos evidencian dificultades en el tratamiento y conversión de registros de representación y en el manejo de un universo de funciones necesario para lograr un pensamiento variacional. A su vez la escasa comprensión de las consignas y el lenguaje común también son impedimentos a la hora de aprender.

En cuanto a las restricciones particulares, el contexto de nuestra ingeniería es el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la UNLaM, y la cátedra de Análisis Matemático I, la cual cuenta con 10 comisiones por cuatrimestre. En cada uno de los cursos trabajan dos profesores, uno de ellos a cargo del mismo y el otro auxiliar. En promedio, cada comisión cuenta con 70 alumnos. Por razones de organización determinamos incorporar la propuesta en la comisión a cargo de quien presenta esta tesis, correspondiente al turno mañana y formada por 66 alumnos. En las demás comisiones se desarrollan los contenidos de manera habitual.

Respecto a las características de los alumnos en la comisión seleccionada, 28 tienen el carácter de recursantes y 38 cursantes por primera vez. Los estudiantes vivenciaron como mínimo un cuatrimestre en la universidad, en el cual algunos cursaron Matemática Discreta y/o Algebra lineal.

En nuestro caso las elecciones macro-didácticas se basan en dos aspectos subyacentes: el matemático y el didáctico.

Respecto al primero tenemos en cuenta los siguientes tópicos:

- IC e ID de una función.
- Relación de IC e ID de una función con el signo de la razón de cambio promedio o media en un intervalo de su dominio.
- Relación del signo de la derivada primera de una función con los IC e ID de la misma.
- ER de una función.
- Condición necesaria de ER: puntos críticos.
- Condición suficiente de existencia de ER a través del método de cambio de signo de la derivada primera de la función.

En el aspecto didáctico diseñamos cada actividad de forma tal que el alumno pueda interactuar con la misma y pueda recurrir a sus conocimientos previos. La interacción tiene como objetivo la construcción de nuevos conceptos por parte del estudiante, los cuales sirven para revisar los anteriores. El trabajo por parte del alumno debe ser lo más autónomo posible e inducir a la aceptación de la responsabilidad que se le da.

A su vez tenemos en cuenta que para la enseñanza de los conceptos del Cálculo Diferencial desde el punto de vista del PyLV es preciso transitar por diferentes registros y contextos. Por tal motivo las actividades se presentan en diversos registros y requieren el tratamiento en el mismo sistema o la conversión en otro y se refieren a situaciones de variación de diferente índole.

Con respecto al trabajo en clase, Artigue (1999, citado en González, A., 2006) señala que la discusión grupal es útil y que el juego colectivo propicia encontrar soluciones en un tiempo razonable. El trabajo en conjunto promueve regularidades que quizás no aparezcan en el trabajo individual de los alumnos. De allí que organizamos el trabajo en equipo de dos personas y luego del tiempo estipulado, una puesta en común en la que participan todos los alumnos y está guiada por la docente a cargo del curso y autora de la tesis.

Las elecciones locales de la ingeniería didáctica corresponden a la descripción de cada sesión o episodio de la situación diseñada, las cuales brindamos en el apartado siguiente.

### 5.2.2 La situación de aprendizaje

Para llevar a cabo la experiencia es necesario elaborar una situación de aprendizaje, es decir, un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas en el tiempo con el fin de realizar un proceso de aprendizaje para un grupo determinado de alumnos. En nuestro caso pensamos el proceso de aprendizaje como un proceso de construcción de significados de una noción o nociones (González, 1999) el cual se encuentra dentro de una situación específica en un contexto determinado y en el que los participantes tienen la oportunidad de interactuar.

Si bien Cabrera (2009) llama situación de aprendizaje a aquella situación problemática que nos permite favorecer el desarrollo del proceso de aprendizaje, para nosotros implica una planificación más compleja. Una situación de aprendizaje es un diseño didáctico que involucra las actividades que realizan los alumnos, su organización, su puesta en marcha y su finalización.

Engler (2014) señala que una situación de aprendizaje “debe ser entendida como un diseño didáctico intencional que logre involucrar al alumno en la construcción de conocimiento” (p. 183). Por su parte García (2011) explica que es un espacio de encuentro entre los alumnos y el profesor en el cual se coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión logrando construir significados que comparten.

La actividad que forma parte de una situación de aprendizaje no es cualquier actividad dentro del aula. Ésta debe comprometer al alumno en un rol activo provocando en él un desafío que pueda resolver por sí mismo. El estudiante tiene que entender la actividad planteada, las variables que intervienen y sus relaciones para poder formular un camino de solución sobre la base de sus conocimientos previos. La situación de aprendizaje debe lograr que el alumno sea capaz de explicar los resultados obtenidos o justificar la solución encontrada. En algunos casos se puede contemplar también una etapa donde los estudiantes y el docente realicen la institucionalización de las nociones construidas. Esto último depende de los objetivos que se deseen alcanzar con la situación diseñada.

Desde el diseño de la situación de aprendizaje se debe conseguir que el alumno enfrente la actividad y que pueda producir una solución de la cual sea capaz de dar explicación o justificación de cómo fue obtenida.

Cordero (2000, citado en Cabrera, 2009) explica que el conocimiento que se quiere que los alumnos aprendan a través de una situación de aprendizaje debe aparecer como el instrumento necesario para adaptarse al problema planteado.

Corrales (2002, citado en Engler, 2014) define una situación de aprendizaje de la siguiente manera:

> Situación de aprendizaje es el estado, condición o disposición (colocación) de una persona que espera lograr un aprendizaje. Implica el reconocimiento de un estado inicial a partir del cual la persona ha de realizar un proceso de

> transformación hasta alcanzar un nuevo estado, en relación con su saber conceptual, su saber procedimental y su saber actitudinal. Desde esta perspectiva diseñar situaciones de aprendizaje implica el diseño del punto de partida, el punto de llegada y el proceso que se ha de recorrer para lograr un aprendizaje (p. 183).

Entonces toda situación de aprendizaje constituye un medio para llevar adelante un proceso de aprendizaje, una construcción de significados. El diseño parte de describir los conocimientos que tienen los alumnos al momento de realizarla y el aprendizaje que se quiere lograr con la misma. También incluye analizar las posibles acciones que realiza el estudiante para generar el proceso de aprender.

Una situación de aprendizaje está formada por una secuencia de actividades articuladas entre sí a través de las cuales el alumno reconoce sus conocimientos previos, los amplía, despliega habilidades y actitudes, descubre estrategias de solución, brinda y recibe propuestas de parte de sus compañeros y del profesor. La situación de aprendizaje fomenta el trabajo independiente en un ambiente colaborativo, el alumno debe estar predispuesto a intercambiar ideas con sus compañeros, fundamentar las propias y recibir o solicitar orientaciones de parte del profesor. El docente no solamente participa en el momento del diseño, sino también de su puesta en marcha, implementación y finalización. De esta manera puede observar la construcción del conocimiento por parte de los alumnos.

En el diseño de la situación de aprendizaje propia de nuestra investigación toman un papel importante los análisis preliminares en todas sus dimensiones: histórico-epistemológica, didáctica, cognitiva y social presentados en el Capítulo 4.

A su vez enfatizamos los diversos elementos a tener en cuenta cuando nos referimos a una situación de aprendizaje: la redacción de las consignas de cada tarea, los objetivos propuestos en cada una de ellas, la labor de las profesoras durante la puesta en escena y las posibles acciones de los alumnos.

El diseño de las actividades propiamente dicho es uno de los momentos más importantes ya que, mediante la interacción con las mismas, los alumnos pueden adquirir o no los conocimientos de acuerdo con los objetivos planteados. Estas actividades forman una secuencia, es decir, no es un conjunto de tareas aisladas. Están organizadas de forma tal que el orden responda a ciertos propósitos y su complejidad esté graduada de modo que, al transcurrir por ella, el alumno pueda trabajar con conceptos, procedimientos y propiedades para construir el conocimiento matemático que pretende el docente (Rodríguez, Barreiro, Leonian, Marino y Pochulu, 2016).

Dado que toda situación de aprendizaje parte de los saberes previos que tienen los alumnos y tienen como objetivo construir conocimiento a través de las actividades involucradas en la misma, diseñamos dos tipos de actividades a las que llamamos: de exploración y de descubrimiento. Consideramos:

*Actividades de exploración*: son aquellas cuyo objetivo es indagar qué sabe el alumno sobre un determinado tema, ya sea desde sus ideas intuitivas como desde sus conocimientos previos. Nos darán una visión general, el punto de partida del proceso de aprendizaje para luego, mediante las actividades de descubrimiento, trabajar sobre los conceptos involucrados y sus relaciones.

En nuestro caso están referidas a función, derivada, ER, IC e ID de una función. Estudiamos el concepto de función y de derivada desde un punto de vista variacional. Según Cuesta (2007) las dificultades del aprendizaje del concepto de ER derivan del conocimiento que se tiene sobre el concepto de función, de allí nuestro interés por indagar sobre el mismo. El concepto de derivada es principal en la situación de aprendizaje ya que ésta se basa en reconocer puntos de derivada positiva, negativa, cero o de no existencia y de allí relacionar con el crecimiento o decrecimiento de la función.

También estudiamos las ideas intuitivas de máximos, mínimos, IC e ID. Estos conceptos no se definieron formalmente en el curso antes de estas actividades. A su vez presentamos el planteamiento de un PO simple para estudiar las estrategias que utilizan los alumnos para resolverlo.

*Actividades de descubrimiento:* son aquellas que se organizan pensando en el proceso de aprendizaje como proceso de construcción de conocimiento. Buscan despertar en el alumno la curiosidad, que sea capaz de establecer relaciones para ir formándose la idea de los nuevos conceptos, propiedades y correspondencias que dan solución a la situación planteada. Las producciones de los alumnos constituyen la base de donde parte el docente para formalizar contenidos, propiedades, etc. Pretendemos que a partir de situaciones de cambio en diversos contextos el alumno pueda relacionar la derivada positiva con el crecimiento, la derivada negativa con el decrecimiento. Las tareas conducen a analizar que en todos los valores de la variable independiente donde la recta tangente a la gráfica es horizontal o no existe, tal vez exista un ER de la función. A su vez los alumnos dan los primeros pasos en la resolución de PO. Entonces el diseño global de la situación de aprendizaje es:

| Actividades de exploración | |
|---|---|
| Grupo 1 | Conceptos involucrados: función, IC, ID, máximos y mínimos. |
| Grupo 2 | Conceptos involucrados: derivada de una función en un punto, desde su interpretación geométrica y como velocidad instantánea. |
| Actividades de descubrimiento | |

| | |
|---|---|
| Grupo 1 | Conceptos involucrados: relación entre el crecimiento y decrecimiento de una función y el signo de la primera derivada. Introducción de puntos de derivada cero. |
| Grupo 2 | Conceptos involucrados: puntos críticos, método para hallar ER de una función. |
| Grupo 3 | Conceptos involucrados: PO |

Tabla 4. Diseño global de la situación de aprendizaje

En la elaboración de las actividades que forman parte de la situación de aprendizaje pretendemos abordar el tratamiento matemático presentando problemas basados en modelos que describen variación y cambio en distintos contextos. A partir de las concepciones de los estudiantes y mediante situaciones en las que está involucrado el cambio intentamos que prosperen y se trabajen las ideas variacionales. Tuvimos como guía, en la elaboración propiamente dicha de las consignas, los trabajos de Vrancken (2011), Cuesta (2007), García (2011), Dolores (2000), Engler, Müller, Vrancken y Hecklein (2007), Engler et al. (2003) y los libros de Stewart (1999) y Thomas (2006).

Cuesta (2007) recomienda gestionar la enseñanza y aprendizaje aprovechando el conocimiento inicial del estudiante, así como la utilización de modelos matemáticos para indicar relaciones que se establecen en diversas disciplinas. De esta manera las actividades parten de la interpretación de gráficas y tablas, de ideas intuitivas de fenómenos de cambio, de conceptos de función y derivada, sus formas de representación para llegar a los conceptos de ER de una función e IC e ID.

Las actividades se presentan en diversos registros y requieren tratamiento y conversión entre los mismos. Como señala Vrancken (2011) “las tablas, gráficas, expresiones en lenguaje coloquial y representaciones algebraicas, que contienen la misma información ponen en juego diferentes procesos cognitivos, relacionados entre sí” (p. 106). Las representaciones gráficas potencian la visualización y se relacionan con la geometría. Las tablas hacen visible los aspectos numéricos y cuantitativos, en tanto que las expresiones analíticas o algebraicas conectan con la capacidad simbólica y se vincula con el álgebra. La representación verbal se entrelaza con la capacidad lingüística y es básica para interpretar y relacionar las anteriores (Carabus, 2002).

En la siguiente tabla explicitamos la estructura general de la situación de aprendizaje. En la primera columna describimos cada grupo de actividades. En la segunda explicamos sintéticamente el tipo de problema, el registro en el que está dado y los conceptos intervinientes:

<table>
<tr><th colspan="2">Actividades de exploración</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupo 1. Primera sesión de trabajo<br>Fase de:<br>♦Indagación sobre conocimientos previos: concepto de función en contexto, intervalos de positividad y negatividad.<br>♦Exploración sobre ideas intuitivas de IC, ID, máximos y mínimos, en contexto.<br>♦Estudio de las estrategias de resolución de un PO simple que no requiere el uso de derivada.</td><td>Actividad 1. Problema de velocidad dado en registro numérico. Intervienen el concepto de función, IC, ID, cambios y relación del signo del cambio con IC e ID</td></tr>
<tr><td>Actividad 2. Problema sobre la temperatura de una región dado en registro gráfico. Intervienen concepto de función, Intervalos de positividad y negatividad, IC, ID, máximos y mínimos.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3. PO sencillo sobre un tablero eléctrico en el que se usa una función cuadrática para su resolución.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo 2. Segunda sesión de trabajo.<br>Fase de:<br>♦Indagación sobre conocimientos previos: el concepto de función, razones de cambio, interpretación geométrica de la derivada y<br>la velocidad de un cuerpo como derivada de la función espacio recorrido.</td><td>Actividad 1. Intervienen el concepto de función desde el registro gráfico y el de derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2. Intervienen el concepto de función desde el registro analítico, el de velocidad media y el de derivada como</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>velocidad instantánea de un objeto que se mueve.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades de descubrimiento</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Grupo 1. Tercera sesión de trabajo.<br>Fase de:<br>♦Orientación hacia la construcción de la relación entre IC e ID con el signo de la razón de cambio promedio o media y a la relación del signo de la derivada primera con IC e ID.</td><td>Actividad 1. Relación entre IC e ID y el signo de la razón de cambio promedio bajo contexto de las ganancias de una empresa en registro numérico.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2. Relación entre el signo de la derivada (velocidad) y los IC e ID bajo contexto físico (movimiento de una partícula) en registro analítico. Surgimiento de la noción de ER.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3. Relación entre el signo de derivada (como pendiente de la recta tangente) e IC e ID, sin contexto. Surgimiento de ER con derivada cero.</td></tr>
<tr><td>Conclusiones sobre el trabajo realizado</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupo 2. Cuarta sesión de trabajo.<br>Fase de<br>♦ Orientación para la construcción del concepto de punto crítico y de la obtención de un método para hallar máximos y mínimos.</td><td>Actividad 1. Relación entre el signo de la derivada (velocidad) y los IC e ID de la función en contexto y en registro analítico. Surgimiento de un máximo relativo.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2. Relación entre el signo de la derivada y los IC e ID de una función en contexto sobre la concentración de una droga en sangre, en registro gráfico y analítico. Surgimiento de un máximo relativo.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3. Relación entre el signo de la derivada y los IC e ID de una función en contexto de ganancias de una empresa, en registro gráfico. Surgimiento de un máximo relativo sin derivada y un mínimo relativo con derivada.</td></tr>
</table>

| | *Conclusiones sobre el análisis realizado* |
|---|---|
| *Grupo 3. Quinta sesión de trabajo.*<br>Fase de<br>♦Orientación para la resolución de PO y de indagación sobre la resolución de PO. | *Actividad 1.* PO guiado paso a paso sobre la fabricación de una caja de cartón de mayor volumen en registro verbal. |
| | *Actividad 2.* PO enunciado sin una guía de resolución sobre el diseño de una lata con volumen dado usando la menor cantidad de material posible en registro verbal. |

Tabla 5. Estructura general de la situación de aprendizaje

### 5.2.3 La implementación de la situación de aprendizaje

La experiencia acontece en el segundo cuatrimestre del año, en los horarios en que los alumnos tienen clase de Análisis Matemático. De esta manera garantizamos que la componente social se manifieste en todo este estudio debido a que consideramos las cualidades de la institución educativa donde se genera el problema y se lleva adelante la experiencia. Valoramos además las condiciones en las que los alumnos están acostumbrados a trabajar, los aspectos culturales relacionados con hechos cotidianos de la vida universitaria, costumbres, modos de interacción entre pares y con sus docentes.

Los contenidos que desarrollamos en la asignatura previos a la experiencia son funciones, límite y continuidad, derivada y diferencial. Asimismo, los estudiantes presentan dos actividades domiciliarias en equipos de dos personas: una referida a funciones y otra a límite funcional. La primera trata sobre funciones como modelos matemáticos. Solicitamos el dominio y la imagen bajo contexto de dos funciones, la variable dependiente y la independiente, cambios de la variable dependiente, entre otras cuestiones. La segunda actividad involucra el concepto de límite en registro gráfico y con una situación en la que se comprenden los conceptos de velocidad media e instantánea de un cuerpo que se mueve dada su función espacio recorrido. Los enunciados se encuentran en el Anexo 2.

No presentamos el análisis de los resultados dado que los temas no son el centro de interés de la investigación. El propósito de dichas actividades consiste en que los alumnos se conozcan, que establezcan cuál es el compañero con el que arman el equipo de trabajo que luego debe continuar a lo largo de la experiencia propia de nuestro estudio y que se habitúen a la presentación de trabajos.

Todas las sesiones mantienen la misma modalidad. Los alumnos se agrupan en equipos de dos personas y realizan dos producciones iguales. Al finalizar el tiempo destinado a la resolución las profesoras retiran una producción y la otra queda en poder de los alumnos para la discusión grupal. Las actividades se elaboran a carpeta cerrada, los alumnos no pueden consultar apuntes de clase o bibliografía. Permitimos el uso de calculadora, celular o Tablet como herramienta de trabajo

### 5.2.4 El rol de las profesoras

Antes de poner en escena la situación de aprendizaje establecimos la manera de realizar la participación de las docentes del curso. Ésta depende del momento de la sesión de trabajo.

Debido al carácter social de la construcción del conocimiento, y acorde con los propósitos de la investigación, las actividades propuestas a los alumnos incluyen momentos diferenciados.

En una primera instancia los alumnos se enfrentan a un problema propuesto, se familiarizan con la tarea, consensuan y formulan una estrategia de trabajo para llegar a una solución. En esta situación las profesoras actúan como orientadoras y como observadoras de la actividad de los equipos. Es decir, la estrategia de observación es participativa, permitiendo a las docentes intervenir con los alumnos atendiendo a sus preguntas previo consenso entre ambas sobre en qué aspectos se debe orientar y en cuáles no. En lo posible las dos docentes deben tomar nota de toda la puesta en escena, prestar atención a las intervenciones de los estudiantes o de la otra profesora, a las dudas que surgen, las preguntas, las respuestas y las aclaraciones realizadas para el grupo en general, entre otros.

Luego del tiempo establecido para la resolución de las actividades establecemos un momento en las que se socializan los resultados obtenidos buscando lograr consenso. Es la puesta en común de todo lo trabajado previamente y está a cargo de la docente autora de esta tesis, quien solicita las diferentes estrategias utilizadas, las cuales son discutidas por el grupo en general. Propicia la participación de todos los equipos, enfatizando la justificación de las respuestas. Genera interrogantes, desafíos, contradicciones, con el fin de permitir la construcción paso a paso del concepto matemático puesto en juego.

Como última instancia en algunas sesiones y de acuerdo con la puesta en común, la profesora a cargo formaliza conceptos matemáticos, sus propiedades y relaciones.

Durante la puesta en común y formalización de conceptos la docente-colaboradora continua con su rol de observadora tomando nota de todo lo que sucede en el aula. Las observaciones deben reflejar principalmente la profundidad de la discusión grupal, la participación de los alumnos, la manera de justificar sus afirmaciones y las intervenciones de la otra docente. También debe registrar si los estudiantes se dispersan o atienden a lo que se está haciendo, si hablan, murmuran, etc.

### 5.2.5 Análisis a priori

En este apartado efectuamos una descripción general de cada sesión de trabajo que incluye las actividades a realizar, las dificultades que se prevén y las acciones esperadas por parte de los estudiantes y de las profesoras.

#### 5.2.5.1 Sesión 1. Actividades de exploración. Grupo 1

Prevemos una duración de 15 minutos para la presentación de la experiencia, dos horas y 15 minutos de resolución por parte de los alumnos, y una hora y media para la puesta en común.

Es importante dejar en claro que en esta etapa presentamos el tema e intentamos lograr la predisposición de los estudiantes a la aceptación de la forma de trabajo. No efectuamos un repaso en el pizarrón ya que el propósito es analizar qué saben los alumnos sobre determinados conceptos y qué ideas intuitivas tienen sobre otros. Por ejemplo, hasta el momento de realizar estas actividades no dimos en clase la definición formal de crecimiento y de decrecimiento de una función, aunque intuitivamente hablamos de función creciente para una función exponencial con base mayor que uno o decreciente, para una función exponencial con base menor que uno. En este momento del cursado de la materia ya se desarrollaron los temas correspondientes a las unidades de funciones y de límite funcional.

Las orientaciones que brindamos en el momento de resolución son mínimas.

**Actividad 1.** En la tabla siguiente se muestra la velocidad (en km/h) de un automóvil que viaja sobre una ruta. Los resultados se registraron cada media hora desde un instante inicial $t = 0$ (en el que el auto ya estaba en movimiento) y durante 3 horas de viaje.

| $t$ (horas) | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ (km/h) | 80 | 85 | 70 | 90 | 90 | 100 | 110 |

a) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

b) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumentó?

c) ¿En cuáles disminuyó?

d) ¿En qué intervalos la velocidad no cambió?

e) Calcular los cambios de la velocidad en intervalos de media hora.

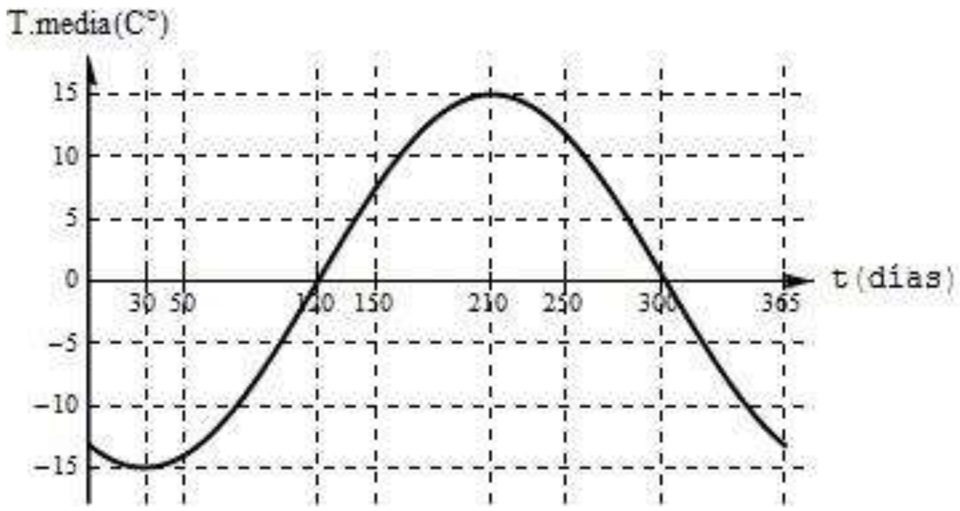
f) ¿Qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?

La consigna está inspirada en dos problemas: uno propuesto por Vrancken (2011) y otro por García (2011). En esta actividad brindamos la velocidad de un auto (variable dependiente) que recorre una determinada ruta en un intervalo de 3 horas. La misma tiene como objetivo determinar los intervalos donde la variable dependiente crece, decrece o no cambia desde el registro numérico. Los alumnos para resolverla pueden hacerlo directamente desde la tabla o realizar un gráfico de la velocidad en función del tiempo y guiar la respuesta a partir del mismo. Es decir, pueden efectuar un tratamiento en el registro numérico o hacer una conversión al registro gráfico y contestar las preguntas desde este último.

Luego solicitamos el cálculo de los cambios de velocidad en intervalos de media hora para que relacionen el crecimiento o decrecimiento con el signo de los cambios de la variable dependiente. Es probable que el alumno no recuerde el cálculo de cambio como la diferencia entre la imagen de un estado final y la imagen en un estado final. Decidimos dar la fórmula si los alumnos lo demandan.

Quizás la última pregunta requiera algún tipo de orientación personal por parte de la docente o que la misma enfatice al grupo en general, que se deben relacionar el signo de cada cambio y el crecimiento o decrecimiento en ese intervalo. Consideramos que es una actividad sencilla, que salvo este último ítem no va a traer inconvenientes en su resolución.

**Actividad 2.** Los constructores de un oleoducto en Alaska necesitaron construir una cubierta aislante para la tubería para evitar que el calor derritiera el suelo congelado. Para diseñar esa cubierta fue necesario tomar en cuenta la variación de la temperatura del aire durante el año. De acuerdo a los datos experimentales se pudo hacer un ajuste con la siguiente curva que expresa la temperatura media del aire en cada día del año (en grados centígrados):




a) ¿En qué momento del año la temperatura es positiva? ¿Y negativa?

b) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura crece

c) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura decrece.

d) ¿Existe algún día del año donde la temperatura no varía?

e) ¿En qué momento del año la temperatura fue máxima? ¿Y mínima?

En este caso brindamos una función en registro gráfico que modela la temperatura en una determinada ciudad en función del tiempo dado en días. Pedimos, además de los IC e ID como en la actividad anterior, los intervalos de positividad y negatividad de la función, así como también sus ER. El dato y la gráfica es una adaptación a nuestro contexto de un problema presentado en el libro de Thomas (2006), siendo las preguntas de elaboración propia.

De acuerdo a lo estudiado en el análisis cognitivo, diversas investigaciones dan cuenta que es usual que el alumno confunda crecimiento con positividad y decrecimiento con negatividad, por esta razón solicitamos todos los intervalos.

La pregunta sobre si existe algún día del año donde la temperatura no varía puede traer inconvenientes de interpretación. La intención es observar puntos de derivada cero (en este caso a los 30 días y a los 210 días). Quizás los alumnos entiendan que deben encontrar un intervalo donde la función es constante y por lo tanto contesten que no existe tal momento. Decidimos brindar sólo la orientación de que la cuestión está dirigida a "un día" determinado.

La función tiene un máximo absoluto y relativo (a los 210 días, 15°C de temperatura) y un mínimo absoluto y relativo (a los 30 días, -15°C de temperatura). Hasta este momento no se definieron estos conceptos, queremos indagar qué interpretan los alumnos cuando se solicita la mayor y menor temperatura. Pensamos que una posible respuesta por parte de los estudiantes sea brindar solamente los valores de mayor temperatura (15°C) y menor (-15°C) sin indicar en qué día del año esto se produce.

**Actividad 3.** Pablo está trabajando para una compañía que tiene que diseñar un tablero eléctrico de forma rectangular al que hay que rodear de una cinta aislante que tiene 4 metros de longitud. ¿Cuáles serán las dimensiones del tablero si le pidieron a Pablo que use toda la cinta aislante y que tenga la mayor área posible?

Este es un problema típico de optimización que encontramos en la bibliografía, adaptada la consigna a estudiantes de ingeniería. Dentro de las tres actividades suponemos que es la que más tiempo y dificultad trae a los estudiantes. Si bien la función resultante para resolver el problema es una función cuadrática, el conflicto para el alumno radica en formular el área del tablero en una sola variable y luego identificar que debe buscar el máximo (vértice de una parábola en este caso) de esa función.

Cabe aclarar que en la guía de trabajos prácticos del tema funciones hay un ejercicio que pide escribir el área de un rectángulo de perímetro 20 cm en función de uno de sus lados y otros similares, los que pueden ser de ayuda para encarar esta tarea.

Es probable que la mayoría de los equipos no resuelva en su totalidad esta actividad, que dejen planteada solamente la función área y/o el perímetro del rectángulo sin poder lograr escribir la función a optimizar en una sola variable. Por propia experiencia sabemos que es poco frecuente que realicen una tabla de valores con diferentes medidas de los lados para estimar la solución en forma numérica o para interpretar el problema. Resolvemos no orientar a los alumnos para poder explorar qué estrategias usan y hasta qué punto pueden resolverlo.

Una vez concluido el período establecido para la resolución de las actividades, la profesora a cargo organiza la puesta en común. Resuelve las actividades 1 y 2 en el pizarrón a través de las respuestas de los estudiantes, dividiendo el pizarrón en dos partes, una por actividad.

En la actividad 1 puede suceder que los alumnos no hayan calculado los cambios de la velocidad en los intervalos indicados o que, si lo realizaron, no pudieron relacionarlo con el crecimiento o decrecimiento de la función. Ya que el concepto de cambio es fundamental, la docente enfatiza en el pizarrón $\Delta v = v(t_1) - v(t_0)$, indica todos los valores obtenidos en este caso y los relaciona con el crecimiento y decrecimiento desde el registro numérico reforzándolo con un gráfico. La consigna no pide la conversión, pero puede darse que algún alumno lo realice.

| $t$ (horas) | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ (km/h) | 80 | 85 | 70 | 90 | 90 | 100 | 110 |

En $[0, 0,5]$ $\Delta v = 85 - 80 = 5\ km/h$

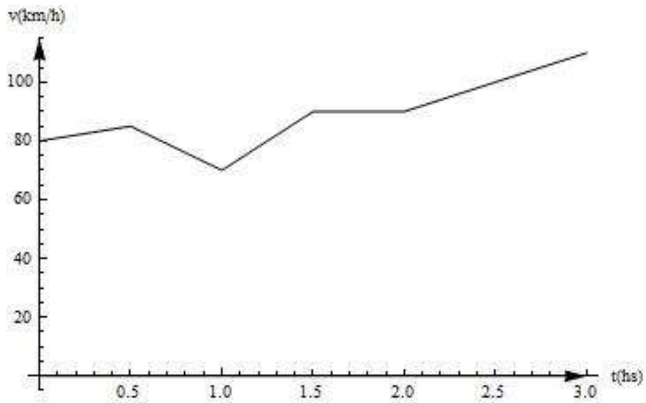
En $[0,5, 1]$ $\Delta v = 70 - 85 = -15\ km/h$

En $[1, 1,5]$ $\Delta v = 90 - 70 = 20\ km/h$

En $[1,5, 2]$ $\Delta v = 90 - 90 = 0$

En $[2, 2,5]$ $\Delta v = 100 - 90 = 10\ km/h$

En $[2,5, 3]$ $\Delta v = 110 - 100 = 10\ km/h$

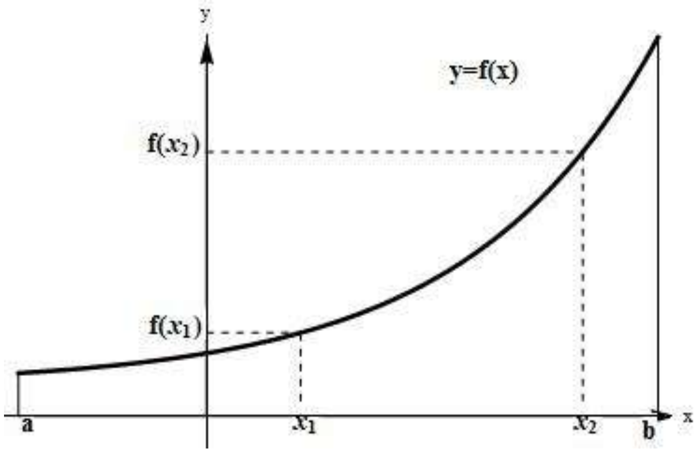



La docente resume que si la función velocidad crece el cambio es positivo, si decrece es negativo y si es constante el cambio es nulo.

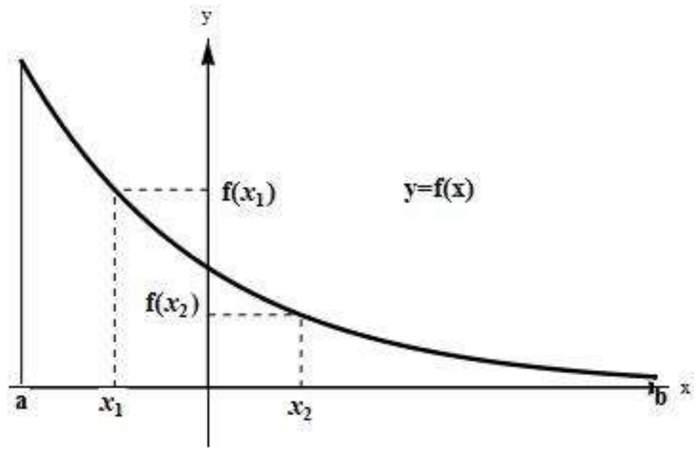
En el caso de la actividad 2, con la ayuda de los alumnos, la profesora responde que la temperatura en Alaska es negativa (o bajo cero) en los intervalos $[0, 120)$ y $(300, 365]$ y que la temperatura es positiva (o "sobre cero") en el intervalo $(120, 300)$. A su vez la temperatura aumenta en $(30, 210)$ y disminuye en los intervalos $(0, 30)$ y $(210, 365)$. También solicita las respuestas de los valores máximos y mínimos, y del o los días en los que la temperatura no varía. En todo momento relaciona los aspectos numéricos, gráficos y analíticos de los conceptos involucrados y destaca los aspectos variacionales en las dos actividades.

Luego de resolver las dos primeras actividades, se definen los siguientes conceptos:

$f$ es estrictamente creciente en $(a, b) \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \forall x_1\, x_2 \in (a,b))$




$f$ es estrictamente decreciente en $(a, b) \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ \forall x_1\, x_2 \in (a,b))$




La profesora da ejemplos de funciones conocidas en registros analítico y gráfico:

$f : R \to R^{+} \,/\, f(x) = e^{x}$ es creciente en todo su dominio.

$h : R^{+} \to R \,/\, f(x) = \ln x$ es creciente en $(0, +\infty)$.

$g : R - \{0\} \to R - \{0\} / g(x) = \dfrac{1}{x}$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y también lo es en $(0, +\infty)$.

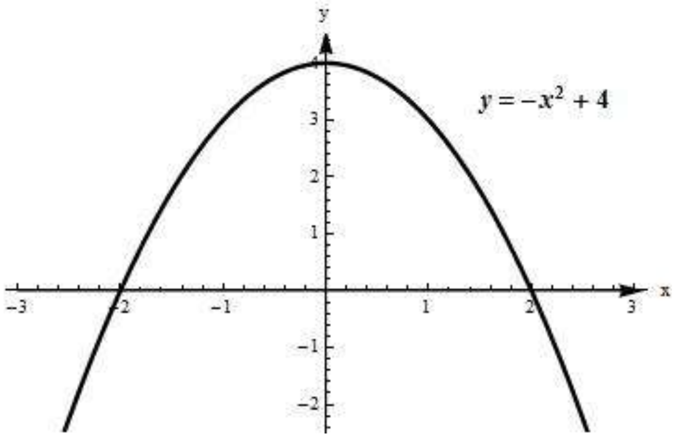
$i : R \to R / f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

$p: R \to R \,/\, p(x) = mx + b \;\; (m \neq 0)$ es creciente en todo su dominio si $m > 0$ y decreciente en todo su dominio si $m < 0$.

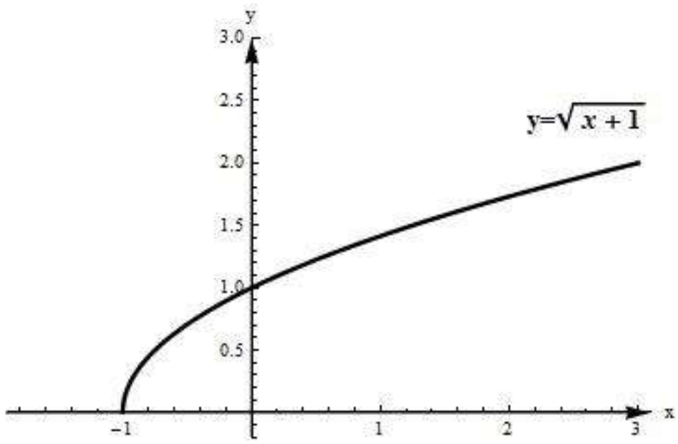
Respecto a máximos y mínimos de una función, hasta el momento fueron trabajados los conceptos de máximos y mínimos en funciones sencillas (polinómicas, trigonométricas) pero sin definirlos formalmente. En este momento la docente da a conocer las definiciones de ER y extremos absolutos y las diferencias entre cada caso:

Diremos que el punto $M(k, f(k))$ es un *máximo absoluto* de la función $f$ sí y solo sí $f(x) \leq f(k) \;\; \forall x \in D_f$. Observemos que la imagen de $x = k$ es mayor o igual que todas las imágenes, estamos mirando <u>todo el dominio de la función</u>. De manera análoga diremos que el punto $M(k, f(k))$ es un *mínimo absoluto* de la función $f$ sí y solo sí $f(x) \geq f(k) \;\; \forall x \in D_f$. Observemos que la imagen de $x = k$ es menor o igual que todas las imágenes, estamos mirando <u>todo el dominio de la función</u>.

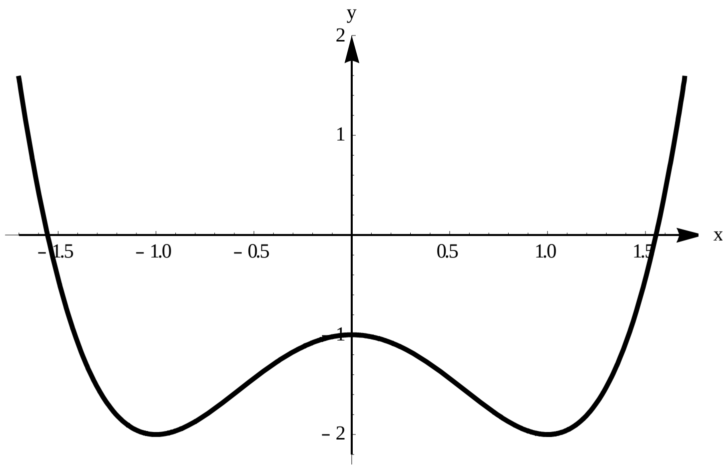
Por ejemplo: la función $f: R \to R \,/\, f(x) = -x^2 + 4$ tiene un máximo absoluto en $(0, 4)$ y no tiene mínimo absoluto.



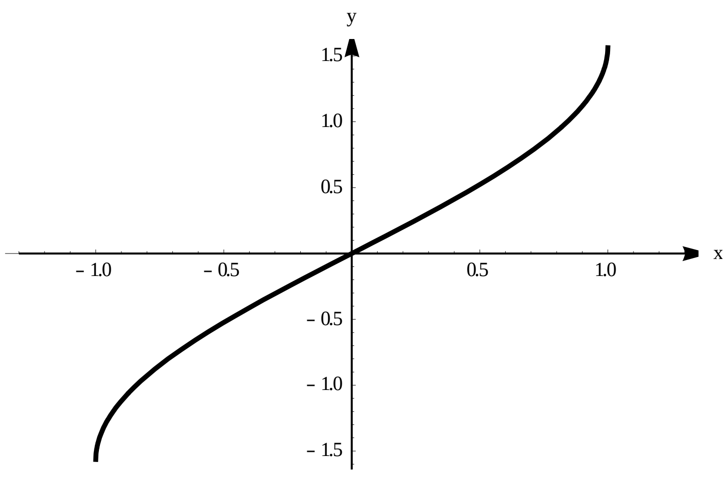

La función $g: [-1, +\infty) \to R \,/\, g(x) = \sqrt{x+1}$ tiene un mínimo absoluto en $(-1, 0)$ y no tiene máximo absoluto:



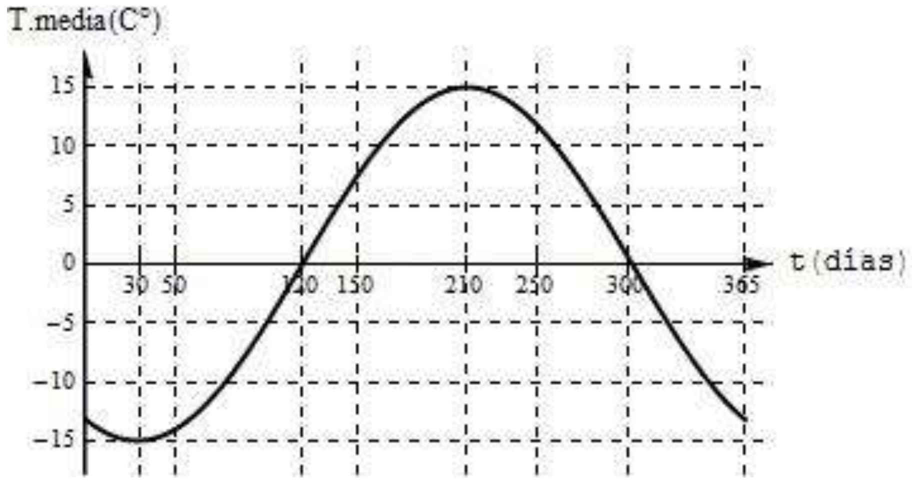

La función $h: R \to R / h(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ tiene dos mínimos absolutos en $(-1,-2)$ y $(1,-2)$ y no tiene máximo absoluto. La profesora hace notar que el punto $(0,-1)$ no es máximo absoluto ya que existen valores del dominio para los cuales la imagen supera el valor -1.




La función arco seno tiene un mínimo absoluto $(-1, -\pi/2)$ y un máximo absoluto en $(1, \pi/2)$:



La docente reanuda la actividad 2, con un máximo absoluto en $(210, 15°C)$ y mínimo absoluto en $(30, -15°C)$:



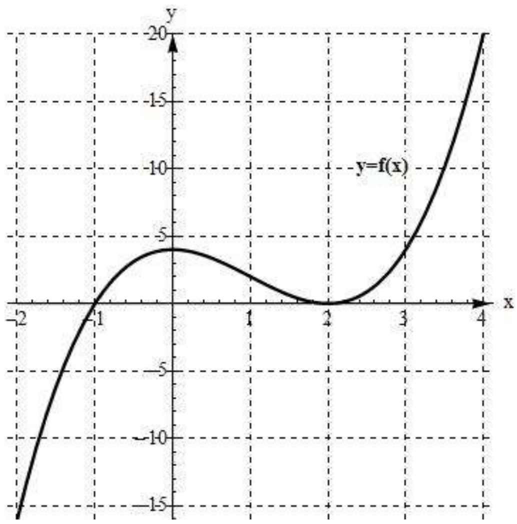

Da el ejemplo de una función que no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto: $f : R \to R^+ \,/\, f(x) = e^x$.

La docente retoma el gráfico de la función $h$ y en el mismo, el punto $(0, -1)$. Explica que, si bien este punto no es máximo absoluto, su imagen es la mayor en un entorno del mismo. Surge la noción de máximo o mínimo relativo:

Diremos que el punto $M(k, f(k))$ es un máximo *relativo o local* de la función $f$ sí y solo sí existe un entorno de $x = k$, que llamaremos $E(k)$, totalmente incluido en el dominio de $f$, en el cual se verifica $f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in E(k)$. De forma análoga: diremos que el punto $M(k, f(k))$ es un mínimo *relativo o local* de la función $f$ sí y solo sí existe un entorno de $x = k$, que llamaremos $E(k)$, totalmente incluido en el dominio de $f$, en el cual se verifica $f(x) \geq f(k) \quad \forall x \in E(k)$.

Llamamos extremo absoluto (o relativo) de una función $f$ a un punto tal que es un máximo o un mínimo absoluto (o relativo) de $f$.

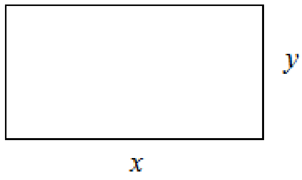
La profesora regresa a los ejemplos anteriores: la función $f$ tiene máximo relativo (y absoluto) en $(0, 4)$. La función $g$ no tiene ER. La función $h$ tiene en $(-1,-2)$ y $(1,-2)$ mínimos relativos y absolutos; $(0,-1)$ es máximo relativo. La función arco seno no tiene ER. En el caso de la función que modela la temperatura en Alaska de la actividad 2, los extremos absolutos son también ER. Da el siguiente ejemplo: $f:[-2,4]\rightarrow R / y = f(x)$




Esta función tiene un máximo absoluto (y no relativo) en $(4, 20)$; máximo relativo (y no absoluto) en $(0, 4)$, mínimo relativo (y no absoluto) en $(2, 0)$ y mínimo absoluto (y no relativo) en $(-2,-16)$.

Por último, resuelve en el pizarrón el problema de la actividad 3 con las estrategias que hayan empleado los estudiantes. En el caso que ningún equipo haya logrado alguna solución, la docente intenta con preguntas disparadoras que el grupo pueda arribar a la misma: *¿podemos hacer un diagrama o esquema de la situación? ¿qué variables intervienen? ¿qué datos tenemos? ¿cómo podemos expresar esos datos en términos de nuestras variables? ¿qué debemos averiguar?*

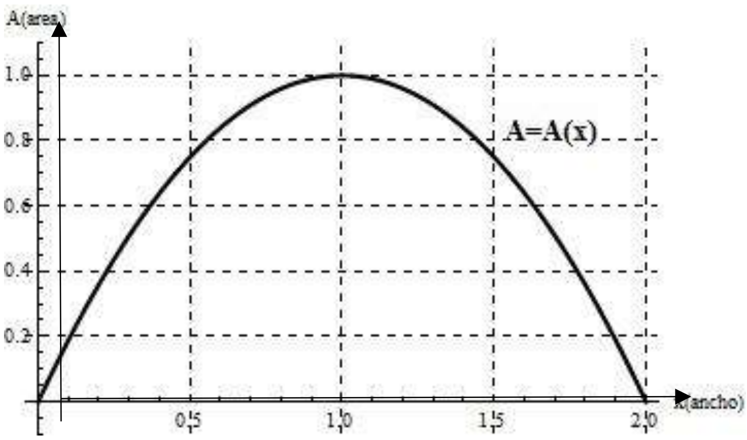
Un diagrama de la situación asignando nombre a las variables intervinientes es:




Definimos $y$ el ancho del tablero y $x$ el largo. El dato del uso de toda la cinta disponible nos indica que $2x+2y=4 \Rightarrow x+y=2$ **(3)**

El área del tablero está dada por $A = x.y$ **(4)**

Si queremos obtener cuáles son las dimensiones que dan al tablero la mayor área, podemos despejar en la ecuación (3) una variable en función de la otra y reemplazarla en (4): $A(x)=x(2-x)$. Esta es una función cuadrática con vértice en $(1,1)$ con concavidad hacia abajo. Por lo tanto, el tablero que tiene mayor área es un cuadrado de lado un metro. Gráficamente:




La docente puede, mediante registro numérico, armar diferentes rectángulos e ir calculando cómo varía el área de cada uno, visualizando esto último en la función graficada.

Por ejemplo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ancho ( $x$ en metros) | 0.5 m | 0.8 m | 1 m | 1.4 m | 1.9 m |
| Alto ( $y$ en metros) | 1.5 m | 1.2 m | 1 m | 0.6 m | 0.1 m |
| Área (en metros cuadrados) | 0.75 $m^2$ | 0.96 $m^2$ | 1 $m^2$ | 0.84 m | 0.19 $m^2$ |

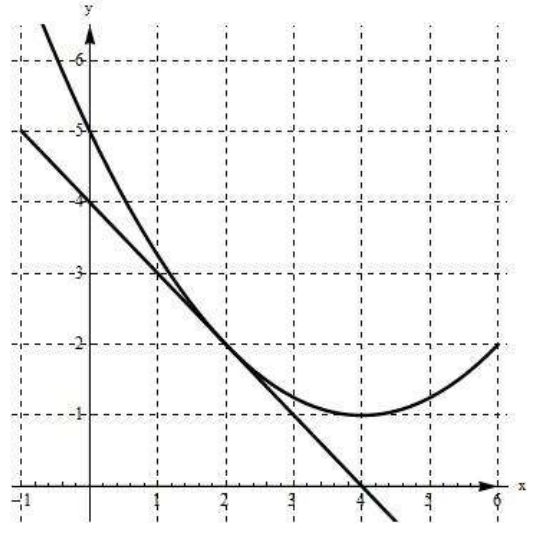
#### 5.2.5.2 Sesión 2. Actividades de exploración. Grupo 2

Programamos media hora para resolución por parte de los alumnos y media hora para la puesta en común.

Este grupo de actividades se realiza luego de que expliquemos el concepto de derivada y su interpretación geométrica. Desde la unidad de límite funcional trabajamos los conceptos de razón de cambio media e instantánea, por lo que el concepto de derivada se interpreta, desde el punto de vista variacional, como la tasa de variación instantánea de una función en un punto y, en el caso de la función espacio recorrido, como velocidad instantánea. Decidimos no dar orientación en la resolución ya que las mismas tratan sobre temas desarrollados en clase y trabajados en diferentes situaciones.

Las dos actividades son extraídas de Dolores (2000) a las cuales les agregamos en la consigna justificar la respuesta elegida.

