



Universidad Nacional del Comahue

PROBLEMA ESPECTRAL ASOCIADO A UN SISTEMA
FORMADO POR UN FLUIDO VISCOSO COMPRESIBLE Y
SÓLIDOS INMERSOS

*Tesina para optar al grado de Licenciado en
Matemáticas*

Tesista: Pablo Daniel Franchini.

Director: Dr. Claudio Padra.

Junio 2020

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi familia por su amor, acompañamiento y apoyo incondicional. A mis amigos que siempre me alentaron, y al Dr. Claudio Padra por su guía y generosidad durante toda la carrera. Quisiera también, agradecer a quienes leyeron este trabajo y colaboraron en su revisión final. Gracias a todos.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Introducción	7
1.1.1. Motivación	7
2. Vibraciones de sistemas con finitos grados de libertad	11
2.1. Problemas de autovalores	11
2.1.1. Sistema masa-resorte. Autovalores generalizados en espacios de dimensión finita	13
2.2. Principio del mínimo	21
2.2.1. Método Rayleigh-Ritz	25
2.3. Conclusión	26
3. Espacios de Sobolev	27
3.1. Definiciones	27
3.2. Operadores compactos	32
4. Vibraciones de sistemas con infinitos grados de libertad	41
4.1. Descripción	41
4.2. Sistemas con infinitos grados de libertad	41
4.3. Conclusión	55

5. Vibraciones de sistemas acoplados fluido y sólido.	57
5.1. Vibraciones de un fluido en una cavidad rígida	60
5.1.1. Formulación para un fluido encerrado en una cavidad rígida en presiones	69
5.2. Fluido levemente compresible con sólidos inmersos	70
5.3. Caracterización del espectro	75
5.4. Conclusión	80

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

En el presente capítulo se definirán algunos conceptos básicos sobre vibraciones, resaltando la importancia del análisis de vibraciones de un sistema mecánico. En el capítulo 2, se mostrará cómo el modelo matemático de las vibraciones de un sistema de finitos grados de libertad conduce a un problema de autovalores estándar o generalizado. Se resolverán algunos ejemplos comunes, y se introducirán el cociente de Rayleigh, y los principios minmax, maxmin para caracterizar los autovalores cuando el problema es simétrico. En el tercer capítulo se definen los espacios de Sobolev, y principales resultados de compacidad, como el teorema de Rellich, que brindarán el marco teórico de los capítulos siguientes. Se incluyen con el propósito de que este trabajo resulte, en la medida de lo posible, auto-contenido. El capítulo 4 trata de sistemas con infinitos grados de libertad. Se trabajan algunos ejemplos comunes de vibraciones de cuerdas y membranas caracterizando el espectro en cada caso. Finalmente, en el capítulo 5 se analizará el problema espectral asociado a un sistema formado por un fluido viscoso compresible y sólidos inmersos.

1.1.1. Motivación

En primer término deberemos tratar qué se entiende por vibración, para así estudiar sus efectos en un sistema. En esta sección seguiremos el tratamiento de [2]. Se llaman vibraciones a las respuestas repetitivas, periódicas u oscilatorias de un sistema mecánico. La tasa de los ciclos con los que ocurren dichas vibraciones se denomina frecuencia.

Los movimientos repetitivos, que son en alguna manera regulares y ocurren a bajas frecuencias, se denominan comúnmente oscilaciones mientras que todo movimiento repetitivo, que sea a alta frecuencia, con baja amplitud, y que tenga un comportamiento regular o aleatorio cae en la categoría de vibración.

A continuación enumeraremos algunos de los problemas más comunes asociados a las vibraciones.

Problemas asociados con las vibraciones

1. Generación de ruido y/o movimiento.
2. Estrés dinámico, que genera fatiga, la cual a su vez puede conducir a falla de los materiales.
3. Pérdida de energía y reducción del rendimiento.

Es claro, en vistas de los problemas que producen, la importancia de modelar las vibraciones que pueden producirse en cualquier aplicación industrial. En particular, el problema a tratar en este trabajo, puede encontrarse en aplicaciones de la industria nuclear. El flujo del refrigerante a través de los componentes de un reactor operativo, induce vibraciones en los distintos componentes, tales como tuberías y elementos combustibles. Se han registrado fallas como la pérdida en un generador de vapor del reactor Ringhals 3 en Suecia, tras solo 3000 horas de operación en plena potencia. Se encontró que decenas de tubos habían sido gastados hasta el 10 % de su espesor original [22].

En general, dependiendo tanto de las características de la estructura y el fluido, se obtienen distintos modelos matemáticos. En este trabajo analizaremos el caso de un fluido compresible viscoso, con sólidos inmersos. Otros autores ya analizaron los casos para fluido incompresible viscoso y no viscoso. [5].

Origen de las vibraciones

Las vibraciones pueden ocurrir de manera natural en un sistema de ingeniería y pueden ser resultado natural del comportamiento dinámico del sistema. La vibración natural es una consecuencia de la naturaleza oscilatoria de un sistema mecánico como resultado del intercambio repetitivo de energía cinética y potencial entre los componentes del sistema. Sin embargo, esta respuesta oscilatoria no está limitada a los sistemas puramente mecánicos, también se puede producir en sistemas eléctricos. Esto no necesariamente significa que en todos los sistemas en que se produzca un intercambio de energía cinética y potencial

existan vibraciones. Algunos sistemas cuentan con mecanismos para disipar la energía de tal forma que no se alcance a producir una oscilación. Por ejemplo, mediante amortiguamiento o roce en un sistema mecánico y mediante resistencias en un sistema eléctrico.

Las vibraciones también pueden ser forzadas en el sistema por medio de fuente de excitación. Dicha fuente puede ser interna o externa al sistema y la respuesta dependerá del tipo de excitación (periódicas, shock o aleatoria), punto de aplicación y las características de la estructura. Algunos ejemplos de fuentes externas comunes pueden ser el viento, olas, vibraciones de la fundación de la estructura. Mientras que ejemplos de excitaciones internas incluyen cargas en movimiento y rotaciones. Para reducir las vibraciones se puede atacar a la excitación, la respuesta o ambas.

Cuando la frecuencia de la excitación forzada coincide con la del movimiento natural del sistema, el sistema responderá de manera vigorosa, incrementando la amplitud y puede ser potencialmente destructiva para el sistema. Esta condición se conoce como resonancia, y la frecuencia asociada es la frecuencia de resonancia. Si bien, en una estructura, existen tantas frecuencias naturales como grados de libertad (número de coordenadas necesarias para especificar completamente la posición de un objeto en un instante), y con cada frecuencia natural la estructura vibra de una forma determinada, no necesariamente hace falta analizar todas las frecuencias naturales ya que no todas van a ser excitadas o bien la estructura podría tener mucho amortiguamiento para ese modo en particular. En las aplicaciones para la ingeniería, la frecuencia natural más baja suele ser la más importante ya que si la estructura resiste al modo de vibración asociado a dicha frecuencia, entonces soportará a los demás modos. Del análisis de vibraciones se puede determinar si la estructura cumplirá su función al analizar factores tales como estrés, fatiga y ruido. Además permitirá revisar tanto la integridad como la utilidad de la estructura y determinar qué parámetros estructurales tienen mayor efecto en la respuesta dinámica, los cuales a su vez, luego podrán ser modificados de forma apropiada. Es evidente la importancia de incorporar el análisis de vibraciones en la etapa de diseño ya que es más sencillo modificar la estructura en la etapa de diseño que después de construida, evitando problemas económicos, operacionales, mantenimiento, y de seguridad.

Capítulo 2

Vibraciones de sistemas con finitos grados de libertad

2.1. Problemas de autovalores

A continuación, introduciremos algunas definiciones del marco teórico matemático el cual nos permitirá formular y resolver sistemas discretos, y que además resultará fundamental cuando avancemos a los sistemas continuos. Comenzaremos por introducir el concepto de autovalor.

Definición 2.1.1 (*Autovalor*)

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se llamará autovalor de A si existe $x \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que $Ax = \lambda x$. El par (λ, x) se llamará autopar.

Observación: Si $(A - \lambda I)x = 0$ entonces $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$. Luego $\lambda \in \mathbb{K}$ es una raíz del polinomio $p_A(x) = \det(xI - A) \in \mathbb{K}[x]$. En este trabajo \mathbb{K} denotará a \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Definición 2.1.2 (*Valores espectrales*)

Las raíces de p_A se llaman valores espectrales de A , y los denominaremos $\sigma(A)$. Por el teorema fundamental del álgebra y el teorema de factorización, A tiene al menos un valor espectral y a lo sumo n valores espectrales distintos.

Observación:

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, λ es un autovalor si y solo si es un valor espectral.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, todo autovalor es un valor espectral pero no vale la recíproca.

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$. Luego, igualando a cero obtenemos $\lambda^2 + 1 = 0$ y $\lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$.

Definición 2.1.3 (*Autovalores de un operador lineal*)

Sea un operador lineal $T : X \rightarrow X$ donde X es un espacio normado de dimensión n . Si $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de X y $T_e = (\alpha_{jk})$ la matriz que representa al operador en dicha base ordenada entonces, los autovalores de la matriz T_e serán los autovalores del operador T . Esto está justificado ya que:

1. Dos matrices que representen el mismo operador T en un espacio normado de dimensión finita X , respecto a dos bases distintas de X son matrices semejantes.
2. Matrices semejantes poseen los mismos autovalores.

Proposición 2.1.1 (*Existencia*) De lo mencionado en los párrafos anteriores es inmediato que un operador lineal en un espacio normado de dimensión finita $X \neq \{0\}$ posee al menos un valor espectral.

A continuación veremos que los problemas de autovalores, están relacionados con los problemas de vibraciones mecánicas.

Supongamos que el estado del sistema en estudio puede describirse mediante n parámetros, que escribiremos en un vector $x \in \mathbb{R}^n$. Supondremos las leyes que gobiernan la evolución del sistema en el tiempo son tales que el estado futuro del sistema puede determinarse completamente si se conoce el estado inicial del sistema. Sea x el estado del sistema en el instante $t = 0$, el estado en $t = 1$ está totalmente determinado por x y lo denotaremos $F(x)$. F se asume una función diferenciable. Si las leyes que gobiernan el sistema no cambian, F relaciona en el instante t con el estado en el instante $t + 1$. Supongamos que el movimiento comienza en $x = 0$, y es un movimiento periódico con periodo 1. Este movimiento periódico se dice estable, si comenzando en un punto cualquiera h suficientemente cercano a cero, el movimiento tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Como F es una función diferenciable, para h pequeño podemos aproximar linealmente $F(h)$

$$F(h) \approx Ah,$$

donde A es una matriz de $n \times n$. Para el análisis siguiente supongamos que F una función lineal, luego verifica

$$F(h) = Ah$$

El sistema comenzando en h luego de N unidades de tiempo, estará en la posición $A^N h$. Analicemos el caso en que h sea un autovector,

$$Ah = \lambda h, \quad \text{donde } \lambda \text{ es un escalar y } h \neq 0.$$

Entonces,

$$A^N h = \lambda^N h.$$

Luego podemos concluir que:

1. Si $|\lambda| > 1$, $A^N h \rightarrow \infty$.
2. Si $|\lambda| < 1$, $A^N h \rightarrow 0$.
3. Si $\lambda = 1$, $A^N h = h \forall N$.

Si, además, el polinomio característico de A tiene n raíces distintas, entonces A tiene n autovectores linealmente independientes, es decir forman un base [20]. Por lo tanto, todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede ser expresado como una combinación lineal de autovectores h_j , donde cada h_j es el autovector asociado al autovalor λ_j , para $j = 1, \dots, n$. Es decir,

$$x = \sum_1^n b_j h_j, \quad \text{con } b_j \in \mathbb{R}.$$

Entonces, multiplicando por A^N

$$A^N x = \sum_1^n b_j \lambda_j^N h_j,$$

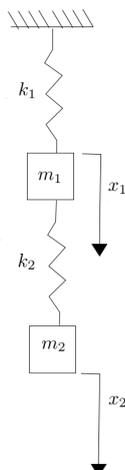
y observamos como en este caso, el comportamiento en el tiempo del sistema depende de los autovalores λ_j de A , por lo que su estudio es esencial.

Más adelante analizaremos el caso en que la matriz A no posee n autovectores linealmente independientes.

A continuación estudiaremos algunos casos concretos de sistemas mecánicos, comenzando por el estudio de sistema masa-resorte, el cual además nos permitirá introducir el concepto de autovalores generalizados.

2.1.1. Sistema masa-resorte. Autovalores generalizados en espacios de dimensión finita

Consideremos un sistema masa-resorte que consista en dos masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de constante elástica k_2 , y la masa m_1 suspendida desde



un punto fijo, mediante un resorte de constante elástica k_1 , tal como indica la figura (2.1.1)

Asumiremos que la masa de los resortes es despreciable, y los bloques son masas puntuales. El sistema solo puede desplazarse en dirección vertical, por lo que mediante las coordenadas x_1 y x_2 que indican las posiciones de las masas m_1 y m_2 respectivamente podemos describir completamente el movimiento del sistema en cualquier instante. Tomando de referencia la posición del sistema en equilibrio, donde los pesos de las masas y las tensiones de los resortes se cancelan, las ecuaciones de movimiento están dadas por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1), \end{cases} \quad (2.1)$$

de donde resulta,

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 x_2'' + k_2(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Este sistema se puede expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

donde la matriz del primer sumando es la matriz de masas que llamaremos M ; y la matriz del segundo sumando es la matriz de rigidez que llamaremos K . Es decir:

$$Mu'' + Ku = 0,$$

donde u es el vector posición de n componentes, M la matriz de masas de $n \times n$ y K la matriz de rigidez de $n \times n$. Las condiciones iniciales estarán dadas por n desplazamientos iniciales, y n velocidades iniciales. Si M no es una matriz diagonal, se dice que el sistema está acoplado dinámicamente, mientras que si la

matriz K no es diagonal, se dice que el sistema está acoplado elásticamente. Si tanto M como K no son diagonales, el sistema está dinámicamente y elásticamente acoplado. No obstante, dicha situación no es una característica intrínseca del sistema, sino de la elección del sistema de coordenadas, y para el caso de un sistema sin amortiguamiento, puede elegirse un sistema de coordenadas tal que tanto M como K sean matrices diagonales [12].

Asumiendo soluciones del tipo $u = e^{i\omega t}x$ se obtiene la ecuación:

$$M(-\omega^2)e^{i\omega t}x + Ke^{i\omega t}x = 0,$$

que tras cancelar $e^{i\omega t}$ y escribiendo $\lambda = \omega^2$ se convierte en:

$$Kx = \lambda Mx.$$

Este es el llamado problema de autovalores generalizado, debido a la matriz M . Nuestro objetivo será llevar este problema generalizado al problema estándar. Para eso, existen distintas posibilidades en función de las características de las matrices M y K . A continuación analizaremos los siguientes casos:

1. Si la matriz M es invertible
2. Si la matriz K es invertible
3. Si la matriz M es definida positiva

Podemos realizar las siguientes observaciones:

1. En el caso que la matriz M es invertible, al multiplicar por M^{-1} la ecuación $Kx = \lambda Mx$ se obtiene

$$M^{-1}Kx = \lambda x.$$

Tomando $A = M^{-1}K$ se obtiene:

$$Ax = \lambda x,$$

que es el problema estándar.

2. Si K es invertible al multiplicar $Kx = \lambda Mx$ por K^{-1} se obtiene:

$$\frac{1}{\lambda}x = K^{-1}Mx,$$

Luego tomando $A = K^{-1}M$ y $\hat{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ obtenemos:

$$Ax = \hat{\lambda}x.$$

es decir, nuevamente el problema estándar pero con autovalores $\hat{\lambda}$.

3. Si M es simétrica y definida positiva, por el teorema de Cholesky [4], existe una matriz R triangular superior e inversible, tal que $M = R^T R$. Luego reemplazando en $Kx = \lambda Mx$ se obtiene:

$$Kx = \lambda R^T R x.$$

Tomando $y = Rx$

$$KR^{-1}y = \lambda R^T y.$$

Multiplicando por $R^{-T} = (R^T)^{-1}$ se obtiene el problema equivalente

$$Ay = \lambda y,$$

con $A = R^{-T}KR^{-1}$. Los autovalores λ_j son los mismos que para el problema original, y los autovectores están relacionados mediante $y_j = Rx_j$.

En los tres casos vistos, λ es un valor espectral del sistema si $\det(K - \lambda M) = 0$. Si M y K son simétricas y definidas positivas todos los valores espectrales son autovalores del sistema.

Desde el punto de vista físico, la raíz cuadrada positiva de los autovalores representa las frecuencias naturales de vibración del sistema. La menor de dichas frecuencias es la llamada frecuencia fundamental [2]. Una vez conocidos los autovalores podemos resolver la ecuación para x obteniendo así los autovectores. A continuación analizaremos el caso de un sistema amortiguado.

Sistema masas-resortes con amortiguamiento

En el caso previo, el sistema mecánico no contenía un término disipativo, pero en esta oportunidad incorporaremos una matriz de amortiguamiento C proporcional a la velocidad,

$$Mu'' + Cu' + Ku = 0.$$

Añadiendo la identidad $Mu' - Mu' = 0$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} Mu'' + Cu' + Ku = 0, \\ Mu' - Mu' = 0, \end{cases}$$

de donde resulta,

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

el cual se puede reescribir de la forma:

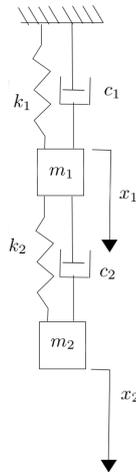
$$\hat{M}x' + \hat{K}x = 0,$$

donde $x = [u \quad u']^T$ es un vector de $2n \times 1$ y \hat{M} , \hat{K} matrices reales simétricas de $2n \times 2n$. Asumiendo soluciones del tipo $x = se^{\lambda t}$ donde s es un vector de forma, y la componente temporal está separada, se obtiene un problema simétrico de autovalores generalizado:

$$\hat{K}s + \lambda\hat{M}s = 0.$$

A partir de este momento se lleva este sistema al problema de autovalores estándar, mediante alguna de las estrategias mencionadas previamente.

Veamos el siguiente problema a modo de ejemplo. Dado el sistema masas resortes con amortiguamiento:



Podemos escribir el sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + (c_1 + c_2)x_1' - c_2 x_2' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ m_2 x_2'' - c_2 x_1' + c_2 x_2' - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

y expresarlo matricialmente como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

donde la primer matriz es la matriz de masas M , la segunda matriz es la matriz de amortiguamiento C y la tercer matriz es la matriz de rigidez K . Es decir:

$$Mu'' + Cu' + Ku = 0.$$

Poniendo $u = [x_1 \quad x_2]^T$ como se indicó previamente, añadiendo la identidad $Mu' - Mu' = 0$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} Mu'' + Cu' + Ku = 0, \\ Mu' - Mu' = 0, \end{cases}$$

de donde resulta:

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & m_1 & 0 \\ -c_2 & c_2 & 0 & m_2 \\ m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x''_1 \\ x''_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Llamaremos \hat{K} a la primer matriz de 4×4 y \hat{M} a la segunda matriz de 4×4 .

