



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

TRABAJO FINAL DE  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

SISTEMAS TERMOMECAÑICOS LAGRANGIANOS CONTINUOS  
Y DISCRETOS: UN PRIMER ENFOQUE

*Alumno: Marcos Julián Bonich*

*Director: Dr. Javier Fernández*

*Co-Director: Dr. Maximiliano Palacios Amaya*

## Resumen

Un problema básico de la Mecánica Clásica es hallar la evolución de cada sistema mecánico. Este problema se traduce, según la formulación variacional lagrangiana, al de hallar los extremos de una funcional (la acción) sobre un espacio de caminos; y en última instancia, al de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, no siempre es posible encontrar soluciones analíticas a esas ecuaciones, por lo que, una posibilidad es recurrir a métodos numéricos que permitan aproximar su solución. En particular, los métodos numéricos empleados en mecánica, son los llamados integradores variacionales, que poseen propiedades “buenas”, como por ejemplo la conservación de estructuras simplécticas, permitiendo realizar simulaciones a tiempos prolongados. Los sistemas lagrangianos discretos son sistemas dinámicos discretos, cuyas trayectorias son integradores variacionales, que se obtienen mediante un principio variacional.

En la vida real, los sistemas físicos tienen propiedades termodinámicas, como la temperatura, la presión, la energía interna, el calor y otras, que no pueden ser modeladas por la Mecánica. Sin embargo, es posible combinar la Mecánica y la Termodinámica para dar lugar a la formulación de los llamados Sistemas Termomecánicos Lagrangianos. Estos sistemas, al igual que los mecánicos, se formulan a partir de un principio variacional inspirado en el modelo lagrangiano. En los sistemas termomecánicos también existe una equivalencia entre el principio variacional y la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que nuevamente tenemos el mismo inconveniente. Surge entonces la formulación “a tiempo discreto” de los sistemas termomecánicos, donde se busca aproximar la evolución de estos sistemas por medio de integradores variacionales.

En este trabajo introduciremos nociones básicas sobre los sistemas termomecánicos lagrangianos y su versión a tiempo discreto. Al comienzo haremos un repaso sobre sistemas lagrangianos continuos y discretos, dando definiciones y resultados, que luego adaptaremos al formalismo de los sistemas termomecánicos. Seguiremos principalmente el artículo [11] y completaremos algunos resultados importantes que no están probados en dicho artículo. Luego desarrollaremos un método de discretización, para construir un sistema termomecánico discreto a partir de un sistema termomecánico dado. Finalmente, analizaremos, por medio de ejemplos, algunas limitaciones del formalismo que ellos proponen.

Se intentará que el material de este trabajo sea auto-contenido para quienes tengan conocimientos básicos de Geometría y Cálculo, para ello, agregaremos tres apéndices que servirán como apoyo para el lector.

**Palabras clave:** MECANICA DISCRETA, SISTEMAS TERMOMECHANICOS, SISTEMAS TERMOMECHANICOS DISCRETOS, INTEGRADORES VARIACIONALES.

## Índice general

Capítulo 1. Introducción	1
1. Contexto histórico	1
2. Motivación y plan de trabajo	3
Capítulo 2. Sistemas Mecánicos Lagrangianos	7
1. Sistemas mecánicos lagrangianos forzados	7
2. Sistemas mecánicos lagrangianos discretos forzados	12
3. Sistemas mecánicos lagrangianos con vínculos	14
4. Sistemas mecánicos lagrangianos discretos con vínculos	16
Capítulo 3. Sistemas Termomecánicos Lagrangianos	19
1. Sistemas termomecánicos lagrangianos	19
2. Sistemas termomecánicos lagrangianos discretos	24
3. Existencia de flujo	28
4. Discretización de sistemas termomecánicos	32
Capítulo 4. Ejemplos de sistemas termomecánicos	37
1. Primer sistema: Carro con fricción	37
2. Segundo sistema: Fuerza elástica se contrapone a la presión de un gas	46
Capítulo 5. Conclusiones y trabajos a futuro	51
Capítulo A. Método para una recurrencia	53
Capítulo B. Cosas varias de Geometría Diferencial	55
Capítulo C. Apéndice Termodinámica	61
Capítulo D. Agradecimientos	65
Bibliografía	67



## 1. Contexto histórico

La Mecánica Clásica es una de las ramas principales de la Física, introducida por Isaac Newton en su libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* [17] en 1687. Esta se dedica a estudiar el comportamiento de cuerpos en reposo o cuyas velocidades son pequeñas comparadas a la de la luz. Ejemplos de sistemas de la Mecánica Clásica van desde la trayectoria de un proyectil, hasta el movimiento de los planetas en el Sistema Solar. A partir del estudio de sistemas inerciales, Newton formuló una ecuación vectorial que determina el movimiento de cuerpos (con masa constante) en el espacio:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) \quad (1.1)$$

donde  $\ddot{x}(t)$  es la aceleración de un cuerpo cuya posición es  $x(t)$  y  $F(t)$  es la fuerza ejercida sobre el mismo cuerpo, ambos son vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Esta ecuación es capaz de describir todos los fenómenos enmarcados en la Mecánica Clásica bajo el concepto de que el cambio de movimiento de un objeto es directamente proporcional a la fuerza impresa sobre éste.

Un planteo más moderno de la Mecánica surgió un siglo después, la Mecánica Lagrangiana, introducida por Joseph Louis de Lagrange en su libro *Mécanique analytique* [13] en 1788, es una reformulación de la Mecánica Newtoniana. Esta formulación surge a partir del Principio de Hamilton, el cual establece que las trayectorias de un sistema mecánico se obtienen como puntos críticos del funcional de acción sobre el espacio de caminos, que se calcula integrando una función escalar, el lagrangiano, sobre el camino dado, en el tiempo. La ventaja de la formulación Lagrangiana sobre la formulación Newtoniana, es que las configuraciones del sistema forman una variedad para la cual es posible elegir libremente las coordenadas que la parametrizan. Supongamos como ejemplo sencillo un péndulo simple que se balancea. Si uno considera la masa del péndulo como una partícula, al calcular el movimiento de la partícula en el plano, usando la mecánica newtoniana será necesario incluir una fuerza que restrinja el movimiento de la masa, obligándola a permanecer a distancia fija del punto de suspensión del péndulo, a esta restricción se la llama vínculo y a la fuerza, fuerza de vínculo. Para el mismo problema utilizando la mecánica de Lagrange, se observa el trayecto que puede recorrer la partícula y se elige un espacio de configuraciones conveniente que caracteriza completamente el posible movimiento de la partícula, en este caso puede ser una circunferencia de radio igual al largo de la varilla del péndulo. Esta elección elimina la necesidad de considerar la fuerza de vínculo antes mencionada, lo cual simplifica notablemente las ecuaciones que dan lugar a la dinámica del sistema.

En el ejemplo anterior, mencionamos que la trayectoria de la partícula podía considerarse sobre una circunferencia de radio igual al largo de la varilla del péndulo. En general los sistemas lagrangianos se consideran sobre variedades diferenciales que sean adecuadas para modelar la dinámica de las partículas. Al introducir estas estructuras matemáticas, inmediatamente hacen aparición conceptos intrínsecos de la Geometría Diferencial, como la suavidad, los espacios tangentes, etc. Al formular la Mecánica Lagrangiana haciendo uso de las herramientas provistas por la Geometría Diferencial, se tiene un formalismo dado en un lenguaje mucho más sofisticado y sistemático que el de la Mecánica Clásica. Una de las ventajas del tratamiento geométrico es que este facilita el estudio y comprensión de las simetrías de los sistemas y de las correspondientes magnitudes conservadas.

Es habitual que en las formulaciones mecánicas, ya sea la Newtoniana o la Lagrangiana, la descripción de los sistemas venga de la mano de ecuaciones diferenciales complicadas (o incluso imposibles) de resolver analíticamente. Es por esto que surge la necesidad de buscar formulaciones alternativas de dichos sistemas y una de ellas es la provista por la Mecánica Discreta. Para ponernos en contexto pensemos el siguiente ejemplo: supongamos que presenciamos el disparo de una bala de cañón, nosotros usando las ecuaciones de Newton sabemos cómo será su trayectoria conociendo la velocidad inicial de la bala dada por la fuerza explosiva y el ángulo de inclinación del cañón. Pero ahora supongamos que no conocemos la velocidad inicial y lo único que tenemos es una serie de fotos de la trayectoria en distintos tiempos de esta. Es posible describir el movimiento de la bala haciendo uso de estas fotos siguiendo una formulación de la mecánica diferente a las que mencionamos antes: la Mecánica Discreta es una formulación en la que uno de los objetivos es estudiar ciertos tipos de sistemas dinámicos, como por ejemplo sistemas físicos, en los que el tiempo es una variable discreta e incluso el espacio podría serlo. En esencia, la Mecánica Discreta se ocupa de describir sistemas dinámicos por medio de "fotos". La mayor motivación en el origen de la Mecánica Discreta es la cuestión: dado un sistema dinámico continuo, ¿cómo se pueden obtener sistemas discretos que aproximen al sistema continuo? y, de hecho, estudiar cuán buena es esa aproximación. En definitiva la Mecánica Discreta permite generar integradores numéricos para las ecuaciones de movimiento de un sistema continuo. Lo interesante de esta formulación es que también puede escribirse usando el lenguaje de la Geometría Diferencial, lo cual luego nos permitirá relacionarla con la formulación lagrangiana.