**Actividad 1.** El siguiente es el gráfico de cierta función f y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$. Contestar indicando la opción correcta. Justificar la respuesta:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>A) ¿Cuál es el valor de $f(2)$?<br><br>a) 4 b) 3 c) -1 d) 2<br><br>B) ¿Cuál es el valor de la derivada en $x = 2$?<br><br>a) 4 b) 3 c) -1 d) 2<br><br>C) ¿Cuál es el valor de la derivada en $x = 4$?<br><br>a) 1 b) -1 c) 0 d) 2</td>
</tr>
</table>

Pretendemos que el alumno, dada la recta tangente a una curva en un punto en registro gráfico, pueda interpretar su pendiente como la derivada en dicho punto. Para esto debe calcular la pendiente de la recta $t$, en este caso $m_t = -1$ y vincular este valor con $f'(2)$. También buscamos indagar sobre el reconocimiento de puntos de derivada cero, en este caso $x = 4$. La interpretación geométrica es de suma importancia cuando realizamos actividades de descubrimiento, en las cuales el alumno debe relacionar el signo de la derivada primera (pendiente de la recta tangente) con el crecimiento o decrecimiento de la función. Por otro lado, es necesario reconocer puntos de derivada cero ya que son posibles ER de la función estudiada. Consideramos, por experiencia propia y por los resultados de varias investigaciones, que la dificultad mayor está en la determinación de la derivada como pendiente de la recta tangente (parte B). En general los alumnos a esta pregunta contestan con la imagen respecto a la recta del punto en cuestión, en este caso el valor 2.

**Actividad 2:** la distancia que recorren los cuerpos en caída libre está dada aproximadamente por la función $s(t) = 5t^2$, donde $s$ está en metros y $t$ en segundos.

Marcar la opción correcta en cada ítem y justificar la respuesta:

A) ¿Cuál es la distancia que recorre un cuerpo en el primer segundo?

a) 1 m b) 5 m c) 4,9 m d) 10 m

B) ¿Cuánto cambia la distancia que recorre un cuerpo entre el 1º y 2º segundo?

a) 1 m b) 5 m c) 15 m d) 10 m

C) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo entre el 1º y 2º segundo?

a) 5m/s b) 20 m/s c) 15 m/s d) 10,2m/s

D) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo exactamente en el primer segundo?

a) 5m/s b) 10 m/s c) 15 m/s d) 4 m/s

Con esta actividad pretendemos evaluar si el alumno reconoce y diferencia la imagen de la función en un punto, el cambio de la variable dependiente en un determinado intervalo, la razón de cambio media (velocidad media) y la razón de cambio instantánea (velocidad, derivada) desde el registro analítico. Cuatro conceptos fundamentales a la hora de trabajar con funciones como modelos matemáticos de variación y PO. Esperamos mayor dificultad en los ítems C) y D).

Finalizado el tiempo destinado la docente procede a la puesta en común. Resuelve la actividad 1 con las respuestas de los alumnos. El ítem B es el más conflictivo como explicamos en apartados anteriores.

En el caso de la actividad 2 la profesora confirma la diferencia entre cambio, razón de cambio media (o velocidad media) y razón de cambio instantánea (o velocidad en este caso). Como resumen realiza el siguiente cuadro en el pizarrón:

| | Cambio de las variables | Razón de cambio media | Derivada o razón de cambio instantánea |
|---|---|---|---|
| Función $y = f(x)$ | $\Delta x = x_1 - x_0$ (independiente) $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ (dependiente) | $m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pendiente de la recta secante que pasa por $(x_1 f(x_1)),(x_0 f(x_0))$ | $m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ pendiente de la recta tangente en $x = x_0$ |
| Función $s = s(t)$ posición en el tiempo $t$ | $\Delta t = t_1 - t_0$ (independiente) $\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$ (dependiente) | $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ velocidad media en el intervalo $[t_0, t_1]$ | $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta tx}$ velocidad instantánea en $t = t_0$ |

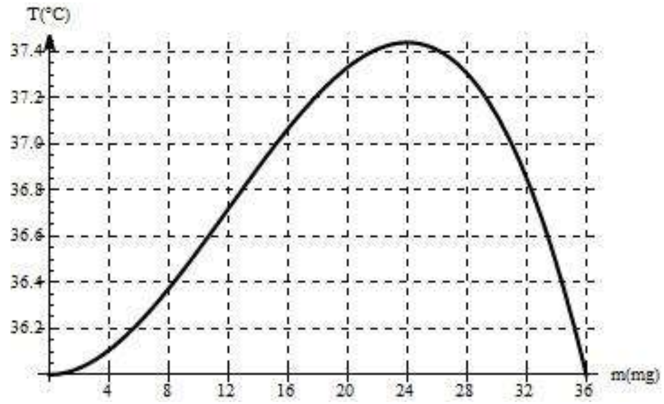
#### 5.2.5.3 Sesión 3. Actividades de descubrimiento. Grupo 1.

Prevemos media hora de introducción y repaso, dos horas y media de trabajo de los alumnos y una hora para la puesta en común.

El propósito que pretendemos lograr por parte de los alumnos es que puedan descubrir, mediante situaciones de variación en diversos contextos y registros de representación, cómo la razón de cambio media y la derivada nos permiten conocer características de la función y su gráfica, en este caso IC e ID. También intentamos que reconozcan valores del dominio con derivada cero que son ER. Esta noción no se formaliza en esta sesión, sino que constituye el punto de partida para el otro grupo de actividades.

La profesora repasa los conceptos ya estudiados en clase y trabajados en la actividad anterior mediante preguntas a los alumnos y a través de la resolución en forma conjunta con ellos del siguiente ejemplo (adaptación de un problema extraído de Thomas (2006)):

La reacción del cuerpo de un individuo ante el suministro de un determinado medicamento puede modelarse mediante una función cuyo gráfico es:




Donde $m$ es la cantidad de medicamento absorbida en la sangre (en miligramos) y $T$ es la temperatura (en ºC) del cuerpo que va variando como reacción ante ese suministro. Se contestan las siguientes preguntas:

a) ¿Para qué cantidad de medicamento la temperatura aumenta? ¿Cuándo disminuye?

b) ¿Para qué cantidad de medicamento el organismo alcanza una temperatura máxima? ¿y mínima?

c) Interpretar el significado de la función derivada bajo el contexto del problema.

El objetivo es fortalecer los conceptos definidos en la actividad anterior: IC ID, máximo absoluto y relativo, mínimo absoluto y relativo, en este caso desde el registro gráfico. La docente destaca que, si bien en esta situación la variable independiente no es el tiempo, se puede estudiar variacionalmente. En el último ítem el propósito es interpretar la función derivada en el contexto como la razón de cambio de la temperatura respecto a la cantidad de miligramos del medicamento en el cuerpo. La docente enfatiza este aspecto y comunica que lo deben tener en cuenta para poder resolver la actividad del día.

Puede dar la función en forma analítica $T(m)=\frac{m^2(36-m)}{4800}+36$, derivarla, evaluar dicha derivada en algún punto para interpretar el significado con las unidades correspondientes.

Todo lo desarrollado queda en el pizarrón, siendo una forma de orientar la resolución de la actividad que sigue.

**Actividad 1**

Las ganancias de una empresa en sus seis primeros años están dadas por la siguiente tabla:

| Tiempo $t$ (en años) | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ganancia (en millones de pesos) $G(t)$ | 0 | 50 | 70 | 80 | 90 | 90 | 70 |

a) Uniendo los puntos anteriores trazar en forma aproximada la curva que muestra las ganancias de la empresa en función del tiempo, considerando $t$ como el número de años desde el inicio de la empresa (al año 2007 le corresponde $t=0$).

b) Teniendo en cuenta los datos anteriores, completar la siguiente tabla:

| Intervalo | Ganancia (aumenta, disminuye, queda igual) | Razón de cambio promedio $\frac{\Delta G}{\Delta t}$ | Signo de la razón de cambio promedio |
|---|---|---|---|
| $0 \le t \le 1$ | | | |
| $1 \le t \le 2$ | | | |
| $2 \le t \le 3$ | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3 \leq t \leq 4$ | | | |
| $4 \leq t \leq 5$ | | | |
| $5 \leq t \leq 6$ | | | |

c) Realizar un resumen de lo obtenido en la siguiente tabla:

| Ganancia | Gráfica | Signo de la razón de cambio |
|---|---|---|
| Sube | creciente | |
| Queda igual | | |
| Baja | | |

Este problema está inspirado en uno de Vrancken (2011), con diferentes datos y con el agregado de la confección de la primera tabla. La actividad dada en registro numérico tiene como objetivo repasar el significado de la razón de cambio media o promedio entre dos magnitudes (conocimiento previo del alumno) y relacionar el crecimiento en un intervalo (o decrecimiento) con el signo de la misma. Las ganancias de la empresa están dadas en registro numérico a partir del año 2007 que se toma como $t = 0$ para la representación gráfica o para el cálculo de las razones de cambio promedio. Esto último puede generar conflicto por parte de los alumnos, por lo que la profesora orienta al respecto. Primero solicitamos la conversión a registro gráfico para facilitar la visualización de los datos y luego los cálculos que se plasman en una tabla. Para completar la primera tabla el alumno directamente de los datos puede dar la respuesta a la primera columna. Los intervalos están dados con el valor de $t$ entre 0 y 6 y los datos del problema con los años desde 2007 a 2013. Volvemos a explicar que se toma $t = 0$ el año 2007 para calcular las razones de cambio. Luego mediante el cociente incremental se halla $\dfrac{\Delta G}{\Delta t}$ y, dependiendo de su signo, se completa la columna restante. Si bien el concepto de razón de cambio media se repasa en la actividad anterior, quizás algunos alumnos necesiten volver sobre el mismo. Decidimos dar orientación en este punto. Puede pasar también que los estudiantes omitan las unidades de la razón de cambio media, para esto dejamos el ejercicio de repaso en el pizarrón. También es probable que los alumnos no sepan completar la tercera columna cuando la razón de cambio media es nula. Recordamos que el número cero no tiene signo.

La otra tabla tiene como propósito resumir la información que brinda la primera. Ponemos énfasis en el significado de $\dfrac{\Delta G}{\Delta t}$ como variación media de la ganancia (en millones de pesos) por año.

**Actividad 2**

La posición de una partícula (en metros) que se mueve en línea recta en un intervalo de $0 \le t \le 3$ minutos respecto a un punto inicial está dada por $s(t) = -4t^3 + 4t^2 + 15t$. Se considera la posición hacia la derecha del punto como positiva y a la izquierda de dicho punto como negativa.

a) Calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante $t$

b) Completar la siguiente tabla (indicar unidades):

| Tiempo $t$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición $s(t)$ | | | | | | | |
| Velocidad $v(t)$ | | | | | | | |

c) Representar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y comparar la función posición con la función velocidad observando las gráficas (ayudarse con los valores de la tabla).

d) Completar la siguiente tabla para analizar el comportamiento de la función según el signo de su derivada:

| Intervalos | Signo de $s(t)$ | Signo de $v(t)$ | Comportamiento de la función $s(t)$ (marcar con una cruz la opción que corresponde) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Crece | Decrece | No cambia |
| $0 < t < 1{,}5$ | | | | | |
| $t = 1{,}5$ | | | | | |
| $1{,}5 < t < 2{,}5$ | | | | | |
| $2{,}5 < t < 3$ | | | | | |

e) Señalar el intervalo de tiempo en que $s(t)$ aumenta. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad?

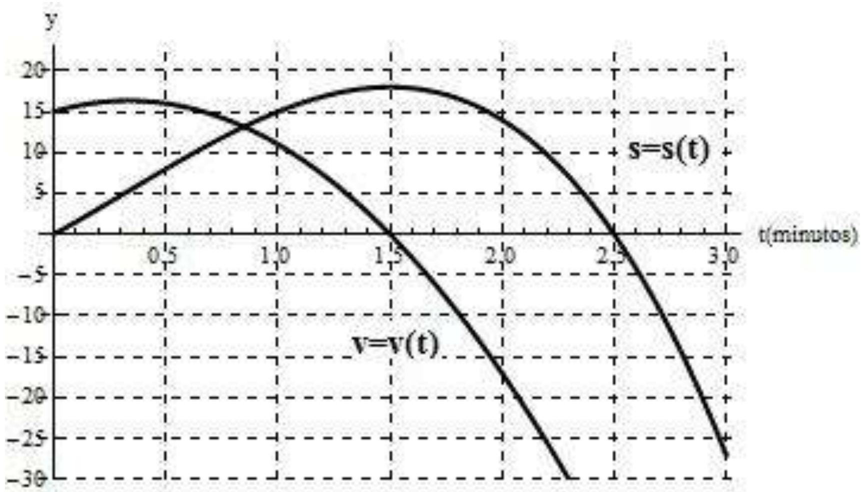
f) Señalar el intervalo de tiempo en el que $s(t)$ disminuye. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad de la partícula?

g) ¿Qué sucede a los 1,5 minutos de iniciado el movimiento?

El problema es prototipo en varios libros de Cálculo. Elaboramos la consigna siguiendo la línea empleada en las actividades anteriores. En este caso brindamos en registro analítico la posición de un objeto que se mueve teniendo en cuenta un punto tomado como referencia. A la derecha de ese punto la imagen de la función se considera positiva, a la izquierda negativa. Si bien en la guía de trabajos prácticos de la asignatura, en la unidad del tema derivada, existe un ejercicio similar en cuanto a la función dada (no así las preguntas), sabemos que esta posición con referencia a un punto conlleva inconvenientes en su comprensión. Decidimos orientar al respecto y, de ser necesario, explicar al grupo en su totalidad.

Los alumnos saben calcular la velocidad de la partícula como la derivada de la función y conocen las reglas de derivación, razón por la cual consideramos que el ítem a) no tiene dificultades en su resolución, salvo que omitan las unidades para cada variable (metros para la función posición y metros/minutos para la velocidad). En este caso se efectúa una conversión a registro numérico.

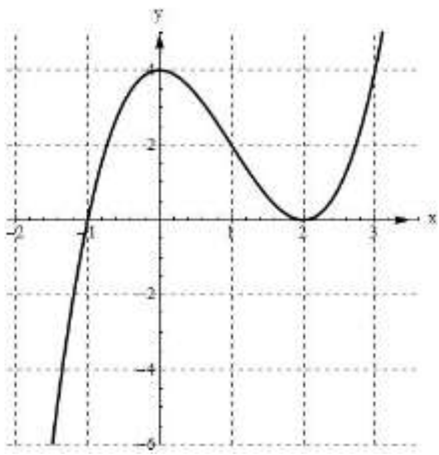
El ítem c) es quizás el que ofrezca mayor dificultad para los estudiantes y es fundamental a la hora de poder resolver la actividad. Solicitamos el gráfico de la función posición $s(t) = -4t^3 + 4t^2 + 15t$ y el de su derivada $s'(t) = -12t^2 + 8t + 15$. La última no tiene complicaciones ya que es una función cuadrática. Pensamos que el gráfico de $s(t)$ insume mucho tiempo para el alumno si lo intenta hacer solo y hasta puede distraerlo de lo que realmente se solicita en el problema. Esto nos lleva a considerar la posibilidad de que la profesora puede realizarlo en el pizarrón con la ayuda de todos los alumnos, valiéndose de las raíces de la función y el estudio del signo de la misma:




Una vez graficada $s(t)$ en el pizarrón, la profesora evalúa si es necesario volver a explicar qué significa una imagen negativa y positiva en la función posición. Estimula a los estudiantes que continúen leyendo y completando la consigna para poder vislumbrar el tipo de relación que se pide entre las dos curvas. Este aspecto es complejo. En caso de que la docente observe que la mayoría de los alumnos no logra relacionarlas o no entiende de qué relación se trata, puede orientar con preguntas como *¿cuál es el IC de* $s(t)$ *? ¿qué significa en el contexto del problema? ¿qué signo tiene la velocidad en ese intervalo? ¿cuál es el ID de* $s(t)$ *? ¿qué significa bajo el contexto del problema? ¿qué sucede con el signo de la velocidad en ese intervalo? Observen el ER de la función y qué pasa en el mismo en la función velocidad.*

Los demás ítems están para reforzar la relación entre el signo de la velocidad y el crecimiento o decrecimiento de $s(t)$ analizada anteriormente.

**Actividad 3**




Dada la función $f$ :

a) Graficar aproximadamente la recta tangente en los puntos de abscisa: $x=-1$, $x=0$, $x=1$ y $x=2$.
b) Determinar el signo de la derivada en dichos puntos.
c) En esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b).

El objetivo de esta actividad es deducir el signo de la derivada primera a través de un gráfico, por lo cual el alumno debe recurrir a la interpretación geométrica de la misma como pendiente de la recta tangente de la función en el punto. Si bien en la actividad de exploración trabajamos desde el registro gráfico con la recta tangente a una función en un punto, sabemos que es un concepto difícil de comprender por parte de los alumnos. La profesora enfatiza que el gráfico de cada una de dichas rectas es aproximado ya que no se conoce la expresión analítica de la función.

Luego pretendemos afianzar lo obtenido en el ejercicio anterior en cuanto a relacionar el signo de la derivada con el crecimiento o decrecimiento de la función y observar valores del dominio con derivada cero y su comportamiento.

Si bien no pedimos el comportamiento de $f$ a la izquierda y a la derecha del punto crítico, lo analizamos en la puesta en común.

Después de las tres actividades presentamos las siguientes preguntas, las cuales ponemos en discusión en la institucionalización.

**Para reflexionar…**

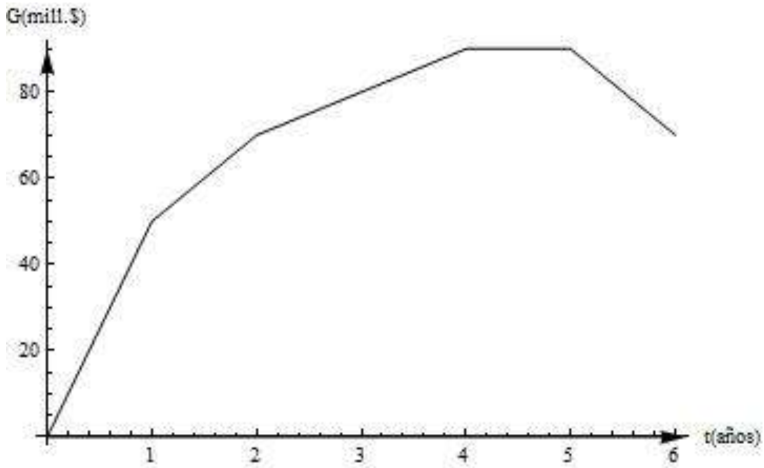
- ¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?
- ¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?
- ¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el crecimiento de una función en un intervalo?
- ¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el decrecimiento de una función en un intervalo?

**Completar con el signo correspondiente:**

Dada una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$:

- Si $f'(x)$___$0\ \forall x \in (a,b)$ entonces $f$ es creciente en $(a, b)$
- Si $f'(x)$___$0\ \forall x \in (a,b)$ entonces $f$ es decreciente en $(a, b)$

Una vez concluido el período establecido para la resolución de las actividades, la profesora organiza una puesta en común. Respecto a la primera actividad, la docente realiza el gráfico de las ganancias de la empresa en función del tiempo uniendo los puntos de la tabla (puede ser una curva más "suave" que la graficada a continuación):




Luego solicita a los alumnos las respuestas que completan la tabla. Puede pasar que los estudiantes omitan las unidades de la razón de cambio media y que, en el caso que es nula, no hayan completado la celda.

| Intervalo | Ganancia (aumenta, disminuye, queda igual) | Razón de cambio promedio $\frac{\Delta G}{\Delta t}$ | Signo de la razón de cambio promedio |
|---|---|---|---|
| $0 \leq t \leq 1$ | aumenta | \$50 millones /año | positivo |
| $1 \leq t \leq 2$ | aumenta | \$20 millones/año | positivo |
| $2 \leq t \leq 3$ | aumenta | \$10 millones/año | positivo |
| $3 \leq t \leq 4$ | aumenta | \$10 millones/año | positivo |
| $4 \leq t \leq 5$ | Queda igual | \$0 millones/año | no tiene (es nula) |
| $5 \leq t \leq 6$ | disminuye | -\$20 millones/año | negativa |

La profesora indica en el gráfico la interpretación de los valores obtenidos en la tabla anterior. Pide las respuestas a la última tabla para poder contestar las dos primeras preguntas:

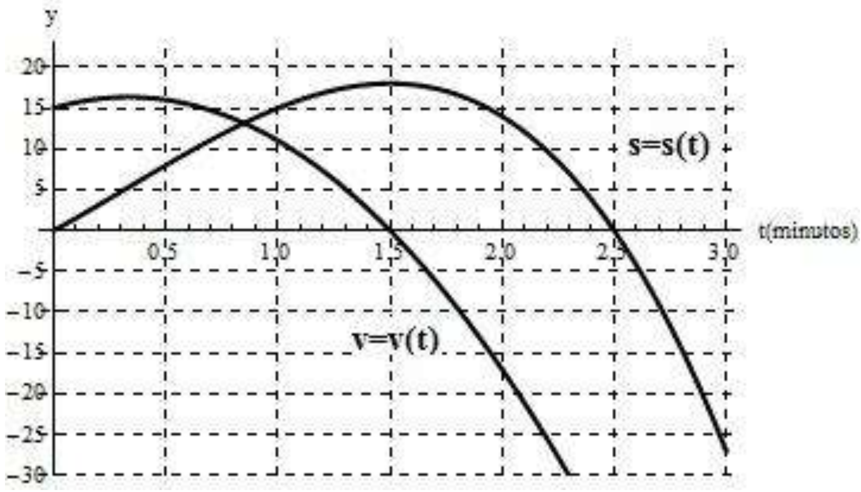
*¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?*

*¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?*

Luego analiza los resultados de la actividad 2. Escribe en el pizarrón la función posición $s(t) = -4t^3 + 4t^2 + 15t$, la velocidad (derivada de la misma) $s'(t) = -12t^2 + 8t + 15$ y solicita los valores de la tabla:

| Tiempo $t$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición $s(t)$ | 0 m | 8 m | 15 m | 18 m | 14 m | 0 m | -27m |
| Velocidad $v(t)$ | $15\frac{m}{\min}$ | $16\frac{m}{\min}$ | $11\frac{m}{\min}$ | $0\frac{m}{\min}$ | $-17\frac{m}{\min}$ | $-40\frac{m}{\min}$ | $-69\frac{m}{\min}$ |

Es probable que el gráfico de $s(t)$ esté hecho en el pizarrón, si esto no sucede la docente grafica la función valiéndose de sus raíces y de los valores de la tabla. Completa con el gráfico de la velocidad.




Para dar respuesta a los demás ítems primero solicita las respuestas de la tabla siguiente:

| Intervalos | Signo de $s(t)$ | Signo de $v(t)$ | Comportamiento de la función s(t) (marcar con una cruz la opción que corresponde) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Crece | Decrece | No cambia |
| $0 < t < 1{,}5$ | positivo | positivo | X | | |
| $t = 1{,}5$ | positivo | nula | | | X |
| $1{,}5 < t < 2{,}5$ | positivo | negativo | | X | |
| $2{,}5 < t < 3$ | negativo | negativo | | X | |

Algunos alumnos leen la respuesta al ítem b) y la docente sintetiza y explica la relación entre las dos curvas.

Cuando la partícula avanza, es decir la función $s(t)$ crece, la velocidad es positiva. A partir de los 1,5 minutos, en los cuales la velocidad es cero, la partícula comienza a retroceder, acercándose primero al punto tomado de referencia y luego sigue su camino hacia la izquierda de dicho punto. La función $s(t)$ decrece a partir del instante $t = 1{,}5$ minutos, la velocidad es negativa en ese intervalo.

Para responder el ítem f), desde el gráfico el alumno puede visualizar el máximo relativo a los 1,5 segundos de iniciado el movimiento. Luego de avanzar a partir del instante $t = 0$

de movimiento, la partícula comienza a retroceder a los 1,5 minutos. En este instante la distancia al punto de partida es de 18 metros y representa un máximo relativo. Se responden las preguntas (que luego se retoman después de la actividad 3):

*¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el crecimiento de una función en un intervalo?*

*¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el decrecimiento de una función en un intervalo?*

Es muy probable que los alumnos, después de completar la tabla y contestar las preguntas, vislumbren la relación entre el signo de la derivada primera y el crecimiento o decrecimiento de la función. La cuestión en este punto es el antecedente y el consecuente de la implicación. El estudiante puede (a pesar del orden de los dos conceptos en la pregunta) contestar que si la función es creciente en un intervalo entonces su derivada es positiva en dicho intervalo (o de manera similar con decrecimiento y signo negativo de la derivada). Otros alumnos pueden dar la respuesta correcta, pero sin haber reflexionado demasiado sobre "ese orden". Esto es natural, ya que es la primera actividad al respecto y nuestra idea no es por ahora entrar en conflicto con estas cuestiones. Entonces la profesora ante las respuestas confirma la relación y enuncia en el pizarrón (el signo de mayor y de menor son completados por los alumnos desde la actividad):

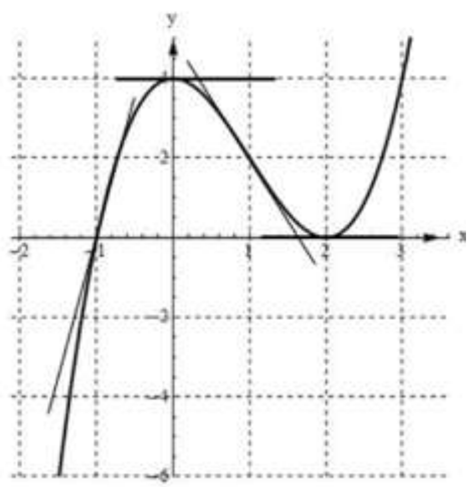
Dada una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$:

1. Si $f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (a,b)$ entonces $f$ es creciente en $(a, b)$
2. Si $f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (a,b)$ entonces $f$ es decreciente en $(a, b)$

La docente demuestra una de las proposiciones usando el teorema del valor medio de Lagrange, haciendo énfasis en la interpretación geométrica la cual relaciona razón de cambio media en un intervalo con la derivada en un punto interior del mismo.

Luego retoma la solución del ítem f). La pregunta es amplia y puede dar lugar a variedad de respuestas. Una posibilidad es que los alumnos respondan que en ese momento la partícula está a mayor distancia y luego comienza a retroceder. Otra posibilidad es que contesten que en ese punto la función tiene un ER. Puede suceder también que sólo expresen que es un punto de derivada cero. Las respuestas son disparadores para que la docente haga observar que ese máximo relativo tiene derivada cero. Puede preguntar: *¿cómo es el signo de la derivada en ese punto? ¿qué sucede con el signo de la derivada a derecha e izquierda del punto?* En este momento algún alumno puede opinar que en $t = 1{,}5$ minutos no se alcanza la mayor distancia ya que esto sucede en $t = 3$. Si esto sucede la profesora puede repasar el concepto de máximo absoluto y relativo y qué significa el signo de la función posición $s(t)$. Si ningún alumno tiene esa inquietud, no se expone por el momento para la clase.

La actividad 3 no está focalizada en un contexto determinado ya que el objetivo principal es prestar atención al signo de la derivada a través de la recta tangente. La profesora realiza el gráfico de la función en el pizarrón, traza las rectas tangentes (en forma aproximada) en los puntos solicitados y pide las respuestas de los alumnos en cuanto al signo de la derivada en dichos puntos.



Preguntas disparadoras en este momento: *¿Cómo podemos obtener el signo de la derivada en cada punto desde el gráfico? ¿Cómo logramos saber si la derivada en cada uno de esos puntos es positiva, negativa o cero? ¿Qué características tiene la función en cada uno de esos puntos?* Obtiene la conclusión que para estimar el valor de la derivada en cualquier valor de la variable independiente $x$, se puede trazar la recta tangente en $(x, f(x))$ y estimar el valor de su pendiente. En este caso nos interesa si dicha pendiente es positiva, negativa o cero. La idea de que la pendiente de la tangente toma distinto valor por cada valor de la variable independiente es de suma importancia, ya sea para reforzar el concepto de razón de cambio instantánea como para estudiar su relación con la noción de crecimiento o decrecimiento de una función. La docente reitera que si una función tiene derivada positiva en un punto entonces crece en ese punto, si tiene derivada negativa entonces decrece y estudia en forma particular los puntos de derivada cero. Es probable que los alumnos no den respuesta en el ítem c) para los puntos de derivada cero, ya que en los mismos la función no crece ni decrece. La docente puede subrayar el hecho que en esos puntos el comportamiento de la función cambia a derecha e izquierda, pero sin todavía formalizarlo o escribirlo en el pizarrón ya que es disparador de la actividad siguiente.

#### 5.2.5.4 Sesión 4. Actividades de descubrimiento. Grupo 2.

Programamos media hora de repaso, dos horas trabajo de los alumnos y una hora para la puesta en común.

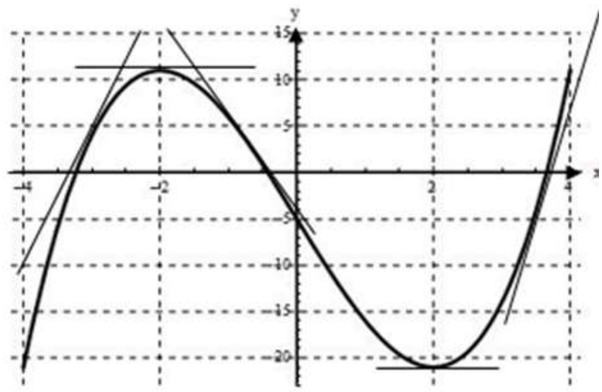
Pretendemos que a través de esta sesión el alumno pueda reforzar los conceptos y relaciones trabajadas en la actividad anterior y descubrir el concepto de punto crítico. A su vez están elaboradas para que pueda hallar un método para establecer si un punto crítico es ER de la función y de qué tipo (máximo o mínimo).

La profesora hace un resumen de lo estudiado en la actividad anterior y escribe en el pizarrón la relación obtenida:

Dada una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$:

1. Si $f'(x) > 0 \; \forall\, x \in (a, b)$ entonces $f$ es creciente en $(a, b)$
2. Si $f'(x) < 0 \; \forall\, x \in (a, b)$ entonces $f$ es decreciente en $(a, b)$

Luego grafica una función similar a la de la actividad 3 del grupo anterior y las rectas tangentes en diversos puntos para visualizar y fortalecer lo estudiado.



Previo al trabajo en equipo pone en discusión el recíproco de la proposición 1:

*Si una función es creciente en* $(a, b)$ *¿tiene derivada positiva en ese intervalo?*

Las acciones posteriores de la docente dependen de las respuestas obtenidas. Es usual que los alumnos contesten afirmativamente, es decir, que el crecimiento implica una derivada positiva, obviando la posibilidad de derivada cero o de no existencia de derivada. En este caso la profesora ilustra con el ejemplo de la función cúbica $f : R \to R / f(x) = x^3$ que es creciente en todo su dominio y tiene un punto de derivada cero. Luego escribe en el pizarrón:

Si $f$ es creciente y derivable en $(a, b)$ entonces $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

También da el ejemplo de la función raíz cúbica $f: R \to R / f(x) = \sqrt[3]{x}$ que es creciente en su dominio y en el punto $(0, 0)$ no es derivable. Indica que una situación similar se da para funciones decrecientes.

**Actividad 1**

Una explosión de dinamita lanza una roca pesada directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. La roca alcanza una altura de $h(t) = 50t - t^2$ pies después de t segundos.

a) Obtener la función $v(t)$ que expresa la velocidad de desplazamiento de la piedra en función del tiempo.

b) Completar la tabla:

| Tiempo $t$ (en segundos) | Altura $h(t)$ (en metros) | Velocidad $v(t)$ (en m/s) |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| 5 | | |
| 7 | | |
| 10 | | |

c) Representar ambas funciones en un mismo par de ejes y comparar la altura alcanzada con la velocidad de la piedra observando las gráficas.

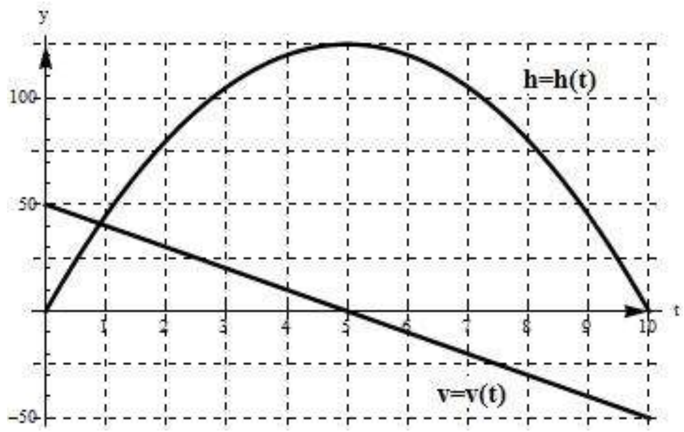
d) Completar el siguiente cuadro:

| Intervalo de tiempo | Signo de la velocidad $v(t)$ | Comportamiento de la función altura $h(t)$ |
|---|---|---|
| $0 < t < 5$ | | |
| $t = 5$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| $5<t<10$ | | |

e) ¿Qué sucede en el instante $t=5$? ¿Cuánto vale la derivada en dicho punto? ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretarlo bajo el contexto del problema.

La actividad es similar a una que brindan Engler et al. (2003). Consideramos que los dos primeros ítems de simple resolución por parte de los alumnos debido a que estuvieron trabajando problemas de este estilo y la función a derivar es sencilla. Luego solicitamos graficar ambas funciones y relacionarlas:



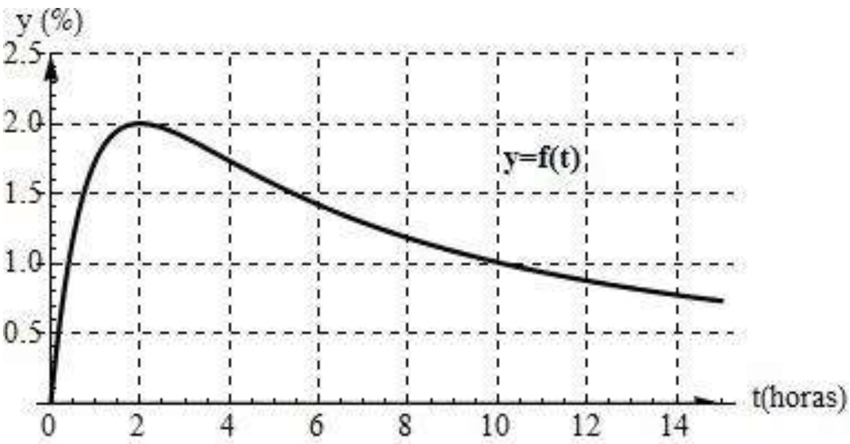

Como en el grupo 1 de actividades resolvimos una actividad similar, pensamos que no van a tener inconvenientes en relacionar las dos curvas. Pretendemos que el alumno observe que el objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad de 50 m/s, que a medida que va subiendo su velocidad disminuye hasta que se anula en el momento que alcanza la altura máxima. Luego la roca empieza a caer, su velocidad es negativa, va disminuyendo (pero creciendo en valor absoluto) hasta tocar el suelo con una velocidad de -50m/s. La docente puede orientar con preguntas que conduzcan a la reflexión anterior: *Desde que el objeto es lanzado hacia arriba ¿hasta qué momento sube, es decir su altura aumenta? ¿qué sucede en ese instante con la función altura y con la velocidad? ¿En qué* *momento el objeto llega al piso? ¿Qué sucede con la altura en ese intervalo? ¿Y con el signo de la velocidad?*

El gráfico y el análisis antepuesto ayudan a completar la tabla del ítem d). En esta oportunidad el alumno ya conoce la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función, razón por la cual suponemos no tendrá complicaciones.

**Actividad 2**

La función $f(t)=\dfrac{26t}{2t^2+5t+8}$ (definida para $t\geq 0$) representa el porcentaje de concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis en un paciente.

Sabiendo que el gráfico de la función es:




a) Indicar los intervalos de tiempo en los cuales dicha concentración aumenta.

b) Indicar los intervalos de tiempo en los cuales la concentración disminuye.

c) ¿Podemos determinar la concentración máxima? Si la respuesta es afirmativa ¿cuál es y cuándo se logra?

d) Hallar $f'(t)$ analíticamente y completar la siguiente tabla verificando los resultados con los obtenidos en forma gráfica:

| Intervalos | | Marcar con una cruz la respuesta correcta |
|---|---|---|

| | Signo de $f'(t)$ | $f(t)$ crece | $f(t)$ decrece | $f(t)$ no cambia |
|---|---|---|---|---|
| $0<t<2$ | | | | |
| $t=2$ | | | | |
| $t>2$ | | | | |

e) ¿Qué sucede en el instante $t=2$? ¿Cuánto vale la derivada en dicho punto? ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema.

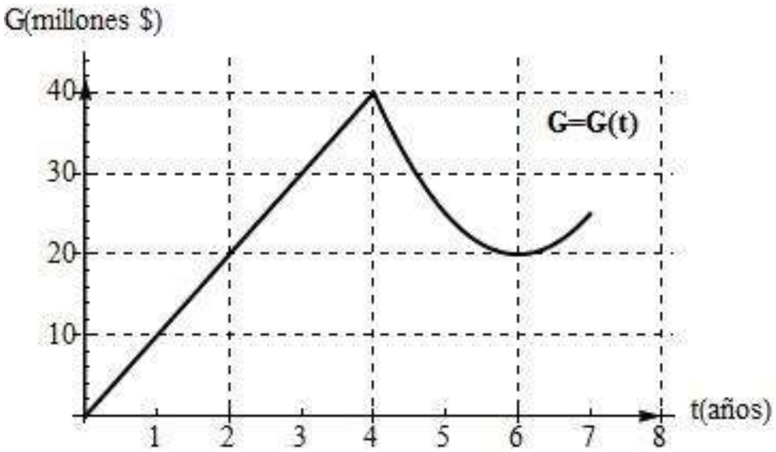
La consigna de este problema está inspirada en uno existente en Engler et al. (2007). En esta actividad pretendemos, desde los registros gráfico y analítico, repasar lo obtenido en la actividad anterior respecto a la relación entre el signo de la derivada primera y el crecimiento o decrecimiento de una función bajo el contexto de un PO. También encontramos un punto de derivada cero que es máximo relativo y absoluto. Solicitamos el análisis de qué sucede con respecto al signo de $f'$ en cada intervalo y en el punto en particular.

El análisis gráfico es más simple que el analítico, pero consideramos que enriquece al ejercicio trabajarlo de las dos maneras. El alumno puede tener dificultad en expresar la función derivada en forma simplificada, razón por la cual la docente brinda orientaciones. Si la profesora observa que esta dificultad es común en la mayoría de los estudiantes puede llegar a una simplificación en el pizarrón con la ayuda de todos.

Pretendemos también que el estudiante comience a trabajar en forma analítica, realizando análisis de signo de la función derivada en ese registro ya que luego, en estudios de funciones completos sin contexto, debe dejar plasmada su producción de esta manera.

**Actividad 3**

El siguiente gráfico representa las ganancias de una empresa (en millones de pesos) en los primeros 7 años de existencia. Al cuarto año el país al que pertenece la empresa sufrió una crisis económica que hizo que el modelo cambiara en forma abrupta.




a) ¿En qué intervalos de tiempo la ganancia aumentó?

b) ¿En cuáles disminuyó?

c) ¿Qué sucedió en la empresa al cuarto año? ¿Y al sexto?

d) Completar el siguiente cuadro:

| Intervalos | Signo de $G'(t)$ | Marcar con una cruz la respuesta correcta | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $G(t)$ crece | $G(t)$ decrece | $G(t)$ no cambia |
| $0 < t < 4$ | | | | |
| $t = 4$ | | | | |
| $4 < t < 6$ | | | | |
| $t = 6$ | | | | |
| $6 < t < 7$ | | | | |

e) ¿Cuál es el valor de la derivada en $t = 4$? ¿Qué sucede con el signo de la derivada a derecha e izquierda de ese valor?

| |
|---|
| f) ¿Cuál es el valor de la derivada en $t=6$? ¿Qué sucede con el signo de la derivada a derecha e izquierda de ese valor? |

Esta actividad es de elaboración propia y con base en múltiples aplicaciones halladas en la bibliografía. Tiene como objetivo principal introducir ER en puntos de no existencia de derivada y reforzar el trabajo anterior. Continuamos analizando signo de la derivada primera, máximos y mínimos, pero desde un gráfico solamente. Consideramos que, debido a todas las actividades realizadas, el alumno no tendrá dificultad en completar el cuadro, salvo quizás en el punto $t=4$ de no derivabilidad. Puede surgir que el estudiante no reconozca allí un ER (en este caso también extremo absoluto) de la función. Determinamos no brindar orientación al respecto para poder luego discutir las ideas que surgen.

Luego el grupo de actividades continúa con:

**Para saber…**

Los puntos de una función $f: D_f \rightarrow R$ donde la derivada primera es igual a cero o donde no existe se llaman *puntos críticos de* $f$.

Indicar los puntos críticos de las tres actividades anteriores

Actividad 1:………………………………………………………….……………………

Actividad 2: ……………………………………………………….…………………..

Actividad 3: ……………………………………………………….………………..

La función $f: R \rightarrow R / f(x) = x^3$ ¿tiene puntos críticos?

**Para reflexionar de acuerdo a lo realizado…**

Una función *puede* alcanzar valores máximos o mínimos para valores de $x$ en los que

.............................................................................................................……......................

..............................................................................................................................................

Una función *alcanza* valores máximos o mínimos para valores de $x$ en los que

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

Estas dos afirmaciones tienen una diferencia sutil y fundamental. Pensamos que los alumnos no darán cuenta de la misma, considerando aún más que el trabajo sobre un punto crítico que no es ER no se refleja en estas actividades, cuestión a aclarar en la institucionalización.

La docente comienza la puesta en común con la primera actividad, completando el cuadro con la ayuda de los alumnos enfatizando las unidades en cada caso:

| Tiempo $t$ (en segundos) | Altura $h(t)$ (en metros) | Velocidad $v(t)$ (en m/s) |
|---|---|---|
| 0 | 0 m | 50 m/s |
| 2 | 80 m | 30 m/s |
| 5 | 125 m | 0 m/s |
| 7 | 105 m | -20 m/s |
| 10 | 0 m | -50 m/s |

La piedra es lanzada hacia arriba (aumenta su altura) con una velocidad de 50 m/s y luego va disminuyendo esta velocidad hasta alcanzar velocidad cero en la máxima altura. A partir de ese momento la piedra comienza a caer, la velocidad es negativa hasta que llega al suelo con una velocidad de -50 m/s, mientras su altura disminuye.

En el intervalo $(0,5)$ la altura aumenta y la velocidad es positiva. En el instante $t=5$ la velocidad es cero y la altura máxima. Luego en el intervalo $(5,10)$ la altura disminuye (la piedra comienza a caer) y la velocidad es negativa. La docente relaciona la tabla (registro numérico) con el gráfico y con la expresión analítica obtenida. Esta relación es importante para la comprensión de los conceptos y el alumno por sí solo es poco habitual que la efectúe.

Luego completa el cuadro:

| Intervalo de tiempo | Signo de la velocidad $v(t)$ | Comportamiento de la función altura $h(t)$ |
|---|---|---|
| $0 < t < 5$ | positivo | aumenta |
| $t = 5$ | Cero (no tiene signo) | máxima |
| $5 < t < 10$ | negativo | disminuye |

La docente pide las respuestas de las preguntas del último ítem. En el instante $t = 5$ la derivada vale cero y la función tiene un máximo (relativo y absoluto). La derivada es positiva a la derecha del punto (la función $h$ crece) y negativa a la izquierda (la función $h$ decrece). Es probable que la respuesta no esté completa, es decir que sólo contesten con el signo de la derivada o sólo con el comportamiento de la función. La profesora enfatiza los dos aspectos.

En la segunda actividad la función está dada en registro analítico y gráfico (ya que su gráfico es complejo de realizar por parte de los estudiantes). Desde este último se pueden dar los intervalos donde la concentración en sangre de la droga aumenta y donde disminuye. También se puede extraer la información que la concentración es máxima sucede a las dos horas de suministrado el medicamento y es del 2 %. Pensamos que esto no trae inconvenientes en la resolución.

Para obtener los resultados de forma analítica la docente escribe en el pizarrón la función derivada de $f$ :

$$f'(t) = \frac{-52(t^2 - 4)}{(2t^2 + 5t + 8)^2} = \frac{-52(t+2)(t-2)}{(2t^2 + 5t + 8)^2}$$

Si no fue realizada anteriormente con todo el grupo el alumno puede evidenciar dificultades en la simplificación o expresión factorizada de $f'$.

La profesora observa que, de todos los factores de la expresión de la derivada, el único que cambia el signo bajo el contexto del problema es $t-2$. Esto permite completar y verificar el cuadro desde el registro analítico. También refuerza el punto de derivada cero desde este registro.

| Intervalos | Signo de $f'(t)$ | Marcar con una cruz la respuesta correcta | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $f(t)$ crece | $f(t)$ decrece | $f(t)$ no cambia |
| $0<t<2$ | Positivo | X | | |
| $t=2$ | Cero | | | X |
| $t>2$ | Negativo | | X | |

Con el cuadro y el gráfico contesta las preguntas del último ítem. En el instante $t=2$ la función presenta un máximo (relativo y absoluto), la derivada en ese punto es cero. A derecha del punto la función crece (tiene derivada positiva) y a izquierda decrece (tiene derivada negativa). La docente refuerza el comportamiento de las dos funciones.

Luego sintetiza lo realizado en las dos actividades haciendo énfasis en los pasos para calcular un ER de una función:

1. Derivar la función.
2. Calcular puntos de derivada cero (luego se introduce la otra posibilidad).
3. Estudiar los IC e ID a derecha e izquierda del punto hallado en el paso 2) para determinar qué tipo de ER es o si no lo es.

La actividad 3 es similar, pero se trabaja sólo gráficamente. Además, en la misma, uno de los ER es un punto que no tiene derivada.

La docente completa la tabla en el pizarrón con la ayuda de los alumnos:

| Intervalos | Signo de $G'(t)$ | Marcar con una cruz la respuesta correcta | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $G(t)$ crece | $G(t)$ decrece | $G(t)$ no cambia |
| $0<t<4$ | Positivo | X | | |
| $t=4$ | No tiene derivada | | | |
| $4<t<6$ | Negativo | | X | |
| $t=6$ | Cero | | | X |
| $6<t<7$ | Positivo | X | | |

Responde las preguntas, indicando que en el punto $t=4$ la función no es derivable y tiene un máximo absoluto y relativo. En el punto $t=6$ la función tiene derivada cero y tiene un mínimo relativo. Describe el comportamiento de las dos funciones: de la original y de la derivada de la misma. La docente vuelve a sintetizar lo realizado, completando en el paso 2 enunciado anteriormente la posibilidad de un punto sin derivada. Formaliza la definición de punto crítico (se dan los puntos críticos en todas las actividades) y escribe el método para hallar máximos y mínimos relativos de una función:

1. Derivar la función
2. Calcular los puntos de derivada cero o aquellos en que la derivada no existe (finita).
3. Estudiar los IC e ID a derecha e izquierda del punto hallado en el paso 2) para determinar qué tipo de ER es o si no lo es.

Como ayuda para completar las dos últimas oraciones, solicitamos los puntos críticos de las tres actividades y de la función cúbica $f: R \to R / f(x) = x^3$ en $(0,0)$. De esta manera se enfatiza la importancia del paso 3 en el método. Luego la profesora completa las oraciones que están en la actividad, dejando la respuesta correcta en el pizarrón.

#### 5.2.5.5 Sesión 5. Actividades de descubrimiento. Grupo 3

Organizamos media hora de repaso, dos horas y media de trabajo de los alumnos y una hora de puesta en común.

En el pizarrón pretendemos reforzar los conceptos y relaciones trabajadas en la actividad anterior desarrollando un ejemplo adecuado. Mediante las actividades propiamente dichas queremos observar si, luego del trabajo realizado en las otras instancias, los alumnos son capaces de resolver PO. Cabe aclarar que hasta el momento no se resolvió ningún problema en clase.

La profesora repasa los conceptos ya estudiados y trabajados en las actividades anteriores mediante preguntas a los alumnos y a través de la resolución en forma conjunta con ellos. Para esto brinda el siguiente ejemplo:

Supongamos que $f(t)$ mide el nivel de oxígeno en un estanque donde $f(t)=1$ es el nivel normal (no contaminado), el tiempo $t$ se mide en semanas. Cuando $t=0$ se vierten 5 kg de desechos orgánicos en el estanque y a medida que el material de desecho se oxida el nivel de oxígeno en el estanque es $f(t)=\dfrac{t^2-t+1}{t^2+1}$ .

¿Cuál es el mínimo porcentaje de oxígeno que hay en el estanque? ¿En qué semana se produce?

El objetivo es reforzar los conceptos de IC, ID y ER y cómo se obtienen desde el registro analítico, así como también estudiar un fenómeno desde el punto de vista variacional. En primer lugar, la docente hace preguntas para que los alumnos puedan entender el enunciado del problema: *¿qué dominio tiene la función dada?,¿cuál es la variable* *independiente y cuál la dependiente?, ¿qué significado tiene* $f(2)$ *?, etc.* Luego repasa los resultados teóricos obtenidos en clases anteriores.

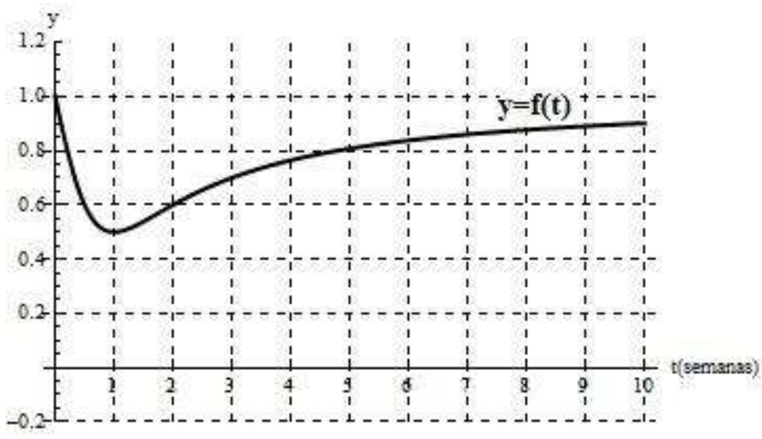
Luego procede a derivar la función y obtener su versión simplificada:

$$f'(t) = \frac{t^2 - 1}{\left(t^2 + 1\right)^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{\left(t^2 + 1\right)^2}$$

Obtiene el único punto crítico de acuerdo con el contexto ($t = 1$) y analiza el signo de la derivada primera a izquierda y derecha de dicho punto:

| Intervalos | Signo de $f'(t)$ | Marcar con una cruz la respuesta correcta | |
|---|---|---|---|
| | | $f(t)$ crece | $f(t)$ decrece |
| $0 < t < 1$ | - | | X |
| $t = 1$ | 0 | | |
| $t > 1$ | + | X | |

Para luego concluir que $t = 1$ es un mínimo de la función. Paso seguido interpreta este resultado bajo el contexto del problema: en la primera semana el nivel de oxígeno en el estanque es mínimo y es del 50%. La profesora puede hacer un gráfico de la función en forma aproximada:



**Actividad 1**

En una fábrica están probando medidas para un envase de cartón. El mismo tiene forma de caja con base cuadrada y la parte superior abierta (sin tapa) ya que se hará de otro material. Para cada caja se cuenta con 1200 cm$^2$ de cartón.

a) Realizar un esquema o gráfico que represente la situación anterior colocando variables que representen el lado de la base cuadrada y el alto de la caja.

b) ¿Qué expresión relaciona las dos variables indicadas en el punto a) sabiendo que se cuanta con 1200 cm$^2$ de cartón?