Sean $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ y $\hat{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x''_1 \\ x''_2 \end{bmatrix}$. Tomando soluciones $\hat{x} = se^{\lambda t}$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -c_1 - c_2 & c_2 & -m_1 & 0 \\ c_2 & -c_2 & 0 & -m_2 \\ -m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

Con el fin de resolver el sistema completo, supongamos que $m_1 = 3\text{kg}$, $m_2 = 1\text{kg}$, $k_1 = 8\text{ N/m}$, $k_2 = 2\text{ N/m}$, $c_1 = 0.02\text{ N s/m}$, $c_2 = 0.01\text{ N s/m}$. El sistema, con estos nuevos valores es:

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -0,03 & 0,01 & -3 & 0 \\ 0,01 & -0,01 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}.$$

En este caso, se observa que \hat{M} no es definida positiva, pero tanto \hat{M} como \hat{K} son matrices invertibles, con inversas (calculadas utilizando GNU Octave):

$$\hat{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,12500 & 0,12500 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,12500 & 0,62500 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & -0,33333 & -0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & -1,00000 \end{bmatrix}$$

y

$$\hat{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,00000 & -0,00000 & -0,33333 & -0,00000 \\ -0,00000 & -0,00000 & 0,00000 & -1,00000 \\ -0,33333 & -0,00000 & 0,00333 & -0,00333 \\ 0,00000 & -1,00000 & -0,00333 & 0,01000 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando ambos miembros por \hat{M}^{-1} se obtiene el problema de autovalores estándar:

$$\begin{bmatrix} -0,00000 & -0,00000 & -0,33333 & -0,00000 \\ -0,00000 & -0,00000 & 0,00000 & -1,00000 \\ -0,33333 & -0,00000 & 0,00333 & -0,00333 \\ 0,00000 & -1,00000 & -0,00333 & 0,01000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

con autovalores: $\lambda_{1,2} = -0,0075 \pm 2,0000i$ y $\lambda_{3,4} = -0,0025 \pm 1,1547i$. Se puede observar como en este caso la parte real de los autovalores es negativa, debido al amortiguamiento del sistema, que conducirá al cese del movimiento.

A continuación enunciaremos sin demostración algunos resultados clásicos que serán utilizados en la sección siguiente para caracterizar el espectro de un operador autoadjunto. Para las demostraciones de los mismos se puede consultar [1]

Autovectores generalizados

Definición 2.1.4 (*Autovector generalizado*) Sea $T : X \rightarrow X$ un operador lineal. Diremos que v es un autovector generalizado de T , con autovalor λ , si $v \neq 0$ verifica:

$$(T - \lambda I)^j v = 0, \quad (2.3)$$

para algún entero positivo j .

Proposición 2.1.2 Si $T \in L(X)$, entonces

$$Nu(T^n) = Nu(T^{n+1}) \quad \forall n \geq \dim X, \quad (2.4)$$

donde, $L(X)$ es el conjunto de operadores lineales de X en X y $Nu(T)$ el núcleo de T .

Corolario 2.1.0.1 Supongamos $T \in L(X)$ y λ autovalor de T . Entonces, el conjunto de autovectores generalizados de T correspondientes a λ es igual a $Nu(T - \lambda I)^{\dim X}$.

Definición 2.1.5 (*Operador nilpotente*) Un operador se dice nilpotente si alguna potencia del mismo es igual a cero.

Teorema 2.1.1 Sea X un espacio vectorial complejo, y $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ los distintos autovalores de T . Llamaremos U_1, \dots, U_m a los correspondientes subespacios de autovectores generalizados. Se verifica que:

1. $X = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$,
2. $T(U_j) \subset U_j \quad \forall j$,
3. Cada $(T - \lambda_j I)|_{U_j}$ es nilpotente.

Corolario 2.1.1.1 *Si X es un espacio vectorial complejo y $T \in L(X)$, entonces existe una base de X formada por autovectores generalizados de T*

Teorema 2.1.2 *Sea X un espacio vectorial complejo, $T \in L(X)$, y $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ los distintos autovalores de T . Entonces existe una base de X tal que respecto a dicha base la matriz asociada a T es diagonal por bloques, de la forma:*

$$\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde cada A_j es una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Sea $T \in L(X)$. Una base de X se dice base de Jordan si la representación de T en dicha base es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque A_j es una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Teorema 2.1.3 *Sea X un espacio vectorial complejo, y $T \in L(X)$, entonces existe una base de X tal que es una base de Jordan para el operador T .*

Teorema 2.1.4 *(Teorema espectral para matrices autoadjuntas) Una aplicación autoadjunta H de un espacio complejo euclideo X en si mismo, tiene autovalores reales y un conjunto de autovectores que forma una base ortogonal de X .*

Teorema 2.1.5 *(Diagonalización de matrices autoadjuntas reales) Sea H una matriz real autoadjunta, entonces existe una matriz ortogonal M tal que:*

$$M^T H M = D, \quad (2.8)$$

donde D es una matriz diagonal, cuyas entradas son los autovalores de H y M verifica $M^T M = I$.

2.2. Principio del mínimo

En esta sección, plantearemos un problema de minimización que resulta equivalente al problema de autovalores $Ax = \lambda x$, donde A una matriz real es autoadjunta. Con ese fin, introducimos el llamado cociente de Rayleigh:

$$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}. \quad (2.9)$$

Como A es simétrica tiene exactamente n autovalores y son todos reales. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Teorema 2.2.1 (*Principio de Rayleigh*) *El valor mínimo del cociente de Rayleigh es el menor autovalor λ_1 . $R(x)$ alcanza dicho mínimo autovector x_1 asociado al autovalor λ_1 de A :*

$$\min R(x) = R(x_1) = \frac{x_1^T Ax_1}{x_1^T x_1} = \frac{x_1^T \lambda_1 x_1}{x_1^T x_1} = \lambda_1. \quad (2.10)$$

Demostración 2.2.2 *Como A es autoadjunta, es diagonalizable por una matriz ortogonal M tal que $M^T AM = D$. Luego, tomando $x = My$,*

$$R(x) = \frac{(My)^T A(My)}{(My)^T (My)} = \frac{y^T Dy}{y^T y} = \frac{\lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2}{|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2}. \quad (2.11)$$

Observemos que $\lambda_1(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2) \leq (\lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2)$ y $\lambda_1 \leq R(x) \leq \lambda_n$. Luego, el mínimo de R es λ_1 , en el punto donde $|y_1| = 1$ y $|y_2| = \dots = |y_n| = 0$.

Es interesante mostrar que se puede demostrar el principio de Rayleigh sin recurrir a la diagonalización de A . Sea X un espacio Euclideo complejo. Podemos escribir el cociente de Rayleigh, como cociente de dos formas cuadráticas $a(x, x)$, y $b(x, x)$ donde $b(x, x)$ es definida positiva

$$R(x) = \frac{a(x, x)}{b(x, x)} = \frac{(x, Ax)}{(x, x)}.$$

Como A es autoadjunta, R toma valores reales. Además, para cualquier escalar k se verifica que $R(kx) = R(x)$. Por lo tanto, para buscar un máximo o mínimo de $R(x)$, alcanza con restringir la búsqueda a la esfera unitaria $x = 1$. Como en dimensión finita, la esfera unitaria es compacta, $R(x)$ alcanza un máximo y un

mínimo en la misma. Supongamos que el mínimo sea el punto f , sea g cualquier otro vector y t una variable real.

$$R(f + tg) = \frac{(f + tg, Af + tg)}{(f + tg, f + tg)}$$

Desarrollando el cociente obtenemos:

$$\frac{(f, Af) + 2t\operatorname{Re}(g, Af) + t^2(g, Ag)}{(f, f) + 2t\operatorname{Re}(g, f) + t^2(g, g)} = \frac{q(t)}{p(t)}.$$

Como R alcanza su mínimo en f , $R(f + tg)$ alcanza su mínimo en $t = 0$, por lo que su derivada en ese punto debe ser igual a cero. Luego

$$\left. \frac{dR(f + tg)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{R} = \frac{\dot{q}p - q\dot{p}}{p^2} = 0. \quad (2.12)$$

Como $\|f\| = 1$, $p(0) = 1$. Llamaremos λ al valor mínimo de R , es decir $R(f)$. Realizando los reemplazos correspondientes

$$\dot{R} = \dot{q} - \lambda\dot{p} = 0.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \dot{q}(f + tg)|_{t=0} &= 2\operatorname{Re}(g, Af) \\ \dot{p}(f + tg)|_{t=0} &= 2\operatorname{Re}(g, f). \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.12):

$$2\operatorname{Re}(g, Af - \lambda f) = 0. \quad (2.13)$$

Sustituyendo g por ig , obtenemos que para todo g en X ,

$$2(g, Af - \lambda f) = 0. \quad (2.14)$$

Luego,

$$\begin{aligned} Af - \lambda f &= 0 \\ Af &= \lambda f. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es decir, f es un autovector de autovalor λ tal como queríamos demostrar. A continuación describiremos como es posible obtener los demás autovalores.

Es posible obtener λ_2 de manera análoga a (2.11), si en esta oportunidad buscamos el mínimo restringiéndonos a todos los vectores x perpendiculares a x_1 . Para dichos vectores se verifica que $x^T x_1 = 0$ por lo que

$$R(x) = \frac{\lambda_2|y_2|^2 + \cdots + \lambda_n|y_n|^2}{|y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2}. \quad (2.16)$$

y

$$\lambda_2 = \min_{x^T x_1 = 0} R(x). \quad (2.17)$$

Así, continuando el procedimiento para los autovalores siguientes, puede obtenerse el siguiente teorema que enunciaremos sin demostración.

Teorema 2.2.3 *Sea $j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq j \leq n$. El j -ésimo autovalor está dado por el mínimo de $R(x)$ tal que x sea perpendicular a los primeros $j - 1$ autovectores.*

La desventaja del teorema anterior, es que la caracterización de λ_j depende de conocer los $j - 1$ autovectores previos. Sin embargo, es posible dar una mejor caracterización de λ_j .

Teorema 2.2.4 (*Courant-Fisher Minimax*) *Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces*

$$\lambda_j(A) = \max_{\dim(S)=j} \min_{0 \neq x \in S} R(x). \quad (2.18)$$

para $j = 1, \dots, n$.

Demostración 2.2.5 *Sea $M^T A M = D = \text{diag}(\lambda_j)$, y $S = \langle x_1, \dots, x_j \rangle$ el subespacio generado por los autovectores x_1, \dots, x_j asociados a los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ respectivamente. Para demostrar la primera de las desigualdades, observemos que*

$$\max_{\dim(S)=j} \min_{0 \neq x \in S} \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \min_{0 \neq x \in S} \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x_j^T \lambda_j x_j}{x_j^T x_j} = \lambda_j. \quad (2.19)$$

Para demostrar la desigualdad opuesta, consideremos S un subespacio de dimensión j . Este espacio tiene que intersectar el subespacio generado por $\langle x_j, \dots, x_n \rangle$ ya que este último tiene dimensión $n - j + 1$. Tomemos $\hat{x} = \alpha_{x_j} x_j + \dots + \alpha_{x_n} x_n$ perteneciente a dicha intersección, entonces

$$\min_{0 \neq x \in S} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \frac{\hat{x}^T A \hat{x}}{\hat{x}^T \hat{x}} \leq \lambda_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

Luego como la desigualdad es válida para todos los subespacios de dimensión j ,

$$\max_{\dim(S)=j} \min_{0 \neq x \in S} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_j. \quad (2.20)$$

De 2.19 y 2.20 obtenemos la igualdad, concluyendo la demostración del teorema.

Para el problema generalizado, $Ax = \lambda Mx$, también se verifican el principio de Minimax, si M es simétrica y definida positiva. El cociente de Rayleigh para el problema generalizado está dado por:

$$R(X) = \frac{x^T Ax}{x^T Mx}. \quad (2.21)$$

Analicemos una interpretación física, relacionada a los sistemas masa-resorte vistos con anterioridad. Supongamos un sistema sin amortiguamiento, con matrices de masa y rigidez simétricas, vibrando armónicamente a su j frecuencia natural ω_j . El movimiento es armónico en el tiempo por lo que escribiremos el desplazamiento como $u = x_j e^{i\omega_j t}$ donde x_j es el j -ésimo autovector. Como el sistema es conservativo, en un ciclo no entra ni sale energía del mismo, por lo tanto el máximo de energía potencial y el máximo de energía cinética son iguales, donde:

$$\begin{aligned} \text{Energía potencial máxima} &= \frac{1}{2} u_{max} K u_{max} = \frac{1}{2} x_j^T K x_j \\ \text{Energía cinética máxima} &= \frac{1}{2} \dot{u}_{max} M \dot{u}_{max} = \frac{1}{2} \omega_j^2 x_j^T M x_j, \end{aligned} \quad (2.22)$$

y como ambas expresiones son iguales, resulta

$$\omega_j^2 = \lambda_j = \frac{x_j^T K x_j}{x_j^T M x_j}. \quad (2.23)$$

Es decir, que para la situación descrita previamente, el coeficiente de Rayleigh representa la razón entre la energía cinética y potencial máximas. Esta idea puede extenderse a sistemas conservativos continuos simétricos.

Teorema 2.2.6 (*Autovalores interlazados*) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y $A_r = A(1 : r, 1 : r)$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_{r+1}(A_{r+1}) \leq \lambda_r(A_r) \leq \lambda_r(A_{r+1}) \leq \dots \leq \lambda_2(A_{r+1}) \leq \lambda_1(A_r) \leq \lambda_1(A) \\ \text{para } r = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para una demostración del mismo ver [27]. Veamos un ejemplo. Consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Si eliminamos la última fila y la última columna, obtenemos la matriz:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Los autovalores de A son: $\lambda_1(A) = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_2(A) = 2$, $\lambda_3(A) = 2 + \sqrt{2}$, mientras que para la matriz A_2 , se obtiene $\lambda_1(A_2) = 1$ y $\lambda_2(A_2) = 3$. Observamos que efectivamente $\lambda_1(A) \leq \lambda_1(A_2) \leq \lambda_2(A)$.

Desde un punto de vista físico, esto significa que si en un sistema masa resorte se sostiene una de las masas en equilibrio, la menor frecuencia de vibración se incrementa, pero no por encima de λ_2 , mientras que la mayor frecuencia decrece, pero no por debajo de λ_{n-1} .

2.2.1. Método Rayleigh-Ritz

En base a los resultados de la sección anterior, podemos estimar el menor autovalor de un sistema, eligiendo un vector de prueba u apropiado, y reemplazarlo en el coeficiente de Rayleigh. La cualidad de dicha estimación depende de u , pero si la elección es razonable, los resultados son aceptables [12]. Si el vector u contiene uno o más parámetros, además podríamos derivar $R(u)$ respecto de ese/esos parámetros para buscar el mínimo de $R(u)$ mejorando todavía más la aproximación.

Consideremos un sistema masa-resorte, con n grados de libertad donde n es “grande”. Si queremos estimar los primeros m autovalores, tales que $m \ll n$, podemos expresar el desplazamiento del sistema como una superposición de m vectores de prueba z_i linealmente independientes, es decir:

$$u = \sum_{j=1}^m c_j z_j = Zc, \quad (2.27)$$

donde c_j son coordenadas generalizadas a determinar, $c = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$ y $Z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$. Mientras u sea más cercano al verdadero modo de vibración, los resultados serán mejores. Observar que estamos aproximando al sistema de n grados de libertad por uno de m ; a mayores valores de m mejor será la aproximación. Además (2.27) equivale a imponerle al sistema original las restricciones $c_{m+1} = c_{m+2} = \dots = c_n = 0$. Estas restricciones aumentan la rigidez del sistema, por lo que los m autovalores que se obtengan mediante este método van a sobrestimar a los verdaderos primeros m autovalores. Si reemplazamos u , en el coeficiente de Rayleigh obtenemos:

$$R(u) = \frac{c^T Z^T K Z c}{c^T Z^T M Z c} = \frac{c^T \hat{K} c}{c^T \hat{M} c}, \quad (2.28)$$

donde $\hat{K} = Z^T K Z$ y $\hat{M} = Z^T M Z$.

Derivando respecto a c_j e igualando a cero:

$$\frac{\partial R(u)}{\partial c_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.29)$$

y tomando en cuenta (2.28),

$$\frac{\partial}{\partial c_j}(c^T \hat{K}c) - R(u) \frac{\partial}{\partial c_j}(c^T \hat{M}c) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (2.30)$$

de donde resulta

$$\hat{K}c - R(u)\hat{M}c = 0 \quad (2.31)$$

luego

$$\hat{K}c = R(u)\hat{M}c \quad (2.32)$$

que llamando $\hat{\lambda} = \hat{w}^2 = R(u)$ es un problema de autovalores generalizado de orden m que puede resolverse por alguno de los métodos vistos previamente.

2.3. Conclusión

En este capítulo se introdujo el problema de autovalores estándar, y el problema generalizado. Observamos cómo un operador lineal en un espacio normado de dimensión finita $X \neq \{0\}$ posee al menos un autovalor, y a lo sumo n autovalores distintos todos reales así como su relación con algunos problemas de vibraciones mecánicas donde el conocimiento de los autovalores, es esencial para conocer el comportamiento en el tiempo del sistema. Para los problemas de vibraciones el valor positivo de la raíz cuadrada de cada autovalor se corresponde con una frecuencia natural de vibración del sistema y como se mencionó en el primer capítulo, en las aplicaciones es de especial interés la frecuencia natural más baja. En ese aspecto, vimos como esas frecuencias pueden ser calculadas en forma exacta, resolviendo analíticamente el problema de autovalores generalizado, o planteando un problema de minimización equivalente empleando el cociente de Rayleigh. Además, enunciamos el teorema espectral, que utilizaremos próximamente, y observamos como se puede caracterizar el espectro con el principio Minimax. Finalmente, cuando A es una matriz autoadjunta, analizamos como es posible estimar numéricamente los autovalores mediante el método de Rayleigh-Ritz.

Capítulo 3

Espacios de Sobolev

En este capítulo introduciremos definiciones y resultados clásicos de los espacios de Sobolev (siguiendo [9] [8] [19]). Demostraremos el teorema de Lax-Milgram que utilizaremos en los capítulos posteriores para demostrar existencia y unicidad de la solución de los problemas abordados. Además, definiremos el espectro de un operador, los operadores compactos, demostraremos el criterio de compacidad de Rellich, y caracterizaremos el espectro de un operador compacto. Estos resultados serán empleados en capítulos posteriores para definir y caracterizar el espectro del operador solución al problema fluido-sólido de este trabajo.

3.1. Definiciones

Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y asumimos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Decimos que $g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada parcial débil de f con respecto a x_i en Ω si:

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \gamma}{\partial x} = - \int_{\Omega} g_i \gamma.$$

para todo $\gamma \in C^1_c(\Omega)$.

Notación: La derivada parcial débil, respecto a x_i , si existe, está definida de manera única en casi todo punto. Escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i,$$

para $(i = 1, \dots, n)$ y

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Siempre que g_i exista para $(i = 1, \dots, n)$.

Definición 3.1.1 Sea $1 \leq p \leq \infty$.