Otra disciplina destacada que tomará un papel importante en este trabajo es la Termodinámica, la cual es una rama de la Física que surge del intento de estudiar los llamados estados de equilibrio de sistemas dinámicos de muchas partículas en los que los parámetros de velocidad y posición de éstas no son conocidos. Lo llamativo de esta disciplina es que los estados de equilibrio de los sistemas quedan unívocamente determinados por una pequeña cantidad de variables macroscópicas, a pesar de que a nivel microscópico dicho sistema se componga de una gigantesca cantidad de partículas puntuales (por lo cual un estudio mecánico sería computacionalmente imposible). Dichas variables termodinámicas obedecen a ciertas leyes (leyes de la termodinámica), la primera de las cuales, establece una relación sobre la conservación de energía, relacionando la energía térmica con la energía mecánica. Los estados de equilibrio de los sistemas termodinámicos se estudian a partir de magnitudes tales como la energía interna, la entropía, el volumen y el número de moles del sistema, o por medio de magnitudes derivadas de las anteriores como la temperatura y la presión. Por ejemplo, un horno puede ser considerado como un sistema termodinámico: una caja cerrada con un calentador debajo. Las paredes no dejan escapar el aire del interior, con lo cual, el número de moles del sistema es constante. Además,

si suponemos que las paredes son aislantes térmicos perfectos (salvo la pared del calentador), el aire en el interior del horno va aumentando su temperatura gradualmente y a su vez, intenta expandirse, lo que conlleva a un aumento de la presión sobre las paredes del sistema. El aumento en la temperatura y la presión se traduce en el aumento de la energía interna del sistema. Este fenómeno nos muestra que existe una transferencia de energía: la energía química del gas que alimenta el calentador, se transforma por medio de la combustión y se transmite en forma de calor, para resultar en la energía interna del gas dentro del horno. En la Figura 1.1 ilustramos el sistema.

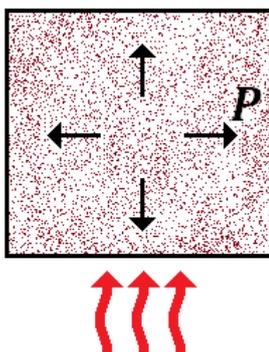


FIGURA 1.1. Horno cuyas paredes no dejan escapar el aire en su interior. Las flechas negras indican la presión  $P$  ejercida sobre las paredes del sistema.

La realidad es que en la práctica, al momento de modelar un sistema físico, los objetos usualmente tienen propiedades tanto mecánicas como termodinámicas, que afectan directamente la dinámica del sistema, por ejemplo: los pistones de un motor de combustión interna, el ventilador de una turbina o incluso el revestimiento de un cohete. Por esto surgió la necesidad de crear una nueva formulación que integra la Mecánica y la Termodinámica en una sola teoría, que fue llamada Termomecánica. Los sistemas termomecánicos son sistemas dinámicos que poseen propiedades tanto mecánicas como termodinámicas. El modelo termomecánico, que trataremos en este trabajo, utiliza como base la formulación lagrangiana de la mecánica e introduce convenientemente herramientas de la termodinámica que permiten estudiar estos sistemas híbridos. Una versión de la termomecánica que se dedica a estudiar sólidos (rígidos o deformables) y fluidos, es la Mecánica del Continuo introducida por Augustin Louis Cauchy, Siméon Denis Poisson y Claude-Louis Marie Henri Navier a principios del siglo XIX. Sin embargo, el modelo termomecánico que trataremos en este trabajo surge de un enfoque completamente diferente, ya que se trata de un modelo donde las variables tienen finitos grados de libertad. En este trabajo seguiremos principalmente una novedosa propuesta dada por F. Gay-Balmaz y H. Yoshimura en su artículo [11], en ella se combinan elementos de la mecánica lagrangiana y de la termodinámica, proponiendo como hipótesis fuerte, el hecho de poder describir los estados de equilibrio de un sistema termomecánico, por medio de la entropía. Otros autores que estudiaron el modelo de los sistemas termomecánicos son H. Cendra, S. Grillo y M. Palacios Amaya en su artículo [7], el cual utilizaremos como inspiración para estudiar otros ejemplos y contrastar el formalismo propuesto en [11].

## 2. Motivación y plan de trabajo

En este trabajo estudiaremos distintos aspectos de una clase de sistemas, llamados sistemas termomecánicos lagrangianos forzados. La motivación detrás del estudio de estos sistemas, es el hecho de que en la vida real los sistemas mecánicos siempre están ligados a

la termodinámica. Encontrar la evolución de dichos sistemas puede ser una tarea difícil, ya que, usualmente está modelada por la solución de ecuaciones diferenciales muy complicadas de resolver. Una forma alternativa de encontrar las trayectorias de dichos sistemas, es utilizando métodos numéricos, que permitan aproximar la evolución de los sistemas termomecánicos. Esto lleva la formulación de los sistemas termomecánicos discretos, cuyo objetivo es la construcción de dichos métodos numéricos, que en este caso, son conocidos como integradores variacionales.

En este sentido, uno de los objetivos de este trabajo es explicar qué son los sistemas termomecánicos lagrangianos forzados y dar una fundamentación sólida a ciertos tipos simples de sistemas termomecánicos discretos. Además, mediante ejemplos, se busca ilustrar el tipo de resultado numérico obtenible con los integradores desarrollados por este camino.

El segundo capítulo de este trabajo es una revisión de temas bien conocidos de la literatura sobre sistemas mecánicos lagrangianos y sistemas mecánicos lagrangianos discretos, que sirve como motivación para el estudio de los sistemas termomecánicos. Empezaremos estudiando los sistemas mecánicos lagrangianos forzados, dando su definición y su dinámica, al mismo tiempo que introducimos un ejemplo ilustrativo del tema. Luego, desarrollaremos la versión a tiempo discreto de estos sistemas y estudiaremos una versión discretizada del mismo ejemplo. Para ver más sobre estos temas recomendamos el artículo de Marsden-West [15]. Al final del capítulo, introduciremos algunas nociones básicas de los sistemas mecánicos con vínculos, para el caso continuo y el caso discreto. Esto último servirá más tarde para formular los sistemas termomecánicos, cuya definición requiere cierta comprensión de los sistemas de aquel tipo.

En el capítulo tercero, veremos los sistemas termomecánicos lagrangianos que son el tema principal de este trabajo. Seguiremos el artículo sobre sistemas termomecánicos lagrangianos de F. Gay-Balmaz y H. Yoshimura [11] y completaremos algunos puntos importantes de ese trabajo. Como en el primer capítulo, inicialmente introduciremos la versión continua de estos sistemas, cuya dinámica se obtiene a partir de un principio variacional. En base a ese principio, presentaremos un resultado, el Teorema 3.9, que permite obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema termomecánico (en vez de usar directamente el principio variacional). Daremos una demostración detallada de dicho teorema. Luego introduciremos la versión a tiempo discreto de los sistemas termomecánicos, cuya dinámica estará determinada por un principio variacional análogo al usado para los sistemas a tiempo continuo. Otra contribución de nuestro trabajo es la demostración completa de un resultado, el Teorema 3.17, que caracteriza las trayectorias de estos sistemas como soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas. Continuaremos viendo ejemplos ilustrativos de cada tipo de sistema. Luego dedicaremos una sección a introducir y demostrar un resultado que nos garantizará, bajo ciertas condiciones, la existencia del flujo discreto en un sistema termomecánico discreto y discutiremos, en un ejemplo, la necesidad de imponer esas condiciones para que un sistema admita trayectorias. Finalizaremos proponiendo un método para, a partir de un sistema termomecánico continuo, obtener una familia de sistemas discretos que, idealmente, aproxime su comportamiento.

En el capítulo cuarto estudiaremos dos ejemplos de sistemas termomecánicos elementales, el primero de los cuales fue tratado en el artículo [7]. En el primer ejemplo, trataremos un sistema conformado por un carro, cuyos ejes rozan al girar y esto da lugar a que sea interesante estudiar la transformación de su energía cinética en calor y la evolución de las variables termomecánicas relacionadas. Primero formularemos el sistema de manera continua y luego, usando las técnicas introducidas en el Capítulo 3, lo formularemos de

manera discreta utilizando dos discretizaciones diferentes. Luego compararemos los resultados obtenidos a partir de cada una de las discretizaciones. En el segundo ejemplo estudiaremos un sistema donde la fuerza elástica de un resorte se contrapone a la presión ejercida por la expansión de un gas dentro de una caja. Este último sistema es interesante porque servirá para ilustrar los límites del formalismo que estudiamos en el Capítulo 3 y que proponen en [11].

En el breve capítulo quinto haremos un resumen considerando los puntos más importantes de este trabajo y presentaremos una lista con las posibles líneas a investigar en el futuro.

Concluiremos este trabajo con tres apéndices que servirán como resumidas guías de lectura sobre temas que subyacen a este trabajo. En el Apéndice A se puede ver un método para resolver la ecuación de recurrencia que estará presente en el ejemplo del resorte con masa y fricción discreto del Ejemplo 2.22. En el Apéndice B sobre Geometría Diferencial, se desarrollan algunos tópicos de esta disciplina, que servirá como ayuda para familiarizarse con el lenguaje matemático que usaremos en este trabajo. Por último, en el Apéndice C sobre Termodinámica, están resumidas algunas de las herramientas básicas que utilizaremos de dicha disciplina en este trabajo.



## Sistemas Mecánicos Lagrangianos

En este capítulo primero abordaremos los sistemas mecánicos lagrangianos, empezando por definir qué son y cuál es su dinámica, luego agregaremos el concepto de fuerza definiendo su dinámica a partir del Principio de Lagrange-D'Alembert para estos sistemas. Ilustraremos las ideas de la primera sección con un ejemplo de sistema mecánico, usando la formulación lagrangiana presentada. En la segunda parte del capítulo, de forma similar a como haremos en la primera parte, presentaremos la formulación a tiempo discreto de los sistemas mecánicos lagrangianos, la cual en principio, no tiene relación alguna con la formulación lagrangiana de los sistemas continuos, sino que son “mundos paralelos”, que más tarde, en la Sección 4 del Capítulo 3, conectaremos. Finalizaremos el capítulo repasando algunas nociones básicas sobre sistemas mecánicos con vínculos y sistemas mecánicos discretos con vínculos, que serán necesarios para plantear el formalismo de los sistemas termomecánicos, en el capítulo siguiente.