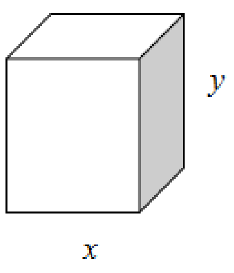
c) Escribir una función que represente el volumen de la caja teniendo en cuenta las variables determinadas en el ítem a).

d) Con ayuda de la relación calculada en b), expresar el volumen hallado en función de una sola de las variables.

e) Calcular el máximo de la función volumen.

f) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que hacen máximo el volumen? ¿Cuánto vale ese volumen?

La consigna es una adaptación de un problema propuesto en Stewart (1999). El propósito es guiar al alumno en la resolución de un PO paso a paso, ya que será el primero que resuelven con este grado de dificultad. En el ítem a), solicitamos realizar un diagrama de la situación planteada:



Llamamos $x$ al lado de la base cuadrada (en cm) e $y$ al alto de la caja (en cm).

Teniendo en cuenta que se posee 1200 cm$^2$ de material, pretendemos que el alumno identifique este dato con el área del prisma (sin tapa) y pueda llegar a la expresión $1200 = x^2 + 4xy$. Debe tener en cuenta que la caja cuenta con base cuadrada y cuatro lados que son rectángulos de medidas $x$ e $y$.

Luego pedimos la expresión del volumen de la caja en función de las mismas variables: $V = x^2 y$. El paso siguiente consiste en expresar este volumen en función de una de las variables considerando el dato del área. Es posible que sea este paso el que evidencie más dificultad por parte de los estudiantes. Decidimos orientarlos al respecto para que puedan continuar.

Realizando un despeje adecuado se llega a la expresión

$$V(x) = x^2\left(\frac{1200 - x^2}{4x}\right)$$

la cual se puede escribir de la forma

$$V(x) = 300x - \frac{x^3}{4}.$$

La profesora indica que lleguen a la expresión simplificada del volumen para que puedan derivar dicha función fácilmente.

Para calcular el máximo de esta función el alumno cuenta con todos los conceptos y propiedades estudiados en las actividades anteriores:

$$V(x) = 300x - \frac{x^3}{4} \Rightarrow V'(x) = 300 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow 300 = \frac{3}{4}x^2 \Leftrightarrow 400 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 20$$

Por el contexto del problema el único punto crítico es $x = 20$. Para saber si es máximo debemos estudiar el signo de la derivada a ambos lados del punto (considerando el dominio de la función). La expresión de la derivada en forma factorizada es

$$V'(x) = \frac{3}{4}(400 - x^2) = \frac{3}{4}(20 - x)(20 + x)$$

| Intervalos | Signo de $V'(x)$ | Marcar con una cruz la respuesta correcta | |
|---|---|---|---|
| | | $V(x)$ crece | $V(x)$ decrece |
| $0 < x < 20$ | + | X | |
| $x = 20$ | 0 | | |
| $x > 20$ | - | | X |

El estudio de la condición suficiente (cambio de signo de la derivada en el punto crítico) suele omitirse por parte de los estudiantes. Esperamos que con las diversas actividades que hicieron y con el repaso efectuado en el pizarrón, procedan en forma correcta.

Por último, requerimos la respuesta al problema: la caja que tiene mayor volumen tiene base cuadrada de 20 cm y altura 10 cm. Este último dato se debe obtener de la relación entre las variables $1200 = x^2 + 4xy$. Este puede ser un punto de dificultad para el alumno. En general olvidan dar la respuesta completa. El volumen máximo es de 4000 cm$^3$, obtenido con las medidas dadas en la función

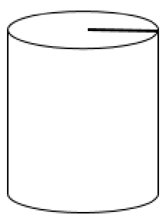
$V = x^2 y$ o en $V(x)$

La resolución de la actividad requiere registros analítico y verbal. Suponemos que la mayor dificultad está en el ítem d), para el cual se brinda orientación. También puede suceder omitir la condición suficiente en el estudio de ER y no brindar la respuesta completa solicitada (con las unidades correspondientes).

**Actividad 2**

A un ingeniero industrial se le pidió que diseñe una lata con capacidad de 1 litro de agua, con forma de un cilindro circular recto. ¿De qué dimensiones debe ser la lata para usar la menor cantidad posible de material?

Este problema fue extraído de Thomas (2006). En esta oportunidad no daremos orientaciones. El objetivo es observar si, con todo lo trabajado en las actividades y principalmente el de la actividad anterior, el alumno es capaz de resolverlo por sus propios medios. La única orientación que decidimos brindar es un gráfico de un cilindro circular recto y aclarar que se considera la base y la tapa en el material a ser utilizado.




Una vez concluido el período establecido para la resolución de las actividades, la profesora organiza una puesta en común de la resolución de los problemas. Para esto pide las respuestas a los alumnos sobre cada ítem.

La docente dibuja en el pizarrón una caja y le da nombre (propuesto por los alumnos) a cada una de las variables tal lo expuesto anteriormente.

Entonces $x$ (en cm) simboliza el lado de la base cuadrada e $y$ (en cm) el alto de la caja.

Solicita la respuesta al ítem b). Puede suceder que el alumno incluya en la superficie la tapa de la caja o que omita la base y la tapa.

La relación entre las variables recordamos que es

$$1200 = x^2 + 4xy$$

y el volumen $V = x^2 y$

Si bien la consigna no lo requiere, en este momento la docente hace una tabla indicando posibles valores de las variables y cuánto vale el volumen en cada caso. Esta conversión de registros favorece la comprensión del problema. La profesora indica que, para cada valor de $x$ arbitrario, el valor de la variable y se obtiene de $1200 = x^2 + 4x.y$, por lo que es conveniente despejar y en esa ecuación $y = \frac{1200 - x^2}{4x} = \frac{300}{x} - \frac{x}{4}$. Entonces:

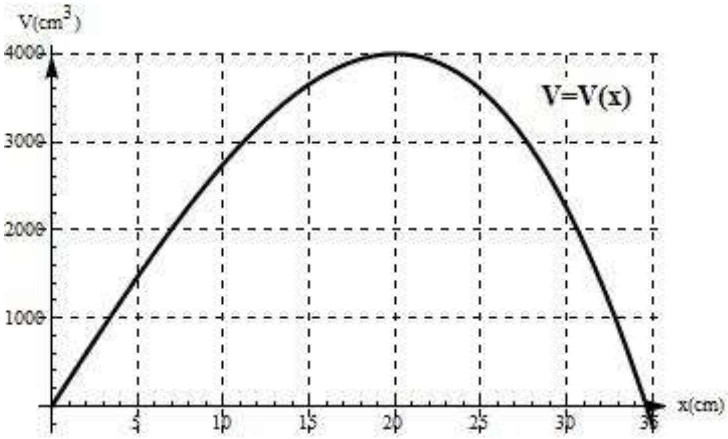
| Lado de la base $x$ (cm) | Altura de la caja $y$ (cm) | Volumen de la caja |
|---|---|---|
| 5 cm | 58.75 cm | 1468.75 cm$^3$ |
| 10 cm | 27.5 cm | 2750 cm$^3$ |
| 15 cm | 16.25 cm | 3656.25 cm$^3$ |
| 20 cm | 10 cm | 4000 cm$^3$ |
| 25 cm | 5.75 cm | 3593.75 cm$^3$ |
| 30 cm | 2.5 cm | 2250 cm$^3$ |

La docente interpreta la primera columna indicando que si el lado de la base es pequeño la altura es grande, a medida que el lado de la base aumenta, la altura disminuye. Luego explica los valores obtenidos en la tercera columna y cómo va variando el volumen para cada valor del lado de la base. Los alumnos pueden comparar la tabla con el resultado obtenido en el problema.

Paso seguido se continua con la consigna, escribiendo el volumen $V$ en función de una de las variables. Suponemos que la mayoría de los alumnos eligió para despejar y en función de $x$ y así llegar a:

$$V(x) = x^2 \left( \frac{1200 - x^2}{4x} \right) = 300x - \frac{x^3}{4}$$

Si algún equipo efectuó el otro despeje, se realiza en el pizarrón. Luego con la guía de los alumnos la docente deriva la función, busca puntos críticos y realiza el análisis de signo a uno y otro lado del punto crítico que interesa bajo el contexto del problema ( $x = 20$ ). La profesora puede graficar la función $V(x)$ para interpretarla en registro gráfico y hacer la correspondencia con el registro numérico dado anteriormente:




Posteriormente la docente procede a resolver la actividad 2. Explica la fórmula del volumen del cilindro y del área lateral haciendo un esquema. Es probable que varios alumnos no puedan obtener esta última. Expresa la función área en una de las variables y, obtiene la derivada del área en función del radio ($r$ es el radio del cilindro y $h$ su altura), para pasar al cálculo del punto crítico:

$$1000 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Realiza el cuadro de signo de la derivada primera para determinar que dicho punto crítico es un mínimo de la función. Por último, solicita las dimensiones del cilindro en el que se usa la mínima cantidad de material. Esta respuesta generalmente es obviada por los alumnos.

Enfatiza que los problemas anteriormente resueltos sintetizan todas las actividades y situaciones que se resolvieron anteriormente.

## 5.3 Segunda parte. El análisis de la situación de aprendizaje según el marco teórico de Sfard

El análisis a priori expuesto en el apartado anterior es la base con la que contamos para examinar los aportes a las dos concepciones (CO y CE) de cada uno de los ítems que forman parte de la situación de aprendizaje.

Basándonos en las características propias de las dos concepciones y siguiendo la metodología empleada por Mora (2006), Murillo (2013) y Garzón, Vanegas y Delgado (2013) analizamos en la situación de aprendizaje qué acciones aportan a la CO y cuáles a la CE. Clasificamos cada uno de los ítems de los grupos de actividades teniendo en cuenta las diferentes representaciones de IC, ID y ER y el modelo de CO y CE propuesto por Sfard donde se mide el nivel de comprensión de un concepto matemático a partir de la superación de logros. El primer nivel está determinado por la capacidad del estudiante para desarrollar algoritmos sin profundizar en la teoría, mientras que el segundo nivel define el conocimiento del tema en la medida en que se tienen herramientas que permiten ver el concepto como un objeto que se puede manipular (Murillo, 2013).

A continuación, presentamos tablas donde plasmamos el análisis anteriormente descripto. La primera columna contiene el ítem examinado, la segunda y la tercera corresponden a la CO y la CE, respectivamente. De acuerdo con el aporte del ítem a cada una de las concepciones completamos dichas columnas. A su vez aclaramos qué evidencia en las producciones de los alumnos son consideradas como nivel de éxito 1. Para esto tuvimos en cuenta las características mencionadas por Sfard para cada una de las concepciones expuestas en el Capítulo 3, sección 3.2.3.

En todo el desarrollo utilizamos las siguientes siglas para cada actividad (A1, A2, etc.) en cada grupo de actividades.

### 5.3.1 Sobre el concepto de intervalos de crecimiento

| Ítem de la actividad | CO | CE |
|---|---|---|
| Actividades de exploración: Grupo 1 (pág. 169) | | |
| A1b) ¿en qué intervalos de tiempo la velocidad aumentó? | Identificar el concepto en registro numérico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando expresa el intervalo, aunque posea algún error en la notación usada. | |
| A1f) ¿qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores? | | Relacionar el concepto de IC con el signo del cambio de la variable dependiente bajo contexto en registro numérico. Consideramos nivel de éxito 1 cuando expresa esa relación sin importar el orden del condicional obtenido. |
| A2b) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura crece | Identificar el concepto en registro gráfico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando el intervalo se brinda en forma correcta sin tener en cuenta si es abierto o cerrado, ya que todavía no se definió formalmente. | |

| Grupo de actividades de descubrimiento: Grupo 1 (pág. 186) | | |
|---|---|---|
| A1b) Tabla donde hay que indicar, en los intervalos dados, si la ganancia aumenta. | Identificar el concepto en registro numérico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completa correctamente. | |
| A1c) Realizar un resumen del IC de la función y el signo de la razón de cambio promedio en esos intervalos. | Sintetizar en una tabla los resultados obtenidos en el ítem anterior. La consideramos CO ya que la misma consigna lo conduce al alumno a la respuesta.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completa correctamente. | |
| A2d) Completar una tabla donde se evidencia la relación entre el signo de la velocidad (derivada) con el crecimiento de $s(t)$ (función posición). | | Volcar en una tabla la relación analizada en el ítem anterior. En esta oportunidad lo consideramos CE ya que debe identificar el signo de $s(t)$, el signo de $v(t)$ en alguno de los registros (analítico, gráfico o numérico) y el crecimiento de la función en alguno de los registros anteriores.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si completa en forma correcta el signo de |

| | | |
|---|---|---|
| | | $s(t)$, de $v(t)$ y el crecimiento. |
| A2e) Señalar el intervalo de tiempo en que $s(t)$ aumenta. | Identificar el concepto en registro gráfico, analítico o numérico (depende de dónde saque el dato) Consideramos nivel de éxito 1 si indica el intervalo en forma correcta y abierto en $t = 1{,}5$ (en clase ya se definieron IC e ID) | |
| A3c) En esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b). | | Identificar crecimiento y relacionarlo con el signo de la derivada primera (pendiente de la tangente) en registro gráfico. Consideramos nivel de éxito 1 si el alumno identifica que en el punto la función crece y lo relaciona con la derivada positiva (pendiente de la recta tangente) |
| Preguntas que resumen situaciones anteriores | | |
| ¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo? | | Relacionar el concepto de IC con el signo de la razón de cambio media en un intervalo y con el signo de la derivada en el mismo en forma general. Consideramos nivel de éxito 1 si la relación está |
| ¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el | | |

| | | |
|---|---|---|
| crecimiento de una función en un intervalo? | | bien expresada sin importar el orden del condicional. Es decir, sin considerar si escriben, por ejemplo, para la primera pregunta: "Si la función crece entonces la razón de cambio promedio es positiva en ese intervalo" o el condicional recíproco. |
| Si $f'(x)\_\_\_0 \ \forall x \in (a,b)$ entonces $f$ es creciente en $(a,b)$. | Indicar el signo >. Consideramos nivel de éxito 1 si escribe el símbolo correcto. | |
| Actividades de descubrimiento: Grupo 2 (pág. 200) | | |
| A1d) Completar una tabla con el signo de $v(t)$ y el comportamiento de $h(t)$. | Volcar en una tabla la relación analizada en el ítem anterior. En esta oportunidad lo consideramos CO debido a la guía detallada de la consigna.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completada correctamente. | |
| A1e) ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema | | Relacionar los dos conceptos: signo de la derivada ($v(t)$) positivo implica IC de $h(t)$ en registro analítico o gráfico y expresar la relación en el |

| | | |
|---|---|---|
| | | contexto del problema en registro verbal.<br>Consideramos 1 si relaciona en forma correcta y expresa alguna interpretación sobre el contexto del problema. |
| A2a) Indicar los intervalos de tiempo en los cuales dicha concentración aumenta. | Identificar IC en registro gráfico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si responde con los intervalos $[0, 2)$ o $(0, 2)$. | |
| A2 e) Completar la siguiente tabla verificando los resultados analíticos con los obtenidos en forma gráfica. (Aclaración: en la tabla hay una columna para $f'(t)$ y otra para el IC o ID o no cambio de $f(t)$) | | Volcar en una tabla el signo de la función derivada en registro analítico y el IC identificado en registro gráfico, anteriormente. En este caso debe verificar analíticamente los intervalos, hay una relación entre registros y de funciones distintas.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si completa correctamente la tabla realizando en registro analítico el análisis de signo de $f'(t)$. |
| A2 f) ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? | | Relacionar los dos conceptos: signo de la derivada $f'(t)$ positivo (en registro analítico) |

| | | |
|---|---|---|
| Interpretar bajo el contexto del problema. | | implica IC de $f(t)$ en registro gráfico y expresar la relación en el contexto del problema en registro verbal.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando esta relación está expresada para IC y de alguna manera interpreta bajo el contexto del problema. |
| A3 a) ¿En qué intervalos de tiempo la ganancia aumentó? | Identificar IC en registro gráfico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando expresa los intervalos $(0, 4)$ y $(6, 7)$ o cerrados en $t = 0$ y/o $t = 7$ | |
| A3 d) Completar una tabla con el signo de $G'(t)$ y el comportamiento de $G(t)$. | Completar la tabla con la información obtenida anteriormente y analizando el signo de $G'$ según registro gráfico.<br>Si bien la respuesta no es inmediata, sobre todo el signo de la derivada en registro gráfico, consideramos que aporta a CO. Pensamos que el trabajo anterior realizado por el alumno lo lleva a completar la tabla en | |

| | | |
|---|---|---|
| | forma correcta sin realizar el análisis descripto. Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completa correctamente. | |

Tabla 6. Análisis de CO y CE sobre IC

### 5.3.2 Sobre el concepto de intervalos de decrecimiento

| Ítem de la actividad | CO | CE |
|---|---|---|
| Actividades de exploración: Grupo 1 (pág. 169) | | |
| A1c) ¿en cuáles disminuyó? | Identificar el concepto en registro numérico bajo contexto. Consideramos nivel de éxito 1 cuando expresa el intervalo, aunque posea algún error en la notación usada. | |
| A1f) ¿qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores? | | Relacionar el concepto con el signo del cambio de la variable dependiente bajo contexto en registro numérico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando expresa esa relación sin importar el orden del condicional obtenido. |
| A2c) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura decrece | Identificar el concepto en registro gráfico bajo contexto. Consideramos nivel de éxito 1 cuando el intervalo se brinda en forma correcta sin tener en cuenta si es abierto o | |

| | | |
|---|---|---|
| | cerrado, ya que todavía no se definió formalmente. | |
| Actividades de descubrimiento: Grupo 1 (pág. 186) | | |
| A1b) Tabla donde hay que indicar, en los intervalos dados, si la ganancia disminuye. | Identificar el concepto en registro numérico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completa correctamente. | |
| A1c) Realizar un resumen del ID de la función y el signo de la razón de cambio promedio en esos intervalos. | Sintetizar en una tabla los resultados obtenidos en el ítem anterior. La consideramos CO ya que la misma consigna lo conduce al alumno a la respuesta.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completa correctamente. | |
| A2d) Completar una tabla donde se evidencia el signo de la velocidad (derivada) con el crecimiento de $s(t)$. | | Volcar en una tabla la relación analizada en el ítem anterior. En esta oportunidad lo consideramos CE ya que debe identificar el signo de $s(t)$, el signo de $v(t)$ en alguno de los registros (analítico, numérico o gráfico) y el decrecimiento de la función en alguno de los registros anteriores.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si completa en |

| | | |
|---|---|---|
| | | forma correcta el signo de $s(t)$, de $v(t)$ y el decrecimiento. |
| A2f) Señalar el intervalo de tiempo en que $s(t)$ disminuye. | Identificar el concepto en registro gráfico, numérico o analítico (depende de dónde saque el dato). Consideramos nivel de éxito 1 si indica el intervalo en forma correcta y abierto en $t = 1{,}5$ (en clase ya se definieron IC e ID). | |
| A3c) En esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b). | | Identificar decrecimiento y relacionarlo con el signo de la derivada primera (pendiente de la tangente) en registro gráfico Consideramos nivel de éxito 1 si el alumno identifica que en el punto la función decrece y lo relaciona con la derivada negativa (pendiente de la recta tangente). |
| Preguntas que resumen situaciones anteriores | | |
| ¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo? | | Relacionar el concepto de ID con el signo de la razón de cambio media en un intervalo y con el signo de la derivada en el mismo en forma general. |
| ¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el | | |

| | | |
|---|---|---|
| decrecimiento de una función en un intervalo? | | Consideramos nivel de éxito 1 si la relación está bien expresada sin importar el orden del condicional. Es decir, sin considerar si escribieron, por ejemplo, para la primera pregunta: “Si la función decrece entonces la razón de cambio promedio es negativa en ese intervalo” o el condicional recíproco. |
| Si $f'(x)$ ___ $0 \ \forall x \in (a,b)$ entonces $f$ es decreciente en $(a,b)$ | Indicar el signo <. Consideramos nivel de éxito 1 si escribe el símbolo correcto. | |
| Actividades de descubrimiento: Grupo 2 (pág. 200) | | |
| A1d) Completar una tabla con el signo de $v(t)$ y el comportamiento de $h(t)$ | Volcar en una tabla la relación analizada en el ítem anterior. En esta oportunidad lo consideramos CO debido a la guía detallada de la consigna. Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completada correctamente. | |
| A1e) ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema | | Relacionar los dos conceptos: signo de la derivada $v(t)$ negativo implica ID de $h(t)$ en registro analítico o gráfico |

| | | |
|---|---|---|
| | | y expresar la relación en el contexto del problema en registro verbal.<br>Consideramos 1 si relaciona en forma correcta y expresa alguna interpretación sobre el contexto del problema. |
| A2b) Indicar los intervalos de tiempo en los cuales la concentración disminuye. | Identificar ID en registro gráfico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si responde con el intervalo $(2,+\infty)$. | |
| A2 e) Completar la siguiente tabla verificando los resultados analíticos con los obtenidos en forma gráfica. (Aclaración: en la tabla hay una columna para $f'(t)$ y otra para el IC o ID o no cambio de $f(t)$). | | Volcar en una tabla el signo de $f'(t)$ en registro analítico y el ID identificado en registro gráfico anteriormente. En este caso debe verificar analíticamente los intervalos, hay una relación entre registros y de funciones distintas.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si completa correctamente la tabla realizando en registro analítico el análisis de signo de $f'(t)$. |
| A2 f) ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? | | Relacionar los dos conceptos: signo de la derivada $f'(t)$ negativo (en registro analítico) |

| | | |
|---|---|---|
| Interpretar bajo el contexto del problema. | | implica ID de $f(t)$ en registro gráfico y expresar la relación en el contexto del problema en registro verbal.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando esta relación está expresada para ID y de alguna manera interpreta bajo el contexto del problema. |
| A3 b) ¿En cuáles disminuyó) | Identificar ID en registro gráfico bajo contexto.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando responde con el intervalo $(4, 6)$. | |
| A3 d) Completar una tabla con el signo de $G'(t)$ y el comportamiento de $G(t)$ | Completar la tabla con la información obtenida anteriormente y analizando el signo de $G'(t)$ según registro gráfico.<br>Si bien la respuesta no es inmediata, sobre todo el signo de la derivada en registro gráfico, consideramos que aporta a CO. Pensamos que el trabajo anterior realizado por el alumno lo llevará a completar la tabla en forma correcta sin realizar el análisis descripto. | |

| | | |
|---|---|---|
| | Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completa correctamente. | |

Tabla 7. Análisis de CO y CE sobre ID

### 5.3.3 Sobre el concepto de extremo relativo

| Ítem de la actividad | CO | CE |
|---|---|---|
| Actividades de exploración: Grupo 1 (pág. 169) | | |
| A2 d) ¿Existe algún día del año donde la temperatura no varía? | | Relacionar recta tangente horizontal con punto estable o de "no cambio" en registro gráfico bajo contexto. Consideramos nivel de éxito 1 si brinda los dos momentos $t = 30$ y $t = 210$. |
| A2 e) ¿En qué momento del año la temperatura fue máxima? ¿Y mínima? | Identificar el concepto de extremo (máximo y mínimo) en registro gráfico bajo contexto. Consideramos nivel de éxito 1 y si responde con los dos momentos, ya sea expresando el punto completo o sólo el tiempo. | |
| A3 ¿Cuáles serán las dimensiones del tablero si le pidieron a Pablo que use toda la cinta aislante y que tenga la mayor área posible? | | Es un PO en registro verbal. El alumno debe plantear la relación entre las variables, la función a optimizar (parábola) en una sola variable y obtener el máximo como vértice de la parábola. Puede hacer |

| | | |
|---|---|---|
| | | esto en registro analítico o gráfico. También puede hacer tabla de valores y resolverlo en registro numérico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si realiza las acciones descriptas anteriormente (en cualquiera de los registros) y da la respuesta del problema de acuerdo a lo efectuado. Esto es no necesariamente la respuesta es correcta, pero sí el razonamiento. |
| Actividades de descubrimiento: Grupo 1 (pág. 186) | | |
| A2 d) Completar la siguiente tabla para analizar el comportamiento de la función según el signo de su derivada. | | Volcar en una tabla la relación analizada en el ítem anterior. En esta oportunidad lo consideramos CE ya que debe identificar el signo de $s(t)$ y el signo de $v(t)$ en alguno de los registros (analítico, numérico o gráfico) y el cambio de crecimiento de la función en el instante $t = 1{,}5$ en alguno de los registros anteriores.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si completa en |

| | | |
|---|---|---|
| | | forma correcta el renglón correspondiente a $t=1{,}5$. |
| A2 g) ¿Qué sucede a los $t=1{,}5$ minutos de iniciado el movimiento? | Identificar E en $t=1{,}5$.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si brinda el máximo relativo de la función. | Relacionar el máximo relativo con el contexto del problema y con el cambio del crecimiento a derecha e izquierda del punto en cualquiera de los registros.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando está expresada la situación anterior y se hace referencia al contexto del problema. |
| A3 c) En esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b). | Identificar un máximo y un mínimo en registro gráfico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando brinda los dos extremos (en $x=0$ y $x=2$). | Relacionar ER con la derivada cero en dichos puntos en registro gráfico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando explica que hay un ER y lo relaciona con el valor de la derivada o, siguiendo las consignas de las actividades, escribe “queda igual” y lo relaciona con el valor cero de la derivada. |
| Actividades de descubrimiento: Grupo 2 (pág. 200) | | |
| A1d) Completar una tabla con el signo de $v(t)$ y el comportamiento de $h(t)$. | Volcar en una tabla la relación analizada en el ítem anterior. Lo consideramos CO debido a la guía detallada de la consigna. | |

| | | |
|---|---|---|
| | Consideramos nivel de éxito 1 si la tabla está completada correctamente para $t = 5$. | |
| A1 e) ¿qué sucede en el instante $t = 5$? ¿cuánto vale la derivada en dicho punto? ¿qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema. | | Relacionar los dos conceptos: derivada nula y ER en registro gráfico o analítico. Hacer referencia al contexto del problema en registro verbal.<br>Consideramos 1 si relaciona en forma correcta y expresa alguna interpretación sobre el contexto del problema. |
| A2 c) ¿Podemos determinar la concentración máxima? Si la respuesta es afirmativa ¿cuál es y cuándo se logra? | Identificar el máximo en el contexto del problema bajo registro gráfico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si expresa la máxima concentración y el tiempo en que sucede (puede omitir el signo de porcentaje). | |
| A2 e) Completar una tabla con el signo de $f'(t)$ y el comportamiento de $f(t)$. | | Volcar en una tabla el valor de $f'(2)$ en registro analítico. En este caso debe verificar analíticamente dicho valor.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si completa correctamente la tabla realizando en registro |

| | | |
|---|---|---|
| | | analítico el análisis del valor $f'(2)$. |
| A2 f) ¿Qué sucede en el instante $t=2$? ¿Cuánto vale la derivada en dicho punto? ¿qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema. | | Relacionar los dos conceptos: valor de la derivada $f'(2)$ igual a cero y ER y expresar la relación en el contexto del problema en registro verbal.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando esta relación está expresada para el ER y de alguna manera interpreta bajo el contexto del problema. |
| A3 c) ¿Qué sucedió en la empresa al cuarto año? | Identificar máximo bajo contexto en registro gráfico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si expresa que existe un máximo en $t=4$ | |
| A3 c) ¿Y al sexto? | Identificar mínimo bajo contexto en registro gráfico.<br>Consideramos nivel de éxito 1 si expresa que existe un mínimo en $t=6$ | |
| A3 d) Completar una tabla con el signo de $G'(t)$ y el comportamiento de $G(t)$. | | Completar la tabla con la información obtenida anteriormente y analizando la derivada en $t=4$ (no existencia). |

| | | |
|---|---|---|
| | | Consideramos nivel de éxito 1 si escribe que no existe la derivada y no completa nada más en dicho renglón. |
| | | Completar la tabla con la información obtenida anteriormente y analizando la derivada en $t = 6$. Consideramos nivel de éxito 1 si escribe que la derivada es cero o no tiene signo y completa en "no cambia" para $G(t)$. |
| Para reflexionar de acuerdo a lo analizado | | |
| Indicar los puntos críticos de las tres actividades | Identificar $t = 5$ como punto crítico de la A1. Consideramos nivel de éxito 1 si indica dicho punto. | |
| | Identificar $t = 2$ como punto crítico de la A2. Consideramos nivel de éxito 1 si indica dicho punto. | |
| | Identificar $t = 4$ y $t = 6$ como puntos críticos de la A3. Consideramos nivel de éxito 1 si indica los dos puntos. | |
| La función $f : R \to R / f(x) = x^3$ | Hallar el punto crítico de la función dada. | |

| | | |
|---|---|---|
| ¿tiene puntos críticos? Justificar | Consideramos nivel de éxito 1 si calcula el punto crítico $x=0$ justificando a través de la derivada de la función. | |
| Una función *puede* alcanzar valores máximos o mínimos para valores de x en los que…. | | Generalizar situaciones sobre puntos críticos y sobre ER. Consideramos nivel de éxito 1 cuando completa con expresiones como "en los puntos críticos" o "en los puntos en donde la derivada es cero o no existe" |
| Una función *alcanza* valores máximos o mínimos para valores de x en los que… | | Generalizar situaciones sobre puntos críticos y sobre ER.<br>Consideramos nivel de éxito 1 cuando completa con expresiones como "en los que existe un punto crítico y un cambio de signo de la derivada primera" o "existe un punto crítico y hay un cambio de crecimiento de la función" o similares. |

Tabla 8. Análisis de CO y CE sobre ER

Acorde a lo anteriormente establecido cada equipo tiene una puntuación para cada concepción que se obtiene promediando los niveles de éxito obtenidos correspondiente a cada concepto.

# CAPÍTULO 6: ANÁLISIS DE DATOS

*En este capítulo reportamos el análisis de los datos obtenidos durante la experimentación.*

*Dividimos el mismo en dos partes. En la primera exponemos el análisis a posteriori de la situación de aprendizaje, donde describimos las sesiones desarrolladas, presentando y examinando lo que realmente hicieron los estudiantes.*

*En la segunda analizamos los valores alcanzados por cada uno de los equipos en las CO y CE de cada uno de los conceptos a través de los indicadores definidos en el Capítulo 5 sección 5.3 y su performance en la resolución de los PO. Utilizamos la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales con el objetivo de resumir la información lograda.*

*Por último, y como parte del análisis a posteriori, presentamos las entrevistas realizadas a tres alumnos elegidos de acuerdo a su desempeño en la asignatura y al trabajo realizado durante todo el cuatrimestre.*

## 6.1 Primera parte. Puesta en escena y análisis a posteriori de la situación de aprendizaje

En este apartado describimos lo que realmente sucedió en la experiencia propiamente dicha de la situación de aprendizaje.

En primer lugar, brindamos el desarrollo general de la misma con los datos provenientes de las observaciones efectuadas por las profesoras. Luego analizamos el estudio de las producciones escritas de los alumnos detallando las respuestas a los diferentes ítems de las actividades y tratando de abarcar todas las situaciones presentadas. Consideramos las producciones de 27 equipos correspondientes a las resoluciones de todas las actividades propuestas en la situación de aprendizaje. Hicimos esta selección teniendo en cuenta que sus integrantes hayan asistido a todas las clases y hayan mantenido la conformación del grupo de trabajo durante todas las sesiones.

Posteriormente exponemos lo acontecido en el debate grupal, donde la profesora fue siguiendo la consigna de cada actividad preguntando por su resolución al grupo en general con el objetivo de concluir institucionalizando algún concepto, propiedad o relación.

Con todos estos datos realizamos un comentario global de cada sesión, haciendo una reflexión sobre los datos obtenidos, el análisis cognitivo realizado en el Capítulo 4 y otras investigaciones estudiadas.

### 6.1.1 Sesión 1. Actividades de exploración. Grupo 1

La sesión de trabajo comenzó a las 8 horas en el aula habitual.

Según el plan previsto, antes de repartir las hojas la profesora a cargo explicó cómo se realizaría el trabajo. La consigna de desarrollar los ejercicios a carpeta cerrada provocó nerviosismo por parte de los estudiantes. Una vez entregadas las copias se produjo un buen ambiente de trabajo, si bien hablaban entre los integrantes del grupo, no se hizo en voz alta, sino respetando a los demás. Observamos un gran interés de parte de todos los alumnos. Los notamos dispuestos a su tarea y en cada grupo percibimos la participación activa de los dos integrantes.

Durante el desarrollo de la primera actividad surgieron algunas preguntas que aclaramos para toda la comisión. Por ejemplo, los alumnos preguntaron si las respuestas sobre los IC e ID se debían escribir con notación de intervalo o en palabras. La docente señaló que debían hacerlo en notación de intervalo. Respecto a cómo indicaban los cambios de la variable dependiente, la profesora explicó que debían aclarar en qué intervalo estaban calculando cada cambio. No fue necesario repasar que el cálculo del mismo es la diferencia entre la imagen de un estado final y la imagen en un estado final.

Como fue previsto, los alumnos presentaron problemas para interpretar la última pregunta de la actividad: *¿Qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?* La docente los guió explicando que se trataba de la relación entre el signo de los cambios y los intervalos que hallaron en los ítems anteriores.

Solo dos equipos no reconocieron en forma correcta la variable dependiente (velocidad del automóvil) y la variable independiente (el tiempo), las mostraron intercambiadas. Algunos equipos señalaron también en la respuesta las unidades de ambas variables.

Respecto a los IC, el 82% de los equipos los indicó correctamente. En este momento adoptamos como válida la respuesta tanto si el intervalo brindado es abierto o cerrado. Tomamos esta decisión porque el concepto aún no ha sido definido formalmente. Tres equipos (11%) identificaron el crecimiento de la velocidad, pero utilizaron una notación que no era correcta (brindaron los números entre llaves). Uno de los equipos que no determinó los IC respondió “la velocidad aumentó en los intervalos $(0, 5)$ , $(1, 5)$, $(2, 5)$ y $(3)$”. Es decir, tomaron como intervalos los instantes donde se describe la velocidad del auto en la tabla. El otro equipo que indicó mal los IC dio como respuesta $[0,0.5) \cup [1.5,3]$. En este caso consideraron como IC el intervalo donde la función es constante.

En cuanto al ID y al intervalo donde la velocidad permanece constante, el porcentaje de equipos que respondieron bien fue 89%.

Un 63% de los equipos calculó bien los cambios de la variable dependiente usando notación apropiada e indicando unidades. Del resto, 8 equipos (30%) no colocaron las unidades correspondientes o utilizaron una notación confusa. Un equipo no brindó la respuesta y otro calculó el cociente incremental en cada uno de los intervalos.

Mostramos la respuesta a los cinco primeros ítems de un equipo que respondió todas en forma correcta:

a) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

VARIABLE DEPENDIENTE V(t) km/h ; VARIABLE INDEPENDIENTE T(horas).

b) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumentó?

(0 ; 0,5) U (1 ; 1,5) U (2 ; 3)

c) ¿En cuáles disminuyó?

(0,5 ; 1)

d) ¿En qué intervalos la velocidad no cambió?

[1,5 ; 2]

e) Calcular los cambios de la velocidad en intervalos de media hora.

⊕ $\Delta V(t) = V(0,5) - V(0) = 85\ \frac{km}{h} - 80\ \frac{km}{h} = 5\ \frac{km}{h}$

⊖ $\Delta V(t) = V(1) - V(0,5) = 70\ \frac{km}{h} - 85\ \frac{km}{h} = -15\ \frac{km}{h}$

$\Delta V(t) = V(1,5) - V(1) = 90\ \frac{km}{h} - 70\ \frac{km}{h} = 20\ \frac{km}{h}$

$\Delta V(t) = V(2) - V(1,5) = 90\ \frac{km}{h} - 90\ \frac{km}{h} = 0\ km/h$

$\Delta V(t) = V(2,5) - V(2) = 100\ \frac{km}{h} - 90\ \frac{km}{h} = 10\ km/h$

* SIGUE ATRÁS.

En cuanto a la relación entre los intervalos indicados (IC, ID e intervalo donde la función permanece constante) y el signo de los cambios tomamos como respuestas válidas tanto aquellas que indicaban que si el cambio es positivo la velocidad crece (similar para cambio negativo o cero) o la que afirmaba que si la velocidad crece el signo del cambio es positivo (ídem para las demás opciones). Si bien la implicación no es verdadera en los dos sentidos, en este momento los alumnos no podían evidenciar la diferencia entre ambas. Luego de realizada esta aclaración, 18 equipos (67%) efectuaron una relación correcta entre los dos conceptos, 4 omitieron la posibilidad del cambio igual a cero y 5 equipos no relacionaron los dos conceptos.

Mostramos como ejemplo el siguiente trabajo:

**f) ¿Qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?**

Podemos observar que en los intervalos donde la velocidad disminuye el $\Delta V(t)$ da negativo y cuando se mantuvo constante da cero y cuando aumentó, $\Delta V(t)$ nos da resultado positivo. Lo cual nos permite observar cuando la función es creciente, decreciente o constante.

En correspondencia al registro utilizado, esta actividad exigía obtener los datos desde el el registro numérico. Se podía optar por hacer un gráfico, pero ninguno de los equipos realizó conversión a este último.

Consideramos que se cumplió nuestra conjetura sobre el bajo nivel de dificultad de esta tarea. Nociones como la de IC, ID, intervalos donde la velocidad no varía, aún no definidas, fueron bien respondidas desde la intuición o conocimientos anteriores. Nos sorprendió para bien que la mayoría de los alumnos no demostraron inconvenientes en el momento de relacionar los intervalos con el signo del cambio de la velocidad en cada uno de los mismos.

En la actividad 2 muchos equipos consultaron sobre el IC y el intervalo de positividad (o ID e intervalo de negatividad), las docentes orientaron al respecto recordando la definición dada en clase sobre intervalos de positividad y negatividad e incentivando la lectura del gráfico dado.

Como anticipamos en lo planificado varios alumnos no entendieron la pregunta del ítem d): *¿Existe algún día del año donde la temperatura no varía?* Argumentaron que no encontraban un intervalo donde la temperatura fuera constante. La docente orientó al respecto indicando que debían centrarse en un día en forma "instantánea" e hizo la semejanza con un punto estacionario sin definirlo.

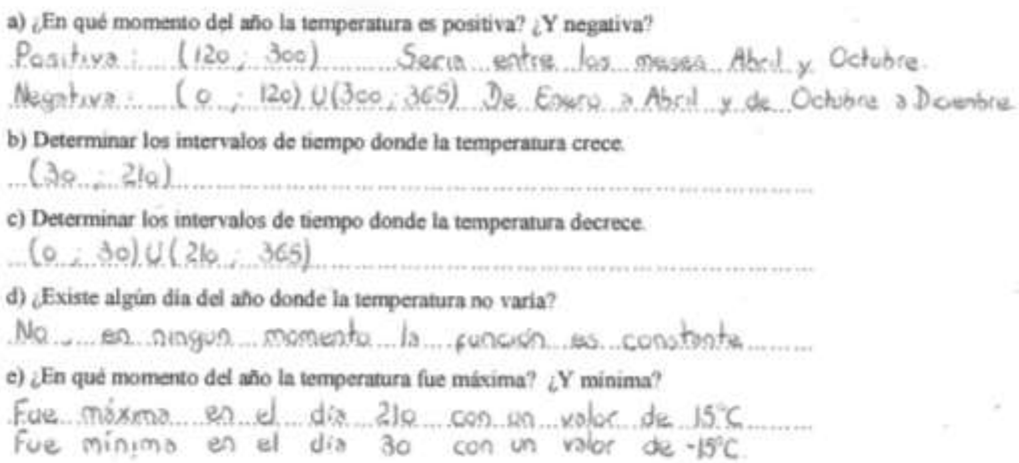
El 81% de los equipos indicó en forma correcta en qué intervalos la temperatura es positiva y en cuáles es negativa. Los restantes señalaron la respuesta como intervalos cerrados. En clase estudiamos intervalos de positividad y de negatividad de una función y ceros de la misma, razón por la cual consideramos que esta respuesta no era correcta.

En cuanto a los IC e ID, 20 equipos (un 74% del total) brindaron bien la respuesta. Los equipos restantes respondieron con los mismos intervalos, pero cerrados en todos los extremos.

En relación a la pregunta sobre un día del año en el cual la temperatura no varía, si bien se hizo la aclaración en el momento del trabajo, 12 equipos (44%) respondieron bien indicando los dos instantes ($t = 30$ y $t = 210$), un equipo contestó sólo en $t = 210$. Transcribimos algunas respuestas de los demás equipos (14 en total) a modo de ejemplo: “no existe día en el año donde la temperatura no varía” o “no, en ningún momento la función es constante” o, “no porque en cada día consecutivo existe un promedio distinto de temperatura”. En el momento de la planificación consideramos que los alumnos, ante esta pregunta, podían pensar en un intervalo donde la función es constante. Si bien se orientó al respecto, evidentemente no todos los alumnos escucharon a la profesora.

En cuanto al instante de temperatura máxima y mínima, 26 equipos (96% del total) contestaron correctamente, siendo 10 los equipos que dieron la respuesta completa señalando el día y la temperatura en el mismo. Un solo equipo no respondió.

Mostramos el trabajo de toda la actividad de uno de los equipos:



a) ¿En qué momento del año la temperatura es positiva? ¿Y negativa?

Positiva : (120 ; 300) Sería entre los meses Abril y Octubre

Negativa : (0 ; 120) U (300 ; 365) De Enero a Abril y de Octubre a Diciembre

b) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura crece

(30 ; 210)

c) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura decrece

(0 ; 30) U (210 ; 365)

d) ¿Existe algún día del año donde la temperatura no varía?

No en ningun momento la función es constante

e) ¿En qué momento del año la temperatura fue máxima? ¿Y mínima?

Fue máxma en el día 210 con un valor de 15°C

Fue mínima en el día 30 con un valor de -15°C

Con respecto a los registros esta actividad demandaba obtener los datos a través del registro gráfico. Los alumnos interpretaron sin dificultades el mismo en cuestiones todavía no trabajadas en clase como IC, ID y ER. El único inconveniente, en aproximadamente la mitad de los equipos, fue identificar el instante de estabilidad de la temperatura.

En la actividad 3 solicitamos obtener las dimensiones de un tablero rectangular con perímetro dado del cual se requiere área máxima. De acuerdo con lo planificado en el análisis a priori, no brindamos ninguna orientación ya que nuestro objetivo era analizar qué estrategias empleaban los alumnos para resolver un PO simple en el que no se debía usar el concepto de derivada.

En el momento de trabajo sólo sugerimos resolverla en forma analítica, pero también se dio la posibilidad de plantearla en registro numérico o gráfico, siempre enfatizando la justificación de lo hecho.

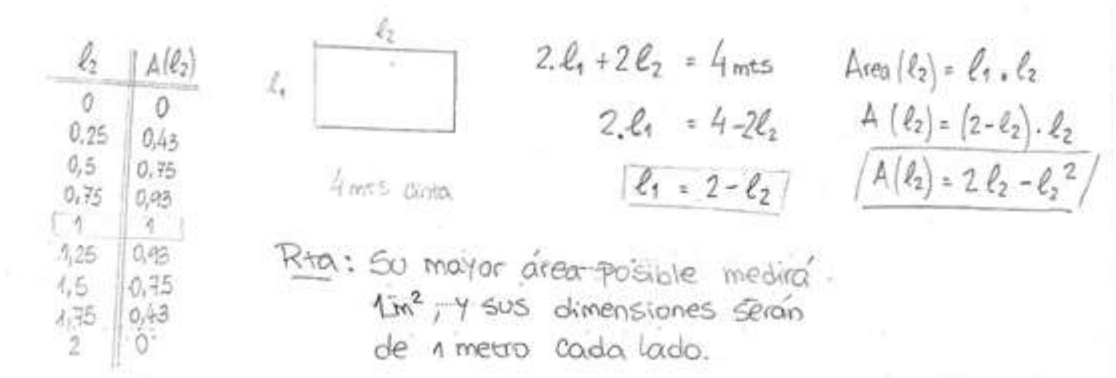
El 44% de los equipos (12 en total) hizo un esquema de un rectángulo que representaba el tablero y aclararon en el mismo el nombre de las variables. Un solo equipo no hizo el esquema, pero expresó el significado de cada variable en forma verbal. De los demás, 12 equipos no realizaron esquema alguno de la situación planteada ni indicaron qué significado tienen las variables con las que luego trabajaron. Dos equipos no hicieron la actividad.

El 85% de los equipos escribió la relación que tienen la base y la altura del rectángulo a través de su perímetro igual a 4 metros. Un total de 25 equipos (93%) señaló la fórmula del área del rectángulo.

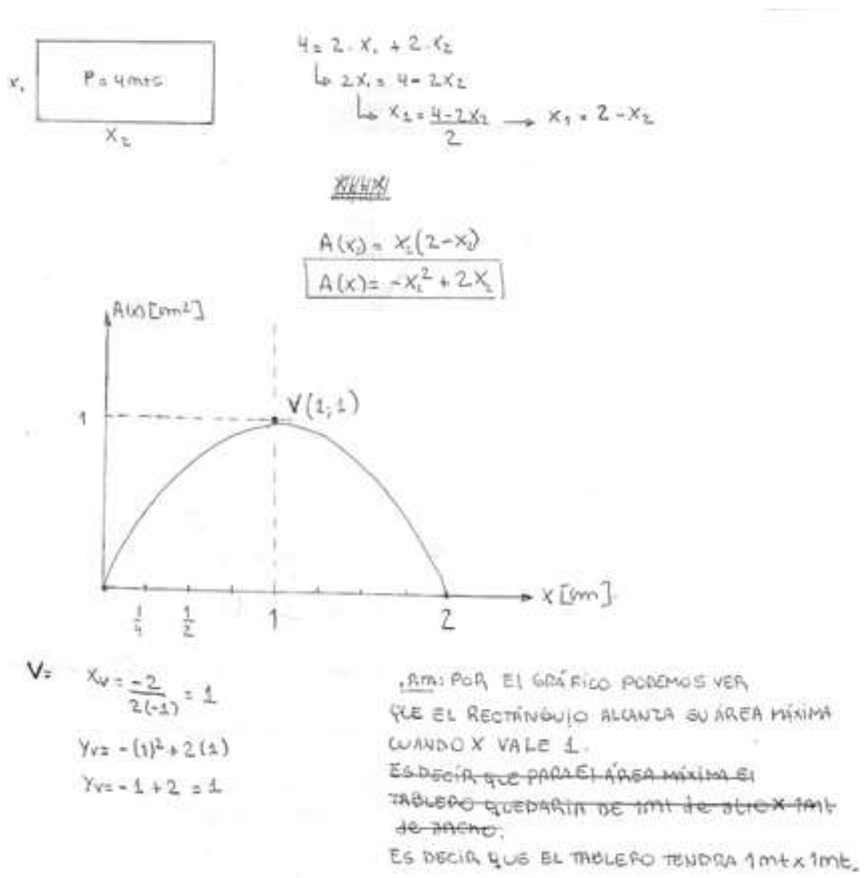
Del total de equipos que hizo la actividad, en dos producciones no pudimos comprender los pasos realizados, quedando un total de 23. Todos estos equipos reemplazaron una de las variables en la fórmula del área teniendo en cuenta la relación entre las mismas, siendo dos equipos los que terminaron su resolución en este paso.

De los 21 equipos restantes, 16 resolvieron bien el problema (aproximadamente 60% del total), siendo 11 equipos los que obtuvieron la respuesta en forma analítica planteando la función cuadrática y completando la misma con un gráfico de dicha función. Cuatro equipos hallaron el vértice de la parábola sólo en forma analítica y a través del mismo brindaron la respuesta. Un equipo luego de planteada la función área en términos de una variable trabajó con registro numérico, realizando una tabla de valores y obteniendo de la misma el máximo de la función.

Mostramos el trabajo de dos de los 16 equipos mencionados anteriormente. En el primero los alumnos usaron registro analítico para plantear las funciones y luego hallaron el área a través de una tabla:




En el segundo trabajo que mostramos los estudiantes trabajaron con registro analítico y gráfico:




Comenzamos la puesta en común a las 10 y 15 horas, luego de haber establecido un pequeño receso, siendo el ambiente de la clase disperso. Los alumnos hablaban y se notaban cansados.

Empezamos con la actividad 1. La profesora indicó que el problema estaba dado en registro numérico, no hizo el gráfico correspondiente. Los alumnos respondieron bien a la variable dependiente e independiente (con unidades), asimismo los IC e ID.

Los cambios de la variable dependiente fueron dictados por algunos alumnos en forma correcta. La docente enfatizó la notación delta y las unidades de cada cambio, así como también su signo. La respuesta también fue acertada en cuanto a la relación entre el crecimiento y el signo del cambio. En este momento la docente no explicó que la implicación correcta es, por ejemplo: "Si $v(t)$ es creciente en el intervalo $(t_1, t_2)$ entonces $\Delta v = v(t_2) - v(t_1) > 0$" y no el condicional recíproco. Esto fue aclarado en la clase siguiente.

Un alumno relacionó la actividad con el concepto de aceleración. La profesora explicó que el mismo tiene que ver con el cociente de cambios y que en esta oportunidad estaba hablando de cambio solamente de la variable dependiente.