1. La función f pertenece al espacio de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega),$$

si $f \in L^p(\Omega)$ y las derivadas parciales débiles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existen y pertenecen a $L^p(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$.

2. La función f pertenece a $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ si $f \in W^{1,p}(V)$ para cada abierto $V \subset \subset \Omega$.

Si en $f \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos:

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p + |Df|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$, y

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \text{ess sup}_{\Omega} (|f| + |Df|).$$

Definición 3.1.2 Decimos que:

$$f_k \rightarrow f \in W^{1,p}(\Omega)$$

si

$$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$$

y que

$$f_k \rightarrow f \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$$

si

$$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$$

para cada $V \subset \subset \Omega$

Los siguientes teoremas se enunciarán sin demostración, para las mismas puede consultarse el capítulo 4 de [8].

Teorema 3.1.1 (*Aproximaciones mediante funciones suaves*)

Notación:

1. Si $\epsilon > 0$, escribimos $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.
2. Definimos la siguiente función C^∞ , $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mu(x) \equiv \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

y la constante c , tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dx = 1,$$

A continuación definimos

$$\mu_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \mu\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (\epsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

3. Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos:

$$f^\epsilon = \mu_\epsilon * f;$$

es decir,

$$f^\epsilon = \int_{\Omega} \mu_\epsilon(x-y) f(y) dy \quad (x \in \Omega_\epsilon).$$

Podemos aproximar sistemáticamente funciones de Sobolev, mediante funciones C^∞ .

1. Para cada $\epsilon > 0$, $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.
2. Si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\epsilon \rightarrow f$ de manera uniforme en subconjuntos compactos de Ω .
3. Si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces $f^\epsilon \rightarrow f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$
4. Además, $f^\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ si x es un punto de Lebesgue de f . En particular, $f^\epsilon \rightarrow f$ L^n en casi todo punto.
5. Si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces $\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_i} = \mu_\epsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i}$
6. En particular, si $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces $f^\epsilon \rightarrow f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$

Teorema 3.1.2 (*Aproximaciones locales mediante funciones suaves*)

Sea $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$ tal que $f_k \rightarrow f \in W^{1,p}(\Omega)$

El próximo paso es aproximar la función de Sobolev mediante funciones suaves hasta la frontera. Para eso primero hay que definir algunas condiciones respecto la frontera. Decimos que $\partial\Omega$ es Lipschitz si para cada punto $x \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función Lipschitz $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que rotando y renombrando los ejes si fuese necesario tenemos

$$\Omega \cap Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) < y_n\} \cap Q(x, r)$$

donde

$$Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < r, i = 1, \dots, n\}.$$

Es decir que, cerca de x , $\partial\Omega$ es la gráfica de una función de Lipschitz.

Teorema 3.1.3 (*Aproximación global mediante funciones suaves*) Asumimos que Ω es acotado, $\partial\Omega$ Lipschitz. Entonces si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$ existe una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$ tal que $f_k \rightarrow f \in W^{1,p}(\Omega)$

Proposición 3.1.1 (*Desigualdad de Poincaré*)

Sea D un dominio acotado en \mathbb{R}^n , y sea C_0^{∞} el espacio de funciones reales f infinitamente diferenciables con soporte contenido en un subconjunto compacto de D . En este espacio introducimos los siguientes productos:

$$(f, g)_0 = \int_D fg dx,$$

y

$$(f, g)_1 = \int_D \sum f_j g_j dx,$$

donde $f_j = \partial f / \partial x_j, j = 1, \dots, n$.

Para todo $f \in C_0^{\infty}(D)$ se verifica $\|f\|_0 \leq d \|f\|_1$ donde d es el diámetro de D .

Demostración 3.1.4 Como f es igual a cero en la frontera de D en cualquier punto x en D ,

$$f(x) = \int_{x^b}^x f_1 dx_1$$

donde x^b es un punto de la frontera de D , con las mismas coordenadas x_2, \dots, x_n que x . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$f^2(x) \leq d \int |f_1|^2 dx_1$$

Luego integrado sobre D , obtenemos $\|f\|_0 \leq d\|f\|_1$.

Teorema 3.1.5 (Lax-Milgram)

Sea V un espacio de Hilbert real, y $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coercitiva sobre V . Es decir, existen constantes $\alpha, M > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in V$$

y

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) \quad \forall u \in V.$$

Y sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal acotado en V . Entonces existe un único elemento $u' \in V$ tal que

$$a(u', v) = f(v) \quad \forall v \in V.$$

Si además la forma $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces u' está caracterizado por ser la única solución de

$$a(u', u') - 2f(u') = \min_{v \in V} \{a(v, v) - 2f(v)\}$$

Demostración 3.1.6 Sea A el operador de $L(V)$ asociado a la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, $f \in V^*$ dado y u_f el único elemento de V asociado a f por el teorema de representación de Riesz:

$$A(u') = u_f$$

Veamos que $R(A) = \{Au; u \in V\}$ es cerrado y denso en V . Si $v \in (R(A))^\perp$ entonces $((Av, v)) = 0$ con lo que $\alpha\|v\|^2 \leq ((Av, v)) = 0$ y entonces $v = 0$, $(R(A))^\perp = \{0\}$ y $R(A)$ es denso en V . Para demostrar que es cerrado, tomemos $v_n = Au_n$ una sucesión en $R(A)$ tal que $v_n \rightarrow v$ en V . Pero $\alpha\|u_n - u_m\| \leq \|Au_n - Au_m\| = \|v_n - v_m\|$ y por lo tanto la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy, entonces existe $u \in V$ tal que $u_n \rightarrow u$. Como $A \in L(V)$, $v_n = Au_n \rightarrow Au$, es decir $v = Au$, y $v \in R(A)$. Cuando $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, consideramos un nuevo producto escalar sobre V , que denotaremos $((\cdot, \cdot))_a$ definido por

$$((u, v))_a = a(u, v) \quad \forall v \in V$$

Este producto, a su vez induce una norma sobre V , que denotaremos $\|\cdot\|_a$, la cual es equivalente a $\|\cdot\|$ y por lo tanto V también es un espacio de Hilbert con dicha norma, y f pertenece al dual topológico de V cuando se considera a V con la norma $\|\cdot\|_a$. De esta manera, por el teorema de Riesz, existe un único elemento $u'_f \in V$ tal que

$$f(v) = ((u'_f, v))_a \quad \forall v \in V.$$

Resolver $a(u', v) = f(v) \quad \forall v \in V$ es equivalente a resolver

$$((u', v))_a = ((u'_f, v))_a \quad \forall v \in V$$

En consecuencia la solución u' está caracterizada por ser $u' = u'_f$ es decir por resolver:

$$\min_{v \in V} \|v - u'_f\|_a^2 = \min_{v \in V} \|v\|_a^2 - 2((u'_f, v))_a + \|u'_f\|_a^2 = \|u'_f\|_a^2 + \min_{v \in V} \{a(v, v) - 2f(v)\}.$$

En la sección siguiente se enunciarán los resultados referidos a la compacidad de un operador.

3.2. Operadores compactos

Definición 3.2.1 (Operador compacto) *Un operador lineal $K : X \rightarrow Y$ se dice compacto si para cada sucesión acotada $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ la sucesión $\{Ku_k\}_{k=1}^{\infty}$ es precompacta en Y ; es decir existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\{Ku_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge en Y .*

Proposición 3.2.1 *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno (\cdot, \cdot) . Si un operador lineal $K : H \rightarrow H$ es compacto y $u_k \rightarrow u$, entonces $Ku_k \rightarrow Ku$.*

Proposición 3.2.2 (Adjunto de un operador compacto) *Si $K : H \rightarrow H$ es compacto, $K^* : H \rightarrow H$ también lo es.*

Demostración 3.2.1

Teorema 3.2.2 (Alternativa de Fredholm)

Sea $K : H \rightarrow H$ un operador lineal compacto. Entonces:

1. $N(I - K)$ tiene dimensión finita.

2. $R(I - K)$ es cerrado.
3. $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$.
4. $N(I - K) = \{0\} \iff R(I - K) = H$.
5. $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$.

Para la demostración de este teorema se puede consultar [9]

Espectro de un operador

Sea $X \neq \{0\}$ un espacio complejo normado y $T : D(T) \rightarrow X$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$. Dado T obtendremos el operador asociado:

$$T_\lambda = T - \lambda I, \quad (3.1)$$

donde λ es un número complejo e I es el operador identidad en $D(T)$. Si T_λ tiene inverso, lo denominaremos $R_\lambda(T)$:

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda_m I)^{-1}. \quad (3.2)$$

y se llama operador resolvente de T .

Definición 3.2.2 (*Valor regular, conjunto resolvente, espectro*) Sea $X \neq \{0\}$ un espacio complejo normado, y $T : D(T) \rightarrow X$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$. Diremos que λ es un valor regular de T si es un número complejo tal que:

1. R_λ existe.
2. R_λ es acotado.
3. R_λ está definido en un conjunto que es denso en X .

El conjunto resolvente $\rho(T)$ de T es el conjunto de todos los valores regulares λ de T . Su complemento en el plano complejo $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ se llama es espectro de T , y $\lambda \in \sigma(T)$ se llama valor espectral de T . Además, el espectro $\sigma(T)$ está particionado en tres conjuntos disjuntos:

1. El espectro puntual, o discreto $\sigma_p(T)$ es el conjunto tal que $R_\lambda(T)$ no existe. $\lambda \in \sigma_p(T)$ se llama autovalor de T .

2. El espectro continuo $\sigma_c(T)$ es el conjunto tal que R_λ existe y cumple la tercer condición enunciada previamente, pero no es acotado, es decir no cumple la segunda condición.
3. El espectro residual $\sigma_r(T)$ es el conjunto tal que R_λ existe, pero no cumple la tercera condición (el dominio de R_λ no es denso en X). Observar que el espectro de un operador lineal en un espacio de dimensión finita, consiste solamente del espectro puntual, ya que tanto el espectro continuo como el residual son vacíos.

Teorema 3.2.3 (*Espectro de un operador compacto*)

Sea $\dim(H) = \infty$ y $K : H \rightarrow H$ es compacto, entonces:

1. $0 \in \sigma(K)$
2. $\sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\}$
3. $\sigma(K) - \{0\}$ es finito, o bien es una sucesión tendiendo a cero.

Demostración 3.2.4 1. Supongamos $0 \notin \sigma(K)$. Entonces $K : H \rightarrow H$ es biyectivo, y el operador $I = K \circ K^{-1}$ es compacto por ser la composición de un operador lineal acotado compacto. Pero esto es absurdo ya que $\dim(H) = \infty$.

2. Supongamos que $\eta \notin \sigma(K)$, $\eta \neq 0$ entonces si $N(K - \eta I) = \{0\}$ por el T.A.Fredholm $R(K - \eta I) = H$ pero entonces $\eta \in \rho(K)$ abs!.
3. Supongamos que $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de elementos distintos de $\sigma(K) - \{0\}$ y que $\eta_k \rightarrow \eta$. Veamos que $\eta = 0$.

Como $\eta_k \in \sigma_p(K)$ existe $w_k \neq 0$ tal que $Kw_k = \eta_k w_k$. Sea H_k el subespacio generado por $\{w_1, \dots, w_k\}$. Entonces $H_k \subsetneq H_{k+1}$ para cada $k = 1, 2, \dots$ ya que $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ son linealmente independientes.

Además $(K - \eta_k I)H_k \subseteq H_{k+1}$ ($k = 2, \dots$). Para cada $k = 1, \dots$ tomamos un elemento $u_k \in H_k$ con $u_k \in H_{k-1}^\perp$ y $\|u_k\| = 1$. Si $k > l$, $H_{l-1} \subsetneq H_l \subseteq H_{k-1} \subsetneq H_k$

$$\left\| \frac{Ku_k}{\eta_k} - \frac{Ku_l}{\eta_l} \right\| = \left\| \frac{(Ku_k - \eta_k u_k)}{\eta_k} - \frac{(Ku_l - \eta_l u_l)}{\eta_l} + u_k - u_l \right\| \geq 1$$

Como $Ku_k - \eta_k u_k, Ku_l - \eta_l u_l \in H_{k-1}$ si $\eta_k \rightarrow \eta \neq 0$ K no sería compacto.

Definición 3.2.3 (*Espectro de un operador lineal acotado autoadjunto*)

Sea $S : H \rightarrow H$ acotado, autoadjunto y m, M tales que: $m = \inf_{u \in H} (Su, u)$, $M = \sup_{u \in H} (Su, u)$. Se verifican:

1. $\sigma(S) \subset [m, M]$
2. $m, M \in \sigma(S)$

Inmersiones compactas

A continuación enunciaremos algunas definiciones y teoremas que serán necesarios para demostrar uno de los resultados mas importantes de esta sección, el teorema de Rellich-Kondrachov. Comenzando por la transformada de Fourier.

Definición 3.2.4 (Transformada de Fourier) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier \hat{f} es la función acotada en \mathbb{R}^n definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx. \quad (3.3)$$

Definición 3.2.5 Si k es un entero no negativo, diremos que el espacio de Sobolev $H^k = H^k(\mathbb{R}^n)$ de orden k , es el conjunto de todas las $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas (en el sentido de las distribuciones) $\partial^\alpha f$ pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$:

$$H^k = \{f \in L^2 : \partial^\alpha f \in L^2 \text{ para } |\alpha| \leq k\}. \quad (3.4)$$

Se puede caracterizar H^k en términos de la transformada de Fourier, de la siguiente manera.

Teorema 3.2.5 $f \in H^k$ si y solo si $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f} \in L^2$, y las normas

$$f \rightarrow \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad y \quad f \rightarrow \left[\int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

son equivalentes.

Para la demostración del mismo ver [11]. En base a los resultados anteriores se puede generalizar H^k reemplazando k por un número real cualquiera s .

Definición 3.2.6 Diremos que H^s es un espacio de Sobolev de orden s ,

$$H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \text{ es una función y} \right. \\ \left. \|f\|_s^2 \equiv \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\}, \quad (3.6)$$

donde S' es el espacio de distribuciones temperadas. La norma $\|\cdot\|_s$ así definida se llamará norma de Sobolev de orden s .

Lema 3.2.6 Para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ y todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|}$$

Demostración 3.2.7 Como $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$, se tiene que $|\xi|^2 \leq 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)$, luego $1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2)$. Si $s \geq 0$ se elevan ambos miembros a la potencia s , mientras que si $s < 0$, aplicamos el resultado anterior intercambiando ξ y η , y s reemplazada por $|s| = -s$.

Definición 3.2.7 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , Llamaremos $H_0^s(\Omega)$ a la clausura de C_c^∞ en H^s

Teorema 3.2.8 (Compacidad Rellich) Sea Ω acotado, y $s > t$, la inclusión $H_0^s(\Omega) \rightarrow H_0^t(\Omega)$ es compacta. De hecho, toda sucesión acotada en $H_0^s(\Omega)$ tiene una subsucesión que converge en H^t para cada $t < s$.

Demostración 3.2.9 Seguiremos la demostración de [11] Supongamos $\{f_k\}$ una sucesión en $H_0^s(\Omega)$ con $\|f_k\| \leq C < \infty$. Elegimos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\phi = 1$ en Ω . Entonces $f_k = \phi f_k$, y $\hat{f}_k = \hat{\phi} * \hat{f}_k$. Además como $\hat{\phi} \in S$ y \hat{f}_k es una función temperada, $\hat{\phi} * \hat{f}_k \in C^\infty$. Por el lema anterior y la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}_k(\xi)| \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \int |\hat{\phi}(\xi - \eta)| (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{f}_k(\eta)| (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} d\eta \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \|\phi\|_{|s|} \|f_k\|_s. \quad (3.7)$$

Análogamente, si $j = 1, \dots, n$,

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\partial_j \hat{f}_k(\xi)| \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \|2\pi i x_j \phi\|_{|s|} \|f_k\|_s. \quad (3.8)$$

Como $\|f_k\|_s \leq C$, las funciones \hat{f}_k y sus derivadas primeras son uniformemente acotadas en conjuntos compactos, luego por el teorema de Arzelá-Ascoli hay una

subsucesión $\{f_{k_j}\}$ que converge uniformemente en un conjunto compacto. Afirmaremos que $\{f_k\}$ converge en H^t para $t < s$. Sea $R > 0$,

$$\begin{aligned}
\|f_{k_i} - f_{k_j}\|^2 &= \int_{|\phi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{f}_{k_i} - \hat{f}_{k_j}|^2(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{t-s} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}_{k_i} - \hat{f}_{k_j}|^2(\xi) d\xi \\
&\leq \left[\sup_{|\xi| \leq R} |\hat{f}_{k_i} - \hat{f}_{k_j}|^2(\xi) \right] \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^t d\xi \\
&\quad + (1 + R^2)^{t-s} \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}_{k_i} - \hat{f}_{k_j}|^2(\xi) d\xi \\
&\leq \left[\sup_{|\xi| \leq R} |\hat{f}_{k_i} - \hat{f}_{k_j}|^2(\xi) \right] \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^t d\xi + (1 + R^2)^{t-s} \|f_{k_i} - f_{k_j}\|_s^2
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dado $\epsilon > 0$, como $t - s < 0$ y $\|f_{k_i} - f_{k_j}\|_s \leq 2C$, podemos elegir R lo suficientemente grande para que el segundo término en la última expresión sea menor que $\frac{1}{2}\epsilon$ para todo i, j . Pero entonces, para i, j suficientemente grandes, el primer término también será menor que $\frac{1}{2}\epsilon$. Luego $\{f_{k_j}\}$ es de Cauchy en H^t como queríamos demostrar.

Caracterización de espectros para problemas variacionales

Teorema 3.2.10 (Hilbert-Schmidt)

Supongamos que H es un espacio de Hilbert real separable que no es de dimensión finita, y sea $T \in L(H)$ un operador compacto y auto-adjunto. Sea $\{u_n\}_{n \geq 1}$ la colección (vacía, finita, o numerable) de todos los autovalores distintos de T , excepto eventualmente el cero. Denotemos $\mu_0 = 0$ y $H_n = N(T - \mu_n I)$ para $n \geq 0$, con el convenio de que si la colección $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es vacía o finita con $m \geq 0$ elementos, entonces $H_m = \{0\}$ para todo $n \geq m + 1$. Entonces se tiene:

1. El espacio H es suma de Hilbert de la sucesión $\{H_n\}_{n \geq 0}$.
2. El espacio H posee una base de Hilbert formada por autovectores de T .

Demostración 3.2.11 Observar que $0 \leq \dim H_0 < \infty$ y que como $N(T - \mu_n I) = N(I - \frac{1}{\mu_n} T)$ para todo $n \geq 1$ se tiene $\dim H_n < \infty$.

Veamos que los H_n s son ortogonales entre sí. Sea $x \in H_m$ con $m, n \geq 0$ y $m \neq n$, entonces $Tx_n = \mu_n x_n$ y $Tx_m = \mu_m x_m$ con lo cual $\mu_n(x_n, x_m) =$

$(Tx_n, x_m) = (x_n, Tx_m) = \mu_m(x_n, x_m)$ entonces $(x_n, x_m) = 0$ y los H_n son ortogonales.