### 1. Sistemas mecánicos lagrangianos forzados

En esta primera sección comenzaremos estudiando los sistemas mecánicos lagrangianos, los cuales son sistemas mecánicos que siguen la formulación de Lagrange. Presentaremos la definición de estos sistemas, con su dinámica y sus ecuaciones de evolución. Luego introduciremos el concepto de fuerza para introducir los sistemas mecánicos lagrangianos forzados junto a su dinámica y sus ecuaciones de evolución. Intuitivamente y siendo simplistas, un sistema mecánico lagrangiano es un sistema dinámico de partículas con sus interacciones, cuya dinámica puede ser descrita a partir de una función llamada lagrangiano. Ejemplos de estos tipos de sistemas pueden ser, desde un péndulo simple, hasta la órbita de un planeta o el sistema solar completo.

Usaremos el lenguaje de la Geometría Diferencial y sugerimos [3] y [14] como material de consulta. Como libro de referencia para Sistemas Mecánicos, sugerimos [1].

NOTA 2.1. En este trabajo usaremos el calificativo suave para referirnos tanto a funciones como a variedades diferenciales de clase  $C^\infty$ .

DEFINICIÓN 2.2. Un sistema mecánico lagrangiano (SML) es un par  $(Q, L)$  donde  $Q$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$ , denominada el espacio de configuración y  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave, denominada lagrangiano.

NOTA 2.3. En los sistemas mecánicos, es frecuente que los lagrangianos sean de la forma

$$L(v) = K(v) - V(\tau(v)) \quad v \in TQ$$

donde las funciones,  $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$  y  $K : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , son llamadas energía potencial y cinética respectivamente. Esta última función suele ser cuadrática y definida positiva en cada fibra de  $TQ$ , por lo que define una métrica riemanniana sobre  $Q$ .

Un ejemplo es el lagrangiano de una partícula libre en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , con masa  $m$ , en un campo gravitatorio con origen en una masa  $M$ :

$$L(x, \dot{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}m \|\dot{x}\|^2}_K + \underbrace{\frac{GM}{\|x\|}}_V$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $x$  la posición de la partícula de masa  $m$  en el espacio  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  y  $\|x\|$  es la distancia de la partícula de masa  $m$  a la masa  $M$  ubicada en el origen del sistema de coordenadas.

A continuación formularemos los sistemas mecánicos lagrangianos, para ello, daremos algunas definiciones previas.

Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto, una curva sobre  $Q$  es una función suave  $q : I \rightarrow Q$ . A continuación veremos que todo SML da lugar a un sistema dinámico. A este fin llamaremos espacio de caminos  $C(Q)$  al conjunto constituido por todas las curvas suaves sobre  $Q$ . Se prueba que  $C(Q)$  es una variedad diferencial de dimensión infinita.

Una variación sobre una curva  $q(t)$  es una función suave  $\gamma : I \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Q$  tal que  $\gamma(t, 0) = q(t)$  para todo  $t \in I$ . Diremos que una variación  $\gamma$  es a extremos fijos si para cualquier  $s$  se cumple  $\gamma(t_0, s) = q(t_0)$  y  $\gamma(t_1, s) = q(t_1)$ , donde  $t_0$  y  $t_1$  son los extremos de  $I$ .

Una variación infinitesimal sobre  $q(t)$  es una función suave  $\delta q : I \rightarrow TQ$  tal que  $\delta q(t) \in T_{q(t)}Q$ . Diremos que una variación infinitesimal  $\delta q$  es a extremos fijos si  $\delta q(t_0) = 0$  y  $\delta q(t_1) = 0$ , donde  $t_0$  y  $t_1$  son los extremos de  $I$ .

Asociada a cualquier variación  $\gamma$ , sobre  $q(t)$ , existe una variación infinitesimal  $\delta q(t) := \frac{d}{ds}\gamma(t, s)|_{s=0}$ . Para cada variación infinitesimal existe una variación  $\gamma$ , no única, que la genera en este sentido.

DEFINICIÓN 2.4. En un SML  $(Q, L)$ , una curva  $q \in C(Q)$  es trayectoria del sistema si y sólo si, al tomar variaciones infinitesimales sobre  $q : [t_0, t_1] \rightarrow Q$  a extremos fijos, ésta es punto crítico del funcional de acción (ver Nota 2.5)  $S : C(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  definido mediante

$$S(q) := \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t))dt.$$

esta condición es conocida como Principio de Hamilton [1, 12].

NOTA 2.5. Que  $q$  sea punto crítico del funcional de acción significa que

$$0 = \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{d\gamma}{dt}(t, s)\right)dt \Big|_{s=0}$$

para toda variación  $\gamma$  sobre  $q$  a extremos fijos.

En la práctica lo más usual es hallar las trayectorias de un sistema mecánico como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, llamadas *ecuaciones de evolución* o *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

TEOREMA 2.6 (Ecuaciones de Euler-Lagrange). Sean  $(Q, L)$  un SML,  $(U, \phi)$  una carta coordenada de  $Q$  y  $q : I \rightarrow Q$  una curva en  $Q$  tal que  $q(I) \subset U$ . Entonces  $q$  es trayectoria del sistema si y sólo si se verifican las siguientes  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L \circ \Phi^{-1})}{\partial \dot{x}^i} \right) (x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial(L \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i} (x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

con  $(x(t), \dot{x}(t)) = \Phi(q'(t))$  donde  $\Phi : TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$  es la carta coordenada de  $TQ$  que proviene de  $\phi$ .

Este Teorema es un caso particular del Teorema 3.9 que se demostrará más adelante.

Siguiendo con los sistemas mecánicos, introducimos a continuación a los sistemas forzados, que son una extensión muy común de los SML.

**DEFINICIÓN 2.7.** Dada una variedad diferencial  $Q$ , una fuerza es una función suave  $F : TQ \rightarrow T^*Q$  que preserva las fibras, i.e.  $F(v_q) \in T_q^*Q$ , donde  $T_q^*Q$  es el espacio cotangente de  $Q$  en el punto  $q$  y  $v_q \in T_qQ$ .

**EJEMPLO 2.8.** Consideremos un potencial suave  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en  $Q = \mathbb{R}^3$  y con él definamos una fuerza conservativa  $F : TQ \rightarrow T^*Q$  mediante,

$$F(x, \dot{x})(x, \delta x) = -\nabla V(x) \cdot \delta x,$$

para  $\delta x \in T_xQ$ .

Consideremos ahora el siguiente lagrangiano para el sistema

$$L((x_1, x_2, x_3), (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_1, x_2, x_3).$$

Haciendo uso del Teorema 2.6 llegamos a la ecuación

$$m(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) + \nabla V(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Luego, despejando, obtenemos la ecuación de Newton (1.1)

$$m(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = F((x_1, x_2, x_3), (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)).$$

Esto muestra como los sistemas lagrangianos (sin fuerzas) permiten modelar a los sistemas que tienen solo fuerzas conservativas.

Una forma alternativa de definir una fuerza es como una 1-forma diferencial sobre la variedad diferencial  $TQ$ . Dada  $F : TQ \rightarrow T^*Q$  que preserva las fibras, definimos  $\hat{F} : TQ \rightarrow T^*TQ$  tal que

$$\hat{F}(v_q)(w_{v_q}) := F(v_q)(\tau_{Q^*,v_q}(w_{v_q})), \quad (2.1)$$

con  $v_q \in T_qQ$  y  $w_{v_q} \in T_{v_q}TQ$ , donde  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  es la proyección del fibrado tangente y  $\tau_{Q^*,v_q} : T_{v_q}TQ \rightarrow T_qQ$  su diferencial en el punto  $v_q$ . Al evaluar  $\hat{F}$  sobre un vector tangente  $v_q \in TQ$  tenemos  $\hat{F}(v_q) : T_{v_q}(TQ) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Luego tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T_{v_q}TQ & \xrightarrow{\tau_{Q^*,v_q}} & T_qQ \\ & \searrow \hat{F}(v_q) & \downarrow F(v_q) \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

**DEFINICIÓN 2.9.** Diremos que:

- Dado  $v_q \in T_qQ$ , un vector  $w_{v_q} \in T_{v_q}TQ$  es vertical  $\Leftrightarrow \tau_{Q^*,v_q}(w_{v_q}) = 0$ .
- Una 1-forma  $\omega$  sobre  $TQ$  es horizontal  $\Leftrightarrow \omega = 0$  sobre todos los vectores verticales.

**LEMA 2.10.** Existe una biyección entre las fuerzas sobre  $Q$  (Definición 2.7) y las 1-formas horizontales sobre  $TQ$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\hat{F}$  una 1-forma horizontal, entonces definimos  $F : TQ \rightarrow T^*Q$  mediante  $F(v_q)(\delta q) = \hat{F}(v_q)(\delta w)$ , donde  $v_q, \delta q \in T_q Q$  y  $\delta w \in T_{v_q} TQ$  es tal que  $\tau_{Q^*, v_q}(\delta w) = \delta q$ . Veamos que  $F$  está bien definida, para ello, consideremos  $\delta w, \delta w' \in T_{v_q} TQ$  tales que  $\tau_{Q^*, v_q}(\delta w) = \delta q$  y  $\tau_{Q^*, v_q}(\delta w') = \delta q$ , entonces  $\tau_{Q^*, v_q}(\delta w - \delta w') = \delta q - \delta q = 0$  con lo cual  $\delta w - \delta w'$  es horizontal. Usando esto tenemos que  $\hat{F}(v_q)(\delta w) - \hat{F}(v_q)(\delta w') = \hat{F}(v_q)(\delta w - \delta w') = 0$  por ser  $\hat{F}$  horizontal. Por lo tanto  $F$  no depende de la elección del  $\delta w$ .

Recíprocamente, si  $F : TQ \rightarrow T^*Q$  es una función suave que preserva las fibras, basta definir  $\hat{F}$  como en (2.1).