En la actividad 2 la docente comenzó indicando el registro de la misma: gráfico. Los alumnos que respondieron respecto a los intervalos de positividad y negatividad lo hicieron en forma correcta. También los estudiantes brindaron acertadamente los IC e ID, surgiendo la duda de incluir o no a los extremos del intervalo dominio de la función.

En la situación que solicitamos las respuestas notamos que los alumnos hablaban, estaban dispersos y contestaban siempre los mismos. Consideramos que las causas de la escasa participación y la poca atención pudieron ser el cansancio de realizar las actividades, la falta de costumbre al debate y a la puesta en común y el hecho que no debían escribir, sino explicar qué habían realizado en sus producciones. Suponemos también que por temor a la equivocación muchos alumnos no daban su opinión.

Para volver la atención de la clase la docente pidió que sacaran los cuadernos ya que iba a definir conceptos nuevos de acuerdo con lo trabajado hasta el momento. Es allí donde notamos que volvieron a concentrarse.

La profesora definió en el pizarrón crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo abierto y, en conjunto con toda la clase, se analizó la implicación. Explicó otros ejemplos de funciones crecientes o decrecientes, siguiendo lo planeado en el análisis a priori (punto 5.2.5.1). Luego retomó el gráfico de la actividad 2 y volvió a repasar los IC e ID de esa función en contexto.

A la pregunta del ítem f) de esta actividad: *¿existe algún día del año donde la temperatura no varía?* los alumnos la contestaron con dudas y si bien la docente explicó qué pasaba en ese punto de “no cambio”, por qué se tomaba como punto en que la función no cambia en forma instantánea, esta situación no quedó clara. Recordemos que los alumnos en ese momento no sabían el concepto de derivada.

Respecto a los máximos y mínimos de la función que describía la temperatura en Alaska, algunos alumnos contestaron con el punto completo $(210, 15)$, $(30, -15)$ y otros sólo con el tiempo.

Luego la profesora definió formalmente máximos y mínimos absolutos de una función y brindó los ejemplos planteados en el análisis a priori, graficando todas las funciones y dejando todos los gráficos juntos en el pizarrón. Retomó el gráfico de la actividad 2 para ubicar el máximo y el mínimo absolutos. A partir de la función de grado cuatro definió máximo relativo y mínimo relativo. Repasó todos los casos nuevamente, explicando uno por uno la existencia o no de un ER.

Paso seguido enunció el teorema de Weierstrass: "Si una función $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo". Esto si bien no estaba planificado con anterioridad, la profesora consideró que el tiempo era suficiente como para poder explicarlo y examinarlo entre todos.

Para analizar el teorema retomó los ejemplos del pizarrón en los cuales la función estaba definida en un intervalo cerrado y era continua en el mismo, así como también el de la actividad 2. Luego agregó el gráfico de otra función que tenía la característica de ser continua en un intervalo abierto y no en el correspondiente intervalo cerrado.

Por último, resolvió junto a la clase, la actividad 3 en el pizarrón.

El clima de trabajo fue de a momentos muy bueno y respetuoso, aunque en otros dispersos. Algunos estudiantes se animaron a contestar más, otros no respondieron a ninguna pregunta.

Esta fue la primera puesta en común, posiblemente la voz de los grupos que más entendían los conceptos resaltó sobre los demás.

Luego de analizar las producciones de los alumnos y reflexionar sobre la puesta en común, consideramos que logramos los propósitos establecidos para esta sesión de trabajo. Pudimos explorar que la mayoría de los alumnos reconoce la variable dependiente e independiente de una función bajo contexto. A su vez no evidencian dificultades en identificar los intervalos de temperatura positiva o negativa en la actividad de la función que modela la temperatura en Alaska.

Respecto a las ideas intuitivas sobre IC, ID, los alumnos interpretan en forma correcta dichos intervalos en funciones dadas en registro numérico y gráfico.

Los estudiantes pueden relacionar los IC, ID e intervalos de función constante con los signos de los cambios, primera aproximación para luego llegar a la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de una función.

La actividad 3 es la que mayores dificultades ocasionó en los alumnos. Si bien la profesora a cargo no lo notó en el momento de la puesta en común, sí lo evidenció cuando leyó producción por producción. Igualmente nos sorprendió para bien el número de equipos que pudieron resolverla (60% del total).

En el análisis cognitivo señalamos la investigación de Baccelli et al. (2014) en la que se evalúa el desempeño de los alumnos en la resolución de PO desde el enfoque ontosemiótico. Uno de los resultados obtenidos es que el mayor obstáculo que tienen los alumnos es expresar la función a optimizar en términos de una de sus variables. En nuestro caso los resultados discrepan con éstos, ya que la mayoría de los equipos es capaz de escribir el área del rectángulo en función de uno de sus lados.

Una de las dificultades que evidenciamos en los equipos que intentan resolver el problema y no lo logran, se centra en el concepto de número. Algunos alumnos sólo identifican un cuadrado de lado uno como el único rectángulo que se puede formar con perímetro cuatro, es decir, no pueden reconocer la existencia de medidas de otro rectángulo (por ejemplo, de base 1,5m y altura 0,5m). Este obstáculo debe ser superado si queremos lograr la construcción de un pensamiento variacional en nuestros alumnos. Cantoral (2013) indica al respecto que la comprensión de procesos matemáticos específicos como el de número y variable son indispensables para lograrlo.

Varios equipos pueden plantear la función área en una variable, pero no la identifican como una función cuadrática de la cual saben calcular el vértice y de allí deducir el máximo de la misma. Esto muestra que, a pesar de tener conocimientos previos para poder resolverlo, no logran integrarlos y llegar a una estrategia de solución.

Continuando sobre este comportamiento, los estudiantes tampoco logran coordinar registros de representación. Ante la función área en una variable, podrían haberla graficado o realizado una tabla con valores para hallar su máximo. En efecto, son varias las investigaciones que indican que los estudiantes usan pocos registros de representación, tienen una manipulación excesiva sobre la expresión analítica de la función inducida por la necesidad de realizar operaciones con las variables y no utilizan el registro gráfico para deducir o argumentar (Guerrero, 2002; Cardona, 2009; Cuesta, 2007; Marcolini, 2003, Vrancken, 2011; Simón y Miguel, 2013; Guzmán et al., 2010; Guzmán y Rodríguez, 2013).

Otro resultado obtenido que tiene similitud con la investigación de Cuesta (2007) es que el conocimiento geométrico influye sobre la comprensión de la consigna. Varios equipos consideran que un cuadrado no es rectángulo, siendo un impedimento en el momento que se está arribando a la solución del problema. Si bien lo aclaramos en voz alta en dos oportunidades en el momento de trabajo, algunos equipos continúan con esa idea.

### 6.1.2 Sesión 2. Actividades de exploración. Grupo 2

La sesión de trabajo comenzó a las 10 y 45 horas en el aula habitual. Los alumnos estaban familiarizados con la forma de trabajo, manifestaron muy buena predisposición e interés y notamos la participación de los dos integrantes del equipo.

Días previos a esta actividad desarrollamos el tema derivada. Introducimos el concepto desde la velocidad instantánea y desde el problema de hallar la recta tangente a una curva en un punto determinado. Trabajamos con reglas de derivación y propiedades.

Tal como estaba previsto (punto 5.2.5.2) no brindamos orientación ni contestamos preguntas.

Todos los equipos respondieron bien al indicar el valor de la imagen de la función en $x = 2$. Como consideramos bien que la justificación, en este caso, sea mediante registro gráfico, la mayoría respondió con expresiones similares a "por gráfico", "lo vemos en el gráfico" o "porque se puede observar en la gráfica".

Respecto a la derivada de la función en $x = 2$, cinco equipos (18% del total) marcaron la opción correcta, $f'(2) = -1$, y justificaron bien su respuesta.

Transcribimos las justificaciones de estos cinco equipos:

> "la pendiente de la recta tangente en el punto $x = 2$ es igual a -1 por lo que la $f'$ es -1"
>
> "es la pendiente de la recta tangente que como se ve en el gráfico es -1"
>
> "$f'(2) = m_t$, como en el gráfico la tangente baja de a un lugar $f'(2) = -1$"
>
> "la derivada en $x = 2$ es la pendiente de la recta tg en ese punto y gráficamente se deduce que es $f'(2) = -1$"

Dos equipos marcaron bien el valor, pero justificaron mal. Uno de ellos argumentó "el valor de la derivada en $x = 2$ y $x = 4$ es -1 porque la derivada del punto de la recta tangente no cambia". No comprendimos esta justificación razón por la cual luego entrevistamos a los integrantes de este equipo.

El otro equipo que marcó el valor -1 y no justificó correctamente escribió "la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{4-0}{0-4} = -1$".

Expresaron mal la pendiente de la recta, pero el valor les dio correcto.

De los 20 equipos restantes, 19 (70% del total) marcaron la opción que indicaba que la derivada $f'(2) = 2$. Un equipo no respondió.

Seis equipos calcularon la ecuación de la recta tangente en forma correcta ( $y = -x + 4$) y para calcular $f'(2)$ reemplazaron $x$ por 2 en dicha función, esto también lo hicieron para justificar que $f'(4) = 0$.

De los 13 equipos restantes, 5 sólo justificaron su elección con la frase "por gráfico". Tres equipos argumentaron indicando que $f(x)$ y $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ comparten la misma imagen. Esta expresión suponemos que mostró la confusión sobre el hecho que la recta tangente y la función $f$ tienen intersección en el punto de tangencia.

Un equipo respondió "la pendiente de la tangente en 2 es 2" y otro "por definición de derivada". Los tres equipos restantes no justificaron su elección.

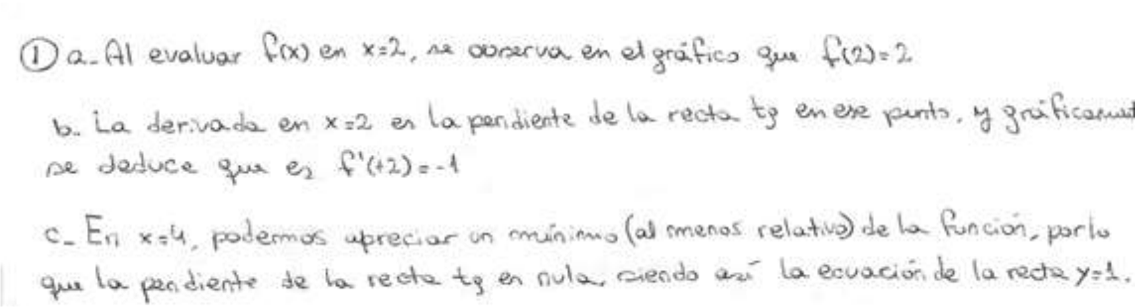
Respecto al ítem C) donde la opción correcta era $f'(4) = 0$ y la justificación era que la recta tangente en ese punto es horizontal y por lo tanto su pendiente es 0, sólo tres equipos (11% del total) marcaron bien la opción y lo fundamentaron bien.

Uno de los equipos que respondió bien justificó "en $x = 4$ la función no crece ni decrece"; otro "como la derivada en un punto de cierta función es la pendiente de la recta tangente entonces en $x = 4$ la pendiente será cero ya que en el gráfico se puede observar una recta horizontal $y = 1$". El otro equipo respondió "en $x = 4$ podemos apreciar un mínimo relativo de la función, por lo que la pendiente de la recta tangente es nula, siendo la ecuación de la recta $y = 1$”

De los 24 equipos restantes, 18 marcaron la opción correcta, pero indicaron una justificación errónea. El 55% de este grupo reemplazó el valor $x = 4$ en la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ (recordemos que es $y = -x + 4$). El 33% justificó su elección con expresiones como “por gráfico”, a pesar de que habíamos indicado que no se admitían argumentaciones como ésta.

Luego del análisis de las producciones pudimos constatar nuestra conjetura sobre la dificultad de determinar la derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente en dicho punto. A su vez agregamos otra conclusión que no la consideramos en el análisis realizado con anterioridad y es sobre el ítem C), donde el punto tiene derivada cero. Una gran parte de los alumnos contestó bien, pero al observar la justificación, evidenciamos que el valor cero era obtenido reemplazando en la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

Mostramos la producción de uno de los equipos que respondió y justificó bien todos los ítems de esta actividad:

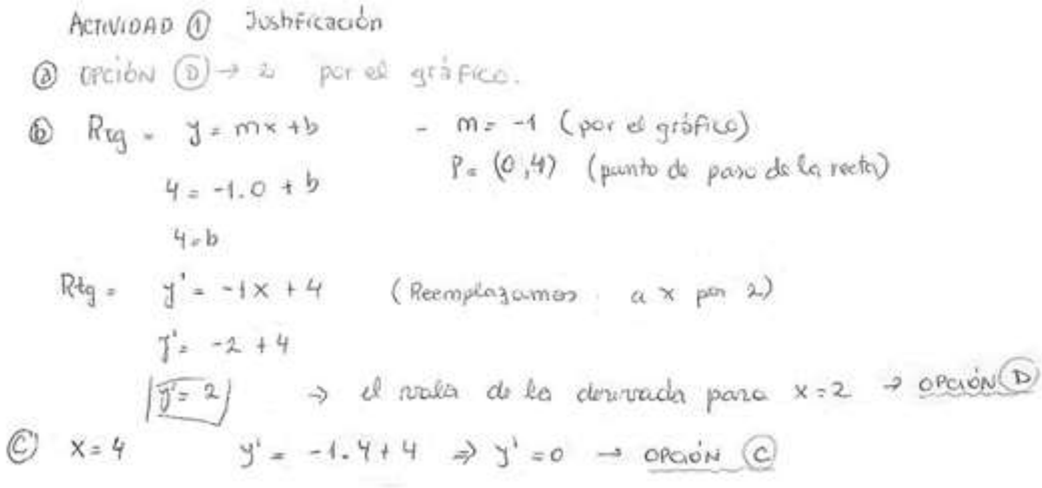


1 a- Al evaluar $f(x)$ en $x=2$, se observa en el gráfico que $f(2)=2$

b. La derivada en $x=2$ es la pendiente de la recta tg en ese punto, y gráficament se deduce que es $f'(+2)=-1$

c- En $x=4$, podemos apreciar un mínimo (al menos relativo) de la función, por lo que la pendiente de la recta tg es nula, siendo así la ecuación de la recta $y=1$.

A continuación, mostramos el desarrollo de un equipo que consideró a la ecuación de la recta como la función derivada de $f$ :


ACTIVIDAD ① Justificación

ⓐ OPCIÓN (D) → 2 por el gráfico.

ⓑ Rtg = $y = mx + b$  - $m = -1$ (por el gráfico)

$P = (0,4)$ (punto de paso de la recta)

$4 = -1.0 + b$

$4 = b$

Rtg = $y' = -1x + 4$ (Reemplazamos a x por 2)

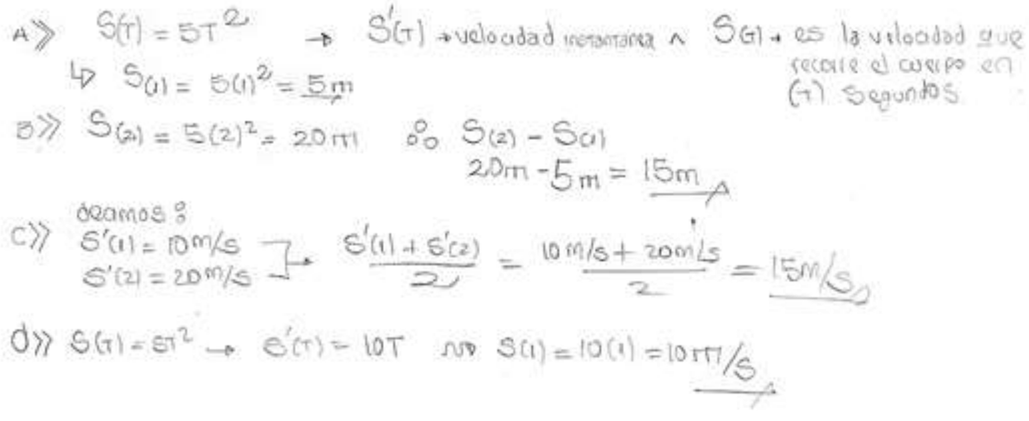
$y' = -2 + 4$

$\boxed{y' = 2}$ → el valor de la derivada para $x = 2$ → OPCIÓN (D)

ⓒ $x = 4$  $y' = -1.4 + 4 \Rightarrow y' = 0$ → OPCIÓN (C)

En la actividad 2 brindamos en registro analítico la distancia que recorre un cuerpo en caída libre en forma aproximada mediante la función $s(t) = 5t^2$ y efectuamos preguntas con opción múltiple. La mayoría de los equipos respondió bien a los dos primeros ítems. Un 67% de los equipos contestó en forma correcta el valor de la velocidad media del cuerpo en el intervalo $[1, 2]$ realizando el cálculo correspondiente con sus unidades. De los equipos restantes encontramos diversos cálculos y justificaciones. Por ejemplo, un equipo realizó la cuenta $s'(2) - s'(1)$ y marcó el valor 5m/s. Otro equipo calculó la velocidad instantánea en $t = 1{,}5$, obteniendo el valor 15m/s.

Mostramos la producción del último equipo que, para responder este ítem, hicieron el promedio de las derivadas en $t = 2$ y $t = 1$.


A≫ $S(T) = 5T^2$ → $S'(T)$ → velocidad instantánea ∧ $S(T)$ → es la velocidad que recorre el cuerpo en (T) segundos

↳ $S(1) = 5(1)^2 = 5m$

B≫ $S(2) = 5(2)^2 = 20m$ ∴ $S(2) - S(1)$

$20m - 5m = 15m$

C≫ obramos:

$S'(1) = 10m/s$

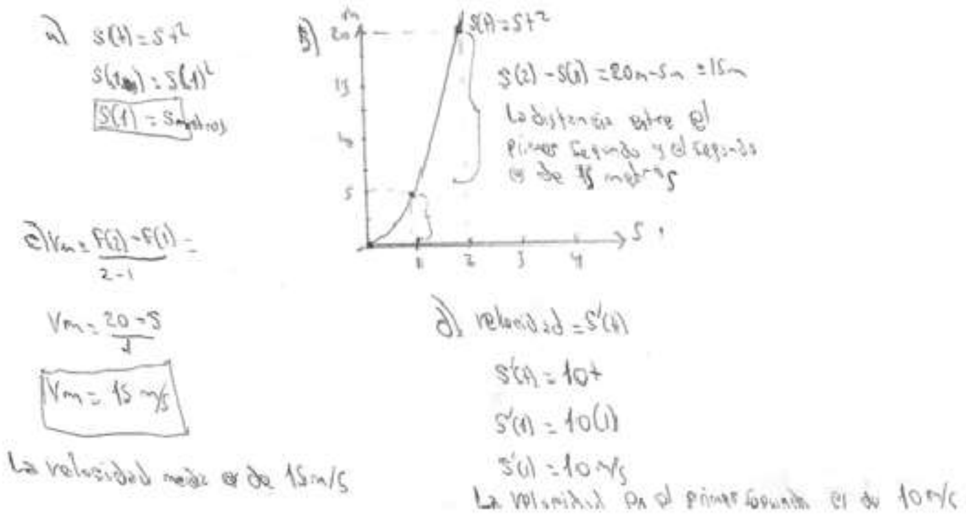
$S'(2) = 20m/s$ → $\frac{S'(1) + S'(2)}{2} = \frac{10m/s + 20m/s}{2} = 15m/s$

d≫ $S(T) = 5T^2$ → $S'(T) = 10T$ ⇝ $S(1) = 10(1) = 10m/s$

El 85% de los equipos indicó el valor de la velocidad instantánea en $t = 1$, y justificaron bien su respuesta.

De los tres equipos que contestaron mal, uno calculó bien la función derivada escribiendo $s'(t) = 5{,}2t$ pero al reemplazar por $t = 1$ obtuvieron el valor 5m/s. Otro equipo calculó el límite de la función derivada cuando t tiende a 1, resultando el valor 10m/s. El siguiente grupo halló como velocidad instantánea la velocidad media en el intervalo $[0, 1]$.

Presentamos la producción de un equipo que eligió bien las opciones y las justificó correctamente:




La puesta en común tuvo su momento de mayor interés cuando se produjo la discusión sobre el valor de $f'(2)$. Las respuestas se dividieron entre dos valores, algunos alumnos respondieron -1 y otros 2. Un alumno justificó en voz alta “si la derivada es el valor de la pendiente de la recta tangente y su pendiente es -1 entonces la derivada es -1”. La profesora repitió lo que dijo el alumno y consultó al resto de la clase qué opinaba al respecto. Se produjo bullicio, desorden y muchos comentarios entre los estudiantes. Para volver a captar la atención la docente propuso calcular la ecuación de la recta tangente a través de los datos brindados por el gráfico. Lo hizo en el pizarrón, con la ayuda de los alumnos obteniendo la ecuación de dicha recta $y = -x + 4$.

En este momento una alumna explicó que ellos respondieron con el valor 2 porque es el valor que se obtiene reemplazando $x$ por 2 en la ecuación de la recta. Otros opinaron lo mismo. La docente pidió atención y explicó que la ecuación obtenida es la ecuación de la recta tangente a $f$ en $P(2, f(2))$ pero no la función derivada de la función dada.

Luego preguntó a toda la clase: "Si $y = -x + 4$ es la recta tangente a $f$ en $P(2, f(2))$ ¿qué datos nos da esa ecuación sobre $f$ en ese punto?" Todos hicieron silencio, nadie respondió esperando que la profesora continúe la explicación. La docente prosiguió con la respuesta.

Al solicitar la respuesta del ítem C) varios alumnos admitieron haber justificado en forma incorrecta, de acuerdo a la explicación anterior.

La docente graficó otras rectas tangentes a la curva en diferentes puntos para que el grupo pudiera observar cómo al cambiar el punto, cambia la recta tangente.

La puesta en común finalizó de acuerdo con lo previsto en el análisis a priori y como resumen de lo estudiado la profesora realizó el cuadro expuesto en la página 184.

En los resultados de este segundo grupo de actividades de exploración observamos, como conclusión principal, la falta de dominio de la interpretación geométrica de la derivada. Este aspecto posee coincidencias con otras investigaciones en relación con las dificultades de nuestros alumnos. Por ejemplo, en Dolores (2000) el 8,9% de los alumnos responde bien en la misma situación. En una experiencia realizada en nuestra cátedra con el mismo enunciado, un 18% de los alumnos marca la opción correcta, siendo que en este caso no pedimos justificación.

Si pretendemos que en las actividades siguientes los alumnos por sí mismos puedan relacionar el signo de la derivada primera con el crecimiento o decrecimiento de la función, deben relacionar la pendiente de la recta tangente con el valor de la derivada en el punto. Si bien en clase, desde la teoría, introdujimos el concepto de derivada desde la velocidad en la física y desde su interpretación geométrica, esto sin lugar a duda no es suficiente. Antes de esta actividad realizamos ejercicios en el pizarrón que involucran esta interpretación, pero suponemos que el trabajo fue mayor en registro analítico, razón por la cual los estudiantes tienen dificultades para extraer esta información desde el registro gráfico.

Observamos, en esta y en el grupo de actividades anterior, un alto grado de respuestas correctas en todos aquellos incisos que requieren algún tipo de cálculo discrepando con las dificultades para interpretar y responder preguntas sobre representaciones gráficas. Los alumnos pueden usar las gráficas para extraer información directa sobre cuestiones simples como los valores de la variable independiente y dependiente. Pero en los casos que van más allá de esa lectura de datos, por ejemplo, el de obtener en forma visual la pendiente de la recta y relacionarla con la derivada en el punto, recurren a un procedimiento analítico el cual es erróneo. Como planteamos en el análisis cognitivo y como resultado de numerosas investigaciones (Cardona, 2009; Cuesta, 2007; Marcolini, 2003; Habre y Abboud, 2006, Ariza, 2014), los alumnos tienen dificultad para expresar relaciones planteadas en entorno gráfico y poseen una manipulación excesiva sobre la expresión analítica.

Los resultados fueron mejores en la actividad que involucra la derivada como velocidad de un cuerpo que cae.

Un aspecto que nos sorprende es la cantidad de equipos que interpretaron el concepto de velocidad media como un promedio de velocidades o un cociente incremental de velocidades. Este concepto fue trabajado en clase, con tablas en registro numérico, quizás la consigna confundió la respuesta. Esto también lo contemplamos en el análisis cognitivo y en concordancia con otras investigaciones que manifiestan que algunas expresiones en lenguaje verbal no son comprendidas por los alumnos (Cardona, 2009; Cuesta, 2007).

A pesar de estas cuestiones estamos conformes con el desarrollo de la actividad. Luego del debate en común, muchos alumnos manifestaron comprender recién en ese momento la interpretación geométrica de la derivada.

Estas actividades, donde exploramos los conocimientos previos e intuitivos de los estudiantes, son base para las próximas, razón por la cual nos permiten prestar atención a los aspectos más débiles.

### 6.1.3 Sesión 3. Actividades de descubrimiento. Grupo 1.

El trabajo en el aula comenzó puntualmente a las 8 horas con la presencia de 54 alumnos y las dos profesoras. La docente-investigadora repasó los conceptos ya estudiados en clase y trabajados en actividades anteriores de acuerdo con lo planeado en el análisis a priori de la sección 5.2.5.3, con un problema bajo contexto en registro gráfico.

Junto con los alumnos la docente extrajo información del gráfico sobre las variables intervinientes: la cantidad de miligramos del remedio en el organismo como variable independiente y la temperatura del cuerpo ante la reacción al mismo, como variable dependiente. Enfatizó que se trataba de una situación de variación donde la variable independiente no era el tiempo. Para repasar lo estudiado hasta el momento hizo las siguientes preguntas al grupo en general: *¿Para qué cantidad de medicamento la temperatura aumenta? ¿Cuándo disminuye? ¿Para qué cantidad de medicamento el organismo alcanza una temperatura máxima? ¿y mínima?*

La profesora reforzó conceptos explicados en actividades anteriores como la diferencia entre ER y extremos absolutos.

Ante la pregunta *¿qué unidades tiene la derivada de esta función? ¿qué significa bajo el contexto del problema?* no hubo respuesta.

Entonces la docente escribió la expresión analítica de la función como ayuda para determinar las unidades solicitadas: $T(m) = \dfrac{m^2(36-m)}{4800} + 36$ y la derivaron todos juntos, repasando las reglas de derivación.

La profesora reiteró la pregunta, pero tampoco obtuvo respuesta. Entonces invitó a los alumnos a plantear el cociente incremental y pensar qué unidades poseía el mismo. De esta forma los alumnos evidenciaron que la derivada tenía unidades °C/mg. La docente explicó qué significa bajo el contexto del problema y brindó el ejemplo de $T'(8)$, calculando el valor e interpretándolo.

Todo lo desarrollado permaneció en el pizarrón, siendo una forma de orientar la resolución de la nueva actividad.

Los alumnos comenzaron a trabajar a las 8 y 30 en un tono bajo de voz, creando un clima tranquilo en el aula. Mientras leían y discutían entre los miembros del equipo, las dos profesoras caminaban entre los bancos observando el trabajo de los mismos.

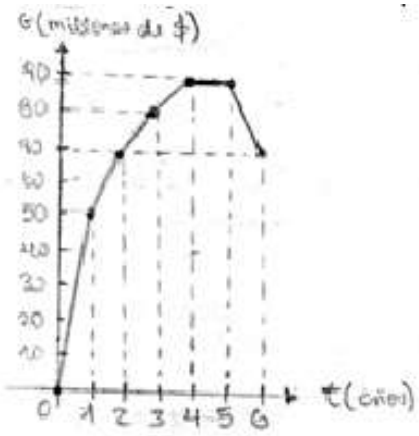
Durante la actividad 1 explicamos, en varias oportunidades, que el instante $t = 0$ correspondía al año 2007 para calcular las razones de cambio.

Varios equipos preguntaron sobre el signo del número cero, a lo cual la profesora respondió que el cero no tiene signo. También algunos alumnos consultaron si tenían que dejar los cálculos de la razón de cambio media en la hoja o los podían hacer dada la simplicidad de la cuenta. Se les contestó que, en este caso, podían escribir directamente el resultado.

No tuvimos necesidad de repasar el concepto de razón de cambio media como habíamos anticipado en la planificación previa. Sí fue necesario aclarar sobre las unidades que tienen estos cocientes y solicitamos que las dejaran indicadas.

Los alumnos no evidenciaron problemas para completar la segunda tabla.

Todos los equipos realizaron un gráfico de las ganancias en función del tiempo marcando en forma correcta los puntos. Son dos los equipos que graficaron teniendo en cuenta las consideraciones que indicamos en el momento del trabajo: que empiece en $t = 0$ correspondiente al año 2007, con las variables indicadas en los ejes y sus respectivas unidades. Mostramos el gráfico de uno de ellos:



Cuatro equipos efectuaron un gráfico completo, pero comenzaron a considerar la variable independiente desde $t = 2007$. Tres equipos realizaron el gráfico desde $t = 0$ y escribieron el nombre a las variables en los ejes, pero omitieron sus unidades.

Aproximadamente un 60% de los equipos graficó indicando las variables del problema sin unidades y comenzando con el año 2007. Dos equipos comenzaron en 2007 y no indicaron ni las variables ni las unidades correspondientes a cada una.

Esto nos muestra que los alumnos en ciertas oportunidades están tan concentrados en lo que están haciendo que no escuchan las indicaciones del profesor, a pesar de reiterarlas en diversas oportunidades. También desde la consigna señalamos tomar el año 2007 como $t = 0$.

Respecto a la tabla en la que hay que completar con los IC, ID y cuando la ganancia no posee cambios, con las razones de cambio promedio y su signo; 20 equipos (74% del total) la completaron bien. Cabe aclarar que, de estos equipos, 3 pusieron las unidades sin la palabra millón, es decir, indicaron por ejemplo la primera razón de cambio como 50$/año en vez de 50millones $/año. Vemos la siguiente producción:

| Intervalo | Ganancia (aumenta, disminuye, queda igual) | Razón de cambio promedio $\frac{\Delta G}{\Delta t}$ | Signo de la razón de cambio promedio |
|---|---|---|---|
| $0 \leq t \leq 1$ | Aumenta | 50 $/Años | + |
| $1 \leq t \leq 2$ | Aumenta | 20 $/Años | + |
| $2 \leq t \leq 3$ | Aumenta | 10 $/Años | + |
| $3 \leq t \leq 4$ | Aumenta | 10 $/Años | + |
| $4 \leq t \leq 5$ | Queda igual | 0 $/Años | |
| $5 \leq t \leq 6$ | Disminuye | 10 $/Años | − |

Otro equipo respondió con la notación 50m$/t, considerando la variable independiente como la unidad correspondiente.

De los siete equipos restantes, tres omitieron las unidades y dos indicaron sólo las unidades de la variable dependiente. Así la primera razón de cambio que obtuvieron es 50 millones $. Dos equipos confeccionaron mal la tabla. Uno en la primera columna escribió el valor de la razón de cambio media acompañado de la palabra aumenta o disminuye o queda igual, dependiendo del caso. En la segunda columna escribieron valores que no podemos vislumbrar cómo fueron calculados. El otro equipo que elaboró mal la tabla, en la primera columna completó con los valores de la razón de cambio media y en la segunda con los intervalos de la variable dependiente, por ejemplo, en el primer renglón indicaron $50-0$, en el segundo $70-50$ y así sucesivamente. Mostramos este último:

| Intervalo | Ganancia (aumenta, disminuye, queda igual) | Razón de cambio promedio $\frac{\Delta G}{\Delta t}$ | Signo de la razón de cambio promedio |
|---|---|---|---|
| $0 \leq t \leq 1$ | 50 mP | [illegible] | + |
| $1 \leq t \leq 2$ | 20 mP | 70 - 50 | + |
| $2 \leq t \leq 3$ | 10 mP | 80 - 70 | + |
| $3 \leq t \leq 4$ | 10 mP | 90 - 80 | + |
| $4 \leq t \leq 5$ | 0 MP | 90 - 90 | 0 |
| $5 \leq t \leq 6$ | -20 mP | 70 - 90 | - |

Respecto a la última tabla 26 equipos la completaron correctamente. El equipo que lo hizo mal en la fila correspondiente a la posibilidad que la función sea constante pusieron el signo del cambio como positivo en vez de colocar cero.

A las 8 y 50 los alumnos comenzaron a elevar un poco la voz, pero el clima de trabajo continuó tranquilo. En este momento la mayoría de los equipos comenzó la actividad 2.

En esta actividad brindamos en registro analítico la posición de una partícula en metros, en función del tiempo en que se mueve, en minutos. Somos conscientes que esta posición con referencia a un punto conlleva inconvenientes en su comprensión. De acuerdo lo planificado (análisis a priori sección 5.2.5.3), decidimos orientar al respecto. Cuando todos los equipos estaban resolviendo esta actividad, la profesora explicó al grupo en general, lo que significaba una posición a la derecha de un punto tomado como origen y a la izquierda y su relación con el signo de dicha función.

Luego pedimos calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante $t$ y en algunos puntos determinados. Algunas preguntas que surgieron por parte de los alumnos al respecto fueron:

- ✓ Cuando se pide la velocidad de la partícula ¿es velocidad media o instantánea? La docente orientó aconsejando leer bien la consigna que indicaba en cualquier instante $t$ .

- ✓ ¿Tenemos que hacer la derivada por definición? La profesora contestó que podían derivar por reglas de derivación o por definición, como ellos preferían.

En varias oportunidades recalcó que no debían olvidar las unidades correspondientes cuando indicaban los valores de la velocidad en distintos instantes de tiempo.

Solicitamos graficar ambas funciones, posición y velocidad, en un mismo par de ejes cartesianos. Algunos alumnos preguntaron cómo podían graficar si el eje $y$ tenía distinta variable dependiente y distintas unidades. La profesora contestó que indicaran el eje $y$ sin variable dependiente, que la intención era graficar las dos funciones para poder comparar comportamientos de las mismas.

No fue necesario hacer el gráfico de $s(t)$ en el pizarrón como habíamos planificado en el análisis anteriormente mencionado. Los estudiantes se ayudaron con los valores de la tabla. La profesora guio al grupo en general sobre la relación entre los dos gráficos. En forma oral fue preguntando*: ¿qué sucede con la velocidad cuando la partícula avanza?, ¿qué sucede con el signo de la velocidad cuando la partícula vuelve al punto de partida?, ¿pueden relacionar el movimiento de la partícula con el signo de la velocidad?*

Por último, hicimos tres preguntas. Dos que relacionaban el crecimiento o decrecimiento de $s(t)$ con el signo de la velocidad y la tercera: *¿qué sucede a los 1,5 minutos de iniciado el movimiento?* Algunos alumnos no comprendieron esta última consigna, la profesora indicó que señalaran qué pasaba tanto en $s(t)$ como en $v(t)$ en ese instante de tiempo.

Un total de 26 equipos calculó en forma correcta la velocidad de la partícula en cualquier instante $t$ como la derivada de la función posición. El equipo que lo hizo mal dio el valor de la derivada en un instante en particular, en este caso $t = 2$. En todos los casos derivaron usando reglas de derivación.

Aproximadamente un 60% de los equipos (16 en total) completó bien todos los valores de la tabla del ítem b), posición y velocidad en cada instante solicitado, indicando las unidades correspondientes. Cinco equipos no señalaron las unidades, a pesar de que la consigna lo indicaba y la profesora lo remarcó varias veces en la sesión de trabajo. Otros cinco equipos consideraron bien las unidades de la función posición, pero marcaron la velocidad con metros/segundos en vez de metros/minutos. Un solo equipo fue el que tomó las unidades de la velocidad con la nomenclatura $p/t$. Suponemos que su intención fue indicar una unidad de posición sobre otra de tiempo.

Respecto a los gráficos de las dos funciones en el mismo par de ejes el 93% de los equipos lo realizó en forma correcta, indicando en el eje horizontal la variable tiempo, con escalas en los dos ejes y señalando cada una de las funciones con distinto color o con su denominación respectiva. Dos equipos no efectuaron el gráfico totalmente bien ya que se equivocaron en los puntos que unieron. Vemos como ejemplo el siguiente trabajo:

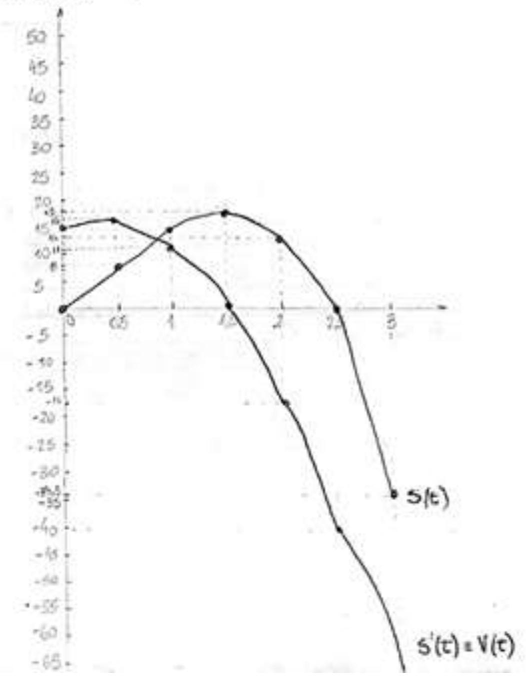
a) Calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante t

$V(t) = S'(t) = -12t^2 + 8t + 15$

b) Completar la siguiente tabla (escribir unidades):

| Tiempo t | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición s(t) | 0 mts | 8 mts | 15 mts | 18 mts | 14 mts | - 0 mts | -34,5 mts |
| Velocidad v (t) | 15 mts/min | 16 mts/min | 11 mts/min | 0 mts/min | -17 mts/min | -40 mts/min | -69 mts/min |

c) Representar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y comparar la función posición con la función velocidad observando las gráficas (ayudarse con los valores de la tabla)



Sólo uno de los equipos realizó una comparación entre las gráficas. Transcribimos lo que pudieron deducir: "cuando la función es creciente, el signo de la derivada es positivo. Cuando la función es decreciente, el signo de la derivada es negativo. Cuando la función tuvo un máximo relativo y absoluto en $t = 1{,}5$, la derivada fue cero".

Si bien en el momento del trabajo la docente hizo preguntas para que los alumnos compararan los gráficos y obtuvieran alguna conclusión, prácticamente ningún equipo escribió la relación pretendida. Una posible causa de este comportamiento fue que tenían que completar una tabla que expresaba la relación entre las funciones, razón por la cual pensaron que con esa respuesta era suficiente. Otra posibilidad tiene que ver con el espacio en la hoja de trabajo. Entregamos las hojas con las consignas y el espacio correspondiente para completar cada respuesta y, tenemos que reconocer, que el espacio establecido para ese ítem alcanzaba sólo para el gráfico. A esto se suma que, en todos los demás ítems, cuando nuestra intención era que escriban alguna conclusión pusimos puntos suspensivos y en este ítem los obviamos.

Respecto a la tabla que resume la información sobre el signo de las dos funciones y el IC o ID de la función posición, un 85% de los equipos la completó totalmente bien. Los cuatro equipos restantes se equivocaron en el intervalo $(1{,}5,\ 2{,}5)$ donde indicaron que la función $s(t)$ es negativa, la velocidad también es negativa y la función decrece. La respuesta correcta era que $s(t)$ es positiva y su velocidad negativa. Presentamos el trabajo de un equipo que tiene las características anteriormente mencionadas:

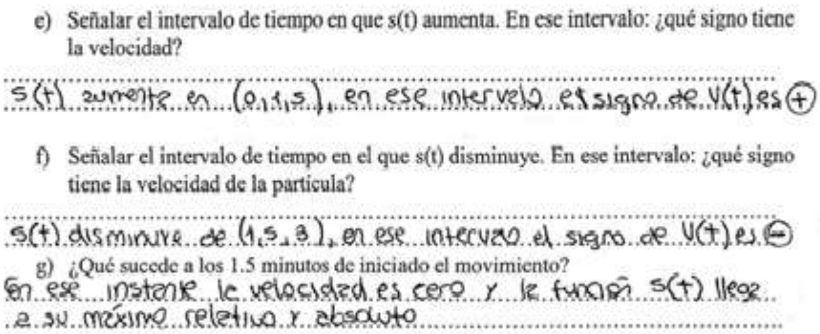
| Intervalos | Signo de s(t) | Signo de v(t) | Comportamiento de la función s(t) (marcar con una cruz la opción que corresponde) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Crece | Decrece | No cambia |
| 0 < t < 1.5 | positivo | positivo | X | | |
| t = 1.5 | positivo | positivo | | | X |
| 1.5 < t < 2.5 | positivo y negativo | negativo | | X | |
| 2.5 < t < 3 | negativo | negativo | | X | |

En las dos preguntas siguientes, todos los equipos señalaron correctamente el intervalo de tiempo en que $s(t)$ aumenta e indicaron bien el signo de la velocidad en ese intervalo. Un 85 % de los equipos respondió también en forma adecuada el intervalo donde la función decrece y el signo de la velocidad era negativo. De los cuatro equipos restantes dos colocaron como ID a $(2{,}5,\ 3]$ en vez de $(1{,}5,\ 3]$ e indicaron bien el signo de la derivada en ese intervalo. Otro equipo señaló bien el ID, pero puso que la derivada tenía signo positivo. El último equipo escribió “disminuye en $(1{,}5,\ 3]$ y en ese intervalo tiene dos signos de $(1{,}5,\ 2{,}5)$ positivo y de $(2{,}5,\ 3)$ negativo”. Suponemos que en este último caso confundieron el signo de la velocidad con el de la función $s(t)$.

En relación con la última pregunta sobre qué sucede en el instante $t = 1{,}5$; 15 equipos (56% aproximadamente) respondieron bien, haciendo mención a que la partícula alcanzaba un máximo relativo y que la derivada en ese punto era cero.

De los 12 equipos restantes encontramos dos respuestas que consideramos no adecuadas. Una de ellas es “la partícula está estática en ese punto”. La otra “empiezan a decrecer ambas funciones y además el signo de $s(t)$ en $(1{,}5,\ 2{,}5)$ es positivo, en $(2{,}5,\ 3]$ negativo y el signo de $(1{,}5,\ 3]$ es negativo”

Los 10 equipos restantes respondieron bien, pero en forma incompleta. Esto es, o hicieron mención a la posición o hicieron mención a la velocidad en ese instante. Mostramos la siguiente producción:



e) Señalar el intervalo de tiempo en que s(t) aumenta. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad?

s(t) aumenta en (0,1,5), en ese intervalo es signo de V(t) es +

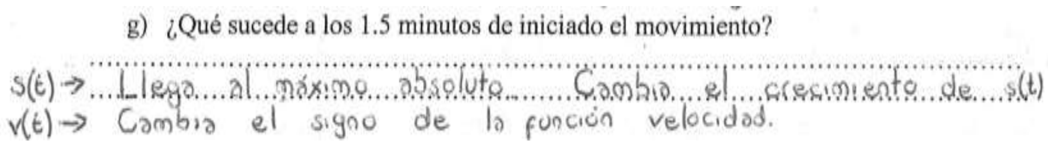
f) Señalar el intervalo de tiempo en el que s(t) disminuye. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad de la partícula?

s(t) disminuye de (1,5,3), en ese intervalo el signo de V(t) es −

g) ¿Qué sucede a los 1.5 minutos de iniciado el movimiento?

En ese instante la velocidad es cero y la función s(t) llega a su máximo relativo y absoluto

Otra respuesta al ítem g):



g) ¿Qué sucede a los 1.5 minutos de iniciado el movimiento?

s(t) → Llega al máximo absoluto. Cambia el crecimiento de s(t)

v(t) → Cambia el signo de la función velocidad.

Cuando los alumnos comenzaron a resolver la actividad 3 preguntaron si graficaban las rectas tangentes en la hoja de trabajo. La docente respondió afirmativamente. Una pregunta que reiteraron varios equipos es qué significaba el crecimiento o decrecimiento en un punto. Esto es razonable ya que en la clase anterior definimos IC o ID de una función, pero no en forma puntual. La docente brindó la definición en el pizarrón.

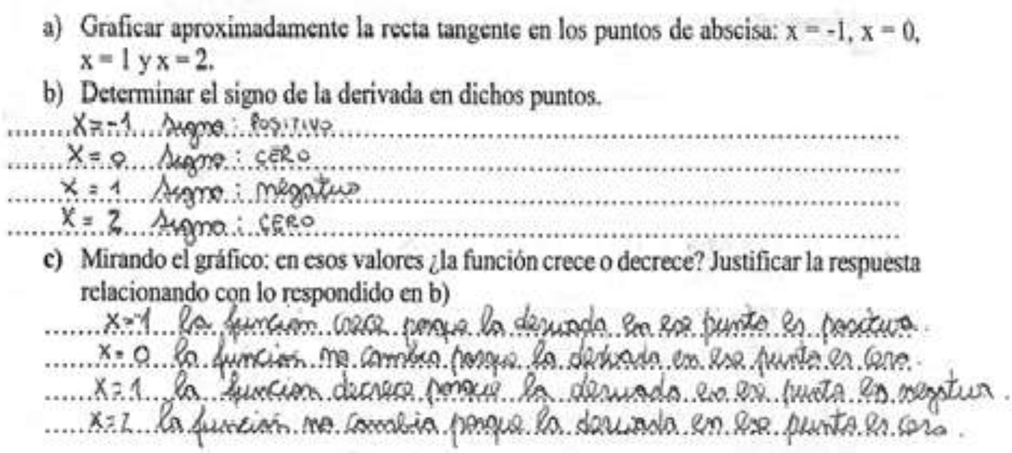
No surgieron más consultas.

Del total de equipos, 25 graficaron bien, en forma aproximada, las cuatro rectas tangentes. De los equipos que no lo hicieron en forma adecuada, uno graficó bien todas las rectas, salvo en $x=1$ donde dibujaron una tangente vertical. El otro equipo graficó todas las rectas tangentes en forma incorrecta.

También fueron 25 equipos (93%) los que respondieron correctamente respecto al signo de la derivada en los puntos de abscisa $x=1$ y $x=-1$ e indicaron que en $x=0$ y $x=2$ la derivada es cero. De los dos equipos que restaban, uno explicó que la derivada en $x=0$ es positiva, indicando bien los demás puntos. El otro equipo señaló que en $x=-1$ la derivada es cero, en $x=0$ tiene signo positivo, en $x=1$ tiene signo positivo y en $x=2$ la derivada es cero.

El 74% de los equipos relacionó en forma correcta el signo de la derivada con el crecimiento o decrecimiento de la función en el punto. Respecto a los puntos de derivada cero, encontramos diversas respuestas. Entre ellas: "la función queda igual", "la función no crece ni decrece", "hay un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$", "la función no cambia".

Vemos el ejemplo:



a) Graficar aproximadamente la recta tangente en los puntos de abscisa: x = -1, x = 0, x = 1 y x = 2.

b) Determinar el signo de la derivada en dichos puntos.

X = -1 Signo : positivo

X = 0 Signo : cero

X = 1 Signo : negativo

X = 2 Signo : cero

c) Mirando el gráfico: en esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b)

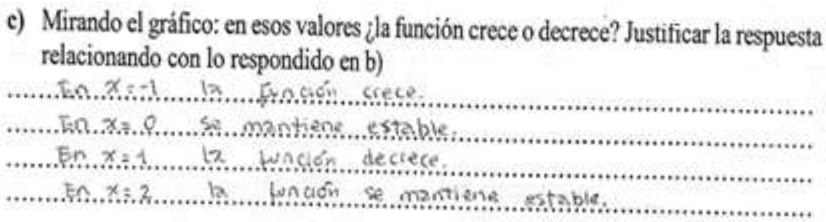
x = 1 la funcion crece porque la derivada en ese punto es positiva

x = 0 la funcion no cambia porque la derivada en ese punto es cero

x = 1 la funcion decrece porque la derivada en ese punto es negativa

x = 2 la funcion no cambia porque la derivada en ese punto es cero

De los siete equipos que no respondieron en forma totalmente adecuada, cuatro no expresaron relación alguna, sólo indicaron que en $x = 1$ la función decrece, en $x = -1$ la función crece y en los otros dos puntos la función tiene ER o expresiones equivalentes a ésta. De esta situación mostramos:



c) Mirando el gráfico: en esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b)

En x = -1 la función crece.

En x = 0 se mantiene estable.

En x = 1 la función decrece.

En x = 2 la función se mantiene estable.

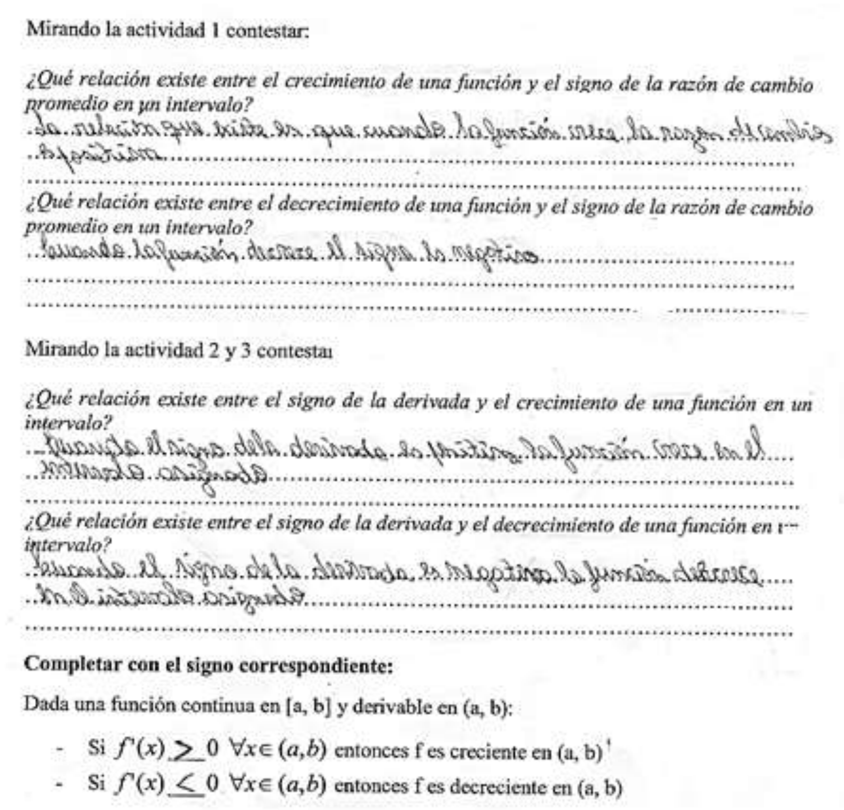
Otro equipo señaló que en $x = 0$ la derivada es positiva y por eso la función es constante, los demás casos los indicaron bien. Otro equipo marcó los puntos de derivada cero, obviando los otros dos y el otro equipo al revés, señaló la relación para los puntos de derivada positiva y negativa pero no para el caso en que es cero.