Sea F el espacio generado por $\bigcup_{n \geq 0} H_n$ veamos que F es denso en H . Para esto hacer falta ver que $F^\perp = \{0\}$. $T(H_n) \subset H_n \forall n \in \mathbb{N} \geq 0$ por lo que $T(F) \subset F$, y esto implica que $T(F^\perp) \subset F^\perp$, ya que si $x \in F^\perp$ e $y \in F$, entonces $(Tx, y) = (x, Ty) = 0$. Así pues, el operador $T_0 = T|_{F^\perp}$ está bien definido como operador de $L(F^\perp)$, es autoadjunto, y compacto. Además, F^\perp es cerrado en H , y por tanto es un subespacio de Hilbert de H .

Finalmente, $\sigma(T_0) = \{0\}$ ya que si $\mu \in \sigma(T_0) - \{0\} = VP(T_0) - \{0\}$ entonces existe $x \in F^\perp$, con $x \neq 0$, tal que $T_0x = \mu x$ luego μ es un autovalor de T y $x \in F$. Es decir, si $\mu \in \sigma(T_0) - \{0\}$ entonces existe $x \in F^\perp \cap F$ con $x \neq 0$ abs!.

Como T_0 , es autoadjunto y $\sigma(T_0) \subset \{0\}$ entonces $\sigma(T_0) = \{0\}$ y $T_0 = 0$ por lo que $F^\perp \subset N(T) \subset F$ y $F^\perp = \{0\}$. Esto demuestra (1), mientras que (2) se obtiene tomando una base de Hilbert en cada H_n siendo la unión de todas estas bases una base de Hilbert de H .

Teorema 3.2.12 (Teorema caracterización del espectro)

Sean V y H dos espacios de Hilbert reales, cuyas normas denotamos respectivamente por $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$. Denotemos por $((\cdot, \cdot))$ al producto escalar en V y por (\cdot, \cdot) al producto escalar en H . Supongamos que V , y H son separables, que $V \subset H$ con inyección compacta, y que V es denso en H . Sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, y simétrica coercitiva. Entonces existe una sucesión no decreciente de números reales positivos:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n \leq \dots,$$

con $\lambda_n \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow \infty$, y existe una base de Hilbert $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de H formada por elementos de V , tal que:

$$a(e_n, v) = \lambda_n(e_n, v) \forall v \in V \forall n \in \mathbb{N} \geq 1$$

Además el conjunto $\left\{ \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n \geq 1}$ constituye una base de Hilbert de V si sobre este espacio se considera el producto escalar inducido por la forma bilineal $a(u, v)$.

Demostración 3.2.13 Como la inyección de V en H es compacta, en particular es continua, es decir existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\|v\| \leq c\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Por el Teorema de Lax-Milgram, para cada $f \in H$ existe un único elemento $u_f \in V$ tal que:

$$a(u_f, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Sea $T : H \rightarrow H$ definida por $T(f) = u_f$ un operador lineal. Tenemos que

$$a(u_f, u_f) = (f, u_f) \leq |f| \|u_f|.$$

Como a es coercitiva $\exists \alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ y como $|v| \leq c \|v\|$ para toda $v \in V$. Tomando $v = u_f$ obtenemos:

$$\|T(f)\| = \|u_f\| \leq \frac{c}{\alpha} |f|, \quad \forall f \in H.$$

Por lo tanto $S : H \rightarrow V$ definida por $S(f) = u_f$ pertenece a $L(H, V)$. Como la inyección de V en H es compacta, y T es la composición de S con la inyección de V en H , $T \in L(H)$ es compacto.

Veamos que T es auto-adjunto. Como $a(u, v)$ es simétrica, para todo $f, g \in H$, se verifica:

$$(Tf, g) = (g, Tf) = a(u_g, u_f) = a(u_f, u_g) = (f, Tg)$$

Además T es inyectivo. En efecto, si $Tf = 0$ entonces

$$(f, v) = a(Tf, v) = a(0, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Pero como V es denso en H , entonces $f = 0$. Los autovalores de T son positivos, y pertenecen a V ya que si $\mu \in VP(T)$ y $f \in H - \{0\}$ es tal que $Tf = \mu f$, entonces $\mu \neq 0$, por lo tanto $f \in V - \{0\}$ y

$$\mu(f, f) = (f, Tf) = a(Tf, Tf) \geq \alpha \|f\|^2$$

y $\mu \geq \frac{\alpha \|Tf\|^2}{|f|^2} > 0$. Como T es un operador compacto, auto-adjunto, el conjunto de los autovalores $\{u_m\}_{m \geq 1}$ forma una sucesión de números positivos estrictamente decreciente a cero, y los autovalores forman una base ortogonal numerable de H . Además si $f \in N(T - \mu_n I)$ entonces $f \in V$ y

$$\mu_n a(f, v) = a(Tf, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Sea $\{u_n\}_{n \geq 1}$ una nueva sucesión construida a partir de $\{u_m\}_{m \geq 1}$ contando cada μ_m tantas veces como indique su multiplicidad (la dimensión de $N(T - \mu_m I)$) definimos $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ y tomamos una base de Hilbert de cada uno de los espacios $N(T - \mu_n I)$. De esta forma obtenemos la sucesión no decreciente de números reales positivos $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\lambda_n \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow \infty$, y la base de Hilbert de H , $\{e_n\}_{n \geq 1}$.

Falta comprobar que $\left\{ \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n \geq 1}$ constituye una base de Hilbert de V si sobre este espacio se considera el producto escalar inducido por la forma bilineal $a(u, v)$.

Veamos que esto es cierto:

Como la forma bilineal $a(u, v)$ es continua simétrica y coercitiva, el producto $((u, v))_a = a(u, v) \forall u, v \in V$, define un producto escalar en V que induce una norma equivalente a la norma $\|\cdot\|$ de V . Además, como

$$((e_n, e_m))_a = a(e_n, e_m) = \lambda_n(e_n, e_m),$$

obtenemos que $\{\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\}_{n \geq 1}$ constituye un sistema orto-normal de $(V, ((\cdot, \cdot))_a)$.

Veamos que si $f \in V$ es tal que $((f, e_n))_a = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $f = 0$, (con lo cual $\{e_n\}_{n \geq 1}$ genera un subespacio denso de V). Sea pues $f \in V$ tal que $((f, e_n))_a = 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces,

$$\lambda_n(e_n, f) = a(e_n, f) = ((e_n, f))_a = 0 \forall n \in \mathbb{N} \geq 1,$$

luego como $\lambda_n \neq 0$ y $\{e_n\}_{n \geq 1}$ es base de Hilbert de H , $f = 0$.

De esta forma, concluimos los principales resultados teóricos que serán necesarios en las secciones siguientes.

Capítulo 4

Vibraciones de sistemas con infinitos grados de libertad

4.1. Descripción

A continuación resolveremos la ecuación de ondas, primero aplicada a algunos casos particulares de vibraciones de cuerdas y membranas, los cuales resolveremos por separación de variables obteniendo un problema de autovalores. Posteriormente, formularemos el problema de autovalores del laplaciano analizando existencia y unicidad para luego caracterizar su espectro.

4.2. Sistemas con infinitos grados de libertad

Vibración amortiguada de una cuerda de longitud finita

Consideremos el caso de una cuerda de longitud L con sus extremos fijos ubicada en el intervalo $\Omega = (0, L)$, amortiguamiento proporcional a la velocidad, y posición y velocidad inicial tal como se indica en el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0, & \forall t \in (0, +\infty), \\ u(L, t) = 0, & \forall t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = g(x), & \forall x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = h(x), & \forall x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

donde ρ es la densidad de la cuerda, r el amortiguamiento y k el coeficiente de elasticidad que consideraremos constantes. Utilizaremos subíndices t y x para indicar derivadas parciales con respecto a t y a x respectivamente. Dividiendo la primer ecuación por ρ y reordenando:

$$u_{tt} + \frac{r}{\rho}u_t = \frac{k}{\rho}u_{xx}.$$

Suponiendo soluciones del tipo $u(x, t) = Z(t)W(x)$ y separando variables,

$$\frac{Z'' + \frac{r}{\rho}Z'}{Z} = \frac{kW''}{\rho W} = -\lambda.$$

De donde resulta:

$$\begin{cases} W'' + \frac{\rho\lambda}{k}W = 0, \\ Z'' + \frac{r}{\rho}Z' + \lambda Z = 0. \end{cases}$$

Observemos que si $\lambda \leq 0$ la única solución es $W(x) = 0$ que no contribuye a la solución. Entonces supondremos $\lambda > 0$ y la primer ecuación tiene solución $W(x) = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda\rho}{k}}x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda\rho}{k}}x\right)$. Teniendo en cuenta que la cuerda se encuentra fija en sus extremos, las condiciones de borde homogéneas $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$, se trasladan a W y tenemos que $W(0) = W(L) = 0$. Evaluando la solución propuesta en los extremos, se obtiene:

$$\begin{cases} W(0) = B = 0, \\ W(L) = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda\rho}{k}}L\right) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\lambda_n\rho}{k}}L = n\pi.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n\rho}{k} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ \lambda_n &= \frac{k}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = w_n^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Vemos que en este caso, tal como anticipamos en el capítulo anterior, existen numerables autovalores λ_n y las soluciones W_n están dadas por:

$$W_n(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

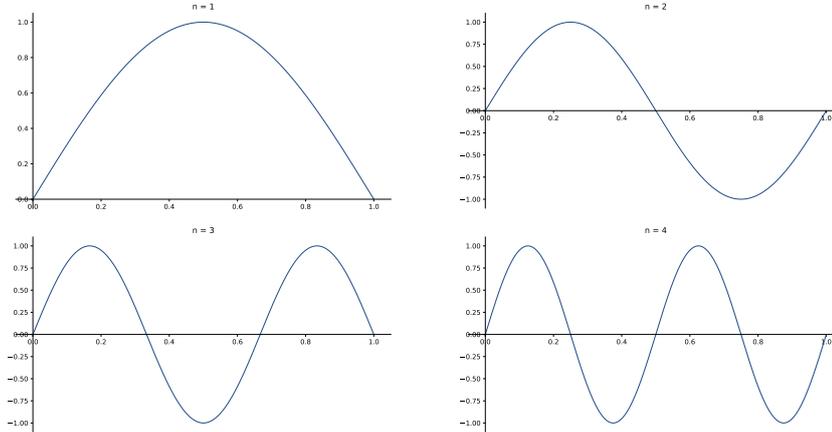
Elegimos A_n de manera que $\int_0^L W_n^2 dx = 1$. Entonces,

$$\int_0^L W_n^2 dx = A_n^2 \int_0^L \left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx = A_n^2 \frac{L}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}. \tag{4.3}$$

Reemplazando en W_n :

$$W_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Podemos graficar algunas W_n para distintos valores de n :



Propondremos como solución $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)W_n(x)$ que reemplazando en el sistema original:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\rho Z_n'' + r Z_n') W_n - k \sum_{n=1}^{\infty} W_n'' Z_n = 0.$$

Como $-W_n'' = \lambda_n \frac{\rho}{k} X_n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\rho Z_n'' + r Z_n' + \lambda_n \rho Z_n) W_n = 0.$$

Entonces, $\rho Z_n'' + r Z_n' + \lambda_n \rho Z_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicando las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0)W_n(x) = g(x).$$

Entonces, multiplicando por W_m , integrando en la longitud de la cuerda, y utilizando que $\int_0^L W_n W_m = \delta_{nm}$ obtenemos:

$$Z_n(0) = \int_0^L g(x)W_n(x)dx = g_n.$$

Análogamente,

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n'(0)W_n(x) = h(x) \Rightarrow Z_n'(0) = \int_0^L h(x)W_n(x)dx = h_n. \quad (4.5)$$

Luego para resolver la componente temporal, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} \rho Z_n'' + r Z_n' + \lambda_n \rho Z_n = 0, \\ Z_n(0) = g_n, \\ Z_n'(0) = h_n. \end{cases} \quad (4.6)$$

Suponiendo soluciones del tipo $Z_n(t) = e^{\mu t}$, se obtiene: $\rho\mu^2 + r\mu + \lambda_n\rho = 0$. Luego:

$$\mu_n = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4(\rho)^2\lambda_n}}{2\rho} = \frac{-r}{2\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2\rho}\right)^2 - \lambda_n} = \frac{-r}{2\rho} \pm i\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2}.$$

Como ω_n^2 es creciente tenemos que

$$\frac{r}{2\rho} < |\omega_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \iff \quad r < 2\sqrt{\rho k} \frac{\pi}{L}.$$

Observemos que $Re(\mu_n) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. De esta manera, Z_n está dada por:

$$Z_n(t) = e^{-\frac{r}{2\rho}t} \left[C_n \cos \left(\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2} t \right) + D_n \text{sen} \left(\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2} t \right) \right]. \quad (4.7)$$

Para determinar las constantes C_n y D_n tenemos que introducir las condiciones iniciales. En $t = 0$ tenemos $Z_n(0) = C_n = g_n$. Derivando y evaluando en 0 tenemos

$$Z_n'(0) = \frac{-r}{2\rho} C_n + D_n \sqrt{\lambda_n - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2} = h_n,$$

$$D_n = \frac{\frac{r}{2\rho} g_n + h_n}{\sqrt{\lambda_n - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2}}$$

Finalmente, la solución del sistema es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) Z_n(t), \quad (4.8)$$

donde

$$W_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

y

$$Z_n(t) = e^{-\frac{r}{2\rho}t} \left[g_n \cos \left(\sqrt{\lambda_n - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2} t \right) + \frac{h_n + \frac{r}{2\rho} g_n}{2\sqrt{\lambda_n - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2}} \text{sen} \left(\sqrt{\lambda_n - \left(\frac{r}{2\rho}\right)^2} t \right) \right].$$

Método de elementos finitos para la cuerda vibrante amortiguada

En el apartado anterior, resolvimos el problema de la cuerda vibrante finita amortiguada analíticamente. A continuación desarrollaremos el mismo problema, esta vez mediante el método de elementos finitos, lo cual nos permitirá relacionar los problemas continuos con los problemas discretos estudiados en el primer capítulo y haciendo uso de los conceptos del capítulo 3 introducir la formulación débil de un problema con valor en la frontera, que utilizaremos en capítulos siguientes. Nuevamente consideraremos el problema (4.1) que repetiremos a continuación para mayor claridad.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} + ru_t - ku_{xx} = 0, & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0, & \forall t \in (0, +\infty), \\ u(L, t) = 0, & \forall t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = g(x), & \forall x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = h(x), & \forall x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Multiplicando la primer ecuación por $v(x) \in V$ una función independiente de t donde $V = \{v \in C^2(\Omega) : v(0) = v(L) = 0\}$. Integrando por partes el último término, obtenemos la formulación débil:

$$\int_0^L \left(\rho u_{tt}v + ru_tv + ku_x \frac{dv}{dx} \right) = 0 \quad \forall v \in V. \quad (4.10)$$

Ahora, aplicamos el método de Galerkin, aproximando $u(x, t)$ por

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t)\phi_i(x), \quad (4.11)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ son las funciones lineales, de la base estándar de elementos finitos. Como (4.10) vale para todo $v \in V$ en particular debe valer para cada ϕ_i , de donde resulta

$$\int_0^L \left(\rho \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \phi_i + r \frac{\partial U_n}{\partial t} \phi_i + k \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{d\phi_i}{dx} \right) = 0, \quad (4.12)$$

para $i = 1, \dots, n-1$ y $t > 0$. Reemplazando U_n tenemos

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 u_j}{dt^2} \int_0^L \rho \phi_j \phi_i + \sum_{j=1}^{n-1} r \frac{du_j}{dt} \int_0^L \phi_j \phi_i + \sum_{j=1}^{n-1} k u_j \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} = 0, \quad (4.13)$$

para $i = 1, \dots, n-1$ y $t > 0$. Definiendo las matrices de masa M , amortiguamiento C , y rigidez K como

$$M_{ij} = \int_0^L \rho \phi_j \phi_i, \quad C_{ij} = \int_0^L r \phi_j \phi_i, \quad K_{ij} = \int_0^L k \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx},$$

y $u(t)$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

podemos escribir (4.13) matricialmente como

$$MU'' + CU' + KU = 0 \quad t > 0. \quad (4.14)$$

En clara analogía al sistema masa resorte del primer capítulo. Para resolver el sistema de ecuaciones ordinarias, son necesarias las condiciones iniciales. Recordemos que

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x) \text{ en } \Omega, \\ u_t(x, 0) = h(x) \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos aproximar $g(x)$ y $h(x)$ por

$$g_n(x) \approx \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\phi_i(x) \quad \text{y} \quad h_n(x) \approx \sum_{i=1}^{n-1} h(x_i)\phi_i(x). \quad (4.15)$$

Pedimos que

$$u_i(0) = g(x_i), \quad (4.16)$$

y que

$$\frac{du_i}{dt}(0) = h(x_i), \quad (4.17)$$

Obteniendo las condiciones iniciales

$$U(0) = y_0 = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad U'(0) = z_0 = \begin{bmatrix} h(x_1) \\ h(x_2) \\ \vdots \\ h(x_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Para finalmente obtener el sistema discreto, dado por

$$\begin{cases} MU'' + CU' + KU = 0 \quad t > 0, \\ U(0) = y_0, \\ U'(0) = z_0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Conocidas $g(x)$ y $h(x)$ este sistema puede resolverse empleando los métodos desarrollados en el primer capítulo. En los siguientes ejemplos, incorporaremos una variable espacial para analizar las vibraciones de membranas con forma cuadrada y circular.

Vibraciones de un membrana rectangular con condición de Dirichlet

Una membrana es una lamina perfectamente flexible, que se encuentra sometida a tensión. Tiene una resistencia despreciable a fuerzas de corte o “bending” y las fuerzas restauradoras dependen exclusivamente de las fuerzas en el plano, o la tensión [23].

Consideremos una membrana rectangular, con sus bordes fijos y con velocidad y posición inicial tal como indica el sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, y, t) = 0 & \text{en } \partial\Omega, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & \text{en } \Omega, \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.20)$$

Resolveremos el sistema nuevamente mediante el método de separación de variables. Suponiendo soluciones $u(x, y, t) = w(x, y)z(t)$ resulta:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= z''w, \\ u_{xx} &= w_{xx}z, \\ u_{yy} &= w_{yy}z. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Reemplazando en el sistema original se obtiene,

$$z''w = c^2(w_{xx}z + w_{yy}z).$$

Luego:

$$\frac{z''}{c^2z} = \frac{w_{xx} + w_{yy}}{w}.$$

Tanto z como w son distintas de cero ya que buscamos soluciones $u(x, y, t) \neq 0$. Al ser ambos miembros iguales pero uno solo dependiente de t , y el otro dependiente de x e y se concluye que deben ser iguales a una constante, que llamaremos $-\lambda$. Así,

$$\frac{z''}{c^2z} = \frac{w_{xx} + w_{yy}}{w} = -\lambda. \quad (4.22)$$

De donde resulta el sistema:

$$\begin{cases} z'' + \lambda c^2 z = 0, \\ w_{xx} + w_{yy} + \lambda w = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Observemos que como $u(x, y, t) = 0$ cuando $(x, y) \in \partial\Omega$, entonces $w = 0$ en $\partial\Omega$. Aplicando el teorema de la divergencia tenemos que

$$0 = \int_{\partial\Omega} w \nabla w \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(w \nabla w) dx dy = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx dy + \int_{\Omega} w \Delta w dx dy,$$

Como $\Delta w = -\lambda w$, entonces

$$\lambda \int_{\Omega} |w|^2 dx dy = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx dy,$$

de donde se concluye que $\lambda \geq 0$. Si $\lambda = 0$ entonces $|\nabla w| = 0$ y como en la frontera w es nula, debería ser $w = 0$ en todo Ω . En consecuencia debe ser $\lambda > 0$.