Veamos que estas dos asignaciones son mutuamente inversas. Para ello consideremos la fuerza  $F$  y con ella construimos la 1-forma horizontal  $\hat{F}(v_q)(w_{v_q}) = F(v_q)(\tau_{Q^*, v_q}(w_{v_q}))$ . Ahora, a partir de  $\hat{F}$  definimos  $F'(v_q)(\delta q) = \hat{F}(v_q)(\delta w)$  con  $\delta w \in T_{v_q} TQ$  tal que  $\tau_{Q^*, v_q}(\delta w) = \delta q$ . De esta forma  $F'(v_q)(\delta q) = \hat{F}(v_q)(\delta w) = F(v_q)(\delta q)$ , así  $F' = F$ . Recíprocamente si consideramos la 1-forma horizontal  $\hat{F}$ , con ella construimos  $F(v_q)(\delta q) = \hat{F}(v_q)(\delta w)$ , donde  $v_q, \delta q \in T_q Q$  y  $\delta w \in T_{v_q} TQ$  es tal que  $\tau_{Q^*, v_q}(\delta w) = \delta q$ . Luego si a  $F$  le asignamos la 1-forma  $\hat{F}'$ , tenemos que  $\hat{F}'(v_q)(\delta w) = F(v_q)(\tau_{Q^*, v_q}(\delta w)) = F(v_q)(\delta q) = \hat{F}(v_q)(\delta w)$ , con lo cual  $\hat{F} = \hat{F}'$ .  $\square$

NOTA 2.11. La posibilidad de reinterpretar las fuerzas como 1-formas sobre  $TQ$ , será útil en la Sección 2, para motivar la definición de fuerza discreta.

La siguiente definición puede encontrarse en el Capítulo 2.1 de [12].

DEFINICIÓN 2.12. Sea  $(Q, L)$  un SML y  $F : TQ \rightarrow T^*Q$  una fuerza. Un sistema mecánico lagrangiano forzado (SMLF) es un sistema dinámico definido por  $(Q, L, F)$ . En un SMLF, una curva  $q : [t_0, t_1] \rightarrow Q$ , es trayectoria del sistema si satisface la condición:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} F(q'(t)) \delta q dt = 0,$$

para todas las variaciones infinitesimales  $\delta q$  sobre  $q$  con extremos fijos. Este principio es llamado el *Principio de Lagrange-D'Alembert*.

NOTA 2.13. El término izquierdo de la expresión anterior significa tomar una variación  $\gamma(t, s)$  de  $q$  con extremos fijos, que genere  $\delta q(t)$  y calcular la expresión:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t)) dt = \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{d\gamma}{dt}(t, s)\right) dt \Big|_{s=0}.$$

TEOREMA 2.14 (Ecuaciones de Lagrange–D'Alembert). Sean  $(Q, L, F)$  un SMLF,  $(U, \phi)$  una carta coordenada de  $Q$  y  $q$  una curva en  $Q$  contenida en  $U$ . Entonces  $q$  es trayectoria del sistema si y sólo si se verifican las siguientes  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L \circ \Phi^{-1})}{\partial \dot{x}^i} \right) (x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial(L \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i} (x(t), \dot{x}(t)) \\ = f_i \circ \Phi^{-1}(x(t), \dot{x}(t)), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

con  $(x(t), \dot{x}(t)) = \Phi(q'(t))$  donde  $\Phi$  es la función coordenada de  $TQ$  asociada a  $\phi$  y  $F = \sum_{j=1}^n f_j d\phi_j$  es la expresión local de la fuerza en la carta coordenada elegida.

Este resultado se demuestra siguiendo una idea similar a la de la demostración del Teorema 3.9, la cual escribiremos más adelante.

EJEMPLO 2.15. Consideremos  $\mathbb{R}^3$  como espacio de configuración y pensemos en un lagrangiano  $L(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}m \|\dot{x}\|^2$  correspondiente a una partícula libre y una fuerza  $F(x, \dot{x}) = \sum_{j=1}^3 f_j(x, \dot{x}) dx_j$ . Haciendo uso del Teorema 2.14 obtenemos las ecuaciones para las trayectorias del sistema:

$$m\ddot{x}_j = f_j(x, \dot{x}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Estas son las ecuaciones de Newton (1.1) para un sistema formado por una única partícula en  $\mathbb{R}^3$  sujeta a una fuerza  $F$ .

El Ejemplo 2.15 muestra como la Mecánica Newtoniana (al menos la de una partícula) se puede obtener a partir de la formulación lagrangiana.

EJEMPLO 2.16 (Resorte Con Masa). Un ejemplo de SMLF es el resorte con un extremo fijo y con una masa en el otro extremo sobre la que actúa una fuerza de rozamiento. En este sistema,  $Q = \mathbb{R}$  es el espacio de configuración y  $x(t) \in \mathbb{R}$  es la posición de la masa del resorte.

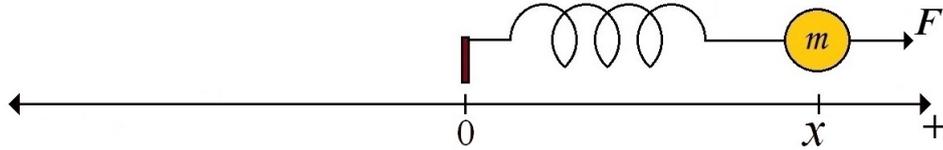


FIGURA 2.1. Esquema del SMLF del Ejemplo 2.16

El lagrangiano propuesto es

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\eta x^2,$$

donde  $m$  es la masa,  $\eta$  es la constante de elasticidad del resorte. Además, la fuerza que actúa sobre la masa es  $F(x, \dot{x}) = -\lambda\dot{x}dx$ , con  $\lambda \geq 0$  el coeficiente de fricción de la masa con el aire.

Por el Teorema 2.14 las trayectorias del sistema son las soluciones de la ecuación de Lagrange-D'Alembert que, en este caso, es  $m\ddot{x} + \eta x = -\lambda\dot{x}$ .

Existen dos posibles soluciones reales de esta ecuación. La primera, si  $\lambda^2 - 4\eta m \geq 0$  es

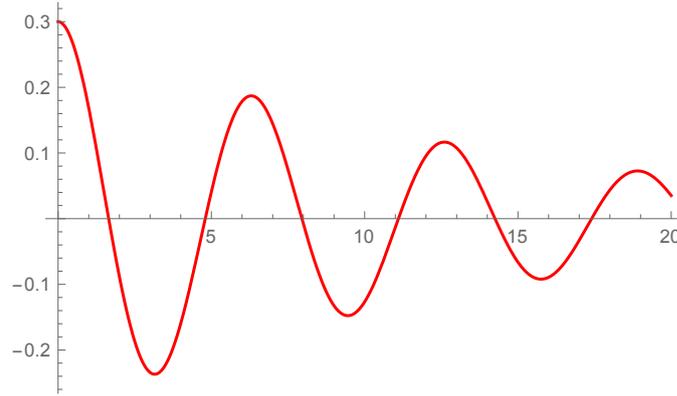
$$x(t) = A_1 \exp\left(\frac{-t(\sqrt{\lambda^2 - 4\eta m} + \lambda)}{2m}\right) + A_2 \exp\left(\frac{t(\sqrt{\lambda^2 - 4\eta m} - \lambda)}{2m}\right).$$

Pero a nosotros, según las condiciones iniciales que tomaremos, nos interesará el caso  $\lambda^2 - 4\eta m < 0$ , para el cual

$$x(t) = x_0 e^{-t\frac{\lambda}{2m}} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{4\eta m - \lambda^2}}{2m}t\right) + \frac{(2m\dot{x}_0 - x_0)}{\sqrt{4\eta m - \lambda^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\eta m - \lambda^2}}{2m}t\right) \right),$$

donde  $x_0$  y  $\dot{x}_0$  son la posición inicial y la velocidad inicial respectivamente.

Si consideramos  $\eta = 2$  N/m,  $m = 2$  kg,  $\lambda = 0.3$  N·s/m. El gráfico de  $x(t)$  para condiciones iniciales:  $x_0 = 0.3$  m y  $\dot{x}_0 = 0$  m/s aparece en la Figura 2.2

FIGURA 2.2. Gráfico de  $x(t)$  para el Ejemplo 2.16

## 2. Sistemas mecánicos lagrangianos discretos forzados

En esta sección introduciremos los sistemas mecánicos lagrangianos discretos, en el sentido de que el tiempo es discreto <sup>1</sup>. Intuitivamente podemos pensar esto como si solo tuviéramos una serie de fotos del sistema mecánico que queremos estudiar y tuviéramos que describir su dinámica en base a estas, independientemente de lo que ocurra entre cada foto. En los sistemas discretos, a diferencia de los sistemas continuos, se puede describir su dinámica mediante ecuaciones algebraicas.

De forma similar a como hicimos en la sección anterior, definiremos los sistemas mecánicos lagrangianos discretos, junto a su dinámica y sus ecuaciones de evolución discretas. Para saber más sobre sistemas mecánicos discretos, sugerimos [15] como material de lectura.

**DEFINICIÓN 2.17.** Un sistema mecánico lagrangiano discreto con fuerzas (SMLFd) es una terna  $(Q, L_d, F_d)$ , donde  $Q$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$  llamada espacio de configuración,  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave denominada lagrangiano discreto y  $F_d$  es una 1-forma sobre  $Q \times Q$  llamada fuerza discreta.

Un SMLFd da lugar a un sistema dinámico con tiempo discreto cuyas trayectorias definimos a continuación.

Dado un intervalo discreto  $I_d = \{1, \dots, N\}$ , una curva discreta sobre  $Q$ , es una función  $q_d : I_d \rightarrow Q$ . Una variación infinitesimal de  $q_d$  es una función  $\delta q : I_d \rightarrow TQ$  tal que  $\delta q_k \in T_{q_k}Q$  y diremos que es a extremos fijos si  $\delta q_0 = 0$  y  $\delta q_N = 0$ .

**NOTA 2.18.** Dado que el espacio cotangente a  $Q \times Q$  en el punto  $(q^-, q^+)$  admite una descomposición de la forma:

$$T_{(q^-, q^+)}^*(Q \times Q) \cong T_{q^-}^*Q \oplus T_{q^+}^*Q, \quad (2.2)$$

podemos descomponer la fuerza discreta como  $F_d = (F_d^-, F_d^+)$ . Más explícitamente recordando la dependencia funcional:

$$F_d(q^-, q^+) = (F_d^-(q^-, q^+), F_d^+(q^-, q^+)).$$

Adaptaremos la siguiente definición de la dada en la sección 3.2.1 de [15].

<sup>1</sup>Otra posibilidad es que tanto el tiempo como el espacio sean discretos, en ese caso se reemplaza la variedad diferencial  $Q$  por un complejo simplicial, cuyos vértices son las configuraciones posibles del sistema.