En las preguntas de síntesis finales a este grupo de actividades, todos los equipos relacionaron bien el crecimiento con la razón de cambio positiva y el decrecimiento con la razón de cambio negativa. Son siete los equipos que escribieron el condicional de la forma “si la razón de cambio es positiva la función crece” y “si la razón de cambio es negativa la función decrece”.

Respecto a las dos últimas preguntas 26 equipos vincularon correctamente el signo de la derivada positivo con el crecimiento de la función. Cuatro equipos escribieron el condicional recíproco “si la función es creciente entonces su derivada es positiva”. El equipo que no lo hizo en forma adecuada contestó “como la derivada es la velocidad instantánea su signo nos dice cómo cambia la función”. Este mismo equipo respondió bien a la pregunta siguiente “cuando la derivada es negativa la función decrece”.

Todos los equipos respondieron bien a la segunda pregunta que relaciona el signo negativo de la derivada con el decrecimiento de la función. De igual manera todos los equipos completaron en forma correcta con los signos mayor y menor las últimas proposiciones.

Vemos la siguiente producción:



Mirando la actividad 1 contestar:

*¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?*

[illegible]

*¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?*

[illegible]

Mirando la actividad 2 y 3 contestar

*¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el crecimiento de una función en un intervalo?*

[illegible]

*¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el decrecimiento de una función en un intervalo?*

[illegible]

**Completar con el signo correspondiente:**

Dada una función continua en [a, b] y derivable en (a, b):

- Si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$ entonces f es creciente en (a, b)
- Si $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$ entonces f es decreciente en (a, b)

Siendo las 10 y 30 todos los alumnos regresaron al aula, se acomodaron en sus bancos y dimos comienzo a la puesta en común. Varios alumnos se quisieron retirar, la docente no los dejó. Algunos protestaron en voz baja y la profesora explicó la importancia de la actividad escrita como el debate grupal. Aclaró que la comparación entre lo realizado en la producción con la puesta en común en el pizarrón también constituía una instancia de aprendizaje. Los alumnos retornaron a sus bancos.

La profesora dividió el pizarrón en tres partes y en cada una copió las consignas de las tres actividades. El ambiente de clase estaba disperso, muchos alumnos hablaban. La docente pidió silencio para comenzar.

Considerando el cansancio y la dispersión de los alumnos, la docente decidió en ese momento, no desarrollar completas todas las actividades sino tomar algunos ítems. Comenzó a revisar la primera actividad, haciendo preguntas a los alumnos. Al mismo tiempo, repasó el concepto de razón de cambio media, graficó las ganancias de la empresa y solicitó que algún alumno completara la primera tabla.

En vez de interrogar por la segunda tabla leyó directamente las preguntas finales referidas a la relación entre el crecimiento o decrecimiento de la función y el signo de la razón de cambio media. Una vez respondidas por un equipo, la profesora repitió la respuesta. Si bien en lo planificado no consideramos analizar la validez del condicional recíproco, la docente decidió hacerlo en este momento para acaparar la atención de los alumnos con un tema que no está directamente resuelto en la actividad. De esta manera, enfatizó el orden del condicional: "*si f es creciente en un intervalo (a, b) entonces la razón de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera del mismo es positiva*". Explicó por qué el condicional recíproco es falso. Para esto halló la razón de cambio media en el mismo problema en el intervalo $[0, 6]$ que, si bien es positiva, la curva crece y decrece en el mismo.

La profesora resolvió la actividad 2 a un ritmo más rápido que el anterior porque percibía que la mayoría de los estudiantes no estaba prestando atención. Un equipo le brindó la expresión de la derivada y, en vez de completar la tabla con los valores de $s(t)$ y $v(t)$, graficó las dos funciones en un mismo par de ejes mientras un equipo le dictaba los valores de las imágenes de los diversos instantes. Analizó junto al grupo desde el gráfico de las dos funciones, la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función. También estudió en particular el instante $t = 1{,}5$ minutos. Algunos alumnos contestaron que la partícula llegaba a su máxima distancia del punto inicial y la velocidad era cero. La profesora señaló el gráfico y explicó que esa distancia era la mayor del lado derecho del punto inicial, no así del lado izquierdo (ya que la función tenía un mínimo absoluto y no relativo en $t = 3$). Esta aclaración tampoco estaba planificada con anterioridad, pero la profesora intuyó que ante cuestiones que no estaban resueltas en la actividad los alumnos hacían silencio y prestaban atención.

Luego solicitó a otro equipo las respuestas a las dos últimas preguntas sin haber resuelto en el pizarrón la actividad 3. La docente nuevamente hizo la aclaración sobre el orden del condicional. Luego puso en común las respuestas a la actividad 3 en forma rápida, los alumnos no mostraban interés, entonces la profesora resolvió hacer la demostración de:

Dada una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$:

1. Si $f'(x) > 0 \; \forall\, x \in (a, b)$ entonces $f$ es creciente en $(a, b)$
2. Si $f'(x) < 0 \; \forall\, x \in (a, b)$ entonces $f$ es decreciente en $(a, b)$

Indicó a los alumnos sacar sus cuadernos o carpetas ya que esa demostración formaría parte de la teoría de la unidad 4. Recién en este momento hicieron silencio y retomaron la atención.

Luego de la demostración resaltó el orden de la implicación. Para esto enunció el recíproco:

- ✓ Si $f$ es creciente en $(a, b)$ entonces $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b)$
- ✓ Si $f$ es decreciente en $(a, b)$ entonces $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b)$

y señaló que era falso. Preguntó algún contrejemplo de la situación al grupo en general, pero nadie respondió. Entonces la docente brindó la función $f(x) = x^3$ que es creciente en todo su dominio y su derivada es no negativa. Enunció luego las dos implicaciones siguientes para una función $f$ derivable en $(a,b)$:

- ✓ Si $f$ es creciente en $(a, b)$ entonces $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$
- ✓ Si $f$ es decreciente en $(a, b)$ entonces $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$

Debido a la poca atención que prestaron los alumnos durante toda esta instancia la profesora decidió dejar el análisis de los ER de la actividad 3 para la próxima secuencia de trabajo.

Esta sesión fue una jornada de trabajo muy intensa para los alumnos y para las docentes. Ya sea desde el repaso en el pizarrón, el grupo de actividades en el cual los estudiantes trabajaron en forma activa y el debate grupal, en el cual hicimos un esfuerzo y desplegamos diversas estrategias para mantener el interés del curso. Pensamos que cumplimos el objetivo planteado que consiste en descubrir mediante situaciones de variación en diversos contextos y registros de representación, cómo la razón de cambio media y la derivada nos permiten conocer características de la función y su gráfica, en este caso IC e ID.

La resolución de las tres actividades de esta parte de la secuencia demanda del manejo de nociones desarrolladas en las sesiones anteriores, así como el cálculo de derivadas y la interpretación geométrica de la misma. Los alumnos no manifiestan serias dificultades en ninguno de los casos.

En primer lugar, son capaces de establecer IC e ID de funciones en contexto y en dos registros diferentes (numérico y analítico). También pueden determinar el crecimiento o decrecimiento de una función en un punto desde el registro gráfico en un problema sin contexto. Si bien esta última definición no se había trabajado en clase, con la orientación de la docente, evidencian entender el concepto.

Prácticamente todos los equipos completan en forma correcta la tabla en la que se relaciona el crecimiento o decrecimiento de una función con el signo de la razón de cambio media y responden bien a las dos preguntas que sintetizan esta situación.

En la actividad 2 sólo cuatro equipos (15% del total) confunden el signo de la función posición con el de su derivada. En el análisis cognitivo denominamos este comportamiento como teorema factual y es mencionado en diversas investigaciones como habitual en varios estudiantes y también en profesores (Cardona, 2009; Dolores y Guerrero, 2004; Guerrero, 2002). En este caso discrepamos con estos resultados.

Respecto a la relación entre el crecimiento o decrecimiento de una función y el signo de la derivada primera, 26 equipos responden bien tanto en las preguntas de la actividad 2 como en las correspondientes a la parte de síntesis al final del grupo de actividades. Consideramos que la situación planteada se revela adecuada para el objetivo propuesto.

Otro punto a tener en cuenta es que la mayoría de los alumnos son capaces de trazar la recta tangente en diferentes puntos, determinar el signo de la pendiente de la misma y relacionarlo con el signo de la derivada en ese punto. Pensamos que la actividad de exploración anterior a esta secuencia es de total importancia en este aspecto. Varios alumnos, muchos de ellos con muy buen desempeño, nos comentan que recién en el momento de hacer la actividad mencionada pueden comprender bien la interpretación geométrica de la derivada.

El punto de mayor dificultad es reconocer el comportamiento de una función en un ER. La actividad no está pensada para formalizar esto, sino dar una aproximación para continuar en la secuencia siguiente. En el caso de la partícula que tiene un máximo relativo varios alumnos no analizan los dos aspectos que se reflejan en ese punto: el cambio de crecimiento de $s(t)$ y la velocidad nula. Lo mismo sucede con los ER de la función en la actividad 3.

En la puesta en común la profesora decide analizar situaciones que no tenemos planteada desde el análisis preliminar. Esto sucede por la dispersión de los alumnos. Varios estudiantes nos comentan que les resulta una actividad de simple resolución. Quizás esto sumado al tiempo que están trabajando y al hecho que no copian cuando se debate, hace que se dispersen.

A pesar de los problemas detectados, la resolución de las distintas actividades es significativa para llegar a construir la relación entre los IC e ID y el signo de la derivada. Los alumnos pueden explorar varios aspectos variacionales relacionados con este objeto: la manera en la cual el signo de la pendiente de la recta tangente a una curva está relacionado con el crecimiento o decrecimiento de la función.

### 6.1.4 Sesión 4. Actividades de descubrimiento. Grupo 2

La clase comenzó puntualmente a las 8 horas y fue el día siguiente a la sesión anterior. La profesora actuó según lo planeado en el análisis a priori sección 5.2.5.4.

Siendo las 8 y 20 comenzaron a trabajar los 54 alumnos presentes reunidos en los 27 equipos de dos personas cada uno. Lo hicieron en voz muy baja construyendo un ambiente tranquilo de trabajo. Como en situaciones previas los dos integrantes del equipo discutieron en forma activa, las profesoras pasaron por los bancos para realizar observaciones.

La docente indicó que no iba a realizar orientaciones sobre la actividad 1 ya que constituía un problema muy similar al que resolvieron en la sesión anterior. De todas formas, algunos alumnos hicieron preguntas parecidas a las de otras actividades: "¿el cero tiene signo?", "¿qué se refiere con el comportamiento de $h(t)$?"

Mientras recorría los bancos, la profesora observaba en las producciones que varios estudiantes graficaban las funciones uniendo los puntos de la tabla. Entonces manifestó que las dos funciones eran conocidas por ellos, que podían graficarlas directamente, sin tener en cuenta los puntos.

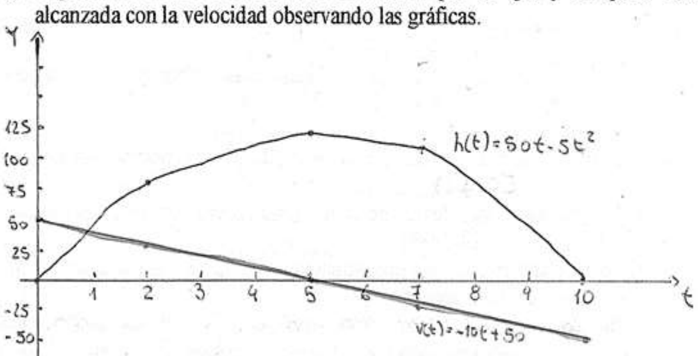
Los alumnos trabajaron sin manifestar dificultades importantes.

La mayoría de los equipos (92%) calculó bien la velocidad de la piedra. Los dos equipos restantes no dieron la expresión, pero consideramos que realizaron el cálculo ya que luego completaron bien la tabla. Todos los alumnos derivaron usando reglas de derivación y lo indicaron como $v(t)$ o $h'(t) = v(t)$.

También el 92% de los equipos completó bien los valores de la tabla con las unidades correspondientes. Consideramos que, al ser tan insistentes en el uso de unidades y su correspondencia con el contexto del problema, los alumnos fueron cuidadosos al respecto. Todos los equipos realizaron bien los dos gráficos en el mismo par de ejes indicando cuál era cada una de las funciones.

Sólo cuatro equipos relacionaron las dos funciones en registro verbal. Damos el ejemplo de uno de ellos mostrando también la tabla para completar del ítem d):

c) Representar ambas funciones en un mismo par de ejes y comparar la altura alcanzada con la velocidad observando las gráficas.




* a medida que la roca aumenta su altura, la velocidad disminuye, hasta que la misma llega a su altura máxima (a los cinco segundos) para luego comenzar a descender donde la velocidad empieza a aumentar. (aumenta a los 5 segundos, donde su velocidad es 0.). A los 10 segundos, la roca toca el suelo.

d) Completar el siguiente cuadro:

| Intervalo de tiempo | Signo de la velocidad v(t) | Comportamiento de la función altura h(t) |
|---|---|---|
| 0<t<5 | POSITIVA | CRECIENTE |
| t=5 | CERO | MÁXIMO ABSOLUTO Y RELATIVO |
| 5<t<10 | NEGATIVA | DECRECIENTE |

Este modo de proceder (obviar la relación entre las funciones) por parte de los alumnos fue similar al de la actividad anterior, a pesar de que en su oportunidad indicamos que debían hacerlo.

Respecto al cuadro donde resumen la relación entre el crecimiento de la altura y el signo de la velocidad, todos los equipos respondieron bien. En cuanto al comportamiento de la función altura en el instante $t = 5$ segundos, encontramos diversas respuestas. Once equipos respondieron que en ese punto existe un máximo, de éstos, un equipo aclaró que es máximo relativo, otro máximo absoluto y uno máximo absoluto y relativo.

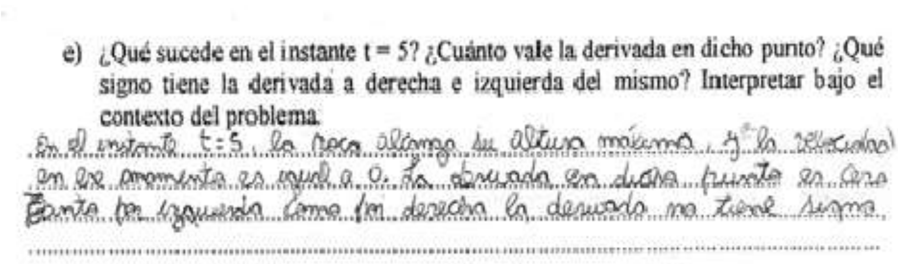
Tres equipos indicaron que en ese punto la roca llegó a su altura máxima, es decir identificaron el ER acorde al contexto del problema.

De los demás equipos cinco respondieron que en ese punto la función no cambia, cuatro que es constante; otro equipo contestó que queda igual, uno que “no crece ni decrece” y un último equipo que se produce una “pequeña pausa”. Sólo un equipo no respondió.

Prácticamente todos los alumnos identificaron un comportamiento diferente de la función en ese instante, algunos (52%) lo reconocieron como ER y otros como punto de estabilidad (48%).

Respecto al último ítem donde pedimos qué sucede en el instante $t = 5$, 19 equipos (70%) contestaron bien y en forma completa. Explicaron que en ese instante la velocidad es cero, que a la derecha la velocidad es negativa, a la izquierda positiva y lo relacionaron con el contexto del problema. Un 22% de los equipos no hizo referencia al contexto del problema.

Dos equipos respondieron mal. Presentamos el trabajo de uno:



e) ¿Qué sucede en el instante t = 5? ¿Cuánto vale la derivada en dicho punto? ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema.

En el instante t=5, la roca alcanza su altura máxima, y la velocidad en ese momento es igual a 0. La derivada en dicho punto es cero. Tanto por izquierda como por derecha la derivada no tiene signo.

En la actividad 2 brindamos una función en registro analítico y gráfico que representa el porcentaje de concentración en sangre de una droga $t$ horas después de haber inyectado una determinada dosis en un paciente.

Del total de equipos, 25 (93%) reconocieron bien el IC e ID de la función. Dos equipos señalaron los dos intervalos cerrados en $t = 2$.

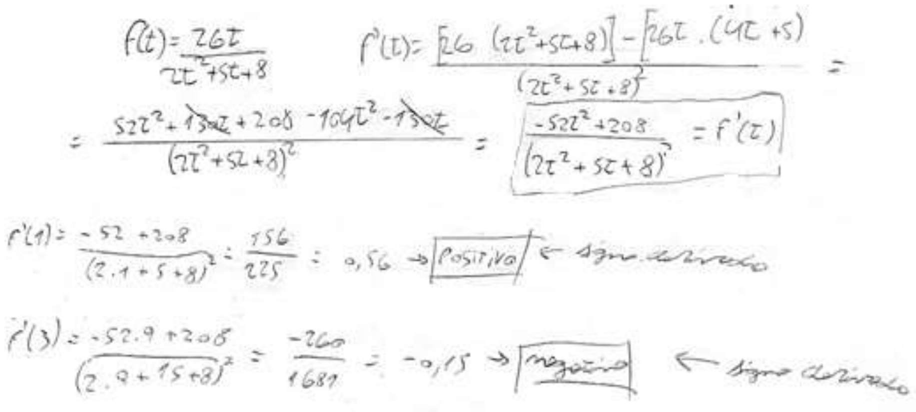
Respecto a la máxima concentración, si bien 26 equipos identificaron el máximo a las dos horas después de haber inyectado la droga al paciente, siete omitieron escribir el porcentaje cuando señalaron dicho valor.

En el siguiente ítem pedimos la función derivada en registro analítico para luego completar una tabla donde se relaciona el signo de ésta con el crecimiento o decrecimiento de la función. En el análisis preliminar pensamos hacer la función derivada en el pizarrón ya que su expresión simplificada era compleja de obtener, pero en el momento de la puesta en escena los estudiantes no evidenciaron inconvenientes.

Del total de equipos 26 (96%) calcularon bien la función derivada en forma analítica, expresando el numerador en forma factorizada tal como lo indicó la profesora en la sesión de trabajo. Todos los equipos completaron bien el cuadro en el que se relaciona el signo de la derivada con el crecimiento o decrecimiento de la función. En este punto pedimos verificar analíticamente lo obtenido en forma gráfica. Son 12 los equipos (44% del total) que no relacionaron los resultados en los dos registros. De los 15 equipos restantes, 11 (41% del total) estudiaron el signo de la derivada asignando valores a la variable t. Todos estos alumnos tomaron $t = 1$ como valor a la izquierda de $t = 2$ y $t = 3$ como valor a la derecha.

Solo cuatro equipos hicieron un análisis más general, a partir de la factorización de la derivada estudiaron el signo de los factores en el intervalo $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$.

Exhibimos la producción de uno de los equipos que analizó el signo de la derivada tomando un valor a la derecha de $t = 2$ y uno a la izquierda.



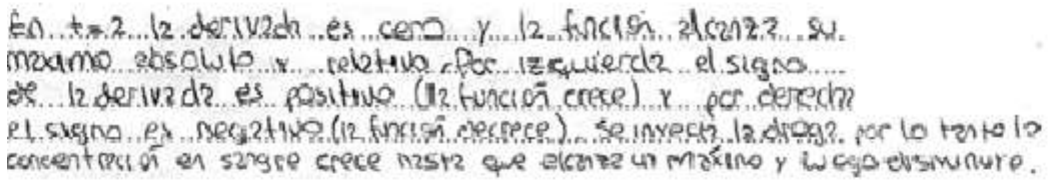
$f(t)=\frac{26t}{2t^2+5t+8}$ $\quad f'(t)=\frac{[26(2t^2+5t+8)]-[26t.(4t+5)]}{(2t^2+5t+8)^2}=$

$=\frac{52t^2+\cancel{130t}+208-104t^2-\cancel{130t}}{(2t^2+5t+8)^2}=\boxed{\frac{-52t^2+208}{(2t^2+5t+8)^2}=f'(t)}$

$f'(1)=\frac{-52+208}{(2.1+5+8)^2}=\frac{156}{225}=0{,}56\to\boxed{\text{Positivo}}\leftarrow$ signo derivada

$f'(3)=\frac{-52.9+208}{(2.9+15+8)^2}=\frac{-260}{1681}=-0{,}15\to\boxed{\text{negativo}}\leftarrow$ signo derivada

También preguntamos sobre el comportamiento en el instante $t=2$ donde se produce la concentración máxima. Las preguntas fueron similares a la actividad anterior para que los alumnos por sí mismos vayan construyendo una manera de calcular los ER de una función. Un 70% de los equipos contestó en forma completa este ítem. Indicaron que en ese instante la concentración en sangre es máxima, que la derivada de la función es cero. Señalaron que a la derecha del punto la derivada es positiva y la concentración aumenta; a la izquierda del punto la derivada es negativa y la concentración en sangre disminuye. Por ejemplo:



En $t=2$ la derivada es cero y la función alcanza su máximo absoluto y relativo. Por izquierda el signo de la derivada es positivo (la función crece) y por derecha el signo es negativo (la función decrece). Se invierte la droga, por lo tanto la concentración en sangre crece hasta que alcanza un máximo y luego disminuye.

De los ocho equipos restantes, tres analizaron bien la situación sin contexto y cuando debían relacionar con el contexto del problema lo hicieron en forma incompleta.

Son tres los equipos que no relacionaron con el contexto del problema. Un equipo argumentó que la derivada por derecha e izquierda de $t=2$ no tiene signo y otro equipo no hizo referencia al signo de $f'$ sino que concentró su respuesta en el instante $t=2$.

Vemos la producción del equipo restante:

e) Completar la siguiente tabla verificando los resultados analíticos con los obtenidos en forma gráfica:

| Intervalos | Signo de f '(t) | Marcar con una cruz la respuesta correcta | | |
|---|---|---|---|---|
| | | f(t) crece | f(t) decrece | f(t) no cambia |
| 0 < t < 2 | positivo | × | | |
| t = 2 | cero | | | × |
| t > 2 | negativo | | × | |

f) ¿Qué sucede en el instante t = 2? ¿Cuánto vale la derivada en dicho punto? ¿Qué signo tiene la derivada a derecha e izquierda del mismo? Interpretar bajo el contexto del problema

la funcion llega a su valor maximo y luego empieza a decrecer. la derivada en dicho punto vale cero. Izq positivo, derecha negativo

La actividad 3 tenía la particularidad que un ER era un punto de no derivabilidad. Solicitamos los IC, ID y ER y completar una tabla donde se resume la información respecto al signo de $f'$ y el crecimiento de la función. Los dos últimos ítems se referían al comportamiento de la función en los instantes donde se encuentran el máximo y el mínimo relativos.

En la jornada de trabajo los alumnos fueron independientes al resolver este problema, sólo algunos cuestionaron sobre el máximo en $t = 4$ (punto de no derivabilidad).

Del total de equipos 26 indicaron bien los IC de la función a través del gráfico. Fueron 25 los equipos (93% del total) que señalaron bien el ID. Los otros dos equipos lo indicaron como intervalo cerrado.

Mostramos la producción de uno de los equipos respecto a los tres primeros ítems de la actividad:

a) ¿En qué intervalos de tiempo la ganancia aumentó?

la ganancia de [0,4) aumentó y también aumentó de (6,7]

b) ¿En cuáles disminuyó?

La ganancia disminuyo de (4,6)

c) ¿Qué sucedió en la empresa al cuarto año? ¿Y al sexto?

Al cuarto año la empresa entro en una crisis se produjo un quiebre que significa haber llegado al maximo de ganancia pero a partir de ese momento hasta el sexto año la ganancia disminuyo abruptamente. Al sexto año la empresa salio a flote y las ganancias comenzaron a aumentar devuelta.

El 74% de los equipos (20 en total) completó bien el cuadro donde relacionamos el signo de la derivada con el crecimiento, decrecimiento o estabilidad de la función. En la tabla mencionada luego de completar con el signo de la derivada o su no existencia, el alumno debía indicar con una cruz alguna de las siguientes opciones: " $f(t)$ crece", " $f(t)$ decrece", " $f(t)$ no cambia". Para el instante $t=4$ consideramos que no se cumplía ninguna de las anteriores. Esto no surgió como duda en la jornada de trabajo. Siete son los equipos que no marcaron ninguna posibilidad y los trece restantes señalaron que en $t=4$ la función "no cambia".

De los siete equipos que completaron en forma regular el cuadro, cuatro indicaron que en $t=4$ la derivada es cero, determinando bien las demás opciones. Dos equipos tacharon el renglón correspondiente a ese instante y el que resta puso que en $t=6$ la derivada no existe.

El 81% de los equipos (22 en total) respondió bien el ítem e) donde preguntamos cuál es el valor de la derivada en $t=4$ y el signo de la misma a derecha e izquierda de ese instante. Dos equipos escribieron que en $t=4$ la derivada es cero, dos equipos no indicaron el signo de la derivada a derecha e izquierda del punto y el otro equipo contestó que la derivada a derecha e izquierda tiene signo negativo.

El 89% de los equipos contestó bien el último ítem donde solicitamos el valor de la derivada en $t=6$ y su signo a la derecha e izquierda del punto.

Exponemos la producción de uno de los equipos en los últimos ítems de la actividad:

d) Completar el siguiente cuadro:

| Intervalos | Signo de f '(t) | Marcar con una cruz la respuesta correcta | | |
|---|---|---|---|---|
| | | f(t) crece | f(t) decrece | f(t) no cambia |
| $0 < t < 4$ | (+) | X | | |
| $t = 4$ | no es derivable | | | X |
| $4 < t < 6$ | (–) | | X | |
| $t = 6$ | 0 | | | X |
| $6 < t < 7$ | (+) | X | | |

e) ¿Cuál es el valor de la derivada en t = 4? ¿Qué sucede con el signo de la derivada a derecha e izquierda de ese valor?

f(t) en t=4 no es derivable.

El signo de f'(t) izquierda es(+) y por derecha es (–)

f) ¿Cuál es el valor de la derivada en t = 6? ¿Qué sucede con el signo de la derivada a derecha e izquierda de ese valor?

f'(6)=0 , para x>6 f'(t) es positivo y para x<6 f'(t) es negativo

Al final del grupo de actividades y bajo el título “Para pensar” definimos el concepto de punto crítico de una función y solicitamos que los alumnos escriban los puntos críticos hallados en las actividades 1, 2 y 3. El 96% de los equipos logró identificar en forma correcta estos puntos.

Por último, los alumnos debían completar las siguientes oraciones:

“Una función *puede* alcanzar valores máximos o mínimos para valores de $x$ en los que…”

“Una función *alcanza* valores máximos o mínimos para valores de $x$ en los que…”

La primera oración la completaron bien 15 equipos (56% del total), siendo 13 equipos de este grupo los que contestaron luego bien la oración siguiente indicando que, además de punto crítico debe haber un cambio de signo en la función derivada. De los dos restantes uno indicó el cambio de signo sólo para el caso en que la derivada sea cero y el otro equipo contestó “la derivada sea cero”. Mostramos uno de estos casos:

**Para reflexionar de acuerdo a lo realizado…**

Una función *puede* alcanzar valores máximos o mínimos para valores de x en los que LA DERIVADA ES IGUAL A 0 (CERO) O NO EXISTE (HAY UN PUNTO CRÍTICO)

Una función *alcanza* valores máximos o mínimos para valores de x en los que HAY UN PUNTO CRÍTICO Y EN SU ENTORNO POR DERECHA TIENE SIGNO DIFERENTE QUE A SU IZQUIERDA

Un equipo no completó ninguna de las dos oraciones.

Tres equipos respondieron las dos oraciones bien pero incompletas, faltando la posibilidad de la no existencia de la derivada.

Los 8 equipos restantes dieron diversas respuestas evidenciando que no habían entendido la diferencia entre las dos opciones. Por ejemplo, uno escribió para la primera opción que la derivada sea cero y que haya cambio de signo de la función derivada y, para la segunda opción, que la derivada no exista y que haya cambio de signo de $f'$ a derecha e izquierda del punto. Otro equipo respondió que la función puede alcanzar un ER cuando la derivada puede llegar a ser cero y que alcanza el ER cuando la derivada es cero.

Otro equipo indicó que la función puede alcanzar ER en puntos con derivadas laterales de igual signo y que alcanza un ER cuando las derivadas laterales tienen distinto signo.

Un equipo escribió que la función puede alcanzar un ER en un punto de no derivabilidad y que alcanza un máximo o mínimo en un punto de derivada cero para el cual hay cambio de signo de la función derivada.

El primer equipo en terminar lo hizo a las 9 y 20 horas y el último a las 9 y 50. Les pedimos que regresen al aula a las 10 horas para comenzar el debate grupal.

La profesora a cargo decidió no controlar las tablas que debían completarse con valores de la función y de su derivada ya que en la puesta en común de la sesión anterior esto produjo dispersión y charla por parte de los alumnos.

Dividió el pizarrón en tres partes haciendo los gráficos del modelo de cada una de las actividades. En la primera actividad solicitó la función derivada y la graficó junto a la función original. Con la ayuda de los alumnos indicó el punto máximo en $t=5$ y el comportamiento de la función y de la función derivada a derecha e izquierda del punto, mirando los dos gráficos a la vez.

En la actividad 2 pidió los IC, ID y el ER de la función y los señaló gráficamente. También repasó junto a las contestaciones de los alumnos el comportamiento de la función y el signo de la derivada primera.

Cuando llegó a la actividad 3 solicitó las respuestas deteniéndose en el instante $t=4$ donde la función presenta un máximo sin derivada. Le preguntó al grupo en general si conocían otra función con ER en un punto que no tiene derivada. Muchos alumnos contestaron con la palabra "valor absoluto" y la docente aclaró que dicha función tiene un mínimo sin derivada en $x=0$.

Antes de proseguir explicó que las oraciones para completar al final del grupo de actividades tenían como objetivo descubrir un método para hallar ER de una función. Continuó leyendo en voz alta la definición de punto crítico, la que luego escribió en el pizarrón. Varios alumnos le dictaron los puntos críticos de las tres actividades en forma correcta. Preguntó si algún equipo había respondido de otra manera, pero nadie contestó.

Luego tomó el caso de la función $y=f(x)=x^3$ que tiene un punto crítico en $x=0$ y no tiene máximo y mínimo. Entonces preguntó al grupo si habían logrado hallar qué pasos son necesarios hacer para obtener los ER de una función. Varios alumnos contestaron y la profesora anotó en el pizarrón:

- Debe ser punto crítico.
- Debe haber cambio de signo de $f'$.

La docente volvió a dar la respuesta de los dos últimos puntos varias veces para que quedara entendido. Luego solicitó a los alumnos sacar sus cuadernos para copiar los resultados que entre todos habían encontrado.

Escribió en el pizarrón “Pasos para calcular extremos relativos de una función”:

1. Calcular puntos críticos, que son aquellos puntos donde la derivada es cero o no existe. Estos son posibles máximos o mínimos.
2. Estudiar el signo de $f'$. Si $f'$ pasa de positiva a negativa en el punto crítico estamos en presencia de un máximo relativo. Si el signo de la derivada cambia de negativo a positivo en el punto crítico, tenemos un mínimo relativo.

Luego resolvió en el pizarrón dos ejercicios de la guía de trabajos prácticos para reforzar lo estudiado.

Uno de los propósitos de este grupo de actividades es repasar los conceptos estudiados en las sesiones anteriores (IC, ID y la relación con el signo de la derivada primera) involucrando varios registros de representación y diversos contextos. Los alumnos identifican bien los IC e ID de una función en contexto dadas en registro gráfico. El único error, en pocos casos, es considerar el intervalo cerrado en vez de intervalo abierto como definimos en clase. Todos los estudiantes relacionan en forma correcta el signo de la derivada primera con el crecimiento o decrecimiento de la función.

En las tres actividades la mayoría de los equipos reconoce los ER de las funciones involucradas, algunos equipos además estudian si son o no extremos absolutos.

La mayoría de los equipos no analiza en forma verbal lo que observan en el gráfico de la función altura y la velocidad de la piedra en la actividad 1. Si bien esto había sido solicitado en una de las actividades de la sesión anterior y se recalca en la jornada de trabajo, no lo hacen. También evidenciamos, aunque en menor grado, una falta de conversión de registros cuando pedimos verificar analíticamente el signo de la derivada primera de la función de la actividad 2 con lo obtenido gráficamente. En este caso aproximadamente solo la mitad de los equipos estudia el signo de la derivada primera desde el registro analítico y la mayoría lo hace asignando valores en vez de trabajar con desigualdades. Este resultado es coincidente con el de varias investigaciones en las que se refleja la falta de coordinación de registros por parte de los alumnos (Guzmán y Rodríguez, 2013; Simón y Miguel, 2013).

Respecto al otro objetivo del grupo de actividades que es identificar ER y el comportamiento de la función en los mismos, los alumnos no demuestran dificultades ni en reconocerlos en registro gráfico ni en examinar el comportamiento de la función a derecha e izquierda de dichos puntos. Algunos equipos no relacionan con el contexto del problema.

Al finalizar las tres actividades definimos puntos críticos y prácticamente todos los equipos los pudieron reconocer en los tres casos y en la función $y = f(x) = x^3$. Ahora en el momento de concluir con la diferencia entre punto crítico y ER de una función, la mitad de los equipos no lo puede lograr. Se cumple nuestra conjetura sobre que es probable que el alumno no pueda distinguir entre un punto crítico y un ER. De allí que luego hacemos hincapié en este aspecto en el debate grupal, brindando otros ejemplos.

Consideramos que esta actividad cumplió en gran medida con los objetivos planteados. Por un lado, los alumnos continúan trabajando con el signo de la derivada primera y su relación con los IC e ID desde todos los registros. Por el otro, introducimos el comportamiento de una función en un ER de la misma y obtenemos un método para poder calcularlo.

Mostramos a continuación algunos momentos de la experiencia:

### 6.1.5 Sesión 5. Actividades de descubrimiento. Grupo 3

La profesora repasó los conceptos ya estudiados en clase y trabajados en las actividades anteriores mediante preguntas a los alumnos y a través de la resolución en forma conjunta del ejemplo indicado en el análisis a priori sección 5.2.5.5.

Luego brindó la función $f : R \to R / f(x) = \sqrt[3]{x}$, que tiene un punto crítico en $x = 0$ y no tiene ER. En ese momento la profesora recalcó la diferencia entre las dos últimas oraciones del grupo de actividades anterior: "*una función puede alcanzar un ER…" y "una función alcanza un ER en…".*

Paso seguido definió concavidad de una función $f$ derivable estudiando la posición de las rectas tangentes a la misma y el gráfico de la curva, y como el crecimiento o decrecimiento de la función derivada de $f$. Enunció las condiciones sobre la derivada segunda para que una función sea cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, definió punto de inflexión y analizó métodos para calcularlos.

Luego junto a toda la clase estudió en forma completa algunas funciones de la guía de trabajos prácticos y realizó ejercicios de la misma.

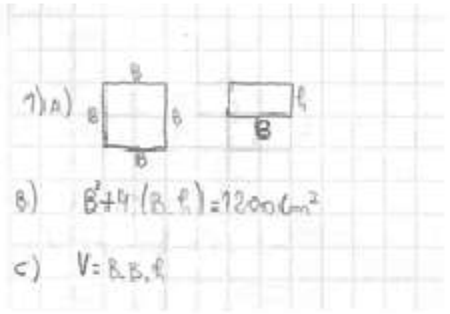
A la clase siguiente trabajamos con el Grupo 3 de actividades formado por dos PO, uno cuya consigna está guiada para la resolución y el otro no. Remarcamos el hecho que en clase no resolvimos ningún PO hasta este momento.

Como ayuda al primer PO la profesora hizo un dibujo en el pizarrón de un prisma con base rectangular y escribió la fórmula del volumen del mismo. Indicó que podían solicitar orientación para la actividad 1, no así para la actividad 2.

Mientras recorría los bancos la docente observó a cuatro equipos cuyo esquema era un rectángulo con cuadrados en las esquinas. Entonces preguntó a cada uno de estos equipos si el enunciado mencionaba que dada una lámina rectangular se cortaban en las esquinas cuadrados para formar una caja. En todas las oportunidades los alumnos respondieron que no. La profesora los invitó a volver a leer la consigna detenidamente y pensar si el esquema realizado era correcto.

Tres equipos llamaron a la profesora porque no podían efectuar resolución alguna. Entonces los indujo a leer punto por punto y ella fue reforzando cada una de las consignas con preguntas y orientaciones para que pudieran comenzar a trabajar.

De las producciones entregadas el 93% de los equipos (25 en total) realizó el esquema de la caja colocando nombres a las variables (lado de la base y la altura). Un equipo no efectuó esquema alguno ni señaló qué representaban las variables con las que luego trabajaron. El otro equipo dibujó un cuadrado y un rectángulo e indicó nombres a sus lados, como mostramos a continuación:




En el siguiente ítem solicitamos escribir cómo se relacionaban las dos variables definidas si se disponía de 1200 cm$^2$ de material para construir la caja.

El 93% de los equipos escribió la fórmula del área de la caja sin tapa acorde a las variables que habían definido. Un equipo indicó $A = x.y$ y luego en el renglón siguiente $1200 = 5.x.y \Rightarrow x.y = 240$. Es decir, consideraron cinco rectángulos iguales como área del prisma.

El otro equipo señaló la relación como $4.ab + 4a^2 = 1200$. Este equipo es el único que luego no escribió la expresión del volumen y trabajó solamente con la fórmula del área. Por lo tanto, este equipo no participa en el análisis siguiente.

El 81% de los equipos (22 de las 27 producciones) despejó en forma correcta uno de los lados en la relación entre las variables y reemplazó dicha expresión en la fórmula del volumen, obteniendo esta última como función de uno de los lados de la caja.

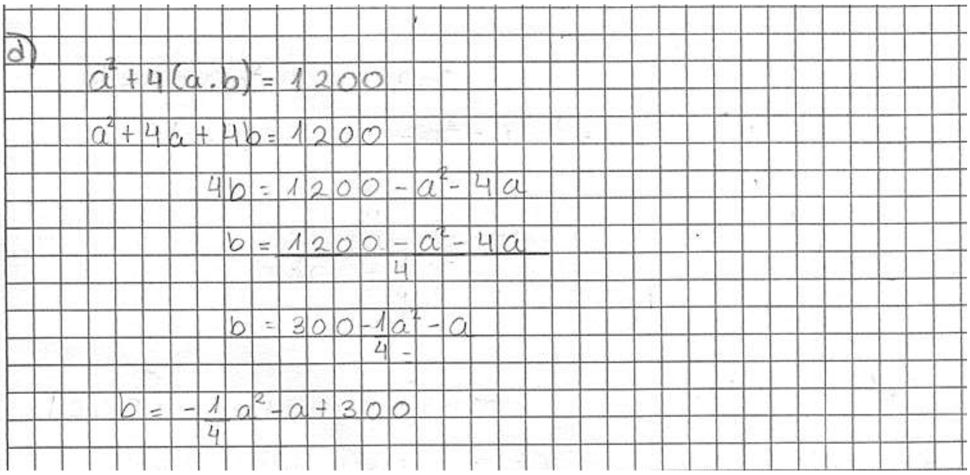
En el momento de la jornada de trabajo muchos equipos mostraron a las docentes los cálculos algebraicos realizados para asegurarse que estaba correcto lo realizado. Fueron inseguros en este aspecto.

De los cuatro equipos restantes, uno consideró en la expresión del área que las dos variables eran iguales, escribiendo:

$1200 = L^2 + 4h\,L \Rightarrow 1200 = 5L^2 \Rightarrow L \cong 15.49$

Ese valor lo reemplazaron en la fórmula del volumen: $V \cong (15{,}49)^2 h$

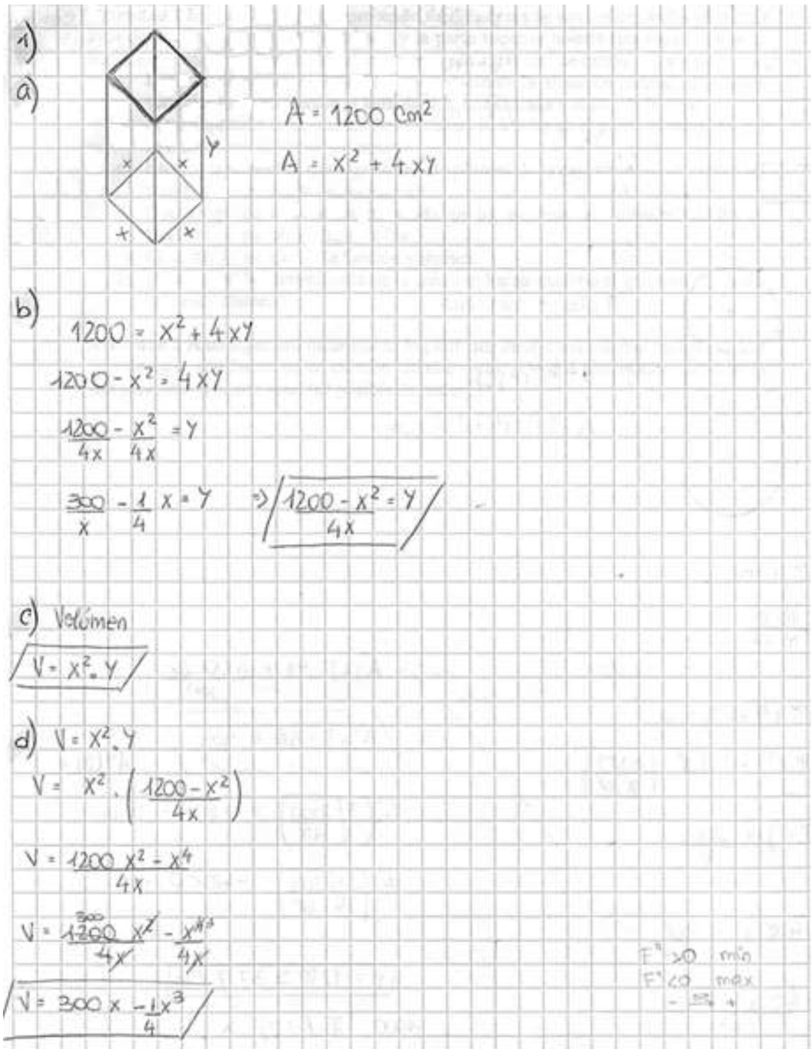
Dos equipos despejaron mal. Vemos uno de ellos:




Otro es el equipo que había obtenido la relación como $x.y=240$, con lo cual concluyeron:

$$V=x^2.y=x.x.y=x.240 \Rightarrow V=240x$$

Por lo tanto, continuamos el análisis de 22 equipos, ya que los 5 descriptos anteriormente o terminaron su razonamiento en este paso o arrastraron el error de despeje a la función a optimizar. Mostramos el trabajo de un equipo que planteó todos estos ítems en forma adecuada:



1)

a)

$A = 1200\ cm^2$

$A = x^2 + 4xy$

b)

$1200 = x^2 + 4xy$

$1200 - x^2 = 4xy$

$\frac{1200}{4x} - \frac{x^2}{4x} = y$

$\frac{300}{x} - \frac{1}{4}x = y \Rightarrow \boxed{\frac{1200 - x^2}{4x} = y}$

c) Volúmen

$\boxed{V = x^2 . y}$

d) $V = x^2 . y$

$V = x^2 . \left(\frac{1200 - x^2}{4x}\right)$

$V = \frac{1200\ x^2 - x^4}{4x}$

$V = \frac{\cancel{1200}^{300}\ \cancel{x^2}}{\cancel{4x}} - \frac{\cancel{x^4}^{3}}{4\cancel{x}}$

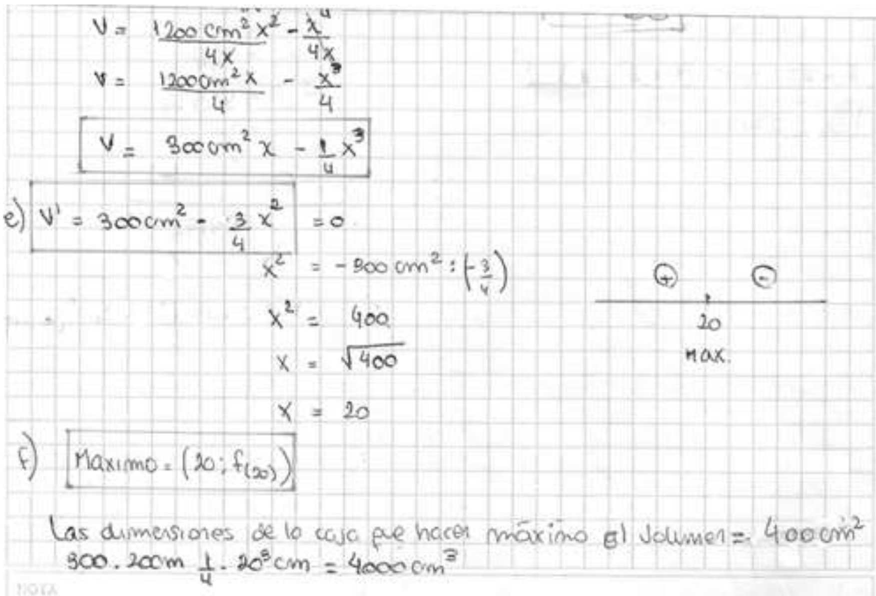
$\boxed{V = 300\ x - \frac{1}{4}x^3}$

$F'' > 0$ mín

$F'' < 0$ máx

Fueron 21 equipos los que derivaron correctamente la función volumen y buscaron su punto crítico. El equipo que resta derivó y no igualó a cero la derivada, dejando acá el ejercicio inconcluso. De estos 21 equipos, cuatro no aclararon por qué tomaron como punto crítico sólo el valor positivo de la variable.

Mostramos la siguiente producción:

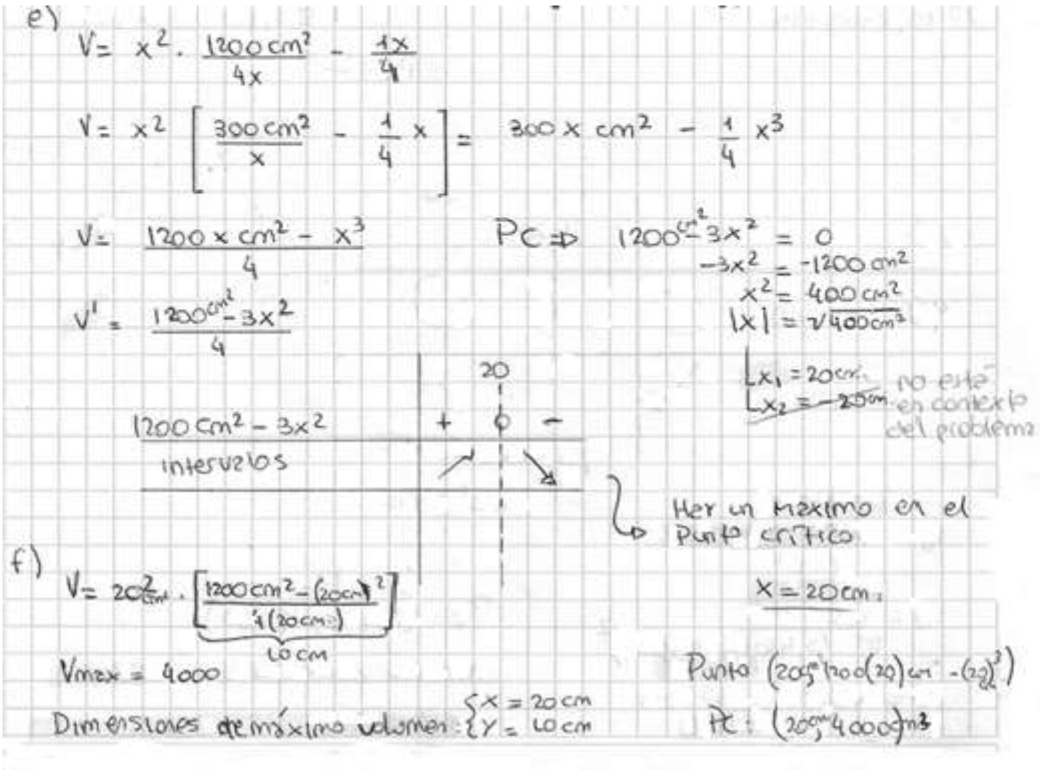



Los demás equipos, al obtener dos puntos críticos, escribieron expresiones como: “no puede ser medida negativa”, “por contexto”, “no está en el contexto del problema”, “el dominio en contexto es $R^+$”.

En la jornada de trabajo, una vez que obtuvieron el valor 20 como máximo de la función planteada, varios equipos no sabían cómo responder sobre las medidas de la caja y el volumen. La profesora los orientó a cada uno sobre la producción correspondiente, pensando qué significaba cada expresión, de cuál habían obtenido el máximo y cómo estaban relacionadas las variables.

De estos 21 equipos que obtuvieron en forma correcta el punto crítico acorde al contexto del problema, 19 aplicaron algún método para conocer si dicho punto era máximo o mínimo o no era ER de la función. Sólo uno de estos equipos utilizó el criterio de la derivada segunda, los demás hicieron el cuadro con el signo de la derivada primera a la izquierda y a la derecha del punto. Un equipo, además del cuadro, estudió en forma analítica el signo de la derivada primera indicando los IC e ID de la función mencionada.