Nuevamente es posible separar variables en la segunda ecuación suponiendo soluciones $w(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$.

De esta forma $w_{xx} = \alpha''(x)\beta(y)$ y $w_{yy} = \alpha(x)\beta''(y)$. Realizando los reemplazos correspondientes:

$$\alpha''\beta + \alpha\beta'' + \lambda\alpha\beta = 0.$$

Reagrupando,

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = -\lambda - \frac{\beta''}{\beta}.$$

En este caso $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y ambos miembros son iguales a una constante que llamaremos $-\mu$

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = -\lambda - \frac{\beta''}{\beta} = -\mu.$$

De donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha'' + \mu\alpha = 0, \\ \beta'' + (\lambda - \mu)\beta = 0. \end{cases}$$

Combinando las ecuaciones vistas anteriormente debemos resolver:

$$\begin{cases} z'' + \lambda c^2 z = 0, \\ \alpha'' + \mu\alpha = 0, \\ \beta'' + \nu\beta = 0 \end{cases}$$

donde $\nu = \lambda - \mu$.

Procedemos a determinar los valores posibles de μ de la ecuación $\alpha'' + \mu\alpha = 0$ donde $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(a) = 0$. Con un análisis de la constante μ de manera análoga a las ya realizadas obtenemos $\mu > 0$. Entonces las soluciones son de la forma

$$\alpha(x) = A \operatorname{sen}(\sqrt{\mu}x) + B \cos(\sqrt{\mu}x),$$

y observando que $\alpha(0) = B = 0$ y $\alpha(a) = A \operatorname{sen}(\sqrt{\mu}a) = 0$ se obtiene

$$\sqrt{\mu_n}a = n\pi \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Luego:

$$\alpha_n(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Para determinar los valores posibles de ν de la ecuación $\beta'' + \nu\beta = 0$ donde $\beta(0) = 0$ y $\beta(b) = 0$, de manera análoga obtenemos para $m = 1, 2, \dots$ que $\nu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ y

$$\beta_m(y) = C_n \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2. \quad (4.24)$$

Observemos que en el caso de que la membrana sea cuadrada, es decir $a = b$, se producen autovalores reales dobles del Laplaciano cuando $n = m$. Reemplazando λ en $z(t)$:

$$z_{nm}(t) = K_1 \cos \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} t + K_2 \text{sen} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} t \quad (4.25)$$

Además $w_{nm}(x, y) = \alpha_n(x)\beta_m(y)$, es decir,

$$w_{nm}(x, y) = A_{nm} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right).$$

La solución al sistema original viene dada por:

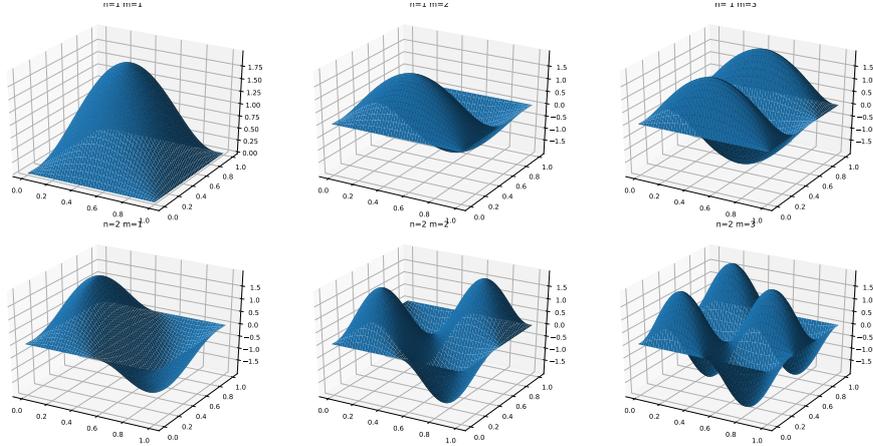
$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm}(x, y) z_{nm}(t), \quad (4.26)$$

y reemplazando tenemos

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \left[a_{mn} \cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}t\right) + b_{mn} \text{sen}\left(\sqrt{\lambda_{mn}}t\right) \right], \quad (4.27)$$

donde λ_{mn} están dados por (4.24) y las constantes a_{mn} y b_{mn} se obtienen de las condiciones iniciales.

Veamos las gráficas de algunos modos de vibración para una membrana cuadrada $a = b = 1$, con $n, m = 1, 2, 3$



Vibración membrana circular

A continuación resolveremos las soluciones fundamentales de la ecuación de onda, en esta ocasión aplicada al problema de vibración de una membrana circular de radio uno, y con condición de frontera igual a cero.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right), & 0 < r < 1, \\ u(1, \theta, t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \\ u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta). \end{cases} \quad (4.28)$$

Se buscan soluciones de la forma $u(r, \theta, t) = W(r, \theta)T(t)$, donde la función $W(r, \theta)$ describe la forma de la vibración, y $Z(t)$ la componente temporal de la oscilación. Reemplazando en la primera ecuación se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta W + \lambda^2 W = 0, \\ Z'' + \lambda^2 c^2 Z = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

donde $\Delta W = W_{rr} + \frac{1}{r} W_r + \frac{1}{r^2} W_{\theta\theta}$.

La constante de separación de variables en este caso es negativa, $-\lambda^2$ para que $Z(t)$ sea periódica.

Para resolver la primera ecuación hay que calcular las condiciones en la frontera, para esto se sustituye $u(r, \theta, t) = W(r, \theta)Z(t)$ en la condición de frontera de la

membrana, para obtener:

$$u(1, \theta, 0) = W(1, \theta)Z(t) = 0 \quad 0 < t < \infty,$$

luego $W(1\theta) = 0$ y el problema queda determinado por el sistema:

$$\begin{cases} \Delta W + \lambda^2 W = 0, \\ W(1, \theta) = 0. \end{cases}$$

Las soluciones $W(r, \theta)$ proporcionan los modos fundamentales de vibración mientras que los λ resultarán ser las raíces de ciertas funciones de Bessel, y son proporcionales a las frecuencias de dichas vibraciones. Suponiendo soluciones del tipo $W(r, \theta) = R(r)\phi(\theta)$, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0, & 0 < r < 1, \\ R(0) < \infty, \\ R(1) = 0, \\ \phi'' + n^2 \phi = 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

La ecuación $r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0$ es la ecuación de Bessel y tiene dos soluciones linealmente independientes:

$$R_1(r) = AJ_n(\lambda r), \quad R_2(r) = BY_n(\lambda r).$$

Luego la solución general de esta ecuación es:

$$R(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r).$$

Como las funciones $Y_n(\lambda r)$ no están acotadas para $r = 0$, la solución en este caso está dada por

$$R(r) = AJ_n(\lambda r). \quad (4.31)$$

Sustituyendo las condiciones de borde $R(1) = 0$ se obtiene $J_n(\lambda) = 0$ luego para que $R(r)$ sea cero en la frontera del círculo, λ debe ser una de las raíces de $J_n(r) = 0$ es decir:

$$\lambda = k_{nm}, \quad (4.32)$$

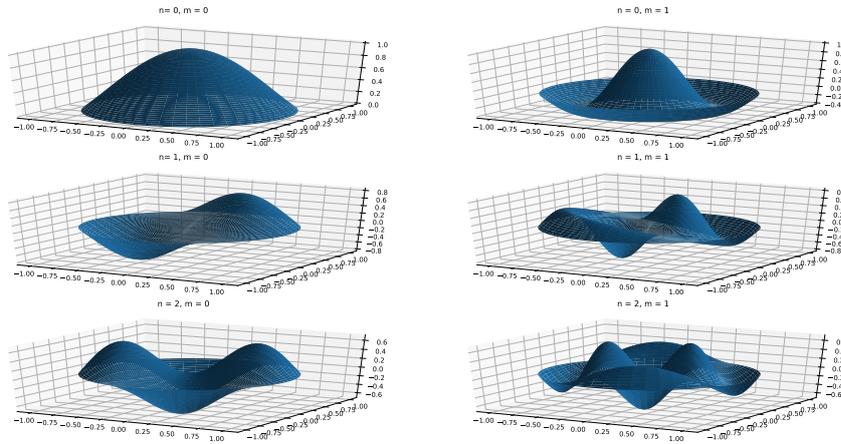
donde k_{nm} es la raíz m -ésima de $J_n(r)$. Así, por ejemplo, las primeras 10 raíces para $J_0(r)$ (obtenidas numéricamente utilizando la librería SciPy) pueden observarse en la siguiente tabla:

$J_0(r)$
2.40482556
5.52007811
8.65372791
11.79153444
14.93091771
18.07106397
21.21163663
24.35247153
27.49347913
30.63460647

Con los autovalores iguales a dichas raíces y las correspondientes autofunciones $W_{nm}(r, \theta)$ la solución del problema está dada por:

$$W_{nm}(r, \theta) = J_n(k_{nm}r)[A \sin(n\theta) + B \cos(n\theta)], \quad (4.33)$$

para $n = 0, 1, 3, \dots$ y $m = 0, 1, 3, \dots$. La forma de $W_{nm}(r, \theta)$ es la misma para distintos valores de las constantes A y B. Solo la altura de la vibración y la posición de $\theta = 0$ es afectada. Veamos algunas de sus gráficas.



Cada $W_{nm}(r, \theta)$ representa un modo de vibración fundamental de la membrana circular con frecuencia:

$$f_{nm} = \frac{k_{nm}c}{2\pi}.$$

Resta resolver la ecuación en el tiempo

$$Z'' + k_{nm}^2 c^2 Z = 0$$

de donde se obtiene:

$$Z_{nm}(t) = A \sin(k_{nm}ct) + B \cos(k_{nm}ct). \quad (4.34)$$

Para encontrar la solución general al problema de la membrana vibrante solo resta multiplicar $Z_{nm}(t)$ por $W_{nm}(r, \theta)$ y sumar los productos de tal forma que se verifiquen las condiciones iniciales. Mediante una elección apropiada de θ se puede reemplazar $A \sin(n\theta) + B \cos(n\theta)$ por $\cos(n\theta)$. Además, unificando constantes obtenemos que la solución general del problema está dada por:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(k_{nm}r) \cos(n\theta) [A \sin(k_{nm}ct) + B \cos(k_{nm}ct)]. \quad (4.35)$$

Aplicación de teorema de Hilbert-Schmidt al problema del Laplaciano.

A continuación analizaremos el problema del Laplaciano, hallando el operador solución y caracterizando su espectro.

Sea Ω un dominio acotado en R^n con una frontera suave. El problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.36)$$

tiene solución única para toda $f \in L^2(\Omega)$ por el teorema de Lax-Milgram. En primer lugar, obtendremos la formulación débil de (4.36). Para ello, multiplicamos la ecuación diferencial por una función test que se anula en la frontera y obtenemos la siguiente formulación débil de (4.36):

$$\begin{cases} \text{Dada } f \in L^2(\Omega), \text{ hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u, v) = b(f, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (4.37)$$

donde las formas bilineales a y b están definidas por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy \quad \text{y} \quad b(f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy.$$

En virtud del Teorema de Lax-Milgram queda definida una aplicación $T : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, dada por $u = Tf$, es decir, el operador T satisface

$$a(Tf, v) = b(f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos que si $Tg = \mu g$ con $g \neq 0$ entonces

$$\mu a(g, v) = b(g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Si $\mu \neq 0$, entonces tenemos que

$$a(g, v) = b(\mu^{-1}g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, $-\Delta g = \mu^{-1}g$ con $g \in H_0^1(\Omega)$. Es decir, los autovalores no nulos del operador T son la inversa de los autovalores del Laplaciano, y las autofunciones coinciden. Como consecuencia los autovalores del Laplaciano y del operador T tienen características similares. A continuación queremos ver que este operador, cuando lo consideramos como una aplicación de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es un operador compacto.

Tomando $v = u$ en (4.37) obtenemos:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 ds = \int_{\Omega} f u ds.$$

Utilizando la desigualdad de Poincaré, pues u es cero en $\partial\Omega$, vale

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

donde C depende del diámetro d de Ω .

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y lo anterior obtenemos:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

por lo tanto

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

y

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La imagen de la bola unitaria en $L^2(\Omega)$ sobre S consiste en las soluciones u correspondientes a f con $\|f\|_0 \leq 1$. Estas soluciones verifican que:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (4.38)$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2. \quad (4.39)$$

De acuerdo al Teorema de Rellich, un conjunto de funciones que satisfagan lo anterior es pre-compacto en $L^2(\Omega)$, por lo tanto T es un operador compacto, y ahora estamos en condiciones de aplicar el Teorema (3.2.12) tomando $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$ y $a(u, v) = (u, v)_{H_0^1(\Omega)} \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto, el espectro del operador T es una sucesión decreciente $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ de números reales positivos siendo el cero su único punto de acumulación. Además $\mu = 0$ no es un autovalor de T . Luego, los autovalores del Laplaciano son $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$

donde $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$. Además, existe una base de Hilbert $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones asociadas a los autovalores λ_n . Por último $\{\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\}_{n \geq 1}$ constituye una base de Hilbert del espacio $H_0^1(\Omega)$ dotado del producto escalar $(\cdot, \cdot)_{H_0^1}$ y en consecuencia, para toda $f \in L^2(\Omega)$, la solución débil del problema de Dirichlet está dada por:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n, \quad (4.40)$$

donde la serie converge en $H_0^1(\Omega)$.

4.3. Conclusión

En este capítulo se caracterizó el espectro de algunos operadores asociados a problemas de vibraciones con infinitos grados de libertad, empleando la teoría espectral desarrollada en el capítulo anterior. En los ejemplos se obtuvo que los autovalores constituyen una sucesión numerable que tiende a infinito ya que se trata de operadores compactos. En el siguiente capítulo trataremos el caso de un operador no compacto.

Capítulo 5

Vibraciones de sistemas acoplados fluido y sólido.

Introducción

El problema de las vibraciones de un sólido inmerso en un fluido ha sido de considerable interés en los últimos años. Este problema es de importancia, ya que ocurre naturalmente en el diseño y simulación de intercambiadores de calor, condensadores, líneas de combustible, y núcleos de reactores nucleares. [5]

Nos concentraremos en las vibraciones de un conjunto de tubos, inmersos en un fluido dentro de una cavidad. Los tubos están montados elásticamente, de tal forma que tanto el fluido como los tubos vibran. Dicho sistema se modela mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para la región del fluido acoplado con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa la oscilación de los tubos. La interacción fluido-sólido se toma en consideración mediante el acoplamiento de ambos sistemas de ecuaciones. Dependiendo de las características del fluido (perfectamente incompresible, ligeramente compresible, viscoso, etc) y las características de los tubos (sólidos, elásticos) se obtendrán diferentes sistemas de ecuaciones.

Consideraremos un arreglo siguiendo el problema planteado en el capítulo 2 de [5] es decir, consideramos un fluido homogéneo contenido en una cavidad cilíndrica tridimensional con una sección plana constante $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$. Dentro de la cavidad hay una estructura sólida inmersa en el fluido cuya proyección en Ω_0 es también una región constante con múltiples componentes conexas $\{O_j\}_{j=1}^K$. Podemos considerar a estas regiones como un haz de K tubos cilíndricos de la misma longitud con sus bordes paralelos entre si y perpendiculares a Ω_0 .

La interacción entre el fluido y la estructura sólida será estudiada bajo las siguientes hipótesis:

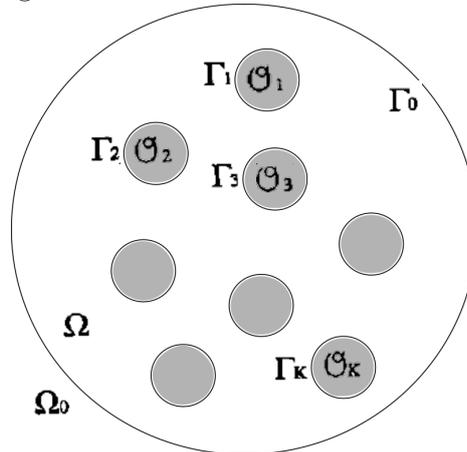
1. Los extremos de los tubos están fijos en las dos superficies opuestas de la cavidad de manera que cada tubo puede asociarse a una barra de sección O_j que puede moverse transversalmente pero no permite movimientos perpendiculares a la sección.
2. Los tubos son suficientemente largos, de manera que nos permitan ignorar los efectos tridimensionales y el problema pueda ser estudiado en cualquier sección plana perpendicular a los tubos.
3. Los tubos están sujetos elásticamente en sus extremos y se comportan como un oscilador armónico con un término forzado.

Llamaremos Ω a la parte de Ω_0 ocupada por el fluido:

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^K \overline{O}_j. \quad (5.1)$$

donde Ω , Ω_0 y O_j son conjuntos acotados, abiertos y conexos de \mathbb{R}^2 con frontera tipo *Lipschitz*.

Figura 5.1: Sección cavidad cilíndrica



Los conjuntos $\{\overline{O}_j\}_{j=1}^K$ se asumen mutuamente disjuntos y disjuntos de Γ_0 . Para modelar el fluido utilizaremos una formulación en desplazamientos para un fluido viscoso levemente compresible. El término de viscosidad produce el amortiguamiento del movimiento produciendo un mecanismo de dispersión de la energía. El término de la viscosidad debido a la vorticidad es usualmente muy

pequeño y puede despreciarse, es decir, podemos suponer que el flujo es irrotacional. Las ecuaciones de balance de momentos y de conservación de la masa pueden escribirse:

$$\begin{cases} \rho \ddot{U} - \operatorname{div}(\sigma(U, P)) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho \dot{U}) = 0, & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde ρ es la densidad, U es el campo de desplazamientos del fluido, P es la presión y $\sigma = -P\mathbb{I} + 2\mu\nabla^s\dot{U}$ es la ecuación constitutiva donde μ es la viscosidad del fluido. Observemos que utilizando las hipótesis introducidas tenemos:

$$\operatorname{div}(\nabla^s\dot{U}) = \frac{1}{2}(\Delta\dot{U} + \nabla(\operatorname{div}\dot{U})) = \frac{1}{2}(\nabla(\operatorname{div}\dot{U}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\dot{U}) + \nabla(\operatorname{div}\dot{U})) = \nabla(\operatorname{div}\dot{U}). \quad (5.3)$$

Por lo tanto, $\operatorname{div}(\sigma(\dot{U}, P)) = \nabla(2\mu\operatorname{div}\dot{U} - P)$. Por otro lado, suponiendo que la densidad es sometida a pequeñas variaciones en torno a un valor de equilibrio ρ_0 , podemos escribir $\rho = \rho_0 + \hat{\rho}$ con $\hat{\rho} \ll \rho_0$ y suponiendo $P = P(\rho)$ se tiene

$$P = P(\rho_0) + \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho_0) \cdot \hat{\rho}, \quad (5.4)$$

entonces

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho_0)$. Entonces la conservación de la masa se formula por medio de la ecuación

$$\dot{P} + \rho_0 c^2 \operatorname{div}(\dot{U}) = 0. \quad (5.5)$$

Además al fluido no se le permite salir de la cavidad, con lo cual tenemos que $U \cdot n = 0$ en $\partial\Omega$.