DEFINICIÓN 2.19 (Principio variacional discreto). En un SMLFd  $(Q, L_d, F_d)$  una curva discreta  $q_d$  es trayectoria del sistema si satisface la condición variacional:

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} (F_d^-(q_k, q_{k+1})\delta q_k + F_d^+(q_k, q_{k+1})\delta q_{k+1}) = 0, \quad (2.3)$$

para toda variación infinitesimal  $\delta q$  de  $q_d$  a extremos fijos.

NOTA 2.20. El término izquierdo de la expresión (2.3) significa tomar una variación a extremos fijos  $\gamma(k, s)$  de  $q$ , que genere  $\delta q$  para luego calcular la expresión

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) &= \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\gamma(k, s), \gamma(k+1, s)) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (D_1 L_d(q_k, q_{k+1})\delta q_k + D_2 L_d(q_k, q_{k+1})\delta q_{k+1}). \end{aligned}$$

El siguiente resultado permite caracterizar las trayectorias de un SMLFd como soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas.

TEOREMA 2.21 (Ecuaciones de Lagrange - D'Alembert discretas). *Sea  $(Q, L_d, F_d)$  un SMLFd. Una curva discreta  $q_d = (q_0, q_1, \dots, q_N)$  sobre  $Q$  es trayectoria del sistema si y sólo si se verifica la siguiente ecuación algebraica:*

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + F_d^-(q_k, q_{k+1}) + F_d^+(q_{k-1}, q_k) = 0 \in T_{q_k}^* Q, \quad (2.4)$$

para  $k = 1, \dots, N-1$ .

El Teorema 2.21 se demuestra con técnicas análogas a las usadas en el Teorema 3.17 cuya demostración llevaremos a cabo más adelante.

EJEMPLO 2.22. Para ilustrar este principio discreto, podemos aplicarlo a una "versión a tiempo discreto" del sistema dado en el Ejemplo 2.16. El espacio de configuración es  $Q = \mathbb{R}$  y un posible lagrangiano discreto para el sistema es

$$L_d(x^-, x^+) = h \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} (\eta x^-)^2 \right),$$

donde  $h$  es una constante real no nula, que representa un paso de tiempo.

La fuerza discreta de rozamiento es  $F_d(x^-, x^+) = -h\lambda \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right) dx^-$  y según la descomposición discutida en la Nota 2.18, en este caso  $F_d^- = F_d$  y  $F_d^+ = 0$ .

Luego utilizando el Teorema 2.21, las ecuaciones de evolución son

$$\left( 1 + h \frac{\lambda}{m} \right) x_{k+1} + x_{k-1} = \left( 2 - h^2 \frac{\eta}{m} + h \frac{\lambda}{m} \right) x_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

de la cual podemos despejar una fórmula recursiva para la trayectoria  $x_{k+1}$

$$x_{k+1} = \frac{1}{1 + h \frac{\lambda}{m}} \left( \left( 2 - h^2 \frac{\eta}{m} + h \frac{\lambda}{m} \right) x_k - x_{k-1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

En el Apéndice A se muestra cómo obtener la fórmula explícita (A.2) para la trayectoria:

$$x_k = x_1 \left( \sqrt{1 + h \frac{\lambda}{m}} \right)^{1-k} \frac{\sin(k\theta)}{\sin(\theta)} - x_0 \left( \sqrt{1 + h \frac{\lambda}{m}} \right)^{-k} \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad (2.6)$$

con  $\theta$  tal que,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + h \frac{\lambda}{m}}} \left( 1 - \frac{h}{2m} (h\eta + \lambda) \right).$$

Consideremos  $\eta = 2 \text{ N/m}$ ,  $m = 2 \text{ Kg}$ ,  $\lambda = 0.3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . Luego, el gráfico de  $x_k$  para condiciones iniciales:  $x_0 = 0.3 \text{ m}$  y  $x_1 = 0.3 \text{ m}$  y  $h = 0.1 \text{ s}$  es la Figura 2.3.

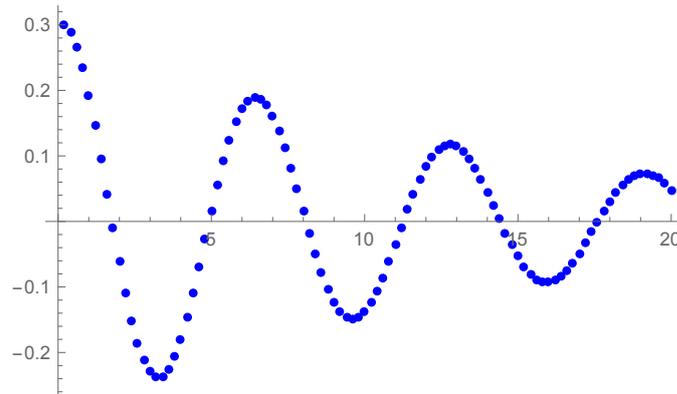


FIGURA 2.3. Gráfico de  $x_k$  del SMLFd del Ejemplo 2.22.

Si ahora comparamos el gráfico de  $x_k$  del SMLFd de este ejemplo con el gráfico de  $x(t)$  para el Ejemplo 2.16 tenemos la figura 2.4.

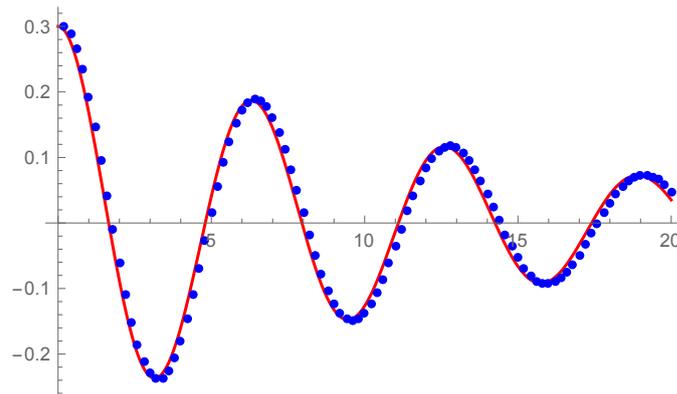


FIGURA 2.4. Comparación de Gráfico 2.2 con el Gráfico 2.3.

Cualitativamente podemos ver que el gráfico de puntos de  $x_k$  aproxima al gráfico continuo de  $x(t)$ , con lo cual en este punto cabe preguntarse: dado un SMLF ¿es posible asociarle un SMLFd que, de algún modo, lo aproxime? ¿cómo? Más adelante, en la Sección 4 del Capítulo 3, exploraremos una posible respuesta a estas preguntas.

### 3. Sistemas mecánicos lagrangianos con vínculos

La Mecánica Lagrangiana está interesada en describir sistemas que van más allá de los comprendidos en la Definición 2.2, sistemas que no son puramente mecánicos sino que incluyen restricciones o relaciones entre las variables que los describen. Estas restricciones son llamadas “vínculos”. En esta breve sección vamos a repasar algunas nociones muy básicas de los sistemas mecánicos lagrangianos con vínculos, ya que reaparecerán en el tratamiento de los sistemas termomecánicos. En concreto veremos su definición, su dinámica y las ecuaciones que permiten hallar sus trayectorias. Para saber más sobre este tipo de sistemas recomendamos el artículo [6] de H.Cendra y S.Grillo y el libro [2] de A. M. Bloch.

DEFINICIÓN 2.23. Un sistema mecánico lagrangiano con vínculos (SMLV) es una cuaterna  $(Q, L, C_K, C_V)$  donde  $Q$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$ ,  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es el Lagrangiano,  $C_K \subset TQ$  es una subvariedad regular: los vínculos cinemáticos y  $C_V \subset TQ$  es una distribución (Definición B.18) de dimensión  $v$ : los vínculos variacionales.

DEFINICIÓN 2.24. Sea  $(Q, L, C_K, C_V)$  un SMLV. Una curva  $q \in C(Q)$  es trayectoria del sistema si y sólo si  $q'(t) \in C_K$  para todo  $t$  y se satisface la condición:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t)) dt = 0,$$

para toda variación infinitesimal sobre  $q$  a extremos fijos  $\delta q : I \rightarrow TQ$  tal que  $\delta q(t) \in C_V \cap T_{q(t)}Q$ .

NOTA 2.25. Los SMLV generalizan a los SML ya que si en las Definiciones 2.23 y 2.24 consideramos  $C_K = TQ$  y  $C_V = TQ$ , obtenemos las Definiciones 2.2 y 2.4 respectivamente.

Consideremos la distribución  $C_V^\circ \subset T^*Q$  con dimensión  $n - v$ , definida de la siguiente manera: para cada  $q \in Q$ , se verifica que  $C_V^\circ \cap T_q^*Q$  es el subespacio anulador de  $C_V \cap T_qQ$ . Sea  $\{A_j\}_{j=1}^{n-v}$  una base local de  $C_V^\circ$ , es decir, las funciones  $A_j : C_V \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $j = 1, \dots, n - v$  son suaves y cumplen que, en un abierto  $B \subset Q$ , para cada  $q \in B$ , el conjunto  $\{A_j(q)\}_{j=1}^{n-v}$  es una base de  $C_V^\circ \cap T_q^*Q$ . Si tomamos una carta coordenada  $(U, \phi)$  de  $Q$  tal que  $U \subset B$  con  $q \in U$ , podemos escribir las funciones  $A_j(q) : T_qQ \rightarrow \mathbb{R}$  en términos de funciones suaves  $w_j^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $A_j(q) = \sum_{i=1}^n w_j^i(q) dq_i$  de modo que al considerar la base  $\{\frac{\partial}{\partial q_i} \big|_q\}_{i=1}^n$  de  $T_qQ$ , tendremos:

$$A_j(q) \left( \frac{\partial}{\partial q_k} \bigg|_q \right) = \sum_{i=1}^n w_j^i(q) dq_i \left( \frac{\partial}{\partial q_k} \bigg|_q \right) = w_j^k(q).$$

DEFINICIÓN 2.26. Llamaremos funciones coordenadas de la base  $\{A_j\}_{j=1}^{n-v}$  respecto de la carta  $(U, \phi)$ , a las funciones  $\{w_j^i\}_{j=1, \dots, n-v}^{i=1, \dots, n}$  que definimos arriba.