Vemos la producción de uno de los equipos:



e)

$V = x^2 \cdot \frac{1200\,cm^2}{4x} - \frac{1x}{4}$

$V = x^2\left[\frac{300\,cm^2}{x} - \frac{1}{4}x\right] = 300x\,cm^2 - \frac{1}{4}x^3$

$V = \frac{1200x\,cm^2 - x^3}{4}$ Pc ⇒ $1200cm^2 - 3x^2 = 0$

$-3x^2 = -1200\,cm^2$

$x^2 = 400\,cm^2$

$|x| = \sqrt{400\,cm^2}$

$x_1 = 20cm$

$\cancel{x_2 = -20cm}$ no está en contexto del problema

$V' = \frac{1200cm^2 - 3x^2}{4}$

| | | 20 | |
|---|---|---|---|
| $1200\,cm^2 - 3x^2$ | + | 0 | − |
| intervalos | ↗ | | ↘ |

Hay un Maximo en el Punto critico

$x = 20cm$

f) $V = 20^2 cm \cdot \underbrace{\left[\frac{1200cm^2 - (20cm)^2}{4(20cm)}\right]}_{10\,cm}$

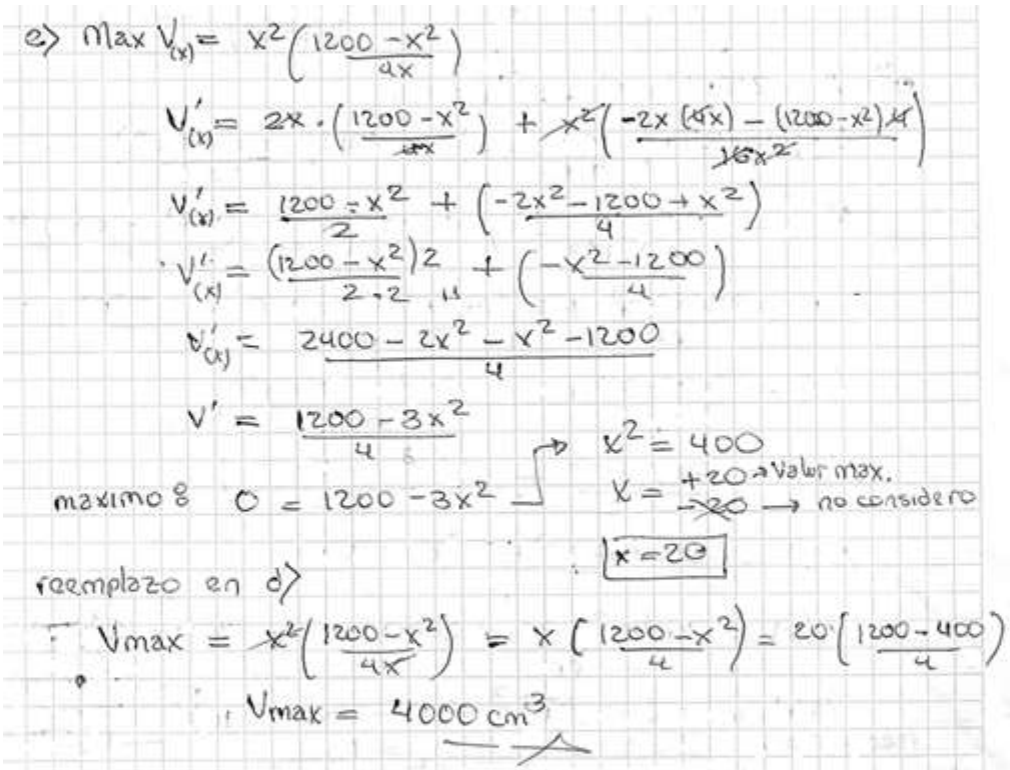
$V_{max} = 4000$

Dimensiones de máximo volumen: $\begin{cases} x = 20cm \\ y = 10cm \end{cases}$

Punto $\left(20; \frac{1200(20)cm - (20)^3}{4}\right)$

Pc: $(20cm; 4000\,cm^3)$

Los dos equipos que no usaron algún método concluyeron directamente que ese punto era máximo. Es el caso de:



e) Max $V_{(x)} = x^2\left(\frac{1200-x^2}{4x}\right)$

$V'_{(x)} = 2x\cdot\left(\frac{1200-x^2}{\cancel{4x}}\right) + \cancel{x^2}\left(\frac{-2x(4x) - (1200-x^2)4}{\cancel{16x^2}}\right)$

$V'_{(x)} = \frac{1200-x^2}{2} + \left(\frac{-2x^2 - 1200 + x^2}{4}\right)$

$V'_{(x)} = \frac{(1200-x^2)2}{2\cdot 2} + \left(\frac{-x^2-1200}{4}\right)$

$V'_{(x)} = \frac{2400 - 2x^2 - x^2 - 1200}{4}$

$V' = \frac{1200-3x^2}{4}$

máximo: $0 = 1200 - 3x^2$ → $x^2 = 400$

$x = +20$ → Valor max.

$\cancel{-20}$ → no considero

$\boxed{x=20}$

reemplazo en d)

$V_{max} = \cancel{x^2}\left(\frac{1200-x^2}{\cancel{4x}}\right) = x\left(\frac{1200-x^2}{4}\right) = 20\left(\frac{1200-400}{4}\right)$

$V_{max} = 4000\,cm^3$

De los 21 equipos, 17 escribieron como respuesta las dimensiones de los lados de la caja y el volumen de la misma en forma correcta y con las unidades correspondientes. Dos equipos señalaron mal la medida de la altura de la caja, pero bien la del volumen. Otro equipo respondió bien a las medidas de la caja, pero no indicaron el volumen y el último, viceversa, es decir, contestaron bien sobre el volumen y no señalaron las medidas de la caja.

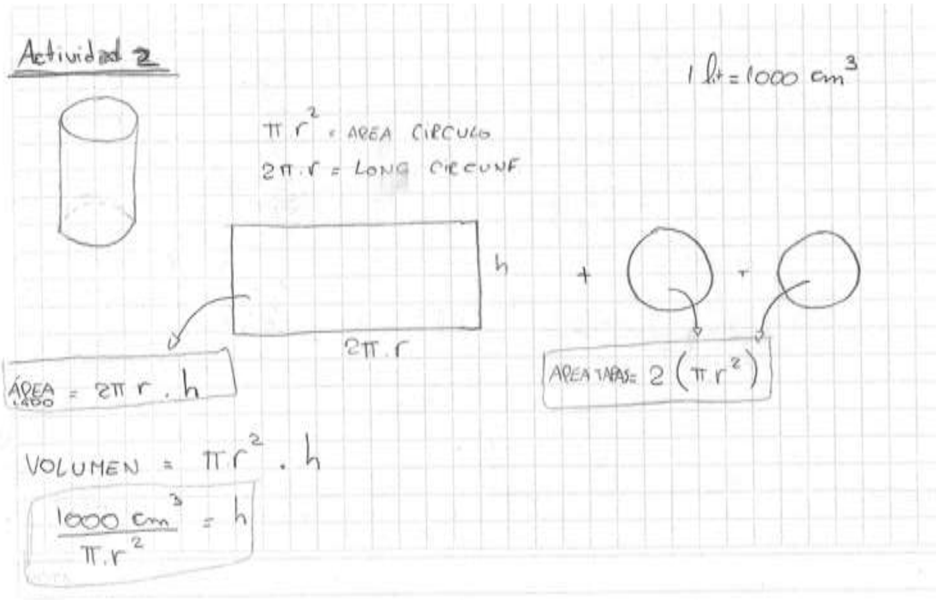
En la actividad 2 brindamos la consigna de un PO en el cual solicitamos las medidas de una lata con capacidad de 1 litro de agua, con forma de un cilindro circular recto, en la que se use la menor cantidad de material posible en su fabricación. En esta oportunidad no dimos pasos a seguir.  La única orientación que decidimos brindar fue un gráfico de un cilindro circular recto y aclarar que consideramos la base y la tapa en el material a ser utilizado.

El primer equipo que comenzó con esta actividad lo hizo a las 9 de la mañana y el último 9 y 20. Varios equipos estuvieron trabajando hasta las 11 horas. Algunos sin poder resolverla.

Si bien la profesora hizo el dibujo del cilindro en el pizarrón no escribió la fórmula del área lateral ni del volumen. En la jornada de trabajo explicamos que no íbamos a realizar consultas porque queríamos explorar si podían resolver la situación solos. Indicamos que se podían guiar con la actividad 1.

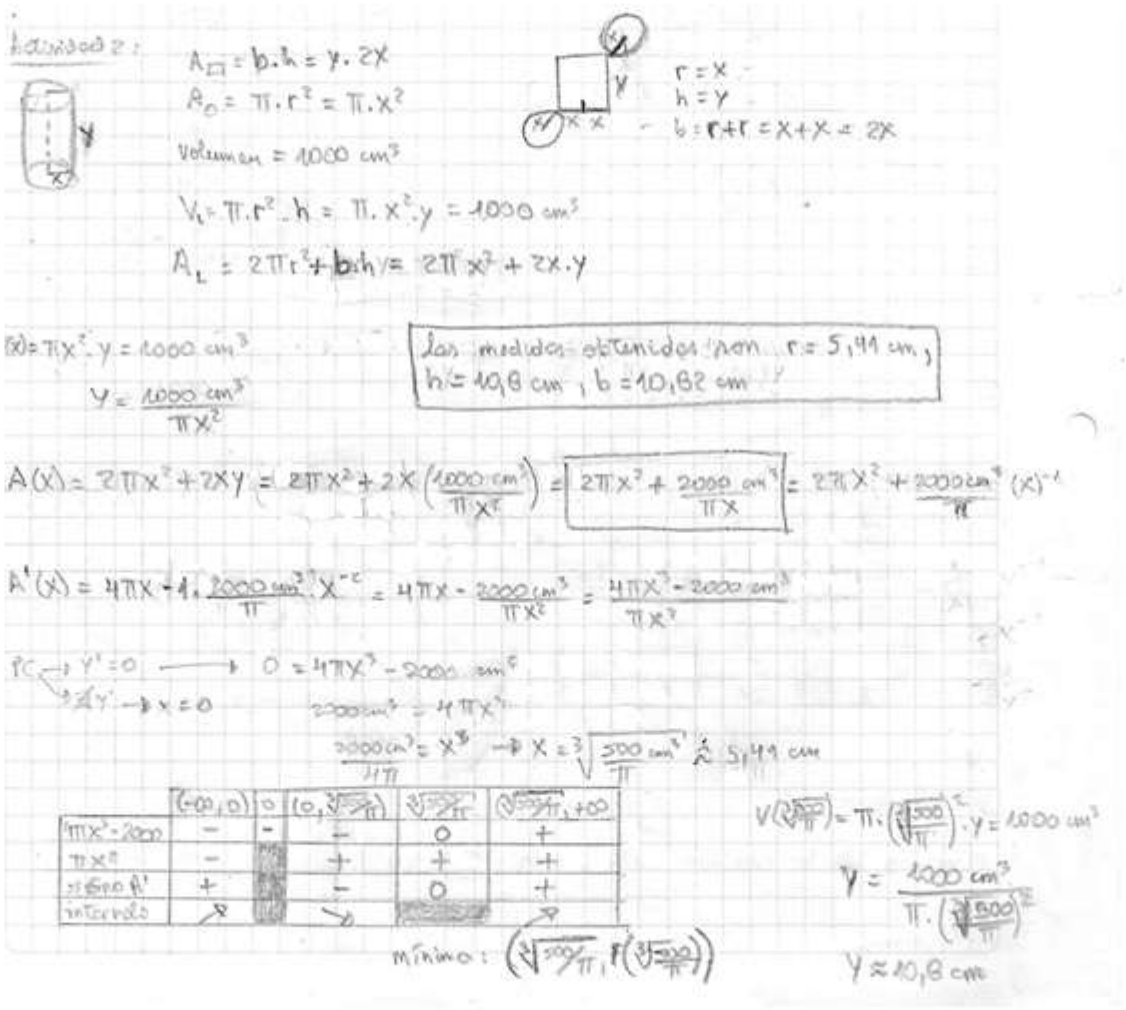
Del total de equipos, 4 no resolvieron el problema.

De los 23 equipos restantes, 21 (78% del total de 27) hicieron el esquema de un cilindro indicando las variables radio y altura. De estos equipos 6 también graficaron una figura de la superficie lateral del cilindro y de los dos círculos (base y tapa):




Fueron también 21 equipos los que plantearon bien la relación entre las variables dadas por su volumen, en dos casos tomaron como dato 1 litro, en los demás 1000 $cm^3$. Un equipo escribió como fórmula del volumen $V = b^2\ a$ y el otro equipo no igualó el volumen con el dato (1000 $cm^3$ o un litro). Por lo tanto, continuamos el análisis de los 21 equipos que pudieron establecer la relación entre las variables.

Un total de 18 equipos estableció en forma correcta el área lateral y de las dos tapas del cilindro. Un equipo escribió $A = 2\pi x^2 + 2xy$ , siendo el radio $x$ y la altura $y$. Luego continuaron con esta fórmula de manera correcta hasta terminar el problema, con lo cual lo consideramos como válido para el análisis.


Actividad 2:

$A_{\square} = b.h = y.2x$

$A_{\bigcirc} = \pi . r^2 = \pi . x^2$

Volumen = 1000 cm$^3$

$V_c = \pi . r^2 . h = \pi . x^2 . y = 1000 \text{ cm}^3$

$A_L = 2\pi r^2 + b.h = 2\pi x^2 + 2x.y$

r = x

h = y

b = r + r = x + x = 2x

$(x) = \pi x^2 . y = 1000 \text{ cm}^3$

$y = \frac{1000 \text{ cm}^3}{\pi x^2}$

$\boxed{\text{los medidas obtenidas son } r = 5{,}41 \text{ cm}, h = 10{,}8 \text{ cm}, b = 10{,}82 \text{ cm}}$

$A(x) = 2\pi x^2 + 2xy = 2\pi x^2 + 2x\left(\frac{1000 \text{ cm}^3}{\pi x^2}\right) = \boxed{2\pi x^2 + \frac{2000 \text{ cm}^3}{\pi x}} = 2\pi x^2 + \frac{2000 \text{ cm}^3}{\pi}(x)^{-1}$

$A'(x) = 4\pi x - 1 . \frac{2000 \text{ cm}^3}{\pi} x^{-2} = 4\pi x - \frac{2000 \text{ cm}^3}{\pi x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2000 \text{ cm}^3}{\pi x^2}$

PC $\to y' = 0 \longrightarrow 0 = 4\pi x^3 - 2000 \text{ cm}^3$

$\nexists y' \to x = 0$

$2000 \text{ cm}^3 = 4\pi x^3$

$\frac{2000 \text{ cm}^3}{4\pi} = x^3 \to x = \sqrt[3]{\frac{500 \text{ cm}^3}{\pi}} \approx 5{,}41 \text{ cm}$

| | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, \sqrt[3]{500/\pi})$ | $\sqrt[3]{500/\pi}$ | $(\sqrt[3]{500/\pi}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4\pi x^3 - 2000$ | − | − | − | 0 | + |
| $\pi x^2$ | − | | + | + | + |
| signo $A'$ | + | | − | 0 | + |
| intervalo | ↗ | | ↘ | | ↗ |

mínimo: $\left(\sqrt[3]{500/\pi}, f\left(\sqrt[3]{500/\pi}\right)\right)$

$V\left(\sqrt[3]{500/\pi}\right) = \pi . \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2 . y = 1000 \text{ cm}^3$

$y = \frac{1000 \text{ cm}^3}{\pi . \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2}$

$y \approx 10{,}8$ cm

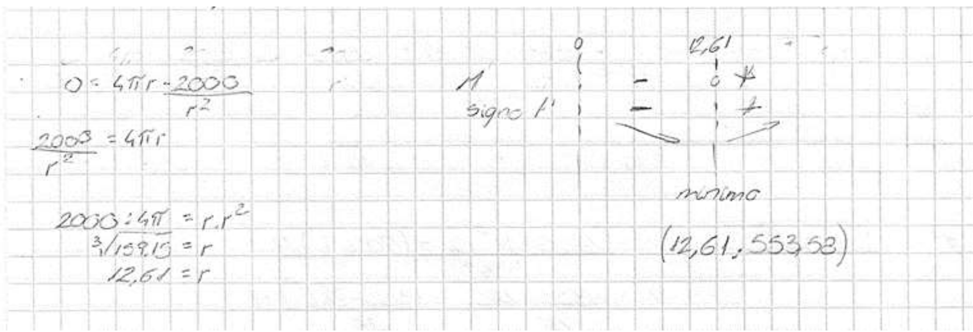
Los otros dos equipos no continuaron con la resolución del problema.

De estos 19 equipos todos despejaron en forma adecuada la altura del cilindro en la relación dada por el volumen del mismo y reemplazaron dicha altura por esa expresión en la función área. Fueron 18 equipos los que derivaron bien la función área, pero uno de ellos consideró como volumen el valor 1 litro en vez de 1000 cm$^3$. El equipo que derivó mal no continuó con la resolución.

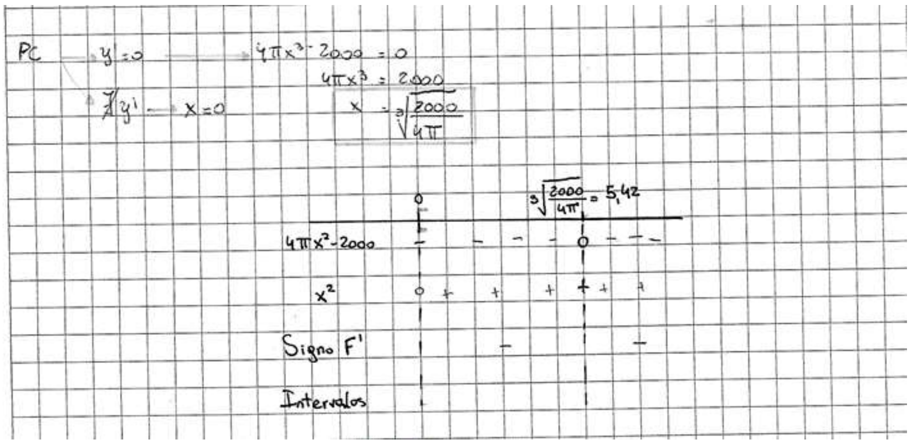
Respecto a los puntos críticos, varios equipos señalaron que un punto crítico es aquel donde la derivada es cero o no existe y eliminaron esta última posibilidad. Al igualar a cero y hacer el despeje correspondiente, un equipo tomó dos valores de la raíz cúbica (positivo y negativo), descartando el negativo por el contexto del problema. El equipo que consideró 1 litro como valor del volumen obtuvo otro valor de punto crítico. Otro equipo realizó bien el despeje, pero el valor indicado no era correcto. Luego profundizamos en una entrevista con estos alumnos y llegamos a la conclusión que no hicieron bien el cálculo con la calculadora.

Otro de los equipos al realizar pasos algebraicos se equivocó en un denominador común, por lo cual el valor del punto crítico hallado no era correcto. A pesar de todas estas situaciones estos 18 equipos prosiguieron con la resolución del problema, 15 con valores acertados.

De estos equipos 17 emplearon un método para determinar si el punto crítico hallado es o no ER de la función y si es mínimo. Un solo equipo utilizó el criterio de la derivada segunda, los demás hicieron un cuadro de signo analizando el signo de la derivada primera. Respecto a estos cuadros algunos estuvieron más detallados que otros. Por ejemplo, el siguiente equipo no justificó los signos de la derivada primera:

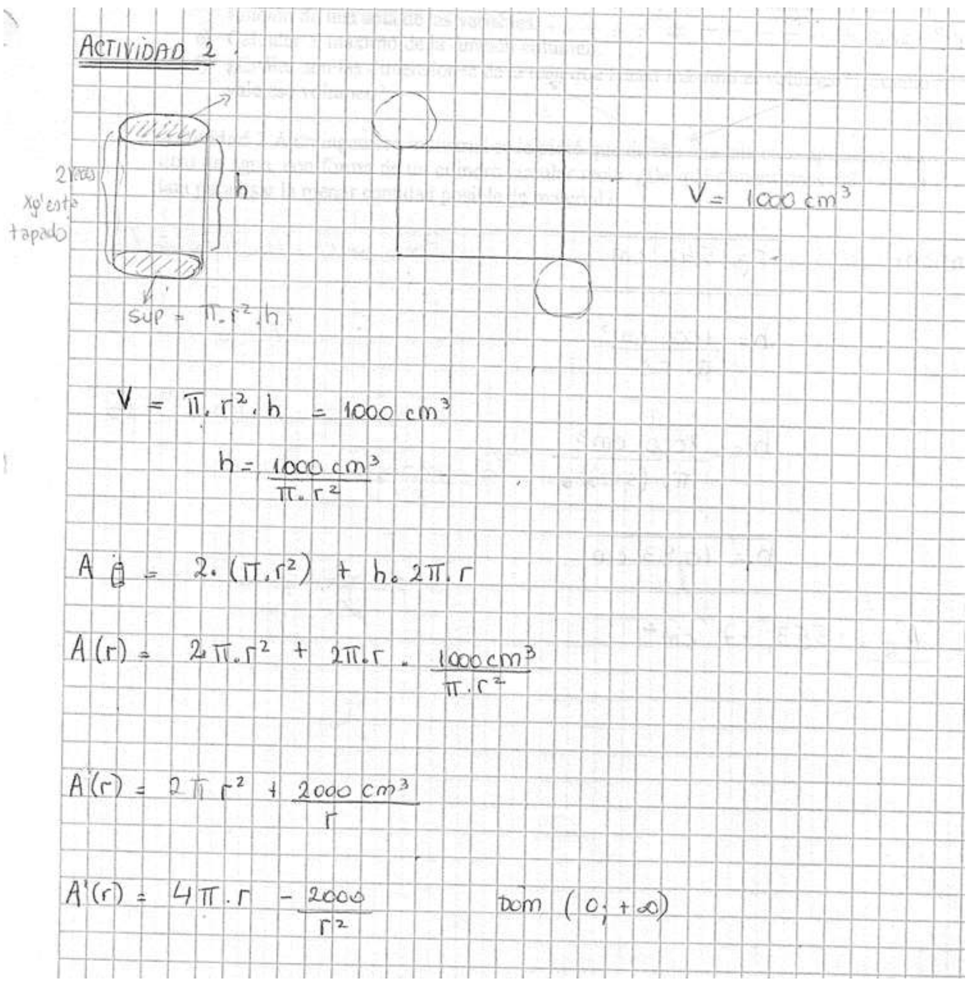



Este otro equipo detalló más su razonamiento:



Un solo equipo concluyó directamente que el punto crítico es mínimo y brindó las dimensiones del cilindro. Es decir, son 16 los equipos que continúan correctamente. Once equipos respondieron en forma adecuada y con las medidas correctas al problema. Tres equipos arrastraron el error que habían cometido y contestaron de acuerdo a sus medidas halladas. Los otros brindan una sola medida.

Mostramos la producción completa de un equipo que resolvió en forma correcta el problema:




$$V = \pi . r^2 . h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000\ cm^3}{\pi . r^2}$$

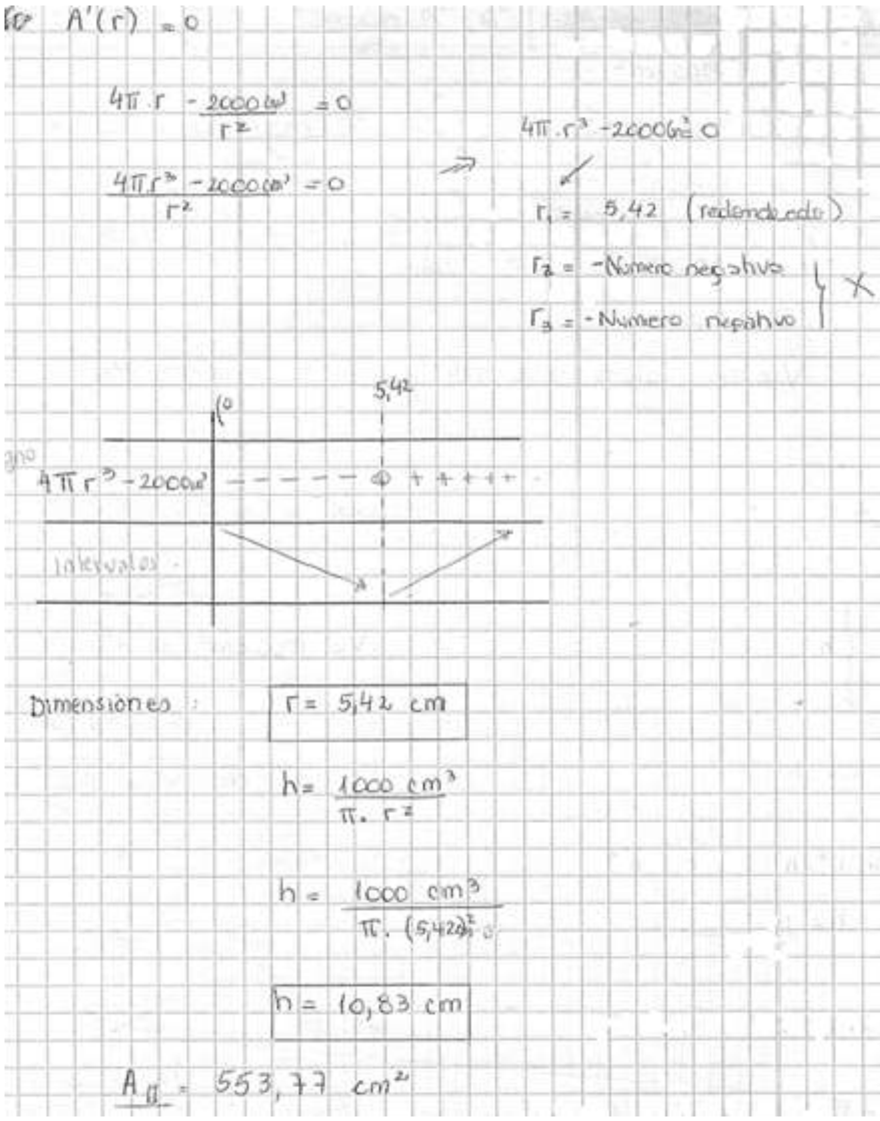
$$A = 2.(\pi . r^2) + h . 2\pi . r$$

$$A(r) = 2\pi . r^2 + 2\pi . r . \frac{1000 cm^3}{\pi . r^2}$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000\ cm^3}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi . r - \frac{2000}{r^2} \qquad Dom\ (0, +\infty)$$

Luego continuaron:



$A'(r) = 0$

$4\pi . r - \frac{2000\,cm^3}{r^2} = 0$

$\frac{4\pi r^3 - 2000\,cm^3}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi . r^3 - 2000\,cm^3 = 0$

$r_1 = 5,42$ (redondeado)

$r_2 =$ -Numero negativo

$r_3 =$ -Numero negativo

| | 0 | 5,42 |
|---|---|---|
| $4\pi r^3 - 2000\,cm^3$ | − − − − − | 0 + + + + + |
| intervalos | | |

Dimensiones: $\boxed{r = 5,42\ cm}$

$h = \frac{1000\ cm^3}{\pi . r^2}$

$h = \frac{1000\ cm^3}{\pi . (5,42)^2}$

$\boxed{h = 10,83\ cm}$

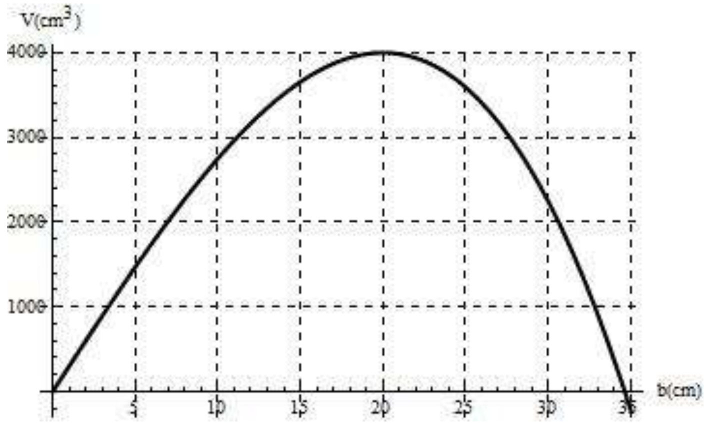
$A_T = 553,77\ cm^2$

Varios equipos estuvieron trabajando durante tres horas. Algunos entregaron sin resolver la actividad 2. En ese momento, siendo las 11 horas comenzó la instancia de debate grupal. Estimamos que fue en la que los alumnos se mostraron más cansados y dispersos, charlaban y no prestaban atención. La profesora pidió atención para comenzar. Leyó la primera actividad y fue siguiendo ítem por ítem tal lo previsto en la resolución del análisis preliminar.

Sólo agregó la elaboración de una tabla tomando valores de $b$ y sacando el de $h$ y calculando el volumen. Pocos equipos la ayudaron con la calculadora para completar la tabla:

| $b$ (cm) | $h$ (cm) | Volumen |
|---|---|---|
| 5 cm | 58.75 cm | 1468.75 $cm^3$ |
| 10 cm | 27.5 cm | 2750 $cm^3$ |
| 15 cm | 16.25 cm | 3656.25 $cm^3$ |
| 20 cm | 10 cm | 4000 $cm^3$ |
| 25 cm | 5.75 cm | 3593.75 $cm^3$ |
| 30 cm | 2.5 cm | 2250 $cm^3$ |

Pidió silencio y preguntó a los alumnos si alguno había utilizado esta herramienta y todos contestaron que no. Uniendo los puntos graficó la función volumen:




En relación a cómo sacar analíticamente el máximo de la función volumen, algunos alumnos derivaron en voz alta la función volumen e indicaron que se debía igualar a cero. Muchos alumnos continuaban dispersos. La profesora escribió en el pizarrón la derivada y prosiguió con el análisis correspondiente para hallar los ER.

Por último, la docente solicitó las dimensiones de la caja y el valor del volumen máximo que se podía obtener.

A esta altura de la clase la participación de los alumnos era cada vez menor. Faltaban 20 minutos para terminar el horario habitual. La docente planteó la actividad 2 en el pizarrón, pero no desarrolló todos los pasos. Explicó la fórmula del volumen del cilindro y del área lateral haciendo un esquema. Muchos alumnos reconocieron que no pudieron obtener esta última. Los alumnos de un equipo comentaron que dejaron el valor un litro y no lo convirtieron a 1000 $cm^3$.

La profesora expresó la función área en una de las variables y, con ayuda de muy pocos alumnos, obtuvo su derivada. Luego calculó el punto crítico.

Por último, hizo rápidamente el cuadro de signo de la derivada primera para determinar que dicho punto crítico era un mínimo de la función. Un alumno leyó las medidas del radio y la altura del cilindro resultante.

La docente enfatizó que los problemas anteriormente resueltos sintetizaban todas las actividades y situaciones que habían resuelto y estudiado previamente. Luego dio por finalizada la clase.

Realmente fue notable el esfuerzo que pusieron los alumnos en la resolución de esta última actividad, en los dos problemas, mayormente en el segundo. Desde el análisis cognitivo y la propia experiencia sabemos las dificultades que se evidencian en la resolución de PO. Más aún en este caso en el cual no se habían resuelto problemas de este tipo en el pizarrón.

Hay cuestiones para destacar en las producciones de los alumnos que quizás sean reflejo de las sesiones anteriores de trabajo y las cuales nos sorprenden para bien. Por ejemplo, ante la búsqueda de un punto crítico, la mayoría de los equipos aclara las dos opciones: derivada cero o no existencia de derivada y descarta esta última. A su vez es alto el porcentaje de equipos que aplica el método de cambio de signo de la derivada primera para saber si el punto crítico hallado es ER y de qué tipo. Estas acciones suelen faltar en las resoluciones por parte de los alumnos.

La conversión de registros no está interiorizada en los estudiantes si no se solicita. No encontramos producciones en donde hayan probado con diferentes valores de las variables para formar el cuerpo geométrico correspondiente y poder observar cómo varía el volumen o el área (dependiendo el problema). Tampoco encontramos la estrategia de realizar un gráfico al respecto que refleje la función a optimizar.

Pensamos que la consigna guiada de la actividad 1 es fundamental a la hora de resolver la actividad 2. Si bien observamos a los alumnos discutir entre los integrantes del equipo sus ideas, escribir en papeles borradores, consideramos que no pueden ir más allá de lo planteado en las consignas, que les falta "soltura" en su pensamiento. Actitudes como probar, proponer, conjeturar, "jugar" con la matemática no se evidencian en las producciones ni en la puesta en común de las sesiones.

### 6.2 Segunda parte. Análisis de las concepciones según Sfard

Teniendo en cuenta los indicadores definidos en el Capítulo 5, sección 5.3. y luego de analizar cada una de las producciones de los equipos que intervienen en la experiencia, consignamos en una tabla los resultados obtenidos. Recordamos que cada equipo tiene una puntuación para cada concepción que se obtiene promediando los niveles de éxito logrados correspondiente a cada concepto.

Estas puntuaciones nos permiten hacer un diagnóstico cuantitativo con respecto a la comprensión de los conceptos de IC, ID y ER de una función como CO y CE, presente en los equipos de los estudiantes examinados.

Los equipos son identificados por un número desde 1 hasta 27 y las siglas usadas se encuentran en la página 15.

A la tabla mencionada agregamos dos columnas con el desempeño de los equipos en la resolución de los dos PO del último grupo de actividades de descubrimiento. Llamamos PO1 al primer problema cuya consigna está guiada paso a paso para su resolución. Denominamos PO2 al segundo problema. Para la valoración, consideremos B (bien) cuando el problema está resuelto en su totalidad con respuesta correcta (puede faltar algún detalle en la respuesta o un error sin importancia); R (regular) cuando sólo se equivocan en la respuesta, ya sea porque no la escriben o porque hacen un cálculo mal al final de todo el desarrollo. La evaluación es M (mal) cuando el equipo no logra terminar de resolver el problema, por ejemplo, sólo plantean la primera ecuación y/o la segunda, o no aplican algún método para saber si el punto crítico hallado es o no ER o lo resuelven mal. Por último, consideramos No cuando los alumnos no hacen planteo alguno de la situación. De acuerdo a lo anteriormente explicado, los resultados son:

| Equipo | CO-IC | CE-IC | CO-ID | CE-ID | CO-ER | CE-ER | PO1 | PO2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9 | 0,625 | 0,9 | 0,375 | 0,91 | 0,58 | B | B |
| 2 | 1 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,55 | 0,67 | M | No |
| 3 | 1 | 0,75 | 0,9 | 0,75 | 0,82 | 0,50 | B | R |
| 4 | 0,8 | 0,75 | 0,7 | 0,875 | 0,82 | 0,50 | B | B |
| 5 | 1 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,91 | 0,92 | B | B |
| 6 | 1 | 0,875 | 1 | 0,75 | 0,91 | 0,75 | B | B |
| 7 | 1 | 0,875 | 1 | 0,875 | 0,73 | 0,75 | B | B |
| 8 | 1 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,91 | 0,83 | B | B |
| 9 | 1 | 0,625 | 1 | 0,625 | 0,91 | 0,42 | B | B |
| 10 | 1 | 0,625 | 1 | 0,625 | 0,82 | 0,92 | B | B |
| 11 | 0,8 | 0,625 | 0,9 | 0,625 | 0,64 | 0,58 | M | M |
| 12 | 1 | 0,75 | 1 | 0,875 | 0,82 | 0,67 | B | B |
| 13 | 1 | 0,625 | 1 | 0,875 | 0,64 | 0,50 | B | M |
| 14 | 1 | 0,75 | 0,9 | 0,625 | 0,73 | 0,50 | M | M |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,75 | B | B |
| 16 | 0,6 | 0,625 | 0,7 | 0,5 | 0,64 | 0,42 | M | No |
| 17 | 1 | 0,875 | 1 | 1 | 0,73 | 0,75 | B | B |
| 18 | 0,9 | 0,375 | 0,9 | 0,5 | 0,45 | 0,33 | M | No |
| 19 | 1 | 0,875 | 1 | 0,875 | 0,55 | 0,50 | B | R |
| 20 | 1 | 0,75 | 1 | 0,875 | 0,55 | 0,58 | B | M |
| 21 | 1 | 0,25 | 0,8 | 0,375 | 0,73 | 0,33 | B | M |
| 22 | 1 | 0,625 | 1 | 0,875 | 0,64 | 0,50 | M | M |
| 23 | 0,9 | 0,625 | 1 | 0,75 | 0,64 | 0,58 | B | B |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 1 | 0,75 | 1 | 0,875 | 0,64 | 0,92 | M | No |
| 25 | 1 | 0,875 | 1 | 0,875 | 1,00 | 0,67 | B | B |
| 26 | 1 | 0,75 | 0,7 | 0,875 | 0,82 | 0,67 | B | B |
| 27 | 0,9 | 0,25 | 0,9 | 0,375 | 0,64 | 0,25 | M | M |

Tabla 9. Resultados por equipo

Siguiendo lo establecido por Mora (2006) consideramos que un equipo evidencia alguna de las dos concepciones cuando su puntuación es mayor o igual a 0,67.

El único equipo que no posee una CO de IC es el equipo 16. Todos los equipos poseen una CO de ID. Esto se diferencia con el concepto de ER, sobre el cual 16 equipos (59%) posee una CO del mismo.

Respecto a la CE, el 59% de los equipos (16 del total) poseen CE de IC, el 67% (18 grupos) evidencia CE de ID y el 44% (12 equipos) muestra una CE de ER.

La CO de los conceptos de IC e ID prima sobre la CE de dichos conceptos en todos los equipos. En el caso del concepto de ER esto sucede en el 74% de los equipos. Estos resultados son similares a los que se obtiene en Mora (2006) donde la CO del concepto de función se antepone sobre la CE del mismo en todos los estudiantes que intervienen en el estudio.

Los equipos que poseen las dos concepciones sobre los tres conceptos (9 equipos, 33%) resuelven en forma correcta los dos PO planteados en el último grupo de actividades. Aparentemente la adquisición de las dos concepciones tiene una incidencia positiva en la resolución de los PO.

Sfard enfatiza que la habilidad de "ver" una entidad matemática como objeto y como proceso es indispensable para una comprensión profunda de la matemática, cualquiera sea la definición de comprensión que se adopte. Los equipos mencionados que, siguiendo la expresión, ven estos objetos matemáticos en las dos concepciones resuelven bien los PO, tanto el guiado paso a paso como el que se plantea sin guía de resolución.

Con el fin de resumir la información cuantitativa obtenida en la tabla 9 realizamos un Análisis de Componentes Principales. El mismo es una técnica estadística de síntesis de los datos o reducción del número de variables tratando de perder la menor cantidad de información posible. Los nuevos componentes principales o factores son una combinación lineal de las variables originales, y además son independientes entre sí. Un aspecto clave en esta técnica es la interpretación de los factores, ya que ésta no viene dada a priori, sino que es deducida tras observar la relación de los factores con las variables iniciales (Terrádez, s.f.).

Utilizando el programa estadístico InfoStat (Di Rienzo et al., 2017) hicimos un Análisis de Componentes Principales el cual mostramos a continuación, explicando los diversos pasos que nos permiten definir las nuevas variables y la caracterización de las mismas.

Exponemos las salidas del programa en cuadros de texto manteniendo la tipografía que arroja el mismo.

En primer lugar, analizamos la relación entre las variables originales a través del Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson. La matriz de coeficientes de correlación entre las variables junto con sus significancias se muestra en la tabla 10.

| | CO-IC | CE-IC | CO-ID | CE-ID | CO-ER | CE-ER |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CO-IC | 1 | 0,15754 | 0,0004 | 0,0340 | 0,2455 | 0,0502 |
| CE-IC | 0,2798 | 1 | 0,0882 | 0,0000 | 0,0394 | 0,0003 |
| CO-ID | 0,6326 | 0,3344 | 1 | 0,0608 | 0,8042 | 0,0196 |
| CE-ID | 0,4092 | 0,7993 | 0,3656 | 1 | 0,4995 | 0,0050 |
| CO-ER | 0,2314 | 0,3987 | 0,0500 | 0,1358 | 1 | 0,0307 |
| CE-ER | 0,3806 | 0,6470 | 0,4464 | 0,5240 | 0,4166 | 1 |

Tabla 10. Matriz de coeficientes de correlación/probabilidades

En la parte triangular inferior se presentan los coeficientes y en la superior los p-value de cada uno de ellos. Si el p-value es menor a 0,05 la correlación es significativa y si es menor a 0,01 es altamente significativa.

Entonces observamos que existe una alta relación directa entre las calificaciones obtenidas en CO-IC y CO-ID. Esto significa que a altas (bajas) calificaciones en una de las concepciones implica altas (bajas) en la otra.

Las calificaciones obtenidas en CO-ER no se relacionan con el resto de las CO.

Las calificaciones obtenidas en CE están relacionadas entre sí. Es decir, a altas (bajas) calificaciones en una de ellas implica altas (bajas) en las otras.

En el Análisis de Componentes Principales se realiza una reducción de dimensionalidad con pérdida mínima de información. En este caso, se parte de una estructura de datos que contiene 6 variables cuyas relaciones van a ser analizadas en un plano bidimensional. Por lo tanto, en primer lugar, debemos analizar de qué magnitud es la explicación de estos dos primeros ejes.

**Análisis de componentes principales**

*Datos estandarizados*
*Casos leidos 27*
*Casos omitidos 0*

**Variables de clasificación**

Caso

**Autovalores**

| Lambda | Valor | Proporción | Prop Acum |
|---|---|---|---|
| 1 | 3,09 | 0,52 | 0,52 |
| 2 | 1,13 | 0,19 | 0,70 |
| 3 | 0,88 | 0,15 | 0,85 |
| 4 | 0,47 | 0,08 | 0,93 |
| 5 | 0,30 | 0,05 | 0,98 |
| 6 | 0,12 | 0,02 | 1,00 |

Tabla 11. Resultados Infostat

En la tabla 11, el número remarcado 0,70 indica que los dos primeros ejes que obtenemos en el análisis mencionado explican un 70% de la variabilidad total (se está admitiendo una pérdida del 30%), lo cual es altamente aceptable.

**Autovectores**

| Variables | e1 | e2 |
|---|---|---|
| COIC | 0,38 | 0,49 |
| COID | 0,37 | 0,58 |
| COE | 0,26 | -0,53 |
| CEIC | 0,48 | -0,33 |
| CEID | 0,45 | -0,07 |
| CEE | 0,46 | -0,17 |

Tabla12. Resultados Infostat. Autovectores

Las componentes principales son combinaciones lineales de las variables originales cuyos coeficientes son las coordenadas de los autovectores de la matriz de correlación (Peña, 2002). En la tabla 12 observamos las coordenadas de los dos primeros autovectores que representan las cargas de las variables en las dos primeras componentes. Todas las variables tienen cargas positivas en la primera componente principal. En la segunda componente se registran cargas bajas (no significativas) en las variables CE-ID y CE-ER. Las variables CE-IC, CE-ID y CE-ER tienen carga positiva alta solamente en el primer eje, por lo que forman un gradiente horizontal de izquierda a derecha. En la tabla 13 indicamos estas variables con color amarillo.

Las variables CO-IC y CO-ID tienen cargas positivas en ambos ejes, en consecuencia, forman un gradiente oblicuo, del tercer al primer cuadrante. En la tabla 13 aparecen en color violeta.

Por último, la variable CO-ER tiene carga positiva en el primer eje y negativa en el segundo, por lo tanto, forma un gradiente oblicuo del segundo al cuarto cuadrante, indicado en color verde.

| Autovectores | | |
|---|---|---|
| Variables | e1 | e2 |
| COIC | 0,38 | 0,49 |
| COID | 0,37 | 0,58 |
| COE | 0,26 | -0,53 |
| CEIC | 0,48 | -0,33 |
| CEID | 0,45 | -0,07 |
| CEE | 0,46 | -0,17 |

Tabla 13. Separación de variables según su carga

El programa proporciona un gráfico en el que se representa con vectores a las variables originales y con puntos a los equipos (individuos) analizados. Este gráfico, denominado Biplot, se presenta en la figura 18.

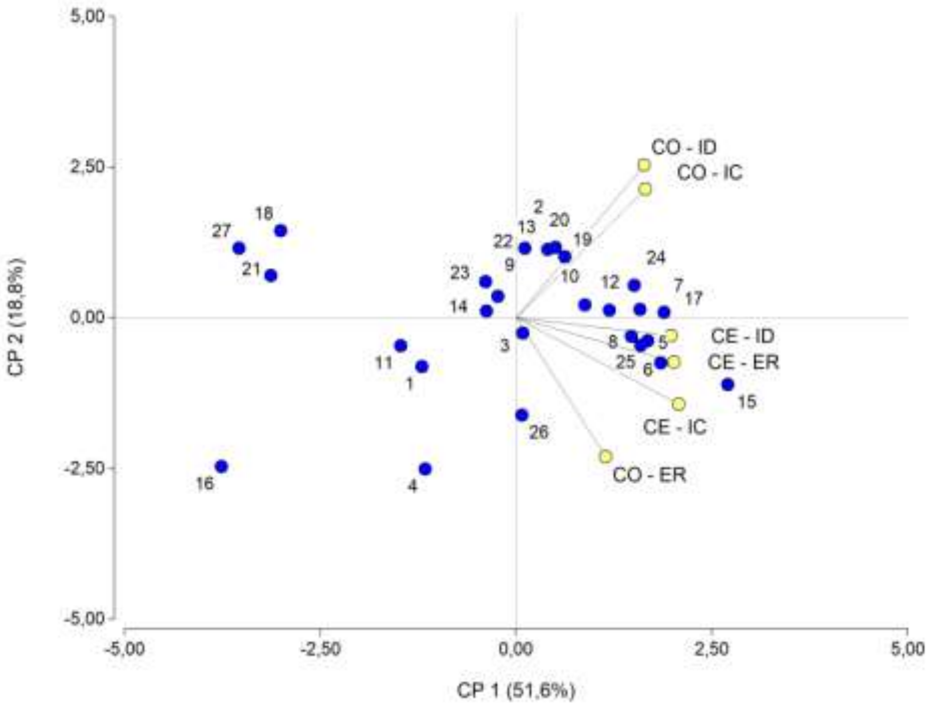



Figura 18. Gráfico sobre variables y equipos.

A partir del análisis de las correlaciones entre variables y de la significancia de las mismas en las componentes principales, reforzamos la formación de los gradientes de la siguiente manera

- ✓ Las variables con carga significativa en el primer eje solamente (resaltadas con amarillo en la tabla 13) forman un gradiente horizontal, de izquierda a derecha porque todas las variables tienen carga positiva. Las variables implicadas son todas las CE, por lo que lo llamamos gradiente *Concepción estructural* (indicado con GCE en la figura 19).

- ✓ Las variables con cargas positiva en el primer eje y negativas en el segundo (resaltadas en verde), forman un gradiente oblicuo del segundo al cuarto cuadrante. En este caso está formado por una sola variable: CO-ER, por lo que lo llamamos gradiente *Concepción operacional de extremos* (GCOE en la figura 19).
- ✓ Las variables que tienen cargas positivas en los dos (señaladas con color violeta), forman un gradiente oblicuo del tercer al primer cuadrante. En este caso como dichas variables tienen que ver con CO de IC e ID, la llamamos *Concepción operacional de intervalos* (GCOI en la figura 19).

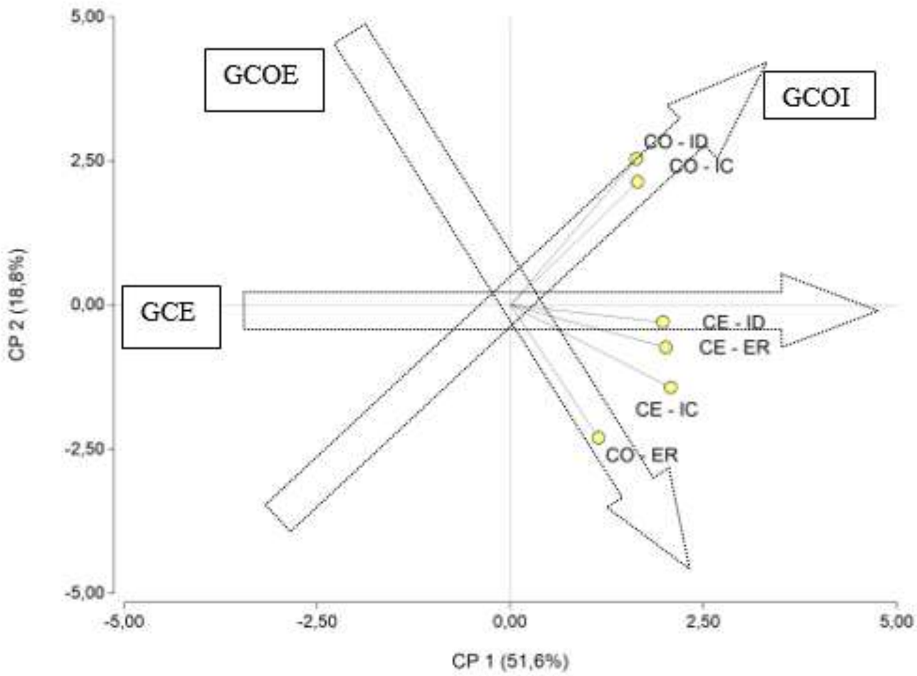



Figura 19. Formación de gradientes

De acuerdo al análisis realizado en el Capítulo 5 en el cual definimos los indicadores que aportan a cada una de las concepciones de cada concepto, podemos caracterizar estas variables de la siguiente manera:

El gradiente Concepción operacional de intervalos se asocia con la identificación de los conceptos de IC, ID en los tres registros (gráfico, analítico y numérico) en situaciones de variación y en funciones sin contexto. En las primeras tareas desde la intuición y luego, ya institucionalizados en clase, desde la definición formal. Se vincula con la acción de completar en tablas los primeros indicios sobre la relación entre los conceptos de IC e ID con el signo de la razón de cambio media en un intervalo y la derivada de la función en un intervalo o en un punto.

El gradiente Concepción operacional de extremos se relaciona con el reconocimiento del concepto de ER en todos los registros trabajados en la situación de aprendizaje en problemas en contexto o funciones sin contexto. En las primeras tareas desde la intuición y luego desde la definición formal de ER. Se asocia con la acción de volcar en tablas los primeros indicios sobre la relación entre un ER y el signo de la derivada primera o su no existencia. En esta concepción incluimos la identificación del concepto de punto crítico.