En primer lugar procederemos a analizar el caso donde sólo se encuentra el fluido en la cavidad, es decir sin la estructura. Esto nos permitirá introducir los conceptos fundamentales que utilizaremos luego en problema fluido-sólido donde replicaremos, en parte, el mismo procedimiento. Comenzaremos planteando el sistema de ecuaciones que modela el sistema bajo las hipótesis antes mencionadas. Asumiremos soluciones de tipo exponencial, y formularemos la forma débil del mismo, que conducirá a un problema de autovalores cuadrático. Convertiremos dicho problema, en un problema lineal equivalente, introduciendo una variable adicional. Finalmente caracterizaremos el espectro del operador solución de este problema. El operador solución en este caso, no es un operador compacto es por esto que para caracterizar su espectro, procederemos a descomponer el mismo en dos operadores, uno compacto y otro no compacto, caracterizando el espectro de cada uno.

5.1. Vibraciones de un fluido en una cavidad rígida

Bajo las hipótesis mencionadas en la introducción se obtiene que para el caso de un fluido viscoso levemente compresible, sin sólidos inmersos en la cavidad, el sistema está modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \rho_0 \ddot{U} - 2\mu \nabla(\operatorname{div} \dot{U}) + \nabla P = 0, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \dot{P} + \rho_0 c^2 \operatorname{div}(\dot{U}) = 0, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ U \cdot n = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (5.6)$$

Se utilizarán los siguientes espacios de Hilbert:

$$H = L^2(\Omega)^2, \quad (5.7)$$

dotado con el producto interno

$$(v, w) = \int_{\Omega} v \bar{w}, \quad (5.8)$$

y los espacios,

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}, \Omega) &= \{v \in H \mid \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0(\operatorname{div}, \Omega) &= \{v \in H(\operatorname{div}, \Omega) \mid v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

ambos dotados con el producto interno

$$(v, w)_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = (v, w) + (\operatorname{div} v, \operatorname{div} w). \quad (5.10)$$

Los modos de vibración del problema (5.6), son soluciones complejas, de la forma $U(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$ y $P(x, t) = e^{\lambda t} p(x)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Realizando los reemplazos correspondientes, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \lambda^2 \rho_0 u - 2 \lambda \mu \nabla(\operatorname{div} u) + \nabla p = 0, & \text{en } \Omega, \\ p + \rho_0 c^2 \operatorname{div} u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u \cdot n = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

Para hallar la formulación débil del problema (5.11), multiplicaremos la primer ecuación por una función test \bar{v} suficientemente suave. Integrando por partes y utilizando que las funciones suaves son densas en $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ obtenemos:

$$\lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + 2 \lambda \mu \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) (\operatorname{div} \bar{v}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \forall v \in H_0(\operatorname{div}, \Omega).$$

Utilizando la segunda ecuación de (5.11) podemos sustituir p en la ecuación anterior,

$$\lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + 2\lambda \mu \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) + \rho_0 c^2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) \operatorname{div} \bar{v} = 0.$$

Es decir, obtenemos el problema de autovalores cuadrático:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \lambda \in \mathbb{C} \text{ y } u \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) - \{0\} \text{ tales que, } \forall v \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) \text{ se verifica} \\ \lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + 2\lambda \mu \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) + \rho_0 c^2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

A continuación examinaremos el caso no viscoso. Tomando $\mu = 0$ y $v = u$. tenemos

$$\lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} |u|^2 + \rho_0 c^2 \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 = 0, \quad (5.13)$$

Luego $\lambda^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda = \pm iw$ donde w es la llamada frecuencia de vibración natural. Entonces, para $\mu = 0$ el problema puede escribirse como:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \omega \in \mathbb{R} \text{ y } u \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) - \{0\} \text{ tales que,} \\ c^2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) = w^2 \int_{\Omega} u \bar{v}, \quad \forall v \in H_0(\operatorname{div}, \Omega). \end{cases} \quad (5.14)$$

Ahora supondremos que μ es pequeña y los autovalores del sistema (5.12) estarán cerca de $\pm iw$ con w solución de (5.14) y que ρ_0 , c y μ son constantes positivas. Entonces,

$$\lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + (2\lambda\mu + \rho_0 c^2) \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) = 0,$$

de donde se sigue que

$$c^2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) = \frac{-\lambda^2 c^2 \rho_0}{2\lambda\mu + \rho_0 c^2} \int_{\Omega} \rho_0 u \bar{v}. \quad (5.15)$$

Entonces se verifica que: (λ, u) es solución de (5.12) sí, y sólo si es solución de (5.14) con $w^2 = \frac{-\lambda^2 c^2 \rho_0}{2\lambda\mu + \rho_0 c^2}$. Resolviendo el polinomio de segundo grado en λ obtenemos

$$\lambda = \frac{-\mu w^2}{\rho_0 c^2} \pm i \sqrt{w^2 - \left(\frac{\mu w^2}{\rho_0 c^2} \right)^2}. \quad (5.16)$$

Ahora procederemos a analizar las autofunciones del problema (5.12). Notaremos por $V = H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ con el producto interno

$$(v, w)_v = \int_{\Omega} v \bar{w} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} v)(\operatorname{div} \bar{w}). \quad (5.17)$$

Introducimos el subespacio K de las autofunciones asociadas al autovalor $\lambda = 0$, es decir

$$K = \{v \in V : \operatorname{div} v = 0\}.$$

También definimos el subespacio G complemento ortogonal de K en V ,

$$G = K^{\perp V} = \{v \in V : (v, w)_V = 0 \forall w \in K\}. \quad (5.18)$$

Como $K \subset V$ es cerrado, entonces $V = G \oplus K$.

Proposición 5.1.1 *Se verifica que $G = \{u \in V : u = \nabla\varphi \in H^1(\Omega)\}$.*

Demostración 5.1.1 *Llamaremos $\Lambda = \{u \in V : u = \nabla\varphi \in H^1(\Omega)\}$. En primer lugar probaremos que $G \subset \Lambda$. Sea $v \in G$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Observemos que $\operatorname{rot}\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^t$ es un elemento de K ya que $\operatorname{rot}(\varphi) \in C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\varphi) = 0$ con lo cual $\operatorname{rot}\varphi \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ y como el soporte está contenido en el interior de Ω tenemos que $\operatorname{rot}\varphi \cdot n = 0$ en $\partial\Omega$. Luego $\operatorname{rot}\varphi \in K$.*

Como $v \in G$ resulta que $(\operatorname{rot}\varphi, v)_V = 0$ e integrando por partes resulta que $(\varphi, \operatorname{rot}v)_V = 0$ para toda φ . Como consecuencia se tiene que $\operatorname{rot}v = 0$. Como Ω es simplemente conexo, existe $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $v = \nabla\varphi$ (ver [17]), con lo cual queda probada la inclusión $G \subset \Lambda$.

Ahora veremos la inclusión $\Lambda \subset K$. Sea $v \in \Lambda$ y $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $v = \nabla\varphi$. Si tomamos $w \in K$ tenemos que

$$(v, w)_V = \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \bar{w} = - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \bar{w} + \int_{\partial\Omega} \varphi \bar{w} \cdot n = 0. \quad (5.19)$$

Luego $v \in G$.

Probadas ambas inclusiones queda terminada la demostración.

En la proposición que sigue a continuación veremos que las funciones $u \in G$ tienen mayor regularidad.

Proposición 5.1.2 *Si $u \in G$, entonces existe $s \in (0, 1]$ y $C > 0$, ambos dependientes solo de Ω , tales que*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} < C \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración 5.1.2 *Sea $u \in G$ y $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $u = \nabla\varphi$, entonces*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \operatorname{div} u \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.20)$$

De las estimaciones a priori en [16] se tiene que existe $s \in (0, 1]$ y $C > 0$, ambos dependientes solo de Ω tales que

$$|\varphi|_{1+s,\Omega} \leq C \|\operatorname{div} u\|_{0,\Omega}. \quad (5.21)$$

Como $u = \nabla\varphi$ resulta que

$$|u|_{s,\Omega} \leq C \|\operatorname{div} u\|_{0,\Omega}. \quad (5.22)$$

que es la desigualdad que queríamos probar.

Para continuar el análisis teórico introduciremos una nueva variable $\hat{u} = \lambda u$. Este será el método que utilizaremos en la sección siguiente, para obtener un problema lineal equivalente, cuando no podremos obtener una representación del tipo (5.15). Utilizaremos dicho método ahora para familiarizarnos con el mismo y ser consistentes con la próxima sección. Incorporando la nueva variable obtenemos,

$$\begin{cases} \text{Hallar } \lambda \in \mathbb{C}, (u, \hat{u}) \in V \times H - \{0, 0\} \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \rho_0 c^2 (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) = \lambda \left[- \int_{\Omega} 2\mu (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) - \rho_0 \int_{\Omega} \hat{u} \bar{v} \right], & \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} \rho_0 \hat{u} \bar{\hat{v}} = \lambda \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v}, & \forall \hat{v} \in H. \end{cases} \quad (5.23)$$

Observemos que $\lambda = 0$ es un autovalor del sistema, con autoespacio asociado $K \times \{0\}$ y que el complemento ortogonal de $K \times \{0\}$ es $G \times H$.

A continuación, introducimos las siguientes formas sesquilineales:

$$\begin{aligned} \tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) &= \int_{\Omega} \rho_0 c^2 (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) + \int_{\Omega} \rho_0 \hat{u} \bar{\hat{v}}, \\ \tilde{b}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) &= - \int_{\Omega} 2\mu (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) - \rho_0 \int_{\Omega} \hat{u} \bar{v} + \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v}, \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \rho_0 c^2 (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Proposición 5.1.3 *La forma a es elíptica en G y \tilde{a} es elíptica en $G \times H$.*

Demostración 5.1.3 *Para cualquier $v \in G$ tenemos:*

$$a(v, v) = \rho_0 c^2 \|\operatorname{div} v\|_0^2 \geq C \|v\|_v^2,$$

luego

$$\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = \rho_0 c^2 \|\operatorname{div} v\|_0^2 + \rho_0 \|v\|_0^2 \geq C \|v\|_v^2.$$

Como queríamos demostrar.

Sea $T : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ el operador definido por

$$T(f, g) = (u, \hat{u}) \in \tilde{G} = G \times H, \quad (5.25)$$

donde (u, \hat{u}) es la solución única del problema

$$\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = \tilde{b}((f, g), (v, \hat{v})) \quad \forall (v, \hat{v}) \in \tilde{G}. \quad (5.26)$$

Es fácil verificar que $\hat{u} = f$. En efecto, tomando como función test $v = 0$ obtenemos $\tilde{a}((u, \hat{u}), (0, \hat{v})) = \tilde{b}((f, g), (0, \hat{v}))$, es decir $\int_{\Omega} \rho_0 \hat{u} \bar{v} = \int_{\Omega} \rho_0 f \bar{v}$, válida para toda $\hat{v} \in H$. Esto muestra que $\hat{u} - f = 0$ es ortogonal a todo $\hat{v} \in H$, es decir,

$$\hat{u} = f. \quad (5.27)$$

Análogamente, si $\hat{v} = 0$ se obtiene: $\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, 0)) = \tilde{b}((f, g), (v, 0))$ es decir,

$$\int_{\Omega} \rho_0 c^2 (\operatorname{div} u) (\operatorname{div} \bar{v}) = -2 \int_{\Omega} \mu (\operatorname{div} f) (\operatorname{div} \bar{v}) - \int_{\Omega} \rho_0 g \bar{v}, \quad \forall v \in G.$$

Observemos que $T(f, g) = (0, 0) \Rightarrow (f, g) \in \{0\} \times G^{\perp H}$ que no es trivial debido a que $K \subset G^{\perp H}$. Luego $\nu = 0$ es un autovalor de T .

Teorema 5.1.4 $(\nu, (u, \hat{u}))$ es un autopar de T con $\nu \neq 0$ (es decir $T(u, \hat{u}) = \nu(u, \hat{u})$) $\iff (\lambda, (u, \hat{u}))$ es solución del problema (5.23) con $\lambda = \nu^{-1}$.

Demostración 5.1.5 \Rightarrow : Sea $(\nu, (u, \hat{u}))$ un autopar de T con $\nu \neq 0$, entonces:

$$\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = \frac{1}{\nu} \tilde{b}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})), \quad \forall (v, \hat{v}) \in \tilde{G}, \quad (5.28)$$

entonces de (5.27) se obtiene $\hat{u} = \frac{1}{\nu} u \in G$. También tenemos que para $(v, \hat{v}) \in K \times \{0\}$ tenemos

$$\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = 0, \quad y \quad \tilde{b}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = 0,$$

en consecuencia,

$$\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = \frac{1}{\nu} \tilde{b}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) \quad \forall (v, \hat{v}) \in \tilde{G} \oplus \tilde{K}. \quad (5.29)$$

donde $\tilde{K} = K \times \{0\}$, luego $\tilde{G} \oplus \tilde{K} = V \times H$. Esto indica que (5.23) se verifica para $(\frac{1}{\nu}, (u, \hat{u}))$.

\Leftarrow): Si $(\lambda, (u, \hat{u}))$ es solución de (5.23) con $\lambda \neq 0$, tomando $v \in K \Rightarrow \operatorname{div} v = 0$ y de la primera ecuación de (5.23) tenemos que $\int_{\Omega} \rho_0 \hat{u} \bar{v} = 0 \Rightarrow \hat{u} \in G$. Por otro lado, la segunda ecuación de (5.23) nos dice que $\lambda u = \hat{u} \in G \Rightarrow u \in G$ Luego $T(u, \hat{u}) = \frac{1}{\nu}(u, \hat{u})$.

Corolario 5.1.5.1 *Se verifican:*

1. $\sigma(T) = \sigma(T|_{\tilde{G}}) \cup \{0\}$.
2. $\sigma(T) = \sigma(T|_{G \times G}) \cup \{0\}$.

Observación 1: Notaremos por T también a $T_{G \times G} : G \times G \rightarrow G \times G$.

Observación 2: Por la proposición (5.1.3), $a(., .)$ es un producto interno e induce una norma equivalente a $\|\cdot\|_v$ en G .

Definición 5.1.1 (*Operadores T_1, T_2*) Sean $T_1, T_2 : G \rightarrow G$ dados por

$$\begin{aligned} T_1 f = u_1 \in G : a(u_1, \phi) &= 2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} f \operatorname{div} \bar{\phi}. \quad \forall \phi \in G \\ T_2 g = u_2 \in G : a(u_2, \phi) &= \rho_0 \int_{\Omega} g \bar{\phi}. \quad \forall \phi \in G \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ambos operadores son autoadjuntos, T_1 es no-negativo y T_2 es positivo con respecto a $a(., .)$ es decir, $a(T_1 u, u) \geq 0 \forall u \in G$ y $a(T_2 u, u) > 0 \forall u \in G, u \neq 0$.

Teorema 5.1.6 *El operador $T_2 : G \rightarrow G$ es compacto.*

Demostración 5.1.7 *Sea $g \in G$ y $u_2 = T_2 g$. Por la definición del operador T_2 se tiene que*

$$a(u_2, \phi) = \rho_0 \int_{\Omega} g \bar{\phi}, \quad \forall \phi \in G,$$

y además tenemos que

$$a(u_2, \phi) = \rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u_2 \operatorname{div} \bar{\phi} = 0 = \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{\phi}, \quad \forall \phi \in K.$$

Entonces $a(u_2, \phi) = \rho_0 \int_{\Omega} g \bar{\phi} \quad \forall \phi \in V$. Considerando diferentes funciones test en $(C^\infty(\Omega))^n$ resulta que u_2 debe satisfacer:

$$\begin{cases} -\rho_0 c^2 \nabla(\operatorname{div} u_2) = \rho_0 g & \text{en } \Omega \\ u_2 \cdot n = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.31)$$

Entonces $\nabla(\operatorname{div} u_2) \in G = \nabla(H^1(\Omega)) \cap V$, es decir $\operatorname{div} u_2 \in H^1(\Omega)$ y por la Proposición (5.1.2) tenemos que $u_2 \in (H^s(\Omega))^2$ con $s > 0$.

Tomamos una sucesión acotada $g_n \subset G$ y $u_n = T_2 g_n$. Entonces

$$\begin{cases} \|\nabla(\operatorname{div} u_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g_n\| \\ \|\operatorname{div} u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g_n\| \end{cases} \quad (5.32)$$

luego $\|\operatorname{div} u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g_n\| \leq \hat{C}$.

Por el teorema de Rellich-Kondrachov $H^1(\Omega)$ está inmerso en $L^2(\Omega)$ en forma compacta, existe una subsucesión $u_{n_k} \subset L^2(\Omega)$ que converge a una función $w_1 \in L^2(\Omega)$, es decir $\operatorname{div}(u_{n_k}) \rightarrow w_1$ en $L^2(\Omega)$. Además por la Proposición (5.1.2) tenemos que $\|u_{n_k}\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|\operatorname{div}(u_{n_k})\|_{L^2(\Omega)}$. Como $H^s(\Omega)$ también está inmerso en $L^2(\Omega)$ en forma compacta, existe una subsucesión, que también denotaremos por u_{n_k} tal que $(u_{n_k}) \rightarrow w_0 \in L^2(\Omega)$. Por la continuidad del operador divergencia, tenemos que $\operatorname{div}(w_0) = w_1$ luego $w_0 \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ y $u_{n_k} \rightarrow w_0$ en $H(\operatorname{div}, \Omega)$. Con esto queda demostrado que T_2 es compacto.

A continuación escribiremos el operador T en forma matricial, utilizando los operadores T_1 y T_2 . Llamaremos π_1 y π_2 a las proyecciones en la primer y segunda componente.

$$\begin{aligned} a(\pi_1 T(f, g), v) &= \tilde{a}(T(f, g), (v, 0)) = \tilde{a}((u, \hat{u}), (v, 0)) = \\ &= \tilde{b}((f, g), (v, 0)) = \tilde{b}((f, 0), (v, 0)) + \tilde{b}((0, g), (v, 0)) = \\ &= -a(u_1, v) - a(u_2, v) = -a(T_1 f, v) - a(T_2 g, v) = \\ &= a(-T_1 f - T_2 g, v) \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow \pi_1 T(f, g) = -T_1 f - T_2 g. \quad (5.34)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \rho_0 \int_{\Omega} \pi_2(T(f, g)) \bar{v} &= \tilde{a}(T(f, g), (0, \hat{v})) = \tilde{a}((u, \hat{u}), (0, \hat{v})) = \\ &= \tilde{b}((f, g), (0, \hat{v})) = \rho_0 \int_{\Omega} f \bar{v} \quad \forall \hat{v} \in (L^2(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\Rightarrow \pi_2 T(f, g) = I f + 0g = f \quad (5.36)$$

Luego podemos escribir:

$$T = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Además, definimos

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2^{\frac{1}{2}} \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2^{\frac{1}{2}} \\ T_2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Teorema 5.1.8 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $ST = HS$, $T = US$, $H = SU$, y $UH = TU$.
2. Los autovalores de T y H y sus multiplicidades coinciden. Además las correspondientes cadenas de Jordan tienen la misma longitud.
3. $\sigma(T) = \sigma(H)$.
4. H se descompone como la suma de un operador autoadjunto B y otro compacto C , es decir, $H = B + C$.
5. $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(-T_1) \cup \{0\}$, donde $\sigma_{ess}(H)$ denota el espectro esencial de H (el conjunto de todos los puntos límite de $\sigma(H)$ y los autovalores de H con multiplicidad algebraica infinita [3]).