El siguiente resultado nos permite encontrar las trayectorias de un SMLV.

TEOREMA 2.27 (Ecuaciones de Lagrange–D'Alembert para sistemas con vínculos). Sean  $(Q, L, C_K, C_V)$  un SMLV,  $\{A_j\}_{j=1}^{n-v}$  una base local de  $C_V^\circ$  en un abierto  $B \subset Q$ ,  $(U, \phi)$  una carta coordenada de  $Q$  tal que  $U \subset B$  y  $\{w_j^i\}_{j=1, \dots, n-v}^{i=1, \dots, n}$  las funciones coordenadas de dicha base en el abierto  $U$ . Sea  $q$  una curva en  $Q$  contenida en  $U$ . Entonces  $q$  es trayectoria del sistema si y sólo si se verifica:

$$\begin{aligned} (x(t), \dot{x}(t)) &\in \phi_{*, \phi^{-1}(x(t))}(C_K \cap T_{\phi^{-1}(x(t))}Q) \quad \forall t \in (t_0, t_1), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L \circ \Phi^{-1})}{\partial \dot{x}^i} \right) (x(t), \dot{x}(t)) &- \frac{\partial(L \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i} (x(t), \dot{x}(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n-v} \lambda^j(t) w_j^i(x(t)), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

donde  $x(t) := \phi(q(t))$  y donde  $\lambda^j(t) \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n - v$  llamados los multiplicadores de Lagrange, también son incógnitas del sistema de ecuaciones.

Omitiremos la demostración de este teorema, pero en la página 38 del trabajo de N. Borda [4] existe una demostración para una versión global de este resultado.

EJEMPLO 2.28. Un ejemplo de sistema mecánico con vínculos es el sistema del disco rodante vertical. El espacio de configuración de este sistema es  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$ , donde la parte  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(x, y)$ , codifica la ubicación en el plano del punto de contacto del disco vertical y el plano horizontal. El primer  $S^1$ , con coordenada  $\phi$ , codifica el ángulo entre el eje  $x$ -positivo y el plano que contiene el disco. El segundo  $S^1$ , con coordenada  $\theta$ , es el ángulo de rotación del disco respecto del eje vertical que se forma al unir el centro de masa del disco con el punto de contacto con el plano horizontal.

El lagrangiano del sistema viene dado por la energía cinética del disco:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{J}{2}\dot{\phi}^2,$$

donde  $m$  es la masa del disco y donde  $I, J$  son los momentos de inercia del mismo. Los vínculos variacionales del sistema son los usuales de rotación sin deslizar:

$$\dot{x} = R \cos(\phi)\dot{\theta} \quad \dot{y} = R \sin(\phi)\dot{\theta},$$

donde  $R$  es el radio del disco. Luego la distribución de los vínculos variacionales viene dada por

$$C_V \cap T_{(x,y,\phi,\theta)}Q = \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, R \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial x} + R \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle \subset T_{(x,y,\phi,\theta)}Q. \quad (2.7)$$

En este sistema los vínculos cinemáticos son los mismos que los vínculos variacionales, i.e.  $C_K = C_V$ .

#### 4. Sistemas mecánicos lagrangianos discretos con vínculos

Así como existen los sistemas con vínculos continuos, también existe una versión a tiempo discreto de los mismos. En esta sección haremos un breve repaso sobre sistemas mecánicos lagrangianos discretos con vínculos (SMLVd) viendo su definición, su dinámica y las ecuaciones para sus trayectorias. Para saber más sobre este tipo de sistemas recomendamos el artículo [10] de J. Fernández, C. Tori y M. Zuccalli, también recomendamos la Tesis de Maestría [4] de N. Borda, el artículo [8] de J. Cortes y S. Martínez y el libro [9] de J. Cortes.

DEFINICIÓN 2.29. Un sistema mecánico lagrangiano discreto con vínculos (SMLVd) es una cuaterna  $(Q, L_d, C_K^d, C_V^d)$  donde  $Q$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$ ,  $L_d : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es el lagrangiano discreto,  $C_K^d \subset Q \times Q$  es una subvariedad regular: los vínculos cinemáticos discretos y  $C_V^d \subset TQ$  es una distribución de dimensión  $v$ : los vínculos variacionales discretos.

DEFINICIÓN 2.30. Sea  $(Q, L_d, C_K^d, C_V^d)$  un SMLVd. Una curva  $q_d$  en  $Q$  es trayectoria del sistema si y sólo si se satisfacen las condiciones:

$$(q_k, q_{k+1}) \in C_K^d \quad k = 1, \dots, N-1$$

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) = 0,$$

para toda variación infinitesimal sobre  $q_d$  a extremos fijos  $\delta q_d : I_d \rightarrow TQ$  tal que  $\delta q_k \in C_V^d \cap T_{q_k}Q$  para  $k = 1, \dots, N-1$ .

Al igual que en el caso continuo, consideraremos la distribución  $C_V^{d^\circ} \subset T^*Q$  con dimensión  $n-v$ , definida de la siguiente manera: para cada  $q \in Q$ , se verifica que  $C_V^{d^\circ} \cap T_q^*Q$  es el subespacio anulador de  $C_V^d \cap T_qQ$ . Entonces, tenemos una base  $\{A_j\}_{j=1}^{n-v}$  de  $C_V^{d^\circ}$ , de

modo que las funciones  $A_j : C_V^d \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $j = 1, \dots, n - v$ , son suaves y cumplen que, en un abierto  $B \subset Q$ , para cada  $q \in B$ , el conjunto  $\{A_j(q)\}_{j=1}^{n-v}$  es una base de  $C_V^{d \circ} \cap T_q^*Q$ .

El siguiente resultado nos permite encontrar las trayectorias discretas de un SMLVd como soluciones de un sistema de ecuaciones:

**TEOREMA 2.31.** *Sean  $(Q, L_d, C_K^d, C_V^d)$  un SMLVd y  $\{A_j(p)\}_{j=1}^{n-v}$  una base local de  $C_V^{d \circ}$  en un abierto  $B \subset Q$ . Sea  $q_d = (q_0, \dots, q_N)$  una curva discreta de  $Q$  contenida en  $B$ , entonces  $q_d$  es trayectoria del sistema si y sólo si se verifica:*

$$(q_k, q_{k+1}) \in C_K^d, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}) = \sum_{j=1}^{n-v} \lambda^j(k) A_j(q_k), \quad k = 1, \dots, N - 1,$$

donde  $\lambda^j(k) \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n - v$  llamados los multiplicadores de Lagrange, también son incógnitas del sistema de ecuaciones algebraicas.

Omitiremos la demostración de este teorema, pero en la página 43 de [4] existe una demostración para una versión global de este resultado.

**EJEMPLO 2.32.** Consideraremos una versión discreta del sistema del disco rodante vertical discutido en el Ejemplo 2.28. El espacio de configuración y su interpretación son las mismas que las de dicho ejemplo. El lagrangiano discreto que propondremos para  $q^\pm = (x^\pm, y^\pm, \theta^\pm, \phi^\pm)$  es:

$$L_d(q^-, q^+) = \frac{m}{2h}((x^+ - x^-)^2 + (y^+ - y^-)^2) + \frac{I}{2h}(\theta^+ - \theta^-)^2 + \frac{J}{2h}(\phi^+ - \phi^-)^2,$$

donde  $h > 0$  es un parámetro fijo.

Los vínculos variacionales  $C_V^d$  son los mismos que en (2.7) y los vínculos cinemáticos son

$$C_K^d = \{(q^-, q^+) \in Q \times Q : x^+ - x^- = R \cos((\phi^+ + \phi^-)/2)(\theta^+ - \theta^-), \\ y^+ - y^- = R \sin((\phi^+ + \phi^-)/2)(\theta^+ - \theta^-)\}.$$

Luego,  $(Q, L_d, C_K^d, C_V^d)$  es un SMLVd.



## Sistemas Termomecánicos Lagrangianos

En este capítulo estudiaremos algunos sistemas dinámicos que permiten modelar sistemas físicos con propiedades tanto mecánicas como termodinámicas. La formulación que seguiremos a lo largo del capítulo, es la dada por F. Gay-Balmaz y H. Yoshimura en [11]. En la Sección 1 abordaremos únicamente sistemas termomecánicos continuos y luego en la Sección 2, los sistemas termomecánicos en su versión a tiempo discreto. En la Sección 3 discutiremos la existencia de trayectorias en un sistema termomecánico discreto. Por último, en la Sección 4 veremos cómo construir un sistema termomecánico discreto, a partir de uno continuo.

En primera instancia, la novedad de este capítulo es que introduciremos una nueva variable al espacio de configuración, llamada entropía, la cual permitirá acoplar el mundo mecánico y el termodinámico. Con respecto a los sistemas termodinámicos, la descripción y lenguaje de estos sistemas es bastante diferente a la de los sistemas mecánicos que venimos estudiando, ya que se trata de sistemas dinámicos compuestos por muchas partículas para las cuales los parámetros dinámicos (posición y velocidad) no se conocen con precisión, por lo que no se puede hacer una descripción mecanicista de su evolución. Sin embargo, la termodinámica permite encontrar una manera de codificar la evolución de este tipo de sistemas.

Para la lectura de este capítulo bastará el conocimiento de la teoría clásica de termodinámica del cuasi-equilibrio presente en [5], para más detalles recomendamos ver el Apéndice C. Los sistemas en cuasi-equilibrio son los que se toman como punto de partida en [7] y recomendamos lo allí introducido como un breve acercamiento a esta temática.

### 1. Sistemas termomecánicos lagrangianos

En esta sección principalmente desarrollaremos la formulación propuesta en [11] de los sistemas termomecánicos y en particular consideraremos algunos casos especiales de estos. Comenzaremos introduciendo los ingredientes junto a la definición de sistema termomecánico lagrangiano forzado.

La definición que daremos a continuación puede encontrarse en la sección 2.2 de [11].