En el gradiente Concepción estructural se evidencia la integración de los conceptos de IC, ID, ER (dados en sus definiciones formales) con el signo de la función derivada para los dos primeros, y con la anulación o no existencia de la misma para el último. Esta integración involucra los registros gráfico, numérico, analítico y verbal en forma conjunta, en situaciones de variación y en funciones sin contexto. A su vez refleja la distinción entre punto crítico y ER y la obtención de un método para calcular estos últimos.

Agrupamos los 27 equipos de alumnos identificados por cada punto de acuerdo a su proximidad, quedando formados los grupos que designamos: G1, G2, G3, G4, G5 y G6.

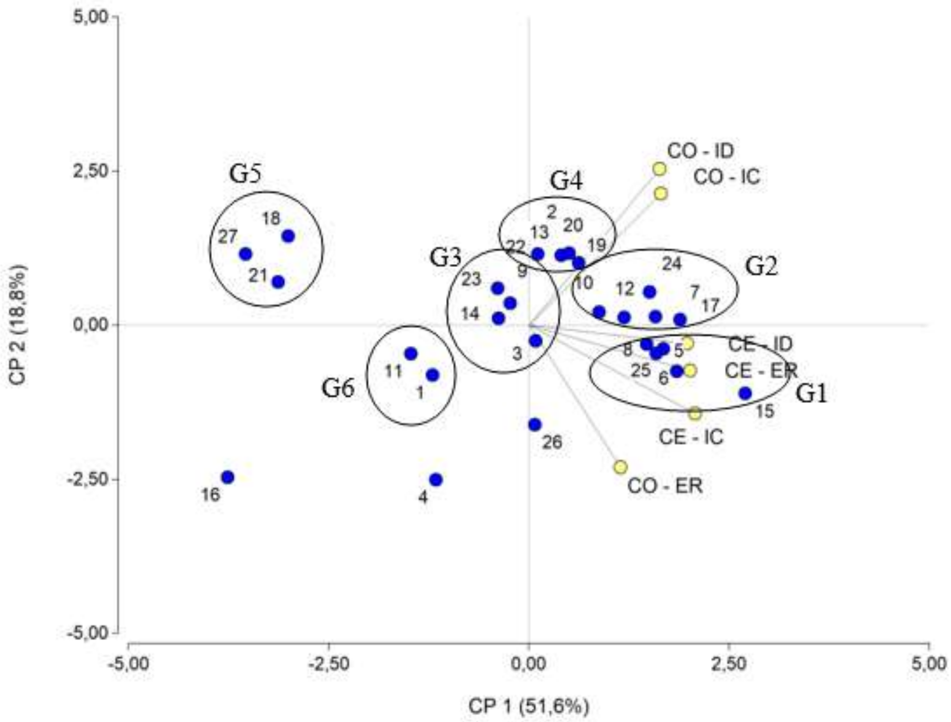



Figura 20. Formación de grupos de equipos según proximidad

Para caracterizar los individuos, se proyectan los puntos en forma perpendicular a los gradientes. De esta manera, los equipos que se proyecten en el extremo positivo (negativo) de un gradiente tendrán altas (bajas) calificaciones en dicho gradiente.

Como consideración general tenemos que todos los individuos que están a la derecha (izquierda) del eje vertical obtuvieron altas (bajas) calificaciones en las tres concepciones estructurales. Es decir, el eje horizontal ordena a los individuos de acuerdo a sus calificaciones en el Gradiente concepción estructural. Además, los individuos del grupo G3 tienen valores medios en todas las variables, ya que están en el centro del gráfico.

Podemos analizar las características de cada grupo en cuanto a los gradientes determinados y relacionarlas con su performance en la resolución de PO.

### 6.2.1 Grupo G1

El grupo G1 está formado por los equipos 5, 6, 8, 15, 25. De acuerdo con su lugar en el plano evidencian:

Gradiente concepción operacional de intervalos: alta

Gradiente concepción operacional de extremos: alta

Gradiente concepción estructural: media

Los equipos de este grupo resolvieron los dos PO planteados en la última actividad.

### 6.2.2 Grupo G2

El grupo G2 está formado por los equipos 7, 10, 12, 17 y 24. Su ubicación nos permite valorar:

Gradiente concepción operacional de intervalos: alta

Gradiente concepción operacional de extremos: valores altos, pero más bajos que G1

Gradiente concepción estructural: media

Este grupo tiene características similares al anterior, sus integrantes obtienen una puntuación alta en las dos CO y media en CE.

Todos los equipos salvo el equipo 24, resuelven los dos PO en forma correcta. El equipo 24 resuelve mal el primer problema y no logra solucionar el segundo.

### 6.2.3 Grupo G3

Este grupo está formado por los equipos 3, 9. 14 y 23 y se ubican en el centro del plano:

Gradiente concepción operacional de intervalos: media

Gradiente concepción operacional de extremos: media

Gradiente concepción estructural: media

Los equipos 9 y 23 resuelven bien los dos problemas. El equipo 3 resuelve bien el primero y regular el segundo ya que al dar la respuesta reemplazan el valor obtenido en la derivada segunda en vez de relacionarlo con las medidas de la caja. El equipo 14 resuelve los dos problemas en forma adecuada hasta la derivación de la función en una variable y cálculo del punto crítico, pero en ninguno de los dos casos aplica algún método como condición suficiente de ER.

### 6.2.4 Grupo G4

Este grupo está formado por los equipos 2, 13, 19, 20 y 22. De acuerdo a su ubicación en el plano podemos dar cuenta de:

Gradiente concepción operacional de intervalos: alta

Gradiente concepción operacional de extremos: baja

Gradiente concepción estructural: media alta

Los equipos 13, 19 y 20 pueden resolver bien el PO1 y no realizan el PO2 o lo hacen en forma regular. El equipo 22 plantea bien el PO1, pero no aplica método luego de encontrar el punto crítico para saber si es máximo o mínimo y no resuelve el segundo. El equipo 2 llega hasta la instancia de derivar en el primer problema y no resuelve el segundo.

### 6.2.5 Grupo G5

El grupo G5 está formado por los equipos 18, 21 y 27, los que muestran:

Gradiente concepción operacional de intervalos: baja

Gradiente concepción operacional de extremos: baja

Gradiente concepción estructural: baja

El equipo 18 resuelve mal el primero y no realizan el segundo. El equipo 27 resuelve mal los dos problemas, el 21 hace bien el PO1 y mal el PO2.

### 6.2.6 Grupo G6

El grupo G6 está formado por los equipos 1 y 11 que obtienen:

Gradiente concepción operacional de intervalos: baja

Gradiente concepción operacional de extremos: media

Gradiente concepción estructural: baja

El equipo 1 resuelve los dos PO bien y el equipo 11 mal el primero y no realiza el segundo.

### 6.2.7 Reflexiones

En cualquiera de los casos y los grupos establecidos, la CO refleja valores más altos que la CE, reflexión que obtuvimos en el análisis de la tabla 9 del punto 6.2. observando las puntuaciones equipo por equipo.

De los 10 equipos que forman los grupos caracterizados por valoración alta en Gradiente concepción operacional de intervalos, Gradiente concepción operacional de extremos y media en el Gradiente de concepción estructural, 9 pueden resolver los dos PO. El restante realiza muy pocos pasos del primero y no hace el segundo.

Los equipos que conforman el grupo que manifiesta una valoración media en sus dos concepciones (grupo G3), resuelven al menos un PO.

Los grupos restantes (ocho equipos en total) tienen valoración baja en Gradiente concepción operacional de extremos y Gradiente concepción estructural, diferenciándose sólo en el Gradiente concepción operacional de intervalos. En estos casos el comportamiento respecto a la resolución de PO1 no es parejo: cuatro equipos lo resuelven bien y uno regular (no efectúa condición suficiente para ER), los demás lo hacen mal. En el caso del PO2, cinco lo resuelven mal, uno regular (despejan mal el punto crítico) y dos no lo hacen.

El equipo 16 tiene puntuaciones bajas en todos los gradientes, resolvieron mal el PO guiado paso a paso y no plantearon el segundo. Los integrantes de este equipo evidenciaron serias dificultades en su aprendizaje a lo largo de toda la experiencia.

## 6.3 Entrevistas. Análisis de tres casos particulares.

De acuerdo a la metodología utilizada los datos recolectados en el análisis a posteriori se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas como entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante la experimentación. Entonces, para profundizar el estudio sobre las concepciones de los alumnos y completar las reflexiones a las que arribamos, realizamos entrevistas mediante un cuestionario. De esta manera utilizamos la técnica basada en un cuestionario (Goldin, 2000, en González, A., 2006) en la que el entrevistado no sólo interactúa con el entrevistador, sino también con el conjunto de tareas (preguntas, problemas o actividades) que se le encomiendan.

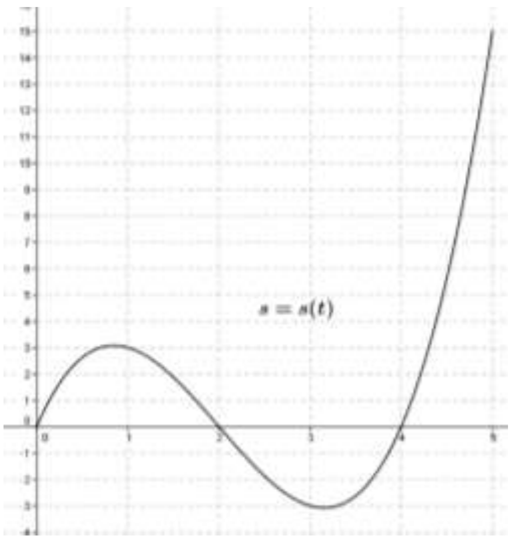
A continuación, brindamos el cuestionario utilizado:

Pregunta 1: ¿Podés dibujar la gráfica de una función positiva y creciente en $(-5, 0)$? ¿Por qué cumple esa condición?

Pregunta 2: Construye la gráfica de una función negativa y creciente en $(0, 4)$ ¿Por qué cumple esa condición?

Pregunta 3: Construye la gráfica de una función en $(1, 6)$ que tenga al menos dos puntos donde se estabiliza su comportamiento. ¿Por qué ahí se estabiliza?

Pregunta 4: El gráfico siguiente muestra la posición de una partícula (en metros) que se mueve en línea recta en un intervalo de $0 \leq t \leq 5$ segundos respecto a un punto inicial. Se considera la posición hacia la derecha del punto como positiva y a la izquierda de dicho punto como negativa.



¿En qué intervalos de tiempo la partícula está a la derecha del punto inicial y en cuáles a la izquierda?

¿Qué ER tiene la función? ¿Cómo podés justificar que son ER? ¿Qué significan bajo el contexto del problema?

¿En qué intervalos la partícula avanza? ¿En cuáles retrocede? ¿Cómo puedes justificar la elección?

Si sabemos que la función posición de la partícula es $s(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$ ¿Cómo podemos obtener las respuestas en forma analítica?

<u>Pregunta 5:</u> De una lámina rectangular de 24 cm por 32 cm se cortan cuadrados de longitud $x$ cm y se doblan los lados para formar una caja. ¿qué planteo sería necesario hacer para saber cuántos centímetros recortar de cada lado para que la caja resulte con el mayor volumen posible?

En la siguiente tabla analizamos las preguntas del cuestionario según su aporte a CO y CE de los conceptos involucrados de manera similar a la realizada para la situación de aprendizaje.

| Pregunta del cuestionario | CO | CE |
|---|---|---|
| ¿Podés dibujar la gráfica de una función positiva y creciente en $(-5, 0)$? | Graficar la función en el intervalo dado con las condiciones dadas. | |
| ¿Por qué cumple esa condición? | Identificar función positiva con la posición del gráfico respecto al eje $x$.<br><br>Identificar IC con la definición. | Relacionar IC con la pendiente de la recta |

| | | |
|---|---|---|
| | | tangente o con la derivada de la función. |
| Construye la gráfica de una función negativa y creciente en $(0,4)$. | Graficar la función en el intervalo dado con las condiciones dadas. | |
| ¿Por qué cumple esa condición? | Identificar función negativa con la posición del gráfico respecto al eje $x$.<br><br>Identificar IC con la definición. | Relacionar IC con la pendiente de la recta tangente o con la derivada de la función. |
| Construye la gráfica de una función en $(1,6)$ que tenga al menos dos puntos donde se estabiliza su comportamiento. | Graficar la función en el intervalo dado con las condiciones dadas. | |
| ¿Por qué ahí se estabiliza? | | Relacionar cada punto estable con ER de una función y/o con recta tangente horizontal.<br>Identificar un cambio de crecimiento a uno y otro lado del punto. |
| El gráfico siguiente muestra la posición de una partícula (en metros) que se mueve en línea recta en un intervalo de $0 \le t \le 5$ segundos respecto a un punto inicial. Se considera | | Identificar y relacionar el signo de la función con la posición de la partícula respecto al punto inicial. |

| | | |
|---|---|---|
| la posición hacia la derecha del punto como positiva y a la izquierda de dicho punto como negativa.<br>¿En qué intervalos de tiempo la partícula está a la derecha del punto inicial y en cuáles a la izquierda? | | |
| ¿Qué ER tiene la función? | Identificar los ER de la función. | |
| ¿Cómo podés justificar que son ER? | | Relacionar los ER con puntos de tangente horizontal y cambio de signo de la derivada primera o cambio de crecimiento de la función. |
| ¿Qué significan bajo el contexto del problema? | | Relacionar los ER con la posición y movimiento de la partícula a lo largo de su recorrido. |
| ¿En qué intervalos la partícula avanza? ¿En cuáles retrocede? | Identificar gráficamente IC e ID. | Identificar gráficamente IC e ID y relacionarlos con el movimiento de la partícula. |
| ¿Cómo puedes justificar la elección? | Justificar a través de la definición de IC y ID | Justificar relacionando con la derivada primera. |
| Si sabemos que la función posición de la partícula es $s(t)=t^3-6t^2+8t$ ¿Cómo podemos obtener las respuestas en forma analítica? | | Relacionar el movimiento de la partícula con la derivada primera de $s(t)$ que es la velocidad de la misma y responder los diferentes casos de acuerdo a si la velocidad es positiva, negativa o cero. |

Tabla 11. Análisis de CO y CE en cuestionario

Presentamos las transcripciones de las entrevistas realizadas a tres estudiantes que son elegidos por tener diferente nivel de desempeño en el transcurso regular del curso y en la puesta en escena de la situación de aprendizaje. Las mismas se efectúan a la semana siguiente a la que tomamos el segundo parcial correspondiente a la asignatura y tienen una duración de 20 minutos aproximadamente. Son audiograbadas.

En el escrito identificamos con P a la profesora-investigadora y con A al alumno o alumna entrevistado. Algunas cuestiones como la presentación de los enunciados u otros comentarios de menor importancia no son transcriptos para evitar un diálogo extenso.

## 6.3.1 Entrevista a Ana

### 6.3.1.1 Transcripción de la entrevista a Ana

P: primero te pido Ana si podés realizar la gráfica de una función positiva y creciente en el intervalo $(-5, 0)$.

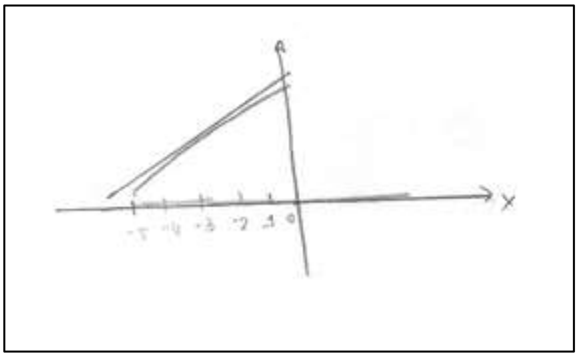
A: positiva y creciente (dibujando)…bueno mis líneas no son muy buenas.

P: allá tenés una regla si querés.

A: Positiva y creciente..ahí …sólo esta parte? (señalando el intervalo).

P: sí. Bien.

El gráfico que hace Ana es el siguiente (en este momento sin la recta tangente):



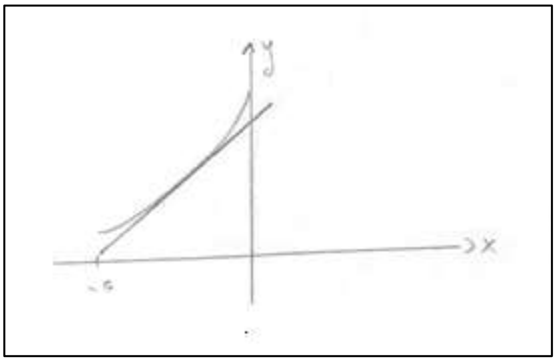
P: ¿cómo te das cuenta que es positiva?

A: porque está por encima del eje $x$.

P: ¿cómo te das cuenta que es creciente?

A: porque las rectas tangentes están arriba de la figura y no abajo.

P: mirá esta gráfica… (dibujando una función positiva, creciente y cóncava hacia arriba en el intervalo dado. Por ahora sin la recta tangente).




P: ¿esta función es positiva y creciente?

A: si también.

P: ¿Qué pasa con las rectas tangentes?

A: Están abajo.

P: (señalando el primer gráfico) y acá están…

A: están arriba…

P: y las dos son positivas y crecientes.

A: ah mirá!!

P: y entonces…qué es lo que determina…

A: ah!! esto es para concavidad.

A: Creciente es cuando la derivada es mayor a cero en el intervalo.

P: la derivada es positiva. ¿cómo te das cuenta gráficamente que la derivada es positiva?

Ana se queda pensando….

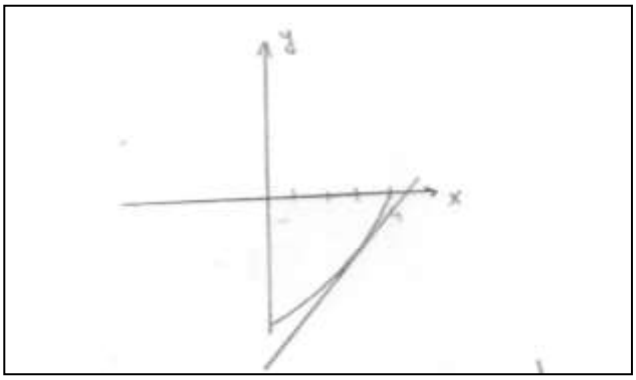
P: si querés podés dibujar alguna recta tangente en cada uno de los gráficos (Ana hace una recta tangente en su gráfico y otra en el gráfico realizado por la profesora).

A: mmm..la recta tangente tendría que tener pendiente positiva.

P: claro, lo que vos habías analizado era la concavidad.

P: Ahora quiero una función en el intervalo $(0,4)$ negativa y creciente.

A: negativa y creciente (dibuja el siguiente gráfico sin la recta tangente).




P: ¿cómo te das cuenta que es negativa?

A: igual, si yo hago una recta tangente a un punto va ser siempre con pendiente positiva (y grafica una recta tangente).

P: ¿eso es para saber si es negativa?

A: ah no eso es para ver si es creciente. Para saber si es negativa es porque está debajo del eje $x$.

P: Bueno, ahora por favor dibuja una gráfica de una función en el intervalo $(1,6)$ que tenga al menos dos puntos donde se estabiliza el comportamiento.

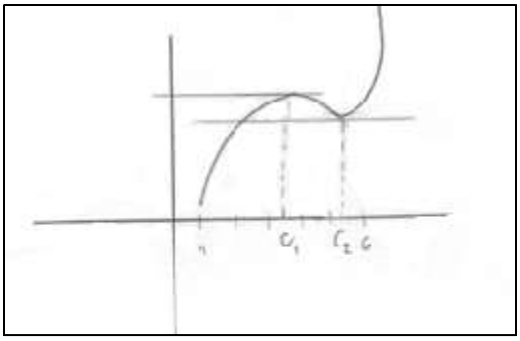
A (silencio)

P: se estabiliza o queda igual, ¿te acordás de las actividades que hicimos en clase?

A: si si o sea que va a ver un cambio de creciente a decreciente.

P: al menos dos.

A: ahí está (dibuja el siguiente gráfico sin poner nombre a los puntos E).




P: ¿dónde están esos puntos?

A: acá hay uno y acá hay otro (señalando el gráfico y escribiendo en el mismo $C_1$ y $C_2$).

P: ¿cómo te das cuenta gráficamente que en esos puntos se estabiliza la función?

A: porque son donde la tangente es cero.

P: Ah…¿dónde la tangente es cero?

A: ¡Donde la pendiente es cero! La tangente es horizontal.

P: (lee el problema 4 explicando la posición respecto a un punto inicial) ¿en qué intervalos la partícula está a la derecha del punto inicial y en cuáles a la izquierda?

A: ¿a la derecha se considera positivo no? ¿La función $s(t)$?

P: sí

A: o sea que de 0 a 2 y de 4 a 5 está a la derecha y a la izquierda de 2 a 4.

P: ¿cómo te das cuenta de esto?

A: porque la función es positiva de 0 a 2 y de 4…, es decir porque la función está por encima del eje $t$ y en $(2, 4)$ está por debajo.

P: ¿Qué ER tiene la función?

A: ¿Extremos?

P: Extremos relativos.

A: ¿mínimos y máximos?

P: sí.

A: en 0, en 0,8, en 3,2 y en este caso no estoy muy segura…en 5 pero no es relativo es absoluto. Acá el absoluto sería 3,2…el 0 no, va de un lado.

P: estudiemos los relativos. ¿cómo te das cuenta gráficamente que en 0,8 hay un máximo relativo? O en 3,2 un mínimo relativo.

A: eh..en 0,8 me doy cuenta porque la recta tangente va a ser…es donde cambia, de positivo a negativo (con las manos señala rectas tangentes de uno y otro lado del punto), si miro en un entorno de ese punto es el punto máximo, igual que acá (señalando el 3,2) si miro en un entorno del punto va a ser un mínimo.

P: ¿qué es lo que es positivo o negativo? Por ejemplo, en 0,8.

A: la derivada…si si

P: ¿en qué intervalos la partícula avanza?

A: la partícula avanza de 0 a 0,8 de 0,8 a 3,2 la partícula va a ir para atrás y vuelve a avanzar en 3,2 a 5.

P: ¿cómo te das cuenta?

A: donde la función crece la partícula avanza, donde decrece va para atrás.

P: eso si lo miramos en el gráfico, si todo lo mismo lo tenemos que hacer en forma analítica (sin hacer las cuentas) ¿cómo lo hago?

A: crecimiento tengo que derivar dos veces esto y si la derivada es mayor a cero quiere decir que la función crece, o sea que está yendo para delante.

P: ¿la segunda derivada?

A: ¡no!! ¡Eso era concavidad!! ¡De nuevo! Ja ja Lo derivo una vez y si la derivada es mayor que cero quiere decir que la función crece, esto es está yendo para adelante. Si la derivada es menor a cero quiere decir que decrece.

P: es decir está retrocediendo. ¿y los ER cómo los calculo?

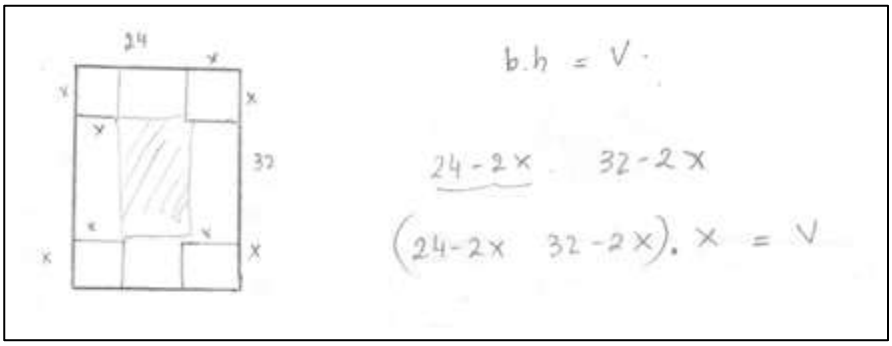
A: es cuando sea cero, o sea igualo la derivada segunda a cero…no la derivada!! Otra vez. La primera derivada a cero y busco los ceros.

P: bien.

A: y después me fijo si cambia el signo de la derivada primera en esos puntos.

P: ¡muy bien!

P: este es un PO que quiero saber cómo lo plantearías. (Lo leen las dos juntas y Ana hace un esquema de la situación en principio sin ninguna expresión algebraica al lado).




A: esto sería 24...esto sería 32 y esto $x$ en todos los casos (señalando el esquema).

P: cuando cortás estos cuadrados, levantás los lados y tenés una caja sin tapa. ¿qué plantearías para que el volumen de esa caja sea máximo?

A: el volumen máximo…es decir base por altura que es el volumen tiene que ser máximo…o sea que la base va a ser eh… $24-2x$ es el ancho y el largo $32-2x$. Base por altura, la base es todo esto y la altura va a ser estos costaditos que van a ser dos veces $x$.

P: pensá que se levanta así (señalando)

A: ¡o sea la altura es $x$!

A: si estoy hablando de volumen tendría que ser superficie de la base sería $24-2x$ por $32-2x$ por altura que sería $x$. (Ana al escribir omite los paréntesis en los factores, pero la profesora no la interrumpe para que siga su razonamiento). Esta función la plantearía y a la derivada y le buscaría el máximo.

P: ¿Cómo?

A: Buscaría la derivada y los puntos que la hacen cero porque no creo que no exista.

P: claro es una función polinómica.

A: si, es polinómica. En los puntos donde se hace cero, en esos puntos me fijaría que sean positivos porque estamos hablando de medidas y analizaría el signo de la función derivada a la derecha y a la izquierda de esos puntos.

P: perfecto

A: ahí sabría si es un máximo o mínimo de la función volumen, no sé lo que pide.

P: un máximo

A: Es decir tiene que ser positiva a izquierda del punto y negativa a la derecha.

#### 6.3.1.2 Análisis de la entrevista a Ana

En la entrevista Ana manifiesta que puede identificar IC gráficamente, ya sea para funciones positivas como para negativas, lo que refleja que no posee el teorema factual para el cual se confunde el signo de la función con su crecimiento. Pensamos esto como aporte a CO.

En el caso de relacionar el IC con el signo de la derivada en forma gráfica confunde posición de recta tangente con pendiente positiva. Si bien en un principio esto da indicio a que no posee una CE, consideramos que al no dar como respuesta la definición de crecimiento, sino que trata de vincular los dos conceptos: IC y pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto, es una acción que contribuye a la CE. Luego que la profesora la ayuda, Ana puede relacionar la pendiente de la recta positiva con el crecimiento y lo analiza bien en una función totalmente negativa.

En el caso del problema en contexto identifica IC e ID gráficamente y los vincula con el avance o retroceso de la partícula, así como también los intervalos de positividad y negatividad con la posición respecto al punto inicial.

Analíticamente explica en forma correcta los pasos a seguir para obtener los IC e ID, aunque primero también menciona a la derivada segunda en vez de la primera. No sabemos si esta reacción es por nervios de la entrevista o si realmente su CE no es estable todavía.

Respecto al concepto de ER, grafica bien en la representación pedida, los identifica bien en el problema y los relaciona con derivada cero en las dos oportunidades (aunque en un comienzo dice tangente cero). En forma analítica establece condición necesaria y suficiente. Su respuesta evidencia una CO y CE del concepto de ER más estable que la de IC.

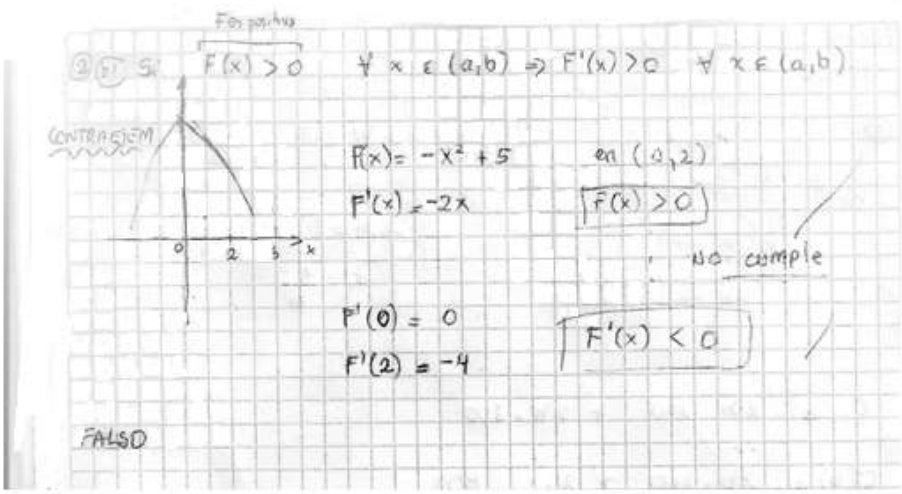
Respecto al PO, luego de comprender lo que solicitamos, lo plantea en forma correcta y explica los pasos adecuados para seguir su resolución.

El comportamiento de Ana a lo largo de la experiencia y en sus producciones obedece a la activación de esquemas propios de una CE (formó parte del equipo 15 que obtuvo puntaje más alto en la experiencia), sin embargo, en la entrevista, en su comienzo, observamos situaciones en las que tal concepción no guio sus acciones. Esta conducta puede aludir a que las concepciones CO y CE son concurrentes en el proceso de comprensión del concepto IC en este caso. Este resultado coincide con el obtenido por Mora (2006) respecto al concepto de función. Este autor cuestiona la hipótesis de Sfard sobre la "linealidad" de la formación de un concepto, que establece primero su forma procedimental para luego pasar a la estructural. Pensamos que esto requiere un estudio más profundo, pero, por los resultados obtenidos hasta este momento, los objetos "viven" en la mente de los estudiantes, los cuales en ciertas ocasiones responden de acuerdo a una CE y en otras de acuerdo a una CO.

En la producción de su segundo parcial, cuando solicitamos si la expresión:

"Si $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$"

es verdadera o falsa, Ana contesta que es falsa y escribe:



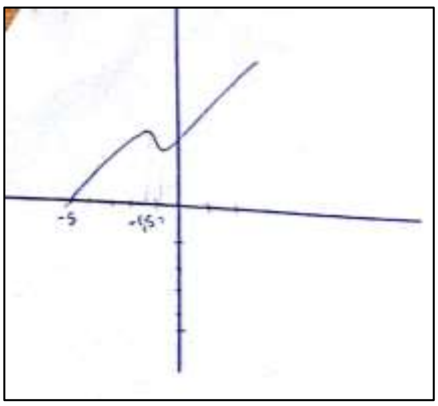
Observemos que Ana dibuja una recta tangente, aparentemente en $x = 2$ que es el punto donde luego calcula la derivada en forma analítica. Ella logra trabajar en los dos registros sin que la consigna lo indique y está relacionando el decrecimiento con la pendiente de la recta tangente y con la derivada en el punto, dando cuenta de una CE de este concepto.

### 6.3.2 Entrevista a Trinidad

#### 6.3.2.1 Transcripción de la entrevista a Trinidad

P: ¿podés dibujar la gráfica de una función positiva y creciente en $(-5, 0)$?

A: dibuja… (muy dubitativamente).



A: ahí es creciente, pero si es positiva no tiene que pasar por abajo. Igual está bien. ¿Podría ser así?

P: ¿Cómo te das cuenta que es positiva?

A: porque está por encima del eje $x$.

P: ¿es creciente en todo el intervalo?

A: mmm no…

P: ¿hasta dónde es creciente?

A: en este caso sería hasta -1,5.

P: márcalo al -1,5 en el gráfico (lo hace). Mirando $(-5, 0)$ ¿hay algún otro intervalo donde es creciente?

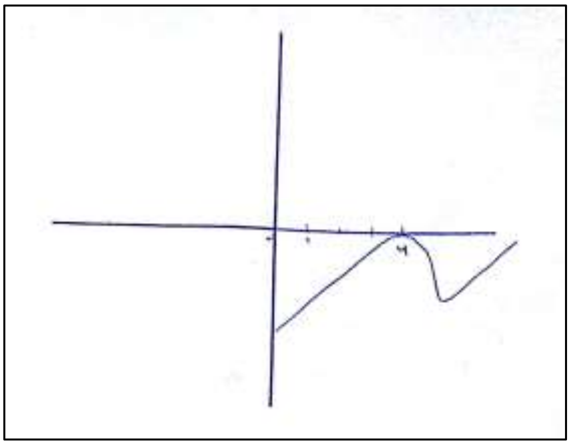
A: eh..seria de -1 a +∞.

P: ¿cómo te das cuenta que es creciente?

A: porque sube creo…

P: bien. Ahora por favor en otro par de ejes dibujá una función negativa y creciente en $(0, 4)$.

A: dibuja:



A: Tiene que ser negativa y creciente.

P: otra vez. ¿Cómo te das cuenta que es negativa?

A: porque está por debajo del eje $x$.

P: ¿y creciente?

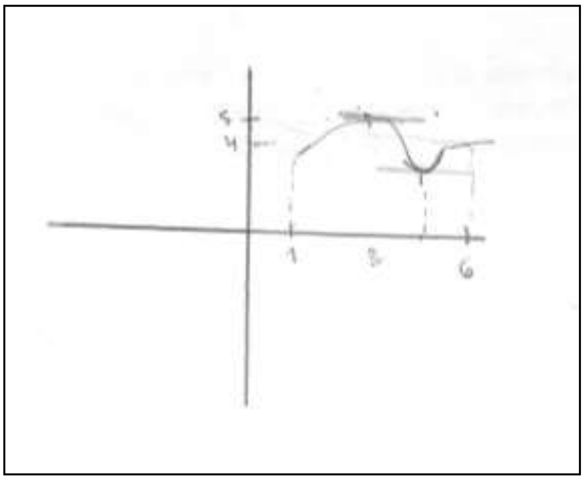
A: porque sube.

P: cuando identificás el crecimiento ¿estás comparando las imágenes?

A: sí.

P: ahora una en el intervalo $(1,6)$ que tenga dos puntos donde se estabiliza el comportamiento.

A dibuja (con notable inseguridad):



P: ¿cuáles serían los puntos donde se estabiliza?

A: $(3,5)$ (señalando el gráfico).

P: ¿Cómo te das cuenta?

A: Porque mmm es constante la función en este punto.

P: La función constante es una recta horizontal en un intervalo. En este caso no es una recta horizontal. Esto es puntual. ¿Cuál es el otro punto?

A: el otro punto es el $(6,4)$. Por derecha y por izquierda como que tienen el mismo valor del eje $x$.

P: ¿qué otra característica me podés dar de esos puntos?

A: son máximos y mínimos.

P: ah bien ¿qué es lo que es constante entonces?

A: mmmm

P: (grafica la recta tangente a los dos puntos ER, uno de los cuales no es $(6,4)$). Y pregunta: ¿qué es esto? (señalando la recta)

A: una recta lineal.

P: pero qué es lo que representa del punto.

A: ¿la recta tangente?

P: sí, la recta tangente. No es constante toda la función sino su recta tangente.

A: ah claro, ¿por la recta tangente sería entonces?

….

La profesora lee el problema de la partícula

P: ¿en qué intervalos de tiempo la partícula está a la derecha del punto inicial y en cuáles a la izquierda?

A: a la derecha está en el intervalo del 0 al 2 unión del 4 a más infinito y a la izquierda del 2 al 4.

P: ¿Cómo te das cuenta de esto?

A: porque decía que era positiva si iba hacia la derecha y está por encima del eje $x$ y a la izquierda por debajo del eje $x$.

P: ¿qué ER tiene esta función?

A: tiene un máximo relativo del 0,8 a 3 y un mínimo relativo del 3,2 a 3.

P: ¿cómo identificas que son ER?

A: porque en su entorno es hasta donde llega más la función

P: y en el mínimo

A: sería el punto mínimo.

P: en el contexto del problema. ¿qué significaría ese máximo o ese mínimo?

A: que se para. Está avanzando y vuelve y después va a la izquierda y vuelve también.

P: ¿en qué intervalo avanza la partícula?

A: avanza de 0 a 0,8 luego retrocede de 0,8 a 2, avanza hacia la izquierda de 2 a 3,2 y retrocede 3,2 a 4.

P: ¿Cómo te das cuenta?

A: Porque…avanza y se estabiliza, llega hasta un punto, como baja la función, retrocede, decrece la función y luego vuelve a avanzar hacia la izquierda y vuelve a avanzar.

P: en forma analítica ¿cómo harías para establecer los puntos que sacamos antes como máximo y mínimo?

A: Primero la derivo, me fijo el signo de la derivada positivo o negativo y de ahí marco los IC y el ID.

P: bien, el crecimiento ¿qué signo tendría que tener?

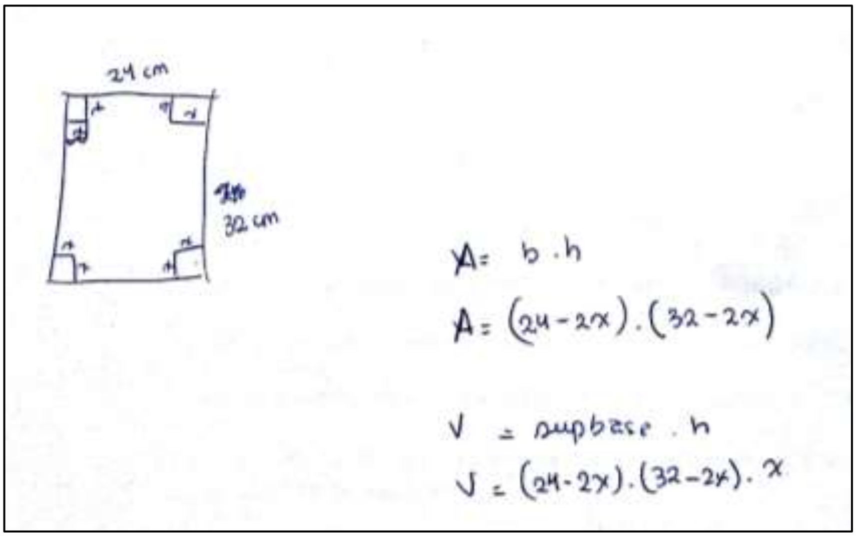
A: positivo. De ahí me fijo si hay un mínimo o máximo cuando esté creciendo la función y decreciendo.

P: en esos puntos ¿qué pasa con la derivada?

A: va a ser cero.

La profesora lee el PO y pide a la alumna que lo plantee.

A: dibuja el esquema (en un principio sin el desarrollo que se muestra):




A: eh primero el volumen sería …base por altura…la base sería… $24-2x$ …por la altura que sería $32-2x$ y ahora…

P: ¿eso es un volumen o un área?

A: mmm

P: la caja tiene un volumen.

A: eh…

A: ¿no era base por altura?

P: me parece que no. Eso es un área ¿de qué rectángulo?

A: ah…de todo esto menos el rectángulo que recorté.

A: ¿pero esto no es el volumen?

P: me parece que no. ¿No te acordás la fórmula del volumen?

A: eh….el volumen no era base por altura?

P: no, es superficie de la base por la altura de la caja

A: si si si el volumen sería la superficie de la base por la altura (escribe). Que eso sería esto (señalando el área que planteo) por la altura que sería este cuadrado…

P: imagínate la caja…esto se dobla para arriba.

A: ah…entonces la altura es $x$. si si si, es $x$. (y completa la fórmula del volumen)

P: ¿cuántos cm hay que cortar para que el volumen sea máximo?

A: tengo que cortar menos de doce y hasta ahí más no puedo. De 0 a 12 abierto.

P: ¿y para que ese volumen sea máximo?

A: primero lo derivo y me fijo los IC y de ahí me fijo el máximo y el mínimo.

A: derivo y me fijo cuando es positiva la función y cuando es negativa.

P: qué cosa tiene que ser positiva o negativa.

A: la función.

P: ¿seguro?

A: ah no, la ecuación del volumen.

### 6.3.2.2 Análisis de la entrevista a Trinidad

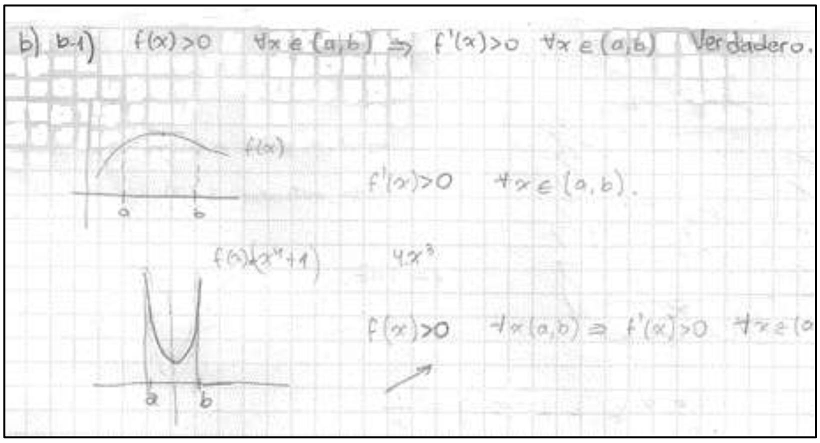
En la entrevista Trinidad refleja una CO incipiente de los conceptos de IC, ID y ER, ya que solamente, y no siempre con éxito, los identifica gráficamente o con expresiones como “sube” o “hasta donde llega más la función”. Sólo en un momento del encuentro relaciona los IC con el signo de la derivada primera. La recta tangente está ausente en todo su razonamiento. Cuando la profesora la dibuja en el gráfico que hace con dos puntos de estabilidad, ella misma pregunta si es por la recta tangente que uno puede evidenciar esa estabilidad siendo algo trabajado en clase varias veces. Todos sus gráficos y sus respuestas están plasmados de duda y mucha inseguridad.

En el PO no es capaz de plantear el volumen de la caja y cuando se le pregunta sobre cómo hallar el máximo sólo da respuesta a través de la función sin mencionar la derivada. Es decir, su estado de comprensión sobre el estudio de una función sólo queda en la función en sí, no pasa a la función derivada en ningún momento siendo que en todo el cuatrimestre se estudió dicho concepto.

Observemos parte de la producción de Trinidad en su parcial, donde solicitamos si la expresión:

“Si $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$”

es verdadera o falsa. Trinidad responde que la proposición es verdadera. Para justificarlo apela a dos ejemplos de funciones positivas, pero las mismas cambian su crecimiento en el intervalo donde las dibuja. Inclusive de una de estas funciones calcula su función derivada y no puede dar cuenta que hay un cambio de signo de la misma:



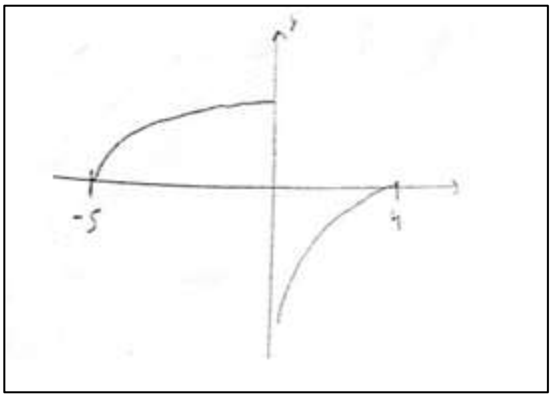

En la tabla de CO y CE Trinidad está en el grupo 20, el que tuvo bajo nivel de CO y CE para ER, no así para IC e ID. Este equipo sólo pudo resolver el PO guiado paso a paso. Su compañera, luego de la experiencia, abandonó la materia.

### 6.3.3 Entrevista a Matías

#### 6.3.3.1 Transcripción de la entrevista a Matías

P: ¿podés dibujar una gráfica positiva y creciente en el intervalo $(-5, 0)$?

A: dibuja (en principio sin la rama del intervalo $(0, 4)$):




P: ¿cómo te das cuenta que es positiva?

A: porque está positiva en el eje $y$.

P: positiva en el eje $y$. ¿Cómo sería en el gráfico?

A: (señala la parte de arriba del eje $x$).

P: ¿Cómo te das cuenta que es creciente?

A: Porque todas las imágenes de $x$ son pos…van siendo mayor.

P: Bueno, ahora por favor graficá una función negativa y creciente en el intervalo $(0, 4)$

A: uso el mismo eje (y completa el gráfico en dicho intervalo).

P: bueno. ¿cómo te das cuenta que es negativa?

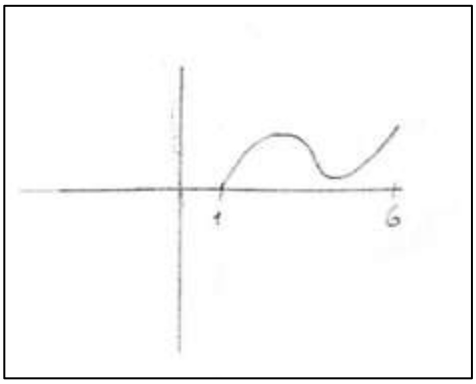
A: por lo mismo que antes…tiene todas las imágenes negativas.

P: ¿cómo te das cuenta que es creciente?

A: porque las imágenes son mayores a medida que aumenta el eje $x$.

P: ahora una que tenga dos puntos donde se estabiliza el comportamiento, en el intervalo $(1, 6)$.

A: grafica:




P: ¿cuáles son los puntos donde se estabiliza?

A: (señala los puntos en forma correcta).

P: ¿cómo te das cuenta que se estabiliza?

A: porque la derivada es cero, la tangente es horizontal.

P: (lee el problema) ¿en qué intervalo la partícula está a la derecha del punto inicial y en cuál a la derecha?

A: a la derecha del 0 al 2 y a la izquierda del 2 al 4 y vuelve a la derecha del 4 al 5.

P: muy bien. ¿cómo te das cuenta?

A: Por el signo de la función.

P: ¿qué ER tiene la función?

A: 0,8 y 3,2.

P: ¿Cómo te das cuenta?

A: Porque alcanza un máximo y un mínimo.

P: bien. ¿Qué significa en el contexto del problema?

A: que la partícula se está yendo para allá y deja de irse y empieza a irse para el otro lado.

P: ¿En qué intervalo la partícula avanza?

A: ¿avanza para qué lado?

P: por ejemplo, a la derecha.

A: Del 0 al 0,8

P: ¿Algún otro más?

A: Del 0,8 al 3,2 avanza para la izquierda y del 3,2 al 5 avanza a la derecha

P: El signo de la derivada ¿te das cuenta de acuerdo al gráfico cómo es?

A: acá es positiva, acá negativa y acá positiva.

P: es decir es positiva en $(0,\ 0{,}8)$, negativa en $(0{,}8,\ 3{,}2)$y positiva en $(3{,}2,\ 5)$

A: sí porque acá hay un máximo relativo y acá un mínimo relativo y es algo que la derivada cambia de signo.

P: ¿por qué la derivada es positiva en $(0,\ 0{,}8)$?

A: porque la función crece.

P: ¿Y entre $(0{,}8,\ 3{,}2)$?

A: Decrece.

P: Si tenemos que hacer este estudio (donde avanza, retrocede, extremos) con la expresión analítica, ¿cómo lo hacemos?

A: Derivándola.

P: ¿Y después?

A: La igualo a cero.

P: ¿Qué saco con eso?

A: Puntos críticos.

P: Y después.

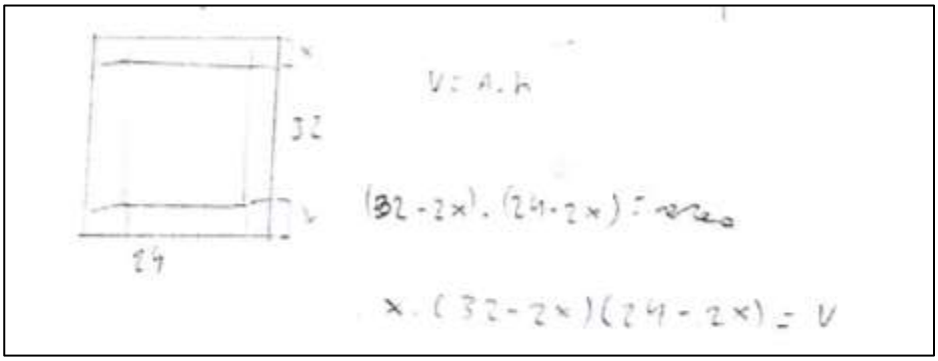
A: Me daría 0,8

P: bien y el otro 3,2. Y para estudiar el crecimiento, por ejemplo, ¿cómo hacemos?

A: Si es máximo pasa de positiva a negativa y si es mínimo negativa a positiva.

P: (lee el enunciado del problema y le explica al alumno que tiene que plantear los pasos que le permitan resolverlo)

A: dibuja (en principio sólo el esquema del rectángulo y los datos)




A: Esto sería $x$ (y lo señala en su esquema). Tengo que encontrar la función para maximizar

P: ¿Qué función sería?

A: O tengo que calcular el valor de $x$

P: ¿Qué función tendrías que maximizar?

A: El volumen

P: ¿Cómo lo calculas?

A: Volumen es área por altura. Y el área es esto por esto (señalando los lados del rectángulo)

P: ¿y cuánto daría eso por eso?

A: escribe (completando la fórmula)

P: ¿y la altura cuánto vale?

A: eso lo tengo que sacar

P: ¿qué altura tiene la caja?

A: $x$

P: muy bien

A: (escribe $x$ en su fórmula)

P: esa es la función volumen de la caja. ¿Cómo determinamos $x$ para que el volumen sea máximo?

A: tengo que derivarlo e igualarlo a cero. Para saber si hay máximo o mínimo tengo que hacer la segunda derivada. Si es mayor que cero es un mínimo y si es menor que cero es un máximo

#### 6.3.3.2 Análisis de la entrevista a Matías

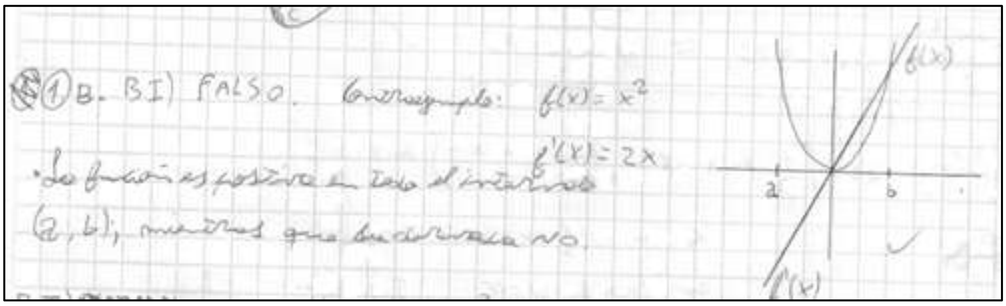
Matías identifica gráficamente IC, ID y, cuando le solicitamos la justificación de su respuesta, los relaciona con la definición formal. En el caso del problema en contexto los vincula con el avance de la partícula y con el avance de la misma hacia la izquierda (o retroceso). A su vez no confunde crecimiento con positividad. Lo evidenciamos ya sea en sus gráficos como en la explicación que brinda. Consideramos que estas acciones demuestran una CO de los conceptos de IC e ID. Pensamos que no logra una CE sobre los mismos ya que en ningún momento puede conectarlos con la pendiente de la recta tangente. Sólo contesta con el signo de la derivada cuando la profesora le pregunta por el mismo. Inclusive cuando la docente le cuestiona, en dos oportunidades, cómo estudiaría en forma analítica cuándo la partícula avanza, retrocede y extremos, sólo contesta sobre los ER.