Demostración 5.1.9 *Iremos demostrando ítem por ítem.*

1. Verifiquemos la primera de las igualdades.

$$ST = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 \\ T_2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$HS = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2^{\frac{1}{2}} \\ T_2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 \\ T_2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $ST = HS$. Análogamente se prueban el resto de las igualdades.

2. Sea $\{x_k\}_{k=1}^P$ una cadena de Jordan asociada al autovalor μ de T , entonces:

$$\begin{aligned} H(S(x_k)) &= HS(x_k) = ST(x_k) = S(\mu(x_k) + (x_{k+1})) \\ &= \mu S(x_k) + S(x_{k+1}) \quad k = 1, \dots, P \quad (x_0 = 0). \end{aligned}$$

Como S es inyectiva resulta que $\{Sx_k\}_{k=1}^P$ es una cadena de Jordan de H correspondiente al autovalor μ de H . La recíproca se prueba análogamente utilizando que U es inyectiva y que $TU = UH$.

3. En la demostración del teorema (5.1.6) veíamos que la imagen de T_2 son funciones con más regularidad, es decir, $T_2(G)$ no es todo G , o equivalentemente T_2 no es suryectiva. Luego $T(G \times G)$ y $H(G \times G)$ es un subespacio propio de $G \times G$; luego $0 \in \sigma(T)$ y $0 \in \sigma(H)$. Ahora sea $\mu \notin \sigma(H)$. Como los autovalores de T y de H coinciden, entonces $(T - \mu I)$ es inyectiva. Para probar la suryectividad, sea $y \in G \times G$; como $\mu \notin \sigma(H)$, entonces existe $\hat{x} \in G \times G$ tal que $(H - \mu I)\hat{x} = Sy$. Luego, dado que $H = SU$ se verifica:

$$\hat{x} = \frac{1}{\mu}(H\hat{x} - Sy) = Sx, \text{ para } x = \frac{U\hat{x} - y}{\mu}, \in G \times G.$$

Dado que $ST = HS$ se obtiene que $S(T - \mu I)x = (H - \mu I)Sx = (H - \mu I)\hat{x} = Sy$, y como S es inyectiva, tenemos que $(T - \mu I)x = y$. Como $y \in G \times G$ era arbitrario, $(T - \mu I)$ es suryectiva de donde tenemos que si $\mu \notin \sigma(H)$ entonces $\mu \notin \sigma(T)$. El recíproco es análogo, utilizando que U es uno a uno, $T = US$ y $UH = TU$.

4. Tomamos

$$B = \begin{bmatrix} -T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -T_2^{\frac{1}{2}} \\ T_2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

5. La primera igualdad se sigue del teorema de Weyl [24].

Ahora analizaremos el operador T_1 .

Recordemos que $T_1 f = u_1$ donde $a(u_1, \phi) = 2\mu \int_{\Omega} \text{div} f \text{div} \bar{\phi}$. Entonces

$$\rho_0 c^2 \int_{\Omega} (\text{div} u_1) \text{div} \phi = 2\mu \int_{\Omega} \text{div} f \text{div} \phi,$$

luego $\int_{\Omega} \text{div} \left(u_1 - \frac{2\mu}{\rho_0 c^2} f \right) \text{div} \bar{\phi} = 0$, para toda $\phi \in G$. Luego

$$u_1 = \frac{2\mu}{\rho_0 c^2} f \quad \Rightarrow \quad T_1 - \frac{2\mu}{\rho_0 c^2} Id_g = 0. \quad (5.39)$$

Luego $\lambda = \frac{2\mu}{\rho_0 c^2}$ es un autovalor que tiene asociado un autoespacio de dimensión infinita, es decir,

$$\sigma_{ess}(T_1) = \left\{ \frac{2\mu}{\rho_0 c^2} \right\}. \quad (5.40)$$

Teorema 5.1.10 *El espectro esencial de T está dado por:*

$$\sigma_{ess}(T) = \left\{ \frac{-2\mu}{\rho_0 c^2}, 0 \right\},$$

5.1.1. Formulación para un fluido encerrado en una cavidad rívida en presiones

A continuación obtendremos una formulación en presiones, para el problema (5.6). Los modos de vibración son soluciones complejas, de la forma $U(x, t) = e^{\lambda t}u(x)$ y $P(x, t) = e^{\lambda t}p(x)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Realizando los reemplazos correspondientes, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales (5.11) que reescribiremos a continuación para mayor claridad.

$$\begin{cases} \lambda^2 \rho u - 2 \lambda \mu \nabla(\operatorname{div} u) + \nabla p = 0, & \text{en } \Omega, \\ p + \rho c^2 \operatorname{div} u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u \cdot n = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si consideramos el caso no viscoso $\mu = 0$:

$$\begin{cases} \lambda^2 \rho u + \nabla p = 0, & \text{en } \Omega, \\ p + \rho c^2 \operatorname{div} u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u \cdot n = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.41)$$

Luego

$$\lambda^2 \rho u \cdot n|_{\partial\Omega} + \nabla P \cdot n = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.42)$$

Ya que $u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$.

Tomando divergencia en la primer ecuación: $\lambda^2 \rho \operatorname{div} u + \Delta p = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{c^2}(\rho c^2 \operatorname{div} u) + \Delta P = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{c^2}(-p) + \Delta P = 0$

Obteniendo la formulación en presiones en lugar de desplazamientos:

$$\begin{cases} -\Delta p = \frac{-\lambda^2}{c^2} p & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

Este problema tiene numerables de autovalores $\hat{\lambda} = \frac{-\lambda^2}{c^2}$

$$0 = \hat{\lambda}_0 \leq \hat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_m \leq \dots \quad (5.44)$$

con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_n = \infty. \quad (5.45)$$

Si consideramos que para el fluido viscoso, la viscosidad es pequeña, podemos asumir que los autovalores del sistema viscoso serán una perturbación de los autovalores del sistema no viscoso que en la formulación en presiones anterior observamos que forman una sucesión discreta. En base a esto y el teorema (5.1.10) podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.1.11 *El espectro de T es la unión entre el espectro esencial*

$$\sigma_{ess}(T) = \left\{ \frac{-2\mu}{\rho_0 c^2}, 0 \right\},$$

y un conjunto de autovalores aislados con multiplicidad algebraica finita.

Esto concluye el análisis del sistema para un fluido compresible viscoso sin sólidos.

5.2. Fluido levemente compresible con sólidos inmersos

A continuación analizaremos el problema espectral principal de este trabajo, consistente en un sistema formado por un fluido viscoso compresible y sólidos inmersos. La formulación asociada solo al fluido es idéntica al caso anterior. Al incorporar los tubos supondremos las condiciones indicadas al comienzo del capítulo, además supondremos que en Γ_j la componente normal de los desplazamientos del fluido debiera coincidir con la componente normal de los desplazamientos de los tubos. Esta condición la expresaremos como $U \cdot n = R_j$ en $\Gamma_j \times \mathbb{R}_{>0}$ donde n es la normal saliente a Ω y R_j es el vector desplazamiento transversal en el instante t del j -ésimo tubo. Como el movimiento del tubo j obedece a la ley de un oscilador armónico simple forzado, tenemos:

$$m_j \ddot{R}_j + l_j \dot{R}_j + k_j R_j = - \int_{\Gamma_j} \sigma(\dot{U}, P) n d\Gamma \quad (5.46)$$

donde m_j es la masa de cada tubo, k_j la constante elástica del resorte sobre el que esta montado el tubo, y l_j su coeficiente de rozamiento. Asumiendo soluciones del tipo $U(x, t) = e^{\lambda t} u(x)$, $P(x, t) = e^{\lambda t} p(x)$ y $R_j(t) = e^{\lambda t} r_j(t)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, el modelo a resolver está dado por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \lambda \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } (u, p, r) \text{ no nulos tales que:} \\ \lambda^2 \rho_0 u - 2\mu \lambda \nabla(\operatorname{div} u) + \nabla p = 0 & \text{en } \Omega, \\ p + \rho_0 c^2 \operatorname{div} u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{en } \Gamma_0, \\ u = r_j & \text{en } \Gamma_j \text{ para } j = 1, \dots, K, \\ \lambda^2 m_j r_j + \lambda l_j r_j + k_j r_j = - \int_{\Gamma_j} (2\mu \lambda \operatorname{div} u - p) n d\gamma, & \text{para } j = 1, \dots, K. \end{array} \right. \quad (5.47)$$

5.2. FLUIDO LEVEMENTE COMPRESIBLE CON SÓLIDOS INMERSOS 71

Eliminamos la incógnita p utilizando la segunda ecuación, y reemplazando la presión en las demás ecuaciones, obtenemos la siguiente formulación del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \lambda \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } (u, r) \text{ no nulos tales que:} \\ \lambda^2 \rho_0 u - (2\mu\lambda + \rho_0 c^2) \nabla(\operatorname{div} u) = 0, \quad \text{en } \Omega, \\ u.n \Big|_{\Gamma_0} = 0, \\ u \Big|_{\Gamma_j} = r_j, \quad \forall j = 1, \dots, K, \\ (\lambda^2 m_j + \lambda l_j + k_j) r_j + (2\mu\lambda + \rho_0 c^2) \int_{\Gamma_j} \operatorname{div} u n d\gamma = 0, \quad \forall j = 1, \dots, K. \end{array} \right. \quad (5.48)$$

De la última ecuación se puede despejar r_j y reemplazar en las anteriores. Llamando $u|_{\Gamma_j} = u_j$ obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \lambda \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } u \text{ no nula tales que:} \\ \lambda^2 \rho_0 u - (2\mu\lambda + \rho_0 c^2) \nabla(\operatorname{div} u) = 0, \quad \text{en } \Omega, \\ u.n = 0, \quad \text{en } \Gamma_0, \\ u_j + \frac{(2\mu\lambda + \rho_0 c^2)}{(\lambda^2 m_j + \lambda l_j + k_j)} \int_{\Gamma_j} \operatorname{div} u n d\gamma = 0, \quad \forall j = 1, \dots, K. \end{array} \right. \quad (5.49)$$

Multiplicando por $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ con $v.n = 0$ en Γ_0 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + (2\lambda\mu + \rho_0 c^2) \left[- \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} u \bar{v} n d\gamma + \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) \right] \\ &= \lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + (2\lambda\mu + \rho_0 c^2) \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) - (2\lambda\mu + \rho_0 c^2) \sum_j \bar{v}_j \int_{\Gamma_j} \operatorname{div} u n d\gamma \\ &= \lambda^2 \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + (2\lambda\mu + \rho_0 c^2) \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K (\lambda^2 m_j + \lambda l_j + k_j) u_j \bar{v}_j. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Agrupando según potencias de λ resulta,

$$\begin{aligned} \lambda^2 \left[\rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j u_j \bar{v}_j \right] + \lambda \left[2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K l_j u_j \bar{v}_j \right] \\ + \left[\sum_{j=1}^K k_j u_j \bar{v}_j + \rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

La formulación variacional queda expresada en variables de desplazamiento.

Utilizaremos el espacio de Hilbert

$$V = \left\{ v \in H(\operatorname{div}, \Omega) : v.n \Big|_{\Gamma_0} = 0, \text{ y } v \Big|_{\Gamma_j} \in \mathbb{C}^2, \forall j = 1, \dots, K \right\},$$

equipado con el producto interno,

$$(v, w)_v = \int_{\Omega} v\bar{w} + \int_{\Omega} \operatorname{div}v\operatorname{div}(\bar{w}) + \sum_{j=1}^K v_j\bar{w}_j. \quad (5.52)$$

De esta manera, el problema a resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \lambda \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } u \in V - 0 \text{ tales que } \forall v \in V : \\ \lambda^2 \left[\rho_0 \int_{\Omega} u\bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j u_j \bar{v}_j \right] + \lambda \left[2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div}u\operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K l_j u_j \bar{v}_j \right] \\ + \left[\sum_{j=1}^K k_j u_j \bar{v}_j + \rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}u\operatorname{div}(\bar{v}) \right] = 0. \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Tal como en el problema de la sección anterior, nuevamente obtenemos un problema de autovalores cuadrático. También observamos que $\lambda = 0$ es uno de los autovalores, en esta oportunidad con autoespacio asociado

$$K = \{u \in V : \operatorname{div} u = 0 \quad \text{y} \quad u|_{\Gamma_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k\}. \quad (5.54)$$

El siguiente lemma muestra que para cualquier otra solución de (5.53) la tasa de decaimiento es estrictamente negativa. Esto coincide con lo que es bien conocido desde el punto de vista físico, donde los efectos de la viscosidad en el fluido y el rozamiento en el movimiento de los sólidos amortiguan las vibraciones.

Lema 5.2.1 *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $u \in V - \{0\}$ solución de (5.53)*

1. Si $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$, entonces $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.
2. Si $\lambda \neq 0$ y $\mu = 0$, entonces $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$.
3. Si $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ Los tubos no se mueven y los modos son los del fluido.
4. Si los tubos se mueven, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Demostración 5.2.2 *En (5.53) sustituimos $v = u$ y obtenemos la ecuación algebraica:*

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (5.55)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A &= \rho_0 \int_{\Omega} |u|^2 + \sum_{j=1}^K m_j |u_j|^2, \\
 B &= 2\mu \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 + \sum_{j=1}^K l_j |u_j|^2, \\
 C &= \rho_0 c^2 \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 + \sum_{j=1}^K k_j |u_j|^2.
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Como $\mu \neq 0$ tenemos que $A > 0$, $B \geq 0$ y $C \geq 0$, entonces resulta que

$$B = 0 \iff C = 0,$$

y en ese caso $\lambda = 0$.

Si $\mu = 0$ y $l_j = 0$, entonces $B = 0$ y $C > 0$ implica que $\lambda = \pm iw$.

Ahora consideramos el caso $B > 0$. En este caso tenemos que $C > 0$. Tenemos dos posibilidades

- $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = \frac{-B}{A} < 0$.
- $B^2 - 4AC > 0$ tenemos que $AC > 0 \Rightarrow -4AC < 0 \Rightarrow B^2 - 4AC < B^2 \Rightarrow \pm\sqrt{B^2 - 4AC} < B \Rightarrow \lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = \lambda < 0$

En ambos casos tenemos que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ y entonces, los desplazamientos tenderán a anularse a medida que aumenta el tiempo.

Nuevamente, para el análisis teórico es conveniente transformar (5.53) en un problema de autovalores lineal equivalente. Tal como en la sección anterior introduciremos $\hat{u} = \lambda u$ como nueva variable, y el espacio de Hilbert $H = (L^2(\Omega))^2$ con el producto interno usual, obteniendo así la siguiente formulación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \lambda \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } (u, \hat{u}) \in V \times H - \{(0, 0)\} \text{ tales que:} \\ a(u, v) = \lambda b((u, \hat{u}), v), \quad \forall v \in V, \\ \rho_0 \int_{\Omega} \hat{u} \bar{v} = \lambda \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{v}, \quad \forall \hat{v} \in H, \end{array} \right. \tag{5.57}$$

donde

$$a(u, v) = \rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K k_j u_j \bar{v}_j,$$

y

$$b((u, \hat{u}), v) = - \int_{\Omega} (\rho_0 \hat{u} \bar{v} + 2\mu \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v})) - \sum_{j=1}^K (m_j \hat{u}_j \bar{v}_j + l_j u_j \bar{v}_j).$$

Introducimos además las formas:

$$\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = a(u, v) + \rho_0 \int_{\Omega} \hat{u} \bar{\hat{v}},$$

y

$$\tilde{b}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = b((u, \hat{u}), v) + \rho_0 \int_{\Omega} u \bar{\hat{v}}.$$

La forma $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal continua. Sea $\tilde{V} = V \times H$ con la norma del producto. Las formas $\tilde{a}, \tilde{b} : \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$ son formas sesquilineales continuas. Observemos que el conjunto K introducido en (5.54) también puede escribirse como $K = \{u \in V : a(u, v) = 0 \forall v \in V\}$. Es claro que $\lambda = 0$ es también autovalor de (5.57) y $\tilde{K} = K \times \{0\}$ es el autoespacio asociado. Sea G el complemento ortogonal de K en V y $\tilde{G} = G \times (L^2(\Omega))^2$. Siguiendo la demostración en [21] capítulo 3, se demuestra que existe $s > 0$ tal que:

$$\|u\|_{s,\Omega} \leq C(\|\operatorname{div} u\|_0 + \sum_{j=1}^K |u_j|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in G. \quad (5.58)$$

Lema 5.2.3 *La forma sesquilineal $a : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ es v -elíptica, es decir:*

$$\exists \alpha > 0 / \alpha \|u\|_v^2 \leq a(u, u), \quad \forall u \in G. \quad (5.59)$$

Demostración 5.2.4

$$\begin{aligned} \|u\|_v^2 &= \|u\|_0^2 + \|\operatorname{div} u\|_0^2 + \sum_{j=1}^K |u_j|^2 \leq \|u\|_s^2 + \|\operatorname{div} u\|_0^2 + \sum_{j=1}^K |u_j|^2 \\ &\leq C(\|\operatorname{div} u\|_0^2 + \sum_{j=1}^K |u_j|^2) \\ &\leq Ca(u, u). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Corolario 5.2.4.1 *La forma sesquilineal $\tilde{a} : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ es \tilde{v} -elíptica.*

Como consecuencia de la elipticidad de \tilde{a} en G estamos en condiciones de introducir un operador lineal acotado $T : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ dado por:

$$T(f, g) = (u, \hat{u}) \in \tilde{G}, \quad (5.61)$$

donde $\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, \hat{v})) = \tilde{b}((f, g), (v, \hat{v})) \forall (v, \hat{v}) \in \tilde{G}$. A está bien definido en virtud del lemma de Lax-Milgram.

Tal como en la sección previa, se obtiene que $\hat{u} = f$. En efecto, tomando como función test $v = 0$ obtenemos $\tilde{a}((u, \hat{u}), (0, \hat{v})) = \tilde{b}((f, g), (0, \hat{v}))$, es decir $\int_{\Omega} \rho_0 \hat{u} \hat{v} = \int_{\Omega} \rho_0 f \hat{v}$, válida para toda $\hat{v} \in H$. Esto muestra que $\hat{u} - f = 0$ es ortogonal a todo $\hat{v} \in H$, es decir, $\hat{u} = f$.