**DEFINICIÓN 3.1.** Un sistema termomecánico lagrangiano forzado (STLF) es la 5-upla  $(Q, L, F^{ext}, F^{fr}, P_H)$ , donde  $Q$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$ ;  $L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave llamada lagrangiano termomecánico, las fuerzas  $F^{ext} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$  y  $F^{fr} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$ , ambas funciones suaves que preservan las fibras, i.e. si  $v_q \in T_qQ$ ,  $F(v_q, S) \in T_q^*Q$  y la función  $P_H : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada potencia de transferencia de calor.

NOTA 3.2. La configuración de los STLF está dada por  $Q \times \mathbb{R}$ , donde  $Q$  modela la parte mecánica del sistema y  $\mathbb{R}$  es el conjunto donde toma valores la entropía del sistema. En esta condición se esconde una suposición importante de [11] y es que el estado termodinámico del sistema queda determinado por la entropía.

NOTA 3.3. La condición de adiabaticidad en un sistema termodinámico se da cuando la transferencia del calor es cero (ver Apéndice C). Por lo tanto, un STLF es adiabático cuando  $P_H = 0$ .

NOTA 3.4. De modo análogo a lo comentado en la Nota 2.3, en los sistemas termomecánicos es común que los lagrangianos sean de la forma

$$L(v, S) = K(v) - V(\tau(v), S). \quad (3.1)$$

La razón por la que se distinguen dos fuerzas es que la  $F^{ext} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$  es la fuerza externa que no modifica el estado del sistema termodinámico, mientras que la  $F^{fr} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$  es la fuerza de fricción que, idealmente, sí modifica el estado termodinámico del sistema.

Como en el caso de los sistemas mecánicos, podemos dar la reinterpretación de fuerza como una sección del fibrado cotangente  $\hat{F} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*TQ$ , tal que

$$\hat{F}(v_q, S)(w_{v_q}) := F(v_q, S)(\tau_{Q^*, v_q}(w_{v_q})),$$

notamos que  $\hat{F}$  es una aplicación que preserva las fibras, i.e.  $\hat{F}(v_q, S) \in T_{v_q}^*TQ$ .

Ahora veremos que un STLF da lugar a un sistema dinámico como describimos a continuación.

DEFINICIÓN 3.5. En un STLF  $(Q, L, F^{ext}, F^{fr}, P_H^{ext})$ , una curva  $(q, S) \in C(Q \times \mathbb{R})$ ,  $(q, S) : [t_0, t_1] \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ , es trayectoria del sistema si satisface las siguientes ecuaciones, llamadas vínculos del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial S}(v_q, S)\delta S &= F^{fr}(v_q, S)\delta q && \text{vínculos variacionales} \\ \frac{\partial L}{\partial S}(v_q, S)\dot{S} &= F^{fr}(v_q, S)v_q - P_H(v_q, S) && \text{vínculos cinemáticos} \end{aligned} \quad (3.2)$$

y la condición:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t), S(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} F^{ext}(q'(t), S(t))\delta q(t)dt = 0 \quad (3.3)$$

para todas las variaciones infinitesimales  $\delta q$  sobre  $q$  a extremos fijos y  $\delta S$  sobre  $S$ , sujetas a los vínculos variacionales (3.2).

NOTA 3.6. El lado izquierdo de la expresión (3.3) significa tomar una variación a extremos fijos  $\gamma(t, s)$  de  $q$ , que genere  $\delta q(t)$  y una variación  $\beta(t, s)$  de  $S$ , que genere  $\delta S(t)$ , para calcular la derivada de la acción evaluada en  $\gamma(\cdot, s)$ :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t), S(t))dt = \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{d\gamma}{dt}(t, s), \beta(t, s)\right)dt \Big|_{s=0}.$$

NOTA 3.7. En [11] los vínculos cinemáticos son llamados vínculos fenomenológicos.

LEMA 3.8. Sean una curva  $(q, S)$  en  $Q \times \mathbb{R}$  y una variación infinitesimal a extremos fijos  $\delta q$  sobre  $q$ . Si suponemos que la condición  $F^{fr} \neq 0$  implica que  $\partial L/\partial S \neq 0$ , entonces existe una variación infinitesimal  $\delta S$  sobre  $S$ , de modo que la variación infinitesimal  $(\delta q, \delta S)$  satisface los vínculos variacionales (3.2).

DEMOSTRACIÓN. Dada una variación  $\delta q$ , queremos hallar  $\delta S$  tal que  $(\delta q, \delta S)$  satisfaga los vínculos variacionales (3.2). Para el caso  $F^{fr} = 0$  podemos tomar  $\delta S = 0$ . En el otro caso, si  $F^{fr} \neq 0$ , sabemos que esto implica que  $\partial L / \partial S \neq 0$  y podremos despejar

$$\delta S = \frac{F^{fr}(v_q, S)}{\partial L / \partial S} \delta q,$$

de modo que el par  $(\delta q, \delta S)$  satisface los vínculos variacionales (3.2).  $\square$

Ahora vamos a caracterizar las trayectorias de un sistema termomecánico como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

TEOREMA 3.9 (Ecuaciones de evolución de un sistema termomecánico). *Consideremos  $(Q, L, F^{ext}, F^{fr}, P_H^{ext})$  un STL F. Sea  $(U, \phi)$  una carta coordenada de  $Q$  y  $(q, S)$  una curva en  $Q \times \mathbb{R}$  con la imagen de  $q$  contenida en  $U$ . Supongamos que, si  $F^{fr} \neq 0$  entonces  $\partial L / \partial S \neq 0$ . Entonces  $(q, S)$  es trayectoria del sistema si y sólo si se verifica:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L \circ \hat{\Phi}^{-1})}{\partial \dot{x}^i} \right) (x(t), \dot{x}(t), S(t)) - \frac{\partial(L \circ \hat{\Phi}^{-1})}{\partial x^i} (x(t), \dot{x}(t), S(t)) \\ = (f_i^{ext} + f_i^{fr}) \circ \hat{\Phi}^{-1}(x(t), \dot{x}(t), S(t)), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L \circ \hat{\Phi}^{-1}}{\partial S} (x(t), \dot{x}(t), S(t)) \dot{S} = \\ \sum_{j=1}^n (f_j^{fr} \circ \hat{\Phi}^{-1})(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \dot{x}_j(t) - (P_H^{ext} \circ \hat{\Phi}^{-1})(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \end{aligned}$$

donde  $x(t) := \phi(q(t))$  y  $\hat{\Phi} = \Phi \times Id_{\mathbb{R}}$  con  $\Phi : TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$  la carta coordenada de  $TQ$  que proviene de  $\phi$  y  $F^{ext} = \sum_{j=1}^n f_j^{ext} d\phi_j$  y  $F^{fr} = \sum_{j=1}^n f_j^{fr} d\phi_j$  son las expresiones locales de las fuerzas en la carta coordenada elegida.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos desarrollando el lado izquierdo de la ecuación (3.3). Sea  $(\delta q, \delta S)$  una variación infinitesimal de la curva  $(q, S)$ , donde  $\delta q$  tiene extremos fijos y satisface los vínculos variacionales (3.2), además sea  $(\gamma, \beta)$  una variación con extremos fijos en  $q$  que la genera.

Descomponemos

$$\underbrace{\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t), S(t)) dt}_I + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} F^{ext}(q'(t), S(t)) \delta q(t) dt}_{II}. \quad (3.4)$$

Desarrollando  $I$  tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q'(t), S(t)) dt \\ &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{d}{dt} \gamma(t, s), \beta(t, s)\right) dt \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \hat{\Phi}^{-1} \circ \hat{\Phi})\left(\frac{d}{dt} \gamma(t, s), \beta(t, s)\right) dt \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \hat{\Phi}^{-1})(\Phi\left(\frac{d}{dt} \gamma(t, s), \beta(t, s)\right)) dt \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \hat{\Phi}^{-1})\left((\phi \circ \gamma)(t, s), \frac{d(\phi \circ \gamma)}{dt}(t, s), \beta(t, s)\right) dt \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

llamando  $\tilde{L} = L \circ \hat{\Phi}^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} \left( (\phi \circ \gamma)(t, s), \frac{d(\phi \circ \gamma)}{dt}(t, s), \beta(t, s) \right) dt \Big|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) \frac{d(\phi_j \circ \gamma)}{ds}(t, s) \Big|_{s=0} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j}(\dots) \frac{d}{ds} \frac{d(\phi_j \circ \gamma)}{dt}(t, s) \Big|_{s=0} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial S}(\dots) \frac{d\beta}{ds}(t, s) \Big|_{s=0} dt, \end{aligned}$$

donde  $(\dots) = (x(t), \dot{x}(t), S(t))$ . Luego usando que  $\phi_j \circ \gamma$  es clase  $C^\infty$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , se tiene que  $\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} (\phi_j \circ \gamma)(t, s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\phi_j \circ \gamma)(t, s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} d\phi_j \left( \frac{d}{ds} \gamma(t, s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{d}{dt} d\phi_{j_q(t)}(\delta q) = \frac{d}{dt} d\phi_{j_q(t)} \left( \sum_{i=1}^n \delta x^i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) = \frac{d}{dt} \delta x^j(t)$ . Entonces, resulta

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) \delta x^j(t) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j}(\dots) \frac{d}{dt} \delta x^j(t) \right] + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial S}(\dots) \delta S(t) dt$$

y si integramos por partes obtenemos

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) \delta x^j(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j}(\dots) \right) \delta x^j(t) \right] dt \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j}(\dots) \delta x^j(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial S}(\dots) \delta S(t) dt. \end{aligned}$$

Sabemos que  $\delta q(t_0) = 0$  y  $\delta q(t_1) = 0$  y como  $\delta q(t) = \sum_{i=1}^n \delta x^i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i}$ , entonces  $\delta x^j(t_0) = 0$  y  $\delta x^j(t_1) = 0$  para todo  $j$  con lo cual se anula el término de borde. Además usamos los vínculos variacionales para obtener  $\sum_{j=1}^n f_j^{fr} d\phi_j$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial S}(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \delta S(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial S}(q'(t), S(t)) \delta S(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F^{fr}(q'(t), S(t)) \delta q(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{fr}(q'(t), S(t)) d\phi_{j_q(t)} \delta q(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{fr} \circ \hat{\Phi}^{-1}(\hat{\Phi}(q'(t), S(t))) d\phi_{j_q(t)} \left( \sum_{i=1}^n \delta x^i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{fr} \circ \hat{\Phi}^{-1}(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \delta x(t)^j dt. \end{aligned}$$