En el caso del concepto de ER, opinamos que Matías muestra en sus respuestas los dos tipos de concepciones. Grafica bien los puntos de estabilidad y los justifica explicando que la derivada es cero y la tangente horizontal. En el problema en contexto argumenta que hay máximo y mínimo en dos puntos y que la derivada cambia de signo en los mismos. Cuando la profesora le pregunta cómo respondería si conoce la expresión analítica de la función posición de la partícula, lo primero que dice es que la derivaría e igualaría a cero para obtener los puntos críticos. Luego explica que si la derivada pasa de positiva a negativa hay un máximo y de lo contrario, un mínimo. En el caso del PO aplica otro método (el de la derivada segunda) para saber si los puntos críticos hallados son máximos o mínimos.

En la producción de su parcial, cuando solicitamos si la expresión:

"Si $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$"

es verdadera o falsa. Matías escribe que es falsa y da un contraejemplo acorde, en el que no solamente justifica analíticamente sino también en forma gráfica dibujando la función y su función derivada:



# CAPÍTULO 7: REFLEXIONES FINALES

*En este capítulo presentamos las reflexiones finales a partir de todo el trabajo realizado y mostrado en capítulos anteriores. Exponemos una valoración general de la investigación realizada. Luego, a partir de lo desarrollado, valoramos el alcance de los objetivos propuestos y las respuestas a las preguntas de investigación. Por último, enunciamos algunas cuestiones que quedan abiertas y que motivan el desarrollo de estudios futuros.*

## 7.1. Sobre lo realizado

Como planteamos en el primer capítulo de la tesis, esta investigación está motivada por el interés de mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Los resultados que nos brindan diversas investigaciones en Educación Matemática y la propia experiencia en docencia de aproximadamente 30 años, nos muestran las dificultades que tienen los alumnos en lograr la comprensión de los conceptos principales y las relaciones entre los mismos. Esta falta de comprensión conlleva que los estudiantes alcancen solamente un accionar memorístico, colmado de reglas y de algoritmos, lo que se aleja de un aprendizaje genuino. Las causas de esta problemática se encuentran en gran parte en el proceso de enseñanza.

Si bien el Cálculo es la matemática de la variación y el cambio, en la mayoría de las aulas esto no se refleja. La enseñanza, en general, prioriza resultados teóricos y formales o, por lo contrario, se caracteriza por un conjunto de reglas sin sentido. En ambos casos no se relaciona con contextos de variación donde los conceptos del Cálculo tienen origen. Esto fomenta las dificultades, especialmente en el caso de carreras donde los alumnos son usuarios de la matemática y no futuros matemáticos.

Afortunadamente desde hace varios años se realizan investigaciones en Educación Matemática cuyos resultados, tímidamente, van llegando al aula. Algunas de ellas revelan que es necesario priorizar la construcción de procesos de pensamiento sobre la cantidad de contenidos a impartir. En el caso del Cálculo es primordial lograr la comprensión de los conceptos fundamentales y entender la problemática que le dio origen: la recta tangente a una curva, la velocidad de un cuerpo, la obtención de máximos y mínimos y el problema de las cuadraturas. En el Capítulo 2 mostramos los aportes de varios investigadores en el enfoque del PyLV, marco de referencia de nuestro trabajo. En el mismo se enfatiza el carácter del Cálculo como la matemática de la variación y el cambio, brindándole una impronta distintiva a la manera de enseñar.

También conocemos resultados sobre la necesidad de manejar al menos dos registros de representación de un objeto matemático para lograr su comprensión. Cada representación de un objeto nos brinda información que podemos relacionar y enriquecer con la que ofrece otra representación, aportando de esta forma al conocimiento del mismo.

Por otro lado, los alumnos construyen conocimiento matemático en el aula, con su entorno y contexto y, en ciertas ocasiones, independientemente del discurso del profesor. La actividad humana en cada aula, con las características propias del lugar, con las interacciones entre alumnos y docentes reorganiza la obra matemática.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones nos propusimos explorar la comprensión de los conceptos que intervienen en la resolución de PO cuando los alumnos de ingeniería interactúan con actividades basadas en ideas de variación y en el uso de diversos sistemas de representación. Nos referimos a los conceptos de ER de una función y sus IC e ID. Pensamos que, si logramos una base sólida sobre los mismos, los estudiantes tendrán herramientas para poder resolver PO tan frecuentes e importantes en carreras de ingeniería.

El objetivo general de la investigación nos conduce a la necesidad de estudiar la comprensión en matemática. En el Capítulo 3 exponemos diferentes marcos teóricos que estudian y definen en qué consiste la comprensión de un concepto matemático. Para nuestro estudio consideramos adecuado el enfoque de Ana Sfard. Las concepciones que establece esta autora sobre un objeto matemático son diferenciables entre sí de acuerdo a las características de cada una. A su vez se pueden observar a través de las acciones y habilidades de los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea matemática.

Para concretar la investigación llevamos al aula una situación de aprendizaje que aborda todos los aspectos mencionados anteriormente. Comenzamos con actividades orientadas a explorar los conocimientos previos de los alumnos y sus ideas intuitivas. Estas son la base de las actividades enfocadas a la construcción de los conceptos de IC, ID y ER, sus propiedades y relaciones con la derivada primera de una función en un punto. Las tareas se brindan en diferentes registros de representación y en diversos contextos de variación. El diseño de la situación de aprendizaje no solo involucra las consignas de las tareas, sino también las acciones de las profesoras, las posibles respuestas de los alumnos, la puesta en común luego de las actividades y la institucionalización de algunos conceptos y propiedades.

El desarrollo de cada capítulo de esta tesis muestra el trabajo realizado y configuran una base sólida que nos permite sostener, tanto la pertinencia de nuestra tarea, como el cumplimiento de los objetivos propuestos. Elaboramos, a continuación, una apreciación global de cada uno de los objetivos específicos planificados. El logro de los mismos nos permite dar respuesta también a las preguntas de investigación expuestas en el primer capítulo.

## 7.2 Sobre los objetivos específicos y preguntas de investigación

Analizamos el primer objetivo específico planteado en el Capítulo 1:

*Describir y analizar el aprendizaje sobre IC, ID y ER de una función mediante el estudio de las producciones realizadas por los estudiantes a partir de la implementación de una* *situación de aprendizaje basada en ideas variacionales y en el uso de diversos sistemas de representación*.

El marco teórico sobre PyLV y registros de representación, las diversas investigaciones expuestas en el estado del arte y los análisis realizados desde las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica, cognitiva y social, nos permitieron diseñar una situación de aprendizaje sobre los conceptos mencionados en la que trabajamos ideas de variación y usamos diversos sistemas de representación.

Con el propósito de recuperar conocimientos previos e ideas intuitivas de los alumnos elaboramos actividades de exploración. La resolución de las mismas junto con las discusiones grupales fueron la base de las actividades de descubrimiento. El objetivo principal de éstas últimas fue que los alumnos, al interactuar con las tareas planteadas, puedan construir por sí mismos los conceptos de IC, ID y ER, buscar su relación con la derivada de la función y hallar métodos para calcularlos.

En los dos tipos de actividades trabajamos con diversos contextos de variación, entre ellos el de la velocidad de un cuerpo conociendo su posición o recorrido en el tiempo, uno de los problemas que dio origen al Cálculo Diferencial. También nos ocupamos del contexto geométrico y consideramos el signo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado como información base sobre el crecimiento o decrecimiento de la misma en dicho punto.

El diseño de la secuencia hizo hincapié en la derivada como variación, en su signo como señal de crecimiento o decrecimiento y, el estudio específico de puntos de estabilidad (derivada cero) o no derivabilidad.

Pudimos discernir dos instancias centrales en el trabajo. Por un lado, el diseño de la situación de aprendizaje y su análisis a priori, en el cual fundamentamos las consignas elaboradas, las tareas establecidas para las profesoras y las acciones que esperamos por parte de los alumnos. Por el otro, el análisis a posteriori de la misma presentado en el Capítulo 6, donde realizamos un estudio cualitativo de las producciones de los alumnos y describimos qué pasó en el aula durante la implementación de las secuencias. En este caso se trató de un trabajo situado en un contexto particular, los alumnos de una de las comisiones de Análisis Matemático I de carreras ingeniería de la UNLaM.

Desde las actividades de exploración logramos recuperar ideas intuitivas y conocimientos previos de los alumnos para luego usarlos en las actividades de descubrimiento. Las producciones evidenciaron una evolución positiva en la construcción de los conceptos y sus relaciones en los distintos registros: verbal, numérico, gráfico y analítico. Los significados que los estudiantes fueron capaces de establecer entre IC e ID y su relación con el signo de la derivada, el concepto de ER de una función y el hallazgo de un método para calcularlo, constituyen un aporte al desarrollo del PyLV. Sin embargo, es importante reconocer que este proceso es lento y que se necesita tiempo para lograr la interacción entre los diferentes registros. Si bien las tareas propiciaban el uso de los mismos, el desafío es que el alumno los incorpore por sí sólo cuando se enfrenta a otra actividad. Esto es, lograr que sea capaz de disponer como estrategia la utilización de diversos registros para obtener información sobre la tarea encomendada. En este aspecto hay que seguir trabajando.

También consideramos que no dispusimos de tiempo suficiente para la reflexión sobre cuestiones matemáticas más "minuciosas" como, por ejemplo, la validez de los condicionales " $f'(x) > 0$ en $(a,b)$ implica $f$ creciente en $(a,b)$" y su recíproco; o " $f$ creciente en $(a,b)$ entonces la razón de cambio promedio es positiva en $(a,b)$" y su recíproco.

En cada sesión de trabajo enfrentamos a los alumnos a situaciones para las que no tenían todos los conocimientos requeridos, logrando ponerlos en conflicto. La resolución de las actividades y la interacción en el aula ya sea con su compañero o en la instancia de debate grupal, resultaron adecuadas para guiarlos en la construcción de nuevos significados.

La actitud de trabajo, la motivación, la participación de los alumnos en las actividades y en el debate grupal, a veces cansados y dispersos y otras más atentos, fueron la base de un ambiente rico de aprendizaje en el aula de matemática universitaria.

Debemos mencionar también lo gratificante que fue observar los logros y avances de la mayoría de los alumnos a medida que transcurrían las sesiones de trabajo: las producciones cada vez más completas, el cambio en el lenguaje, los descubrimientos realizados, el compromiso contraído y la participación responsable en el debate grupal.

La resolución de PO por sí mismos por parte de varios equipos, sin explicación previa de la profesora, mostró logros interesantes en cuanto el despliegue de estrategias y el uso de los conceptos estudiados a través de las actividades.

Los resultados alcanzados nos llevaron a expresar que la situación de aprendizaje cumplió con las expectativas de ubicar a los alumnos en camino hacia la construcción de los conceptos involucrados en la resolución de los PO y sus relaciones. También pudimos analizar sus modos de pensar, actuar, aprender e identificar algunas dificultades.

Cabe destacar los buenos resultados obtenidos en la resolución por parte de los alumnos del PO que formó parte del segundo parcial. La consigna del problema era:

> "Queremos construir un marco rectangular que encierre una superficie de un metro cuadrado. Sabemos que el costo de cada metro en los lados horizontales es de 200 pesos, mientras que en los lados verticales es de 800 pesos. Determinar las dimensiones que tenemos que elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible"

Rindieron dicho examen parcial 31 alumnos, de los cuales 11 (35%) resolvieron el problema en forma correcta. Los mismos plantearon bien las ecuaciones, la obtención de puntos críticos, la adecuación de los valores según el contexto, la aplicación de algún criterio como condición suficiente y la respuesta. El 13% de los alumnos resolvió todo el problema omitiendo multiplicar por 2 el costo de la función (ya que eran dos lados por cada uno de los valores). Por lo tanto, obtuvieron las dimensiones del marco, pero no el valor correcto del costo. Tres alumnos (el 9% del total) plantearon el problema sin tener en cuenta el costo del material de cada lado.

Pensamos que todo el trabajo autónomo realizado por los alumnos a lo largo de la experiencia contribuyó a que muchos fueran capaces de plantear y resolver este PO en forma adecuada.

Lo expuesto no sólo posibilitó el logro del objetivo específico planteado sino también permitió dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

*¿Qué efectos tiene una situación de aprendizaje basada en ideas variaciones y diversos sistemas de representación en el aprendizaje de dichos conceptos?*

Respecto al objetivo:

*Caracterizar la comprensión de los alumnos sobre los conceptos mencionados*

El trabajo realizado a lo largo de la tesis es signo de que pudimos caracterizar la comprensión en matemática que tienen los alumnos de los conceptos estudiados según el enfoque de Ana Sfard.

Analizar la comprensión no es ni fue tarea fácil. La situación de aprendizaje fue vital al respecto. El análisis a priori de la misma, en composición con el marco teórico, nos permitieron discernir qué acciones o comportamientos de los alumnos y qué respuestas caracterizaban a cada una de las concepciones. A través del proceso de enseñanza realizamos acciones para ayudar al alumno a construir las dos concepciones, ya que no son estáticas, sino que pueden cambiar a lo largo de la vida, lo que da posibilidades de intervención.

Esto nos posibilitó responder a la pregunta auxiliar:

*¿Cómo estudiar la comprensión de los conceptos involucrados en la resolución de PO?*

En cuanto a si

*¿Es posible establecer niveles de comprensión de los mismos?*

Es tarea aún más compleja. Coincidimos con Sfard que estas dos concepciones son distintas y no son incompatibles sino complementarias, una no excluye a la otra. A su vez acordamos con ella que para comprender el sujeto debe poseer las dos concepciones.

En el análisis estadístico expuesto en el Capítulo 6 pudimos caracterizar los equipos que participaron de la experiencia según el nivel obtenido en cada una de las concepciones. En el grupo que tuvo puntuaciones más altas en CO y CE, todos sus equipos resolvieron correctamente los PO planteados en el tercer conjunto de actividades. A su vez en el grupo caracterizado por puntuaciones bajas en las dos concepciones, sus integrantes prácticamente no fueron capaces de resolver los PO. El nivel de comprensión del primer grupo fue superior al último al que hicimos referencia.

En cuanto a:

*Qué concepción tienen los estudiantes sobre los conceptos de IC, ID y ER: ¿operacional, estructural o ambas?*

Sobre los conceptos de IC e ID, un solo equipo no obtuvo una CO aceptable sobre el primero. Esto indicó que prácticamente todos los alumnos reflejaron una CO sobre los conceptos de IC e ID. A su vez esta concepción prevaleció sobre la CE para estos conceptos en todos los equipos. Esta última llegó al nivel aceptable en el 59% de los equipos para los dos conceptos.

En cuanto al concepto de ER el 37% manifestó las dos concepciones y de éstos en un 60% la CO tuvieron nivel superior frente a la CE. Es decir que en el caso del concepto de ER no siempre la CO superó a la CE. Quizás esto refuerce la hipótesis que dichas concepciones son complementarias, y coincidiendo con Mora (2006), no existe una linealidad entre las dos, sino que viven en la mente del estudiante en forma conjunta.

De acuerdo a los instrumentos utilizados en nuestra investigación no pudimos dar cuenta si la formación de la CO en los estudiantes se produjo antes, luego o conjuntamente con la CE. Sí constatamos que poseer una CE requiere un pensamiento más avanzado que el de poseer una CO, por la misma caracterización de ambas.

En el Capítulo 6 mediante la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales, logramos reducir el número de variables a tres: Gradiente Concepción operacional de intervalos, Gradiente Concepción operacional de extremos y Gradiente Concepción estructural. Reflexionamos a continuación sobre estas tres componentes.

Conforme a los resultados analizados en dicho capítulo, los alumnos que participaron de la experiencia dieron cuenta de una valoración alta o media en el Gradiente Concepción operacional de intervalos. De acuerdo a la caracterización de esta concepción realizada en el Capítulo 5, sección 5.3, evidenciamos que pudieron reconocer IC e ID en registro gráfico, que lograron visualizarlos como un crecimiento o decrecimiento de la ordenada de los respectivos puntos, que fueron capaces de identificarlos a través de tablas, en contexto o en funciones sin contexto.

En el Gradiente Concepción operacional de extremos los resultados no fueron homogéneos. Dos de los grupos definidos obtuvieron alta puntuación, dos medias puntuaciones y uno baja. En general todos pudieron reconocer ER de una función en registro gráfico. Los equipos que tuvieron puntuaciones más bajas identificaron un ER solamente con la caracterización de punto de tangente horizontal sin hacer referencia a la condición de mayor o menor imagen en un entorno del dicho punto. A su vez no reconocieron ER en un punto sin derivada.

El Gradiente Concepción estructural de los tres conceptos en forma conjunta tuvo puntuaciones medias y bajas. Revisando cada uno de los ítems de la situación de aprendizaje y la caracterización presentada de esta concepción, el comportamiento más frecuente en el que incurrieron los alumnos fue no poder integrar la información del mismo objeto matemático en distintos registros. Las preguntas estaban orientadas a que identifiquen el concepto formal matemático dado en clase (de cualquiera de los tres conceptos) en registro gráfico y lo relacionen con el signo de la derivada primera (o su anulación en caso de ER) en registro analítico y su vinculación con el contexto de variación del problema. Esto último lo debían dar en registro verbal.

Otro comportamiento habitual entre los alumnos que aportaba a esta variable fue no poder vislumbrar por sí solos la diferencia entre punto crítico y ER.

Respecto a

*Estudiar la incidencia de la comprensión de los conceptos de IC, ID y ER en la resolución de PO*.

Objetivo que está relacionado con la pregunta auxiliar orientada según el marco teórico de referencia:

*¿Cuál es la incidencia del tipo de concepción que tiene el estudiante de los conceptos de IC, ID y ER en la resolución de PO?*

La incidencia que vislumbramos fue que altas puntuaciones en las dos concepciones incidió en forma favorable en la resolución de dichos problemas. Si miramos las puntuaciones obtenidas en la tabla 9 expuesta en el Capítulo 6, los equipos que poseen las dos concepciones sobre los tres conceptos (9 equipos, 33% del total) resolvieron en forma correcta los dos PO planteados en el último grupo de actividades. Estos equipos se ubicaron en los grupos G1 y G2 del Análisis de Componentes Principales.

Si indagamos en la resolución del PO dado en el segundo parcial, donde cada alumno debía resolverlo solo, de estos 9 equipos, 7 estuvo formado por un integrante que resolvió el mismo en forma correcta y completa. Uno de los equipos no se presentó a rendir el examen y el otro no tuvo en cuenta la función costo en la resolución.

En cuanto a la alumna entrevistada Ana, que evidenció en toda la experiencia poseer CO sobre todos los conceptos y CE de los mismos con un nivel aceptable, en todas las ocasiones pudo resolver o plantear el PO dado.

Los alumnos que se ubican en puntuaciones bajas de las dos concepciones y en el Análisis de Componentes Principales forman el grupo G5 no se presentaron a rendir el segundo examen parcial.

En cuanto a puntuaciones medias (grupos G3 y G4), no pudimos, con los datos obtenidos e instrumentos utilizados, inferir la incidencia en la resolución de los PO. Encontramos equipos que lograron resolver los dos, otros alguno de los dos y diversos comportamientos en el examen parcial.

La alumna entrevistada Trinidad formó parte de un equipo que logró CO y CE de nivel aceptable en los conceptos IC e ID, pero CO y CE de nivel bajo en el concepto de ER. Trinidad sólo pudo resolver el primer PO del grupo de actividades y en la entrevista no logró plantearlo. En el examen parcial resolvió el PO en forma correcta y completa.

El caso de Matías, que pudo plantear el PO en la entrevista, integró un equipo con altas puntuaciones en todas las concepciones salvo en la CE de ER. En la situación de aprendizaje fue capaz de resolver con su compañero los dos PO propuestos y en el parcial Matías no lo logró solucionar.

Con esto queremos mostrar que cuando las dos concepciones no se manifestaron en su totalidad en todos los conceptos, no pudimos predecir qué comportamiento posee el estudiante en la resolución de estos problemas.

Según los resultados obtenidos, parecería que si una persona adquiere sólo una CO no puede llegar a instancias más complejas, con las dos concepciones esto se logra. En palabras de Sfard la habilidad de "ver" una entidad matemática como objeto y como proceso es indispensable para una comprensión profunda de la matemática, cualquiera sea la definición de comprensión que se adopte.

En cuanto al objetivo específico:

*Valorar la eficacia y el impacto de la situación de aprendizaje propuesta.*

El estudio efectuado de análisis a priori en el Capítulo 5 y el análisis a posteriori expuesto en el Capítulo 6 de la situación de aprendizaje nos permitieron valorarla en forma cualitativa.

Las producciones escritas concernientes a las distintas sesiones, las observaciones realizadas en el debate grupal, las transcripciones de las entrevistas nos describieron la naturaleza del aprendizaje construido por los alumnos.

En cada sesión los estudiantes fueron enfrentados a situaciones de variación en distintos registros para las cuales no tenían todos los conocimientos requeridos. Todo lo elaborado en cada clase y en los distintos momentos (acción, formulación, validación e institucionalización) fue base para el desempeño en la instancia siguiente.

Los estudiantes pudieron construir por sí mismos los conceptos de IC, ID y ER y descubrir mediante registros numérico, gráfico y analítico, la relación que tienen con el signo de la derivada primera o su anulación o no existencia. Fueron capaces de discernir entre punto crítico y ER y obtener un método para calcular estos últimos, si bien reconocemos que todo el trabajo realizado no fue suficiente para profundizar distintos aspectos.

La mayoría de los equipos fue capaz de resolver al menos un PO planteado en la última actividad. Esto fue reconfortante para nosotros: poder influir positivamente mediante las tareas realizadas en la resolución de los mismos fue uno de nuestros principales objetivos.

Varios alumnos lograron terminar con un trabajo aceptable toda la situación de aprendizaje y luego de finalizada la misma no concurrieron más a clase, lo que no nos permitió un seguimiento posterior. Pensamos que cuando trabajan en equipo, sin la presión de un examen, con la posibilidad de ser orientados por los docentes, consiguen resultados que no pueden luego plasmar en una situación de evaluación individual.

Detectamos pocas dificultades para la implementación de la secuencia. Reconocemos que las consignas estaban muy detalladas y guiadas paso a paso, lo que produjo resoluciones aceptables por parte de la mayoría de los equipos. Los problemas se vincularon a las tareas "más abiertas" como el PO de la primera actividad de exploración y el último PO de la última actividad de descubrimiento. En estos casos la mayor dificultad se detectó en la escasa integración entre los conocimientos previos y estrategias de resolución con situaciones nuevas.

A pesar que las actividades fueron dadas en diversos registros y exigían conversiones y tratamientos entre los mismos, los alumnos en general no incorporaron esto como una herramienta para comprender un problema o poder solucionarlo.

La escasa participación o dispersión de los alumnos en algunas de las instancias de debate grupal provocó que no se pueda desarrollar en forma adecuada y detallada algunas instancias de puesta en común. Sin embargo, y para bien, uno de los debates fue cruciales para la continuidad de la situación de aprendizaje. Nos referimos en el que se discutió la relación entre la derivada de la función en un punto y la pendiente de la recta tangente dados en registro gráfico.

Notamos que los alumnos retomaban su atención cuando la profesora exponía cuestiones no resueltas en la actividad o que habían hecho en forma incorrecta.

Se reflejó a lo largo de la experiencia una evolución positiva en cuanto a la presentación de las tareas, las unidades utilizadas en las situaciones con contexto, los gráficos con ejes rotulados con las variables y sus unidades, las respuestas en forma completa, entre otros. Con los aciertos y las dificultades expuestas, podemos expresar que la secuencia generada cumplió con nuestras expectativas: colocar a los alumnos en camino hacia la comprensión de los conceptos involucrados en la resolución de los PO. Además, nos permitió analizar cómo piensan nuestros alumnos e identificar algunas dificultades en el aprendizaje, lo que ha sido analizado en el Capítulo 6.

La situación de aprendizaje diseñada para construir las nociones de IC, ID y ER y su relación con la función derivada reveló su viabilidad para ser implementada con estudiantes que cursan Cálculo Diferencial e Integral. Las nociones de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos son intuitivas y susceptibles de ser abordadas con tareas dadas en diversos registros.

### 7.3 Sobre el aporte de otras investigaciones

Si bien realizamos reflexiones luego de analizar las producciones de los alumnos en cada sesión de trabajo comparando los resultados obtenidos con los de otras investigaciones, hacemos en este apartado una síntesis de las coincidencias y de las discrepancias derivadas al respecto.

Diversos estudios indican la presencia del teorema factual según el cual los alumnos (y en algunos casos los profesores) confunden el signo de la función con el de su derivada. Esto es, piensan que si la derivada es positiva en un intervalo la función también lo es en dicho intervalo (Marcolini, 2003; Cardona, 2009; Guerrero, 2002; Dolores y Guerrero, 2004). Los alumnos que intervinieron en nuestra experiencia no dieron cuenta de esto. En dos oportunidades al solicitar los intervalos de positividad y negatividad de la función y sus IC e ID obtuvimos, como mínimo, el 75% de los equipos con respuestas correctas.

Algunos alumnos confundieron punto estacionario con una función constante, resultados análogos al estudio de Guerrero (2002).

A lo largo de la experiencia presentamos tres PO. El primero formó parte de las actividades de exploración, en las cuales los alumnos sólo conocían el concepto de función y funciones prototipo (lineal, cuadrática, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas). Si bien el 60% de los equipos lo resolvió bien, evidenciamos algunas coincidencias con otras investigaciones. Por ejemplo, sólo un equipo realizó una tabla para poder ubicarse en el problema y observar cómo cambiaba el área del rectángulo al variar las medidas de sus lados (perímetro constante). Es decir, el uso del registro numérico fue casi nulo. Esto coincide con los resultados del estudio de Baccelli et al (2011). Otro efecto obtenido en este problema que tiene similitud con la investigación de Cuesta (2007) es que el conocimiento geométrico influyó sobre la comprensión de la consigna. Varios equipos consideraron que un cuadrado no es rectángulo, siendo un obstáculo en el momento que se estaba arribando a la solución del problema.

En los otros dos PO presentados en la última actividad ningún equipo realizó conversión al registro numérico.

Otra concordancia con los estudios de Baccelli et al. (2014) es que la mayoría de los equipos que logró escribir la función a optimizar en una sola variable, terminaron de resolver el PO en cuestión.

En cuanto a la conversión de registro gráfico a analítico en los casos que van más allá de la lectura de datos, por ejemplo, el de obtener en forma visual la pendiente de la recta tangente y relacionarla con la derivada en el punto de tangencia, los estudiantes recurrieron a un procedimiento analítico erróneo. Como planteamos en el análisis cognitivo y como resultado de numerosas investigaciones (Cardona, 2009; Cuesta, 2007;

Marcolini, 2003; Habre y Abboud, 2006, Ariza, 2014), los alumnos tuvieron dificultad para expresar relaciones planteadas en el entorno gráfico.

Otro aspecto fue la falta de comprensión del lenguaje verbal ante una consigna, en nuestro caso sobre el concepto de velocidad media. Algunos equipos lo interpretaron como un promedio de velocidades o un cociente incremental de velocidades. Este concepto fue trabajado en clase, con tablas en registro numérico, quizás la consigna confundió la respuesta. Esto también lo contemplamos en el análisis cognitivo y está en concordancia con las investigaciones de Cardona (2009) y Cuesta (2007).

### 7.4 Sobre la continuidad de la investigación

Este trabajo de investigación no se puede considerar concluido. A la luz de los resultados obtenidos en la experiencia podemos plantear algunas cuestiones que quedan abiertas para futuras investigaciones.

En primer lugar, el análisis a posteriori de la situación de aprendizaje nos motiva a revisar su diseño. Algunas preguntas vinculadas: ¿es posible diseñar las consignas de una manera "más abierta" y lograr el descubrimiento de los conceptos involucrados? ¿cómo extender la situación de aprendizaje a un estudio completo de funciones? ¿podemos incorporar tecnología?

Sobre esta última pregunta, un aspecto suceptible a investigación es cómo fortalecer la propuesta con el uso de software que integre posibilidades de cálculo numérico, simbólico y representación gráfica. De esta manera reforzamos la oportunidad de presentar situaciones que estimulen en el estudiante la búsqueda de relaciones entre información gráfica, numérica y algebraica, analizando la aplicabilidad de los conceptos, propiedades y resultados desde diferentes perspectivas.

También es un desafío la indagación de problemas que resulten atractivos a los alumnos de diferentes ingenierías y, de esa manera, lograr rediseñar una situación de aprendizaje en distintos contextos.

Otra cuestión importante es profundizar el análisis de la comprensión en matemática. Como expresamos en varias oportunidades no es tarea fácil. Este estudio puede ser la base del diseño de otros instrumentos para valorar CO y CE de diversos conceptos en los alumnos.

Por último, rescatamos la importancia de la investigación en Educación Matemática como motor de avance y desarrollo en la disciplina y como respuesta a las problemáticas que enfrentamos los profesores en nuestras prácticas.

Esperamos que este trabajo sea un aporte a la comunidad educativa que se interesa en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje por la vía de la investigación y la intervención en el aula.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ariza, A. (2014). *Análisis del uso del concepto de derivada por estudiantes universitarios en el estudio de conceptos económicos*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de innovación y formación didáctica. Universidad de Alicante. España.

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de Derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias 27* (1), 121-136.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1* (1), 40-55.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas. K. (1997*). A framework of research and curriculum development in undergraduate mathematical education.* Recuperado el 10 de febrero de 2016 de https://www.researchgate.net/publication/2784058_A_Framework_for_Research_and_Curriculum_Development_in_Undergraduate_Mathematics_Education

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en la didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Venezolana, 10* (2), 135-149.

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S. y Prieto, G. (2011). Análisis de un problema de investigación desde el enfoque ontosemiótico. *Revista de Educación Matemática. Número especial: trabajos de investigación y propuestas de enseñanza 2011*.

Recuperado el 7 de septiembre de 2015 de http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10189

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S. y Prieto, G. (2013). *Análisis de significados para mejorar los aprendizajes en problemas de optimización.* Trabajo presentado en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM. Recuperado el 8 de marzo de 2016 de http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/639.pdf

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S. y Prieto, G. (2014). *Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados*. Trabajo presentado en el Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Recuperado el 8 de marzo de 2016 de www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1119.pdf.

Baccelli, S., Anchorena, S., Moler, E. y Aznar, M. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números 84,* 99-113.

Blanco, M. (2001). Análisis de la discusión L'Hopital-Bernoulli. *Cronos, 4* (1-2), 81-113.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática* (4ta. Edición). Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial: Madrid. España.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26,* 1197-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y el lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Camacho, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior-UNIVERSIA*. *2*(3), 152-171. Recuperado el 2 de febrero de 2011 de http://ries.universia.net/index.php/ ries/article/view/84.

Cantoral, R. (1995). Matemática Educativa. *Revista especializada en Educación 10* (5), 4-13.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14,* 70-81. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R. y Farfán, M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353-372.

Cantoral, R. y Farfán, M. (1999). *Historia de la matemática.* México: ITESM.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Montiel, G y Reyes, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18* (1), 5-17.

Carabus, O. (2002). *El aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una función y sus niveles de Comprensión*. Producciones científicas NOA. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Recuperado de http://www.editorial.unca.edu.ar/Publicacione%20on%20line/CD%20INTERACTIVOS/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf el 29 agosto de 2010.

Cardona, R. (2009). *Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Collete, J. (2013). *Historia de las matemáticas II* (7ma. Edición). México: Siglo XXI Editores.

Colombano, V., Fomica, A. y Camós, C. (2012). Enfoque Cognitivista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comp). *Educación Matemática*. *Aportes a la Formación Docente desde distintos Enfoques Teóricos* (pp. 115-152). Buenos Aires: Eduvim-Ediciones UNGS.

Contreras de la Fuente, A. (2001). La enseñanza del análisis matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En L. Contreras, J. Castillo, N. Climent y M. Sierra (Eds), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-85). España: Huelva.

Contreras de la Fuente, A. y Font, V. (2002) *¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/castellon_2002/contreras_vicen.doc el 1 de marzo de 2016.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para trabajo de aula en ingeniería.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Cuesta, A. (2007). *El concepto de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Cuevas, A., Rodríguez, A y González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 2335-2345. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática 1* (2).

de la Torre, A., Suescún, C. y Alarcón, S. (2005). El método de máximos y mínimos de Fermat. *Revista Lasallista de investigación, 2* (2), 31-37.

Di Rienzo, J.A., Casanoves, F., Balzarini, M.G., Gonzalez, L., Tablada, M., Robledo, C.W. *InfoStat versión 2017*. Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Recuperado de http://www.infostat.com.ar

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico: Enrique J. Varona, Cuba.

Dolores, C. (1998). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11,* 6-10. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*, 155-181. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 13* (4-II), 241-254.

Dolores, C. y Guerrero, L. (2004). Concepciones alternativas que, referente al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de matemática educativa 17,* 101-107. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C., Guerrero, L., Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (1), 73–84. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their history and solution.* New York: Dover Publication Inc.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 61-96). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5 (1993).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME 9* (1), 143-168.

Engler, A. (2014). *Construcción del concepto de derivada a través de dinamizar la regla de los cuatro pasos. Aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Engler, A. y Camacho, A. (2012). Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. *Premisa, 14* (54), 18-36.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2007). *Cálculo Diferencial.* Santa Fe: Ediciones UNL.

Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2003). Derivada y función derivada: su aporte en el estudio del comportamiento de la función. *Novedades Educativas 153,* 30-38.

Falsetti, M., Rodriguez, M., Carnelli, G. y Formica, F. (2007). Perspectiva integrada de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática: una mirada de la Educación Matemática. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9,* 165-186.

García, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa, México.

Garzón, M., Vanegas, D. y Delgado, J. (2013). Los conocimientos geométricos de docentes en situaciones especiales en el aula. *Encuentro Educacional 20* (1), 34-47.

Giné de Lera, C. y Deulofeu, J. (2010). Planteamiento e interpretación de problemas contextualizados de extremos. II Congrés Internacional de Didactiques Recuperado de http://hdl.handle.net/10256/2691 el 23 de marzo de 2016.

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica.* Recuperado el 12 de diciembre de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. Penalva, G. Torregosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.

González, A. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de la Laguna, España.

González, M. (2006). Sistemas de representación en la enseñanza de los puntos críticos: perspectiva histórica. *Revista diálogo educacional, 6* (18), 145-160.

González, M. (2011a). Historia de la enseñanza del cálculo a través de los libros. *Educação Matemática Pesquisa, 13* (3), 415-437.

González, M. (2011b). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hopital. *Epsilon, 28* (1), 83-97.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México, D.F. México

Guerrero, L. (2002). *Un estudio exploratorio acerca de las concepciones que referentes al comportamiento variacional de funciones elementales tienen los profesores del bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Universidad del Estado de Guerrero, México.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de funciones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1,* 5-21.

Guzmán, I. y Rodríguez, N. (2013). Grado de apropiación de los objetos matemáticos en juego en la resolución de problemas. Un ejemplo habitual en la determinación de máximos y mínimos. *REVEMAT, 8,* 48-62.

Guzmán, I., Ortega, L., Tapia, X., Rodríguez, N. y Pérez, L. (2010). La apropiación de los criterios de optimización en Cálculo Diferencial de estudiantes de Carreras no matemáticas. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) 20* (1), 209-223.

Habre, S. y Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior 25* (1), 57- 72.

Hancock, H. (1960). *Theory of maxima and minima*. New York: Dover Publications, Inc.

Hecklein, M., Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2011). Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan los alumnos de una escuela secundaria. *Premisa 49,* 23-39.

Ibarra, S. E., Bravo, J.M. y Grijalva, A. (2001). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial. Recuperado el 5 de julio de 2011 desde http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Ibarra%20Olmos.pdf

Jimenez, D. (2010). El problema del área en los Elementos de Euclides. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 12,* (2), 179-207.

Larson, R y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9na. Ed.). China: Mc Graw Hill.

Lupiáñez, J. L., Rico, L.; Gómez, P., Marín, A. (2005). Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Conferencia presentada en *V Congresso Ibero-americano de Educaçao Matemática* (CIBEM). Oporto, Portugal.

Malaspina, U. (2002). Optimización Matemática. En C. Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (1), 43-48. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Malaspina, U. (2004). Problemas de optimización y pensamiento matemático. En L. Díaz (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 931-936. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 10* (3), 365-399.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Perú, Lima, Perú.

Marcolini, J. (2003). *Ingeniería didáctica en Física Matemática.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Martínez, R. (2005). *La pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa, México.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (3), 221-278.

Mora, H. (2006). *Concepción proceso-objeto de función en la comprensión del teorema fundamental del cálculo.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). España: SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación Matemática, 16* (02), 93-104.

Murillo, A. (2013). *Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grado noveno y once de los colegios públicos de la Virginia.* Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Ciencias Básicas. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.

Okulik, N. (2009). Aprendizaje basado en problemas. Una experiencia con alumnos de carreras de Ingeniería. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería 19,* 65-73.

Pastore, J. (s.f.) *Trigonometria e um antigo problema de otimização.* Recuperado el 24 de mayo de 2016 de http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/trigonometria-e-otimizacao.pdf

Penalva, C. y Torregrosa, G. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas. En E. Tonda y A. Mula (Eds.), Scripta in Memoria (pp. 649-658). Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Peña, D. (2002). *Análisis de Datos Multivariantes*. Madrid: Mc. Graw Hill.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La enseñanza para la comprensión* (pp. 69-94). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Pino, L., Godino, J., Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educación Matemática. Pesquisa, 13* (1), 141-178.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de innovación y formación didáctica. Universidad de Alicante. España.

Prieto, F. y Vicente, S. (2006). *Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería.* Ponencia presentada en I REPEM, Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Reséndiz, E. (2006). La variación de las explicaciones de los profesores en situación escolar. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 617-623. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.

Rodríguez, M., Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T. y Pochulu, M. (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.* Los Polvorines: Ediciones UNGS.

Rojas, P. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 12* (1).

Salazar, C., Díaz, H. y Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *TEA, 26,* 62-82.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Salinas, P. (2010). *Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del Cálculo en el contexto del estudio del cambio.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (3), 355-382.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 267-296.

Sánchez, M. (2006). Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional. *Números 64.* Recuperado el 5 de junio de 2015 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas_02.pdf

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2006). Pensamiento y Lenguaje Variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 745-751. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS, 47* (6), 641-649.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22 (4)*, 1-32.

Simón, M. y Miguel, M. (2013). *Estudio de la función y sus derivadas sucesivas en la Licenciatura en Física y Matemáticas e Ingeniería Matemática de ESFM-IPN, con base en el Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Tesis de Licenciatura no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Escuela de Física y Matemáticas, México.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico y otros, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Stewart, J. (1999). Cálculo: conceptos y contextos. México: International Thomson Editores.

Suau, S. y Ferrando, R. (2015). El desafío de enseñar y aprender Análisis Matemático I. En M. Caligaris, G. Rodríguez y L. Laugero (Comps.), *Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. XIX Encuentro Nacional, XI Internacional. Libro de Actas*, 201-210. Argentina: Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional San Nicolás.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En L. Meira y D. Carraher, (Eds.), *Proceedings of PME 19*, Recife, Brazil, I, 61-75

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, pp. 151-169.

Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. *Apuntes de historia de la matemática 1* (1), 19-31.

Terrádez, M. (s.f.). *Análisis de componentes principales*. Recuperado el 2 de mayo de 2017 de https://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Componentes_principales.pdf.

Thomas, G. (2006). *Cálculo una variable* (11ma. ed). México: Pearson Educación.

Valero, M. (2004). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Vasco, C. (2009). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Recuperado el 2 de enero de 2015 de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf.

Vidal, O. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Villareal, M. (2002). La investigación en Educación Matemática ¿qué sucede en Argentina? *Noticiero de la Unión Matemática Argentina*. Número Extraordinario Julio 2002, 60-81. Recuperado el 17 de marzo de 2007 de http://www.santafe-conicet.gov.ar/notiuma/confmonica.pdf

Vrancken, S. (2011). *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Vrancken, S. y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, UNION, 33,* 53-70.

Vrancken, S., Engler, A., Giampieri, M. y Müller, D. (2015). Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de implementación de una secuencia de actividades. *Matemática, Educación e Internet 15* (1).

Williner, B. (2015). *Apuntes de clase: Análisis Matemático I.* San Justo: Ediciones UNLaM.

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemática, México.

# ANEXOS

# ANEXO 1. PROGRAMA ANALÍTICO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

**Unidad 1: Funciones**

Definición de función. Dominio. Imagen. Representación de funciones en diferentes registros. Las funciones como modelos. Ceros. Signo de una función. Funciones par e impar. Función acotada. Funciones algebraicas y trascendentes, sus gráficos y características principales. Álgebra de funciones. Desplazamientos horizontales y verticales. Alargamientos, contracciones y reflexiones. Composición de funciones. Función inversa. Curvas dadas en forma paramétrica.

**Unidad 2: Límite funcional**

Distancia entre dos números reales. Entorno y entorno reducido. Límite finito. Definición. Interpretación gráfica. Límites laterales. Unicidad del límite. Propiedades del límite. Teorema de intercalación.

Infinitésimos. Definición. Álgebra de infinitésimos. Propiedades. Comparación de infinitésimos. Límites infinitos. Límites de variable infinita. Límites infinitos de variable infinita. Cálculo de límites. Indeterminaciones. Ecuaciones de las asíntotas a curva plana. Continuidad. Función continua en un punto. Continuidad en un intervalo abierto y en un intervalo cerrado. Álgebra de funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas Discontinuidades. Clasificación. Teorema del valor intermedio, Teorema de Bolzano.

**Unidad 3: Derivada de una función. Diferencial**

Razón promedio en un intervalo e instantánea en un punto. Significado geométrico y físico. Derivada de una función en un punto. La derivada como una función. Recta tangente y normal. Derivadas laterales. Continuidad de una función derivable. Cálculo de la derivada de funciones elementales. Reglas de derivación. Derivada de una función compuesta. Derivada de funciones inversas. Derivada de funciones definidas en forma implícita. Derivación logarítmica. Derivadas sucesivas.

Aproximación lineal. Diferencial de una función. Definición e interpretación geométrica. Relación con el incremento. Álgebra de funciones diferenciables. Derivada de funciones dadas en forma paramétrica.

**Unidad 4: Aplicaciones del Cálculo Diferencial**

Teoremas de funciones derivables. Regla de L`Hopital. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función y su relación con el signo de la derivada primera. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Condición necesaria de extremo relativo. Determinación de máximos y mínimos. Concavidad positiva o negativa. Condiciones para su determinación. Punto de inflexión. Definición. Condiciones para su existencia. Trazado de curvas.

**Unidad 5: Polinomios de Taylor.**

Ordenes de contacto entre dos curvas planas. Expresión de un polinomio por sus derivadas en un punto. Polinomio de Taylor y de Mac Laurin. Término complementario.

**Unidad 6: Primitivas o integrales indefinidas**

Primitiva o integral indefinida de una función. Definición. Constante de integración. Propiedades. Integración inmediata. Integración por sustitución, por partes, por fracciones simples, trigonométricas.

**Unidad 7: Integral definida**

Noción de área en el plano. La integral definida. Propiedades. Teorema del valor medio del cálculo integral. Teorema Fundamental del Cálculo. Enunciado y justificación. Área entre curvas. Aplicaciones de la integral definida. Definición de integrales impropias de primera y segunda especie. Convergencia.

**Unidad 8: Sucesiones y series numéricas**

Sucesiones. Definición. Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes. Propiedades. Sucesiones monótonas y acotadas. Serie. Definición. Suma de una serie. Condición necesaria de convergencia. Series geométricas y series p. Criterios para series de términos positivos.

**Unidad transversal: Resolución de Actividades**

Esta unidad será transversal a las enunciadas anteriormente, ya que sus contenidos provienen de aquellas. Se pretende que el alumno:

- ✓ Desarrolle habilidades matemáticas para resolver ejercicios y/o problemas en forma autónoma.
- ✓ Trabaje en grupo en la resolución de problemas, fundamentando sus decisiones y aceptando las de los demás miembros con un espíritu crítico y de respeto.
- ✓ Identifique fortalezas y debilidades en el proceso propio de resolución de problemas (reflexión metacognitiva).

# ANEXO 2. ENUNCIADOS DE ACTIVIDADES PREVIAS A LA EXPERIENCIA

### Actividad 1: Funciones como modelos

**Ejercicio 1:** para construir una caja sin tapa se cortan cuadrados de *x* cm de lado en las cuatro esquinas de un cartón de 24 x 32 cm, y se doblan los lados. Expresar el volumen $V(x)$ ¿Cuál es el dominio de la función?

**Ejercicio 2:** un resorte mide 7 cm cuando colgamos de él 10g, y mide 13 cm cuando colgamos 80 g. Escribe la ecuación lineal que liga la longitud $L$ con el peso $P$: $L = L(P)$

a) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no se cuelga peso?

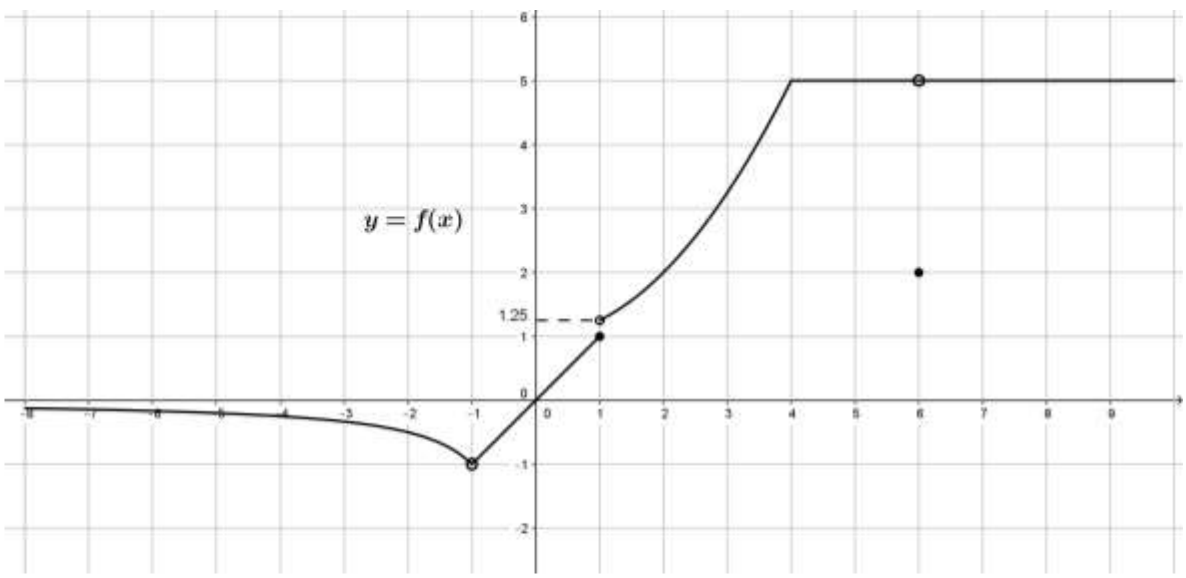
b) ¿Cuál es la variación de longitud cada 10 g?

c) Teniendo en cuenta que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial, ¿cuál es el dominio de definición de la función $L(P)$?

d) Hallar la función inversa y explicar qué significa bajo el contexto del problema.

### Actividad 2: Límite funcional

**Ejercicio 1:** dado el siguiente gráfico:



Calcular los valores que se indican, si existen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ | $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ | $\lim_{x\to -1} f(x)$ | $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ | $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ | $\lim_{x\to 1} f(x)$ |
| $f(-1)$ | $f(1)$ | $\lim_{x\to 6} f(x)$ | $f(6)$ | $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ | $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ |
| $\lim_{x\to 4} f(x)$ | $f(4)$ | $\lim_{x\to 2} f(x)$ | $f(2)$ | $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ | $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ |

**Ejercicio 2:** contestar V o F. Justificar (puedes usar el gráfico del ejercicio 1 para dar contraejemplos cuando la premisa sea F)

$\lim_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow a \in D_f$

Si no existe el $\lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow a \notin D_f$

$\lim_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow l = f(a)$

Si $\lim_{x\to \infty} f(x) = l \Rightarrow$ no existe $a \in D_f$ tal que $f(a) = l$

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l = f(a)$

**Ejercicio 3:** se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 ft/s (pies/segundos). Su altura en pies luego de $t$ segundos está dada por: $s(t) = 40\,t - 16\,t^2$ .

a) Graficar la función $s(t)$, dar su dominio e imagen bajo el contexto del problema.

b) Calcular la velocidad instantánea de la pelota a los dos segundos de realizado el lanzamiento, mediante los siguientes pasos:

1) Hallar la velocidad media de la pelota en los intervalos que se indican en la tabla.

Recordar que la velocidad media se define como $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t) - s(2)}{t-2}\ ft/seg$

| Intervalo | [1.5,2] | [1.9,2] | [1.999,2] | | [2,2.001] | [2,201] | [2,2.1] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vm | | | | | | | |

2) Establecer una fórmula genérica para la velocidad media en cualquier intervalo $[2,t]$ o $[t,2]$.

3) Calcular la velocidad instantánea en $t = 2$ segundos como el límite para $t \to 2$ de la velocidad media.

4) Comparar el resultado anterior con la aproximación realizada mediante la tabla del ítem 1).