Análogamente, si $\hat{v} = 0$ se obtiene: $\tilde{a}((u, \hat{u}), (v, 0)) = \tilde{b}((f, g), (v, 0))$ es decir,

$$\int_{\Omega} \rho_0 c^2 (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} \bar{v}) + \sum_{j=1}^K k_j u_j \bar{v}_j = -2 \int_{\Omega} \mu (\operatorname{div} f)(\operatorname{div} \bar{v}) - \int_{\Omega} \rho_0 g \bar{v} - \sum_{j=1}^K (m_j g_j \bar{v}_j + l_j f_j \bar{v}_j) \quad \forall v \in G.$$

Observemos que si $T(f, g) = (0, 0)$

$$0 = - \int_{\Omega} \rho_0 g \bar{v} - \sum_{j=1}^K m_j g_j \bar{v}_j \quad \forall v \in G. \quad (5.62)$$

Entonces $(f, g) \in \{0\} \times G^{\perp H}$ y $\nu = 0$ es un autovalor de T .

Teorema 5.2.5 $(\nu, (u, \hat{u}))$ es un autopar de T con $\nu \neq 0$ (es decir $T(u, \hat{u}) = \nu(u, \hat{u})$) $\iff (\lambda, (u, \hat{u}))$ es solución del problema (5.57) con $\lambda = \nu^{-1}$.

Demostración 5.2.6 La demostración es análoga a la demostración del teorema (5.1.4).

5.3. Caracterización del espectro

Como $T(\tilde{V}) \subset \tilde{G}$ entonces el espectro de T , $\sigma(T) = \sigma(T|_{\tilde{G}}) \cup \{0\}$. Además como $T(\tilde{G}) \subset G \times G$ entonces $\sigma(T) = \sigma(T|_{G \times G}) \cup \{0\}$. Por esta razón restringimos el análisis al operador $T|_{G \times G} : G \times G \rightarrow G \times G$ el cual también denotaremos por T . Como $a : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal continua y v -elíptica, entonces, $a(., .)$ es un producto interno en G que induce una norma equivalente a $\|.\|_v$ en G . Sean: $T_1 : G \rightarrow G$ y $T_2 : G \rightarrow G$ dos operadores definidos por :

$$\begin{aligned} T_1 f &= u_1 \in G : a(u_1, v) = 2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} f \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K l_j f_j \bar{v}_j \quad \forall v \in G \\ T_2 g &= u_2 \in G : a(u_2, v) = \int_{\Omega} g \bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j g_j \bar{v}_j \quad \forall v \in G. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} a(T_1 f, f) &= 2\mu \int_{\Omega} |\operatorname{div} f|^2 + \sum_{j=1}^K l_j |f_j|^2 \geq 0 \quad \forall f \in G, \\ a(T_2 g, g) &= \int_{\Omega} |g|^2 + \sum_{j=1}^K m_j |g_j|^2 > 0 \quad \forall g \in G - \{0\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Es decir, T_1 es un operador auto-adjunto semidefinido positivo, y T_2 es un operador autoadjunto definido positivo. El siguiente lemma muestra que T_2 es compacto:

Lema 5.3.1 *El operador $T_2 : G \rightarrow G$ es compacto.*

Demostración 5.3.2 *Sea $g \in G$ y $u = T_2 g$. Tenemos que*

$$a(u, v) = \int_{\Omega} g \bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j g_j \bar{v}_j \quad \forall v \in G. \quad (5.65)$$

Recordemos,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K k_j u_j \bar{v}_j, \\ (u, v)_V &= \int_{\Omega} u \bar{v} + \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K u_j \bar{v}_j. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Entonces, si $v \in K$ tenemos:

$$a(u, v) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} g \bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j g_j \bar{v}_j = 0 \quad \text{pues } g \in G. \quad (5.67)$$

Luego $a(u, v) = \int_{\Omega} g \bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j g_j \bar{v}_j$, para toda $v \in K$ y como $V = K \oplus G$ resulta que:

$$\rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_2) \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K k_j u_j \bar{v}_j = \int_{\Omega} g \bar{v} + \sum_{j=1}^K m_j g_j \bar{v}_j \quad \forall v \in V. \quad (5.68)$$

Utilizando distintas funciones test obtenemos:

$$\begin{cases} -\rho_0 c^2 \nabla(\operatorname{div} u) = g, & \text{en } \Omega, \\ \rho_0 c^2 \int_{\Gamma_j} (\operatorname{div} u) n d\gamma + k_j u_j = m_j g_j. \end{cases} \quad (5.69)$$

Luego, $\operatorname{div} u \in H^1(\Omega)$ y $u_j \in \mathbb{R}^2$.

Ponemos $f = g/(-\rho_0 c^2)$, entonces $f \in (L^2(\Omega))^2$ y

$$\nabla(\operatorname{div} u) = f \quad (5.70)$$

Tomando divergencia,

$$\Delta(\operatorname{div} u) = \operatorname{div} f \quad (5.71)$$

y

$$\|\operatorname{div} u\|_{H^1} \leq C \|\operatorname{div} f\|_{H^{-1}} \leq C \|f\|_{(L^2(\Omega))^2} \quad (5.72)$$

Sea q solución de

$$\begin{cases} \Delta q = \operatorname{div} u \\ \frac{\partial q}{\partial n} = 0. \end{cases} \quad (5.73)$$

Por [16] $q \in H^{1+s}(\Omega)$. Tomamos $u = \nabla q$ pues $u \in G$ que lo podemos hacer, porque la solución $q \in H^1(\Omega)$ de (5.73) es única salvo constantes. Luego:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s} &= \|\nabla q\|_{H^s} \leq \|q\|_{H^{1+s}} \leq \|\operatorname{div} u\| \leq \|f\|_{L^2}. \\ &\Rightarrow u \in \{u \in (H^s(\Omega))^2 : \operatorname{div} u \in H^1\} \hookrightarrow V, \end{aligned} \quad (5.74)$$

donde la inmersión es compacta.

Tomamos una sucesión acotada $g_n \subset G$ y $u_n = T_2 g_n$. Entonces

$$\begin{cases} \|\nabla(\operatorname{div} u_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g_n\| \\ \|\operatorname{div} u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g_n\| \end{cases} \quad (5.75)$$

luego $\|\operatorname{div} u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g_n\| \leq \hat{C}$.

Por el teorema de Rellich-Kondrachov $H^1(\Omega)$ está inmerso en $L^2(\Omega)$ en forma compacta, luego existe una subsucesión $u_{n_k} \subset L^2(\Omega)$ que converge a una función $w_1 \in L^2(\Omega)$, es decir $\operatorname{div}(u_{n_k}) \rightarrow w_1$ en $L^2(\Omega)$. Además por (5.74) tenemos que $\|u_{n_k}\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|\operatorname{div}(u_{n_k})\|_{L^2(\Omega)}$. Como $H^s(\Omega)$ también está inmerso en $L^2(\Omega)$ en forma compacta (ver [11]), existe una subsucesión, que también denotaremos por u_{n_k} tal que $(u_{n_k}) \rightarrow w_0 \in L^2(\Omega)$. Por la continuidad del operador divergencia, tenemos que $\operatorname{div}(w_0) = w_1$ luego $w_0 \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ y $u_{n_k} \rightarrow w_0$ en $H(\operatorname{div}, \Omega)$. Con esto queda demostrado que T_2 es compacto.

Al igual que en la sección anterior escribiremos:

$$T = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

y definimos

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_2^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2^{\frac{1}{2}} \\ I & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -T_1 & -T_2^{\frac{1}{2}} \\ T_2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Por el teorema (5.1.8) se verifica que $\sigma(T) = \sigma(H)$, y $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(-T_1) \cup \{0\}$. Luego, utilizando que $\sigma_{disc}(H) = \sigma(H) - \sigma_{ess}(H)$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sigma(T) = \sigma(H) &= \sigma_{ess}(H) \cup (\sigma(H) - \sigma_{ess}(H)) = \\ &= \sigma_{ess}(B) \cup \sigma_{disc}(H) \\ &= \sigma_{ess}(-T_1) \cup \{0\} \cup \sigma_{disc}(H). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Por lo que solo basta caracterizar el espectro esencial de T_1 .

Lema 5.3.3 *Se verifica que:*

$$\sigma_{disc}(T_1) = \left\{ \frac{l_1}{k_1}, \dots, \frac{l_j}{k_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, K. \quad (5.79)$$

Demostración 5.3.4 *Recordemos que $T_1 f = u_1$, donde:*

$$a(u_1, v) = 2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} f \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K l_j f_j \bar{v}_j, \quad \forall v \in G. \quad (5.80)$$

Entonces, utilizando la definición de la forma a tenemos

$$\lambda \left[\rho_0 c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} f \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K k_j f_j \bar{v}_j \right] = 2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} f \operatorname{div}(\bar{v}) + \sum_{j=1}^K l_j f_j \bar{v}_j \quad (5.81)$$

Sea $m \in \{1, \dots, k\}$, definimos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} \xi &= \{v \in G / \operatorname{div} v = 0\}, \\ \xi_m &= \{v \in G / \operatorname{div} v = 0, v|_{\Gamma_j} = 0 \forall j \neq m, j \in \{1, \dots, K\}\}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

De donde resulta: $\lambda k_m f_m \bar{v}_m = l_m f_m \bar{v}_m \forall v \in \xi_m$. Luego $\lambda_m = \frac{l_m}{k_m}$ es un autovalor con autoespacio asociado ξ_m .

Proposición 5.3.1 *Se verifica que*

$$\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k$$

y

$$\dim(\xi) = 2K.$$

Demostración 5.3.5 Veamos primero que $\bigcap_{i=1}^K \xi_m = \{0\}$.

Sea $v \in \bigcap_{i=1}^K \xi_m$. Entonces $v = \nabla\psi$ con $\Delta\psi = 0$ y $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\Gamma_m} = 0 \Rightarrow \psi = cte \Rightarrow v = \nabla\psi = 0$.

Sea $v \in \xi_m$. Entonces $\operatorname{div}v = 0, v \in \nabla(H^1(\Omega)), v|_{\Gamma_j} = 0, j \neq m$, y $v|_{\Gamma_m} = (a, b)$. Luego existe $\psi \in H^1(\Omega)$ tal que $v = \nabla\psi$, y entonces $\Delta\psi = 0$.

Consideramos ψ_1 y ψ_2 soluciones de

$$\begin{cases} \Delta\psi_i & = \operatorname{div}v = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\psi_i}{\partial n}|_{\Gamma_0} & = 0, \\ \frac{\partial\psi_i}{\partial n}|_{\Gamma_j} & = 0 & j \neq m, \\ \frac{\partial\psi_i}{\partial n}|_{\Gamma_m} & = e_i \cdot n = n_i. \end{cases} \quad (5.83)$$

y definimos $v_1 = \nabla\psi_1$ y $v_2 = \nabla\psi_2$. La función $\psi - a\psi_1 - b\psi_2$ es armónica y con todas las condiciones de borde nulas. Luego es una constante, es decir $\psi = a\psi_1 + b\psi_2 + c$. Tomando gradiente resulta $v = av_1 + bv_2$ con lo cual $\{v_1, v_2\}$ es una base de ξ_m . Luego $\dim(\xi) = 2K$.

Sea $F = \{v \in G : a(v, w) = 0 \quad \forall w \in \xi\} = \xi^\perp$. Entonces $G = \xi \oplus F$.

Luego, si $v \in F$ entonces

$$\sum_{j=1}^K k_j v_j \bar{w}_j = 0, \quad \forall w \in \xi.$$

Entonces $v_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, K$. En consecuencia resulta que

$$F = \{v \in G : v_j = 0, j = 1, \dots, K\}.$$

Observemos que $\dim(F) = \infty$.

Si $f \in F$ es una autofunción de autovalor λ_0 entonces

$$\lambda_0 \rho_0 c^2 \int_{\Omega} (\operatorname{div}f) \operatorname{div}(\bar{v}) = 2\mu \int_{\Omega} (\operatorname{div}f) \operatorname{div}(\bar{v}), \quad \forall v \in G,$$

de donde se sigue que $\lambda_0 = \frac{2\mu}{\rho_0 c^2}$. Más aún, $T_1|_F = \frac{2\mu}{\rho_0 c^2} Id$. Luego F es el autoespacio asociado a $\lambda_0 = \frac{2\mu}{\rho_0 c^2}$, y en consecuencia resulta

$$\sigma_{ess}(T_1) = \frac{2\mu}{\rho_0 c^2} \quad (5.84)$$

Proposición 5.3.2 $\sigma_{ess}(T|_G) = \sigma_{ess}(-T_1)$

Proposición 5.3.3 $\sigma(T_1) = \sigma_{ess}(T_1) \cup \sigma_{disc}(T_1)$. donde

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(T_1) &= \frac{2\mu}{\rho_0 c^2}, \\ \sigma_{disc}(T_1) &= \left\{ \frac{l_1}{k_1}, \dots, \frac{l_j}{k_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (5.85)$$

En virtud de los resultados obtenidos previamente, estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de este trabajo:

Teorema 5.3.6 *El espectro del operador T está dado por:*

$$\sigma(T) = \sigma_{ess}(T) \cup \sigma_{disc}(T) \cup \{0\}. \quad (5.86)$$

donde $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T|_G) \cup \{0\} = \left\{ 0, \frac{-2\mu}{\rho_0 c^2} \right\}$.

Con dicho teorema se concluye entonces la caracterización del problema espectral a tratar en este trabajo.

5.4. Conclusión

El problema de vibración fluido-estructura es de interés ya que aparece en varios problemas industriales, como la industria nuclear. En este trabajo hemos observado como los problemas de autovalores aparecen naturalmente al modelar problemas de vibraciones. En particular, los problemas cuadráticos se originan al incorporar a un sistema conservativo un mecanismo de disipación proporcional a la velocidad y se observa como el fenómeno de amortiguamiento debido a la disipación está asociado con un problema de autovalores complejo. El problema cuadrático obtenido puede linealizarse con un correspondiente cambio de variables, lo que conduce a un problema de autovalores generalizado. Caracterizar el espectro de los operadores asociados a dicho problema es importante no solamente desde el punto de vista físico, ya que los autovalores estará asociados a distintos

modos de vibración del sistema, si no desde el punto de vista matemático. En la resolución de problemas de vibración fluido estructura, en ocasiones se recurren a métodos numéricos. Para calcular numéricamente el espectro de un operador T con dominio y rango en un espacio de Hilbert separable, X , se sustituyen los autovalores y autofunciones de T por un por autovalores y autofunciones de otro operador T_h con dominio en X y rango en un espacio de dimensión finita V_h . Se dice que T_h es una aproximación de T si:

$$T_h u \rightarrow T u \quad \forall u \in X, \quad (5.87)$$

donde el espectro de cada operador T_h se obtiene resolviendo un problema matricial de autovalores generalizado [6]. Sabemos que los operadores T_h al ser de rango finito, son compactos, y que el límite de una sucesión de operadores compacto, es un operador compacto, es decir que será posible aproximar T de forma óptima cuando T sea compacto. Como vimos en este capítulo, el operador de interés, no necesariamente es compacto, en cuyo caso previo a la resolución numérica, es necesario descomponer el operador en dos operadores, uno compacto y otro no. Una vez caracterizado el espectro de T , como se expuso en este capítulo, se podría aproximar numéricamente la parte compacta. De los resultados obtenidos en este capítulo observamos que:

1. El espectro esencial de T para el sistema fluido-sólido es el mismo que para el fluido sin sólidos.
2. En el caso en que el fluido sea no viscoso $\mu = 0$ y el espectro esencial sólo es el cero.
3. Si consideramos solamente un fluido no viscoso encerrado en la cavidad obtenemos que el espectro discreto es un conjunto de autovalores aislados con autoespacios de dimensión finita ya que al suponer que la viscosidad es pequeña, asumimos que los autovalores del sistema viscoso serán una perturbación de los autovalores del sistema no viscoso que son una sucesión discreta.
4. Como al incorporar los tubos el espectro esencial no cambia, es razonable suponer que el espectro discreto seguirá siendo un conjunto de autovalores aislados, aunque falta demostrar este resultado en la teoría del trabajo. Lo que sí sabemos es que se puede aproximar numéricamente.

Bibliografía

- [1] Axler S., Linear Algebra done right (Springer, 1996)
- [2] Beards C. F. , Structural Vibration: Analysis and Damping (Butterworth-Heinemann, 1996).
- [3] A. Bermúdez, R.G. Durán, R. Rodríguez, J. Solomin, Finite element analysis of a quadratic eigenvalue problem arising in dissipative acoustics (SIAM J. Numer. Anal. 38, 267-291, 2000).
- [4] Burden R.L., Faires J.D. , Numerical Analysis (PWS PUBLISHING COMPANY).
- [5] Conca C., Planchard J., Vanninathan M., Fluids and periodic structures (JOHN WILEY & SONS, 1995).
- [6] Dello Russo A., Estimaciones a priori y a posteriori del error para problemas de autovalores (Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Matemática).
- [7] Dlotko T., Sobolev spaces and embedding theorems (Silesian University, Poland).
- [8] Evans L. C., Gariepy R. F., Measure theory and fine properties of functions (CRC Press, 1992).
- [9] Evans L. C. , Partial Differential Equations, AMS, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, 1998. (AMS, 1998).
- [10] Farlow S. J. , Partial Differential Equations for Scientists and Engineers (DOVER PUBLICATIONS, INC.).
- [11] Folland G., Introduction to partial differential equations, (Princeton Academic Press, 1995.)
- [12] Gatti P. L. , Ferrari V., Applied Structural and Mechanical Vibrations (E & FN Spon, 1999).

- [13] Gockenbach M. S., Partial Differential Equations Analytical and Numerical Methods (Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002)
- [14] Gockenbach M. S., Understanding and Implementing the Finite Element Method (Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006)
- [15] Gómez J. D. , Anguas J.R., Ecuaciones en derivadas parciales y análisis funcional (Apuntes de Curso, 2010/11).
- [16] Grisvard P., Elliptic Problems in Nonsmooth Domains (University of Nice).
- [17] Girault V. Raviart P.A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, (Springer-Verlag, 1986).
- [18] Golub G.H, Van Loan C.F Matrix Computations, (The Johns Hopkins University Press, 2013).
- [19] Kreyszig E. , Introductory functional analysis with applications (JOHN WILEY & SONS, 1978).
- [20] Lax P. D., Linear Algebra and Its Applications (JOHN WILEY & SONS, 2007).
- [21] Lepe A. F. A., Problemas de vibraciones, acústica y disipación (Universidad de Concepción, 2017).
- [22] Piracés J. M. Modelado de las vibraciones de un arreglo de tubos elásticamente montados inmersos en un fluido compresible utilizando adaptividad hp (Instituto Balseiro, Junio 2011).
- [23] Rao S. S. , Vibration of Continuous Systems (JOHN WILEY & SONS, 2007).
- [24] Reed M. , Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators (Academic Press, 1978).
- [25] Strang G. Linear Algebra and Its Applications (Thomson Brooks/Cole,2006).
- [26] Weinberger H.F. , Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (Reverté, 1970).
- [27] Wilkinson J.H. , Algebraic Eigenvalue Problema (Oxford University Press, 1965).