En resumen,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) \delta x^j(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j}(\dots) \right) \delta x^j(t) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{fr} \circ \hat{\Phi}^{-1}(\dots) \delta x(t)^j dt.$$

Por otro lado, desarrollando  $II$ :

$$\begin{aligned} II &= \int_{t_0}^{t_1} F^{ext}(q'(t), S(t)) \delta q(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{ext}(q'(t), S(t)) d\phi_{j_q(t)} \delta q(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{ext} \circ \hat{\Phi}^{-1}(\hat{\Phi}(q'(t), S(t))) d\phi_{j,q(t)} \left( \sum_{i=1}^n \delta x^i(t) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n f_j^{ext} \circ \hat{\Phi}^{-1}(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \delta x^j(t) dt.
\end{aligned}$$

Finalmente el lado izquierdo de (3.3) se convierte en

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \right)(\dots) \right] \delta x^j(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n (f_j^{fr} + f_j^{ext}) \circ \hat{\Phi}^{-1}(\dots) \delta x^j(t) dt \\
&= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \right)(\dots) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) - (f_j^{fr} + f_j^{ext}) \circ \hat{\Phi}^{-1}(\dots) \right] \delta x^j(t) dt.
\end{aligned}$$

Luego la condición (3.3) del principio variacional es equivalente a que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \right)(\dots) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^j}(\dots) - (f_j^{fr} + f_j^{ext}) \circ \hat{\Phi}^{-1}(\dots) \right] \delta x^j(t) dt = 0 \quad (3.5)$$

para toda variación  $\delta x$  que provenga de un par  $(\delta q, \delta S)$ , pero haciendo uso del Lema 3.8, podemos asegurar que  $\delta x$  es arbitrario, salvo por tener extremos fijos. Con lo cual la ecuación (3.5) es válida para todo  $\delta x$  a extremos fijos y esto es equivalente a que el coeficiente que multiplica a cada variación  $\delta x^j$  sea 0 para cada  $j = 1, \dots, n$ .

Luego, dada una curva  $(q, S)$  tal que  $q(I) \subset U$ , tendremos que es trayectoria del sistema si y solo si

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L \circ \hat{\Phi}^{-1})}{\partial \dot{x}^i} \right)(x(t), \dot{x}(t), S(t)) - \frac{\partial(L \circ \hat{\Phi}^{-1})}{\partial x^i}(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \\
&= (f_i^{ext} + f_i^{fr}) \circ \hat{\Phi}^{-1}(x(t), \dot{x}(t), S(t)), \quad i = 1, \dots, n \\
&\frac{\partial L \circ \hat{\Phi}^{-1}}{\partial S}(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \dot{S} = \\
&\quad \sum_{j=1}^n (f_j^{fr} \circ \hat{\Phi}^{-1})(x(t), \dot{x}(t), S(t)) \dot{x}_j(t) - (P_H^{ext} \circ \hat{\Phi}^{-1})(x(t), \dot{x}(t), S(t))
\end{aligned}$$

donde la última expresión es el vínculo cinemático (3.2). □

NOTA 3.10. Las ecuaciones de evolución dadas por el Teorema 3.9 son las ecuaciones (2.4) de [11], donde no hay una deducción rigurosa. Más aún, no mencionan la condición del Lema 3.8 para poder completar el cálculo variacional, ni nada parecido que permita un cálculo completo del resultado anterior.

EJEMPLO 3.11. Veamos ahora un ejemplo de sistema termomecánico: un resorte con un extremo fijo, una masa en el otro extremo y, todo, metido en un recipiente adiabático con un gas ideal (ver Ejemplo C.2), donde no se desprecia la fricción del gas con la masa.

$Q = \mathbb{R}$  es el espacio de configuración de las variables mecánicas idénticas al Ejemplo 2.16 y  $S$  es la entropía del gas ideal. Dado que el recipiente es adiabático, se tiene  $P_H = 0$ .

El lagrangiano del sistema es  $L(x, \dot{x}, S) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}\eta x^2 + U_0 e^{\alpha(S-S_0)})$ , con  $U_0, S_0, \alpha \in \mathbb{R}$  y donde la expresión  $U_0 e^{\alpha(S-S_0)}$  corresponde a la energía interna del gas (C.9). La fuerza de fricción es  $F^{fr}(x, \dot{x}, S) = -\lambda \dot{x}$ , con  $\lambda \geq 0$  el coeficiente de fricción de la masa con el gas. Además, la fuerza externa es  $F^{ext} = 0$ .

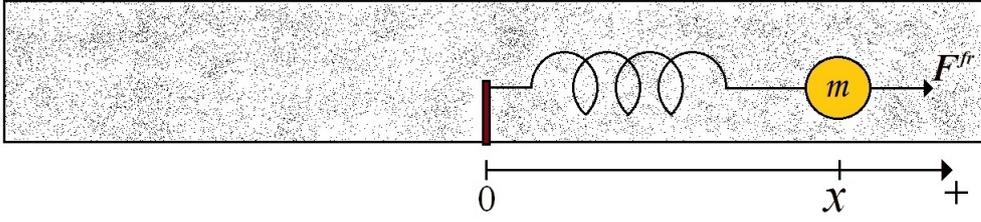


FIGURA 3.1. modelo del resorte para el Ejemplo 3.11

Reemplazando en las ecuaciones (3.2), tenemos que los vínculos cinemáticos son

$$\alpha U_0 e^{\alpha(S-S_0)} \dot{S} = \lambda \dot{x}^2$$

y los vínculos variacionales son

$$\alpha U_0 e^{\alpha(S-S_0)} \delta S = \lambda \dot{x} \delta x.$$

Luego, por el Teorema 3.9, las trayectorias  $(x, S)$  del sistema son las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \eta x = -\lambda \dot{x} \\ \alpha U_0 e^{\alpha(S-S_0)} \dot{S} = \lambda \dot{x}^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Notemos que  $\partial L / \partial S = \alpha U_0 \alpha e^{\alpha(S-S_0)} \neq 0$ , por lo que la hipótesis del Teorema 3.9 se satisface.

La solución analítica  $x(t)$  es la misma del Ejemplo 2.16. Para encontrar la solución analítica  $S(t)$  podemos hacer el cambio de variables  $\omega(t) := e^{\alpha(S(t)-S_0)}$  y obtendremos que  $\omega(t) = \frac{1}{U_0} \lambda \int_0^t \dot{x}^2(s) ds + S_\infty$ , donde  $S_\infty$  es una constante positiva. Luego

$$S(t) = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left( \frac{1}{U_0} \lambda \int_0^t \dot{x}^2(s) ds + S_\infty \right) + S_0$$

es la expresión para la entropía del sistema. De esta manera resolvemos el sistema de dos ecuaciones 3.6.

## 2. Sistemas termomecánicos lagrangianos discretos

En esta sección vamos a introducir la versión a tiempo discreto de los sistemas termomecánicos considerados en la Sección 1.

**DEFINICIÓN 3.12.** Un sistema termomecánico lagrangiano con fuerzas discreto (STLFD) es una 5-upla  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$ , donde  $Q$  es una variedad diferencial,  $L_d$  es una aplicación suave  $L_d : (Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  llamada Lagrangiano termomecánico discreto, las fuerzas discretas  $F_d^{ext} : (Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow T^*(Q \times Q)$  y  $F_d^{fr} : (Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow T^*(Q \times Q)$  son aplicaciones suaves que preservan las fibras, i.e.: si  $(q^-, q^+, S^-, S^+) \in Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $F(q^-, q^+, S^-, S^+) \in T_{(q^-, q^+)}^*(Q \times Q)$  y  $C_K^d$  es una subvariedad regular de  $Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Dado un intervalo discreto  $I_d = \{1, \dots, N\}$ , una curva discreta sobre  $(Q \times \mathbb{R})$ , es una función  $(q_d, S_d) : I_d \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ . Una variación infinitesimal de  $(q_d, S_d)$  es una función  $(\delta q, \delta S) : I_d \rightarrow T(Q \times \mathbb{R})$  tal que  $\delta q_k \in T_{q_k} Q$  y  $\delta S_k \in T_{S_k} \mathbb{R}$ . Por otro lado, estas definiciones coinciden con las dadas para los SMLFD cuando el espacio de configuración es  $Q \times \mathbb{R}$  por lo que, de algún modo, ya son conocidas.

Todo STLFD define un sistema dinámico cuyas trayectorias quedan determinadas por un principio variacional con restricciones y, para definir este principio, hay que considerar los vínculos que se definen a continuación.

DEFINICIÓN 3.13. Dado un STLFD  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$ , para cada  $(q^-, q^+, S^-, S^+) \in Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y cada variación  $\delta q^\pm \in T_{q^\pm}Q$ ,  $\delta S^\pm \in T_{S^\pm}\mathbb{R}$ , definimos los vínculos:

- Vínculos variacionales discretos:

$$\begin{aligned} D_3L_d(q^-, q^+, S^-, S^+)\delta S^- + D_4L_d(q^-, q^+, S^-, S^+)\delta S^+ \\ = F_d^{fr-}(q^-, q^+, S^-, S^+)\delta q^- + F_d^{fr+}(q^-, q^+, S^-, S^+)\delta q^+. \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Vínculos cinemáticos discretos:

$$(q^-, q^+, S^-, S^+) \in C_K^d \subset (Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \quad (3.8)$$

LEMA 3.14. *La condición (3.7) define una distribución regular  $\mathcal{D}$  sobre  $Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cuando  $D_3L_d \neq 0$  en todo  $Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ó  $D_4L_d \neq 0$  en todo  $Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*

DEMOSTRACIÓN.  $\mathcal{D}$  es el subconjunto de  $T(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  formado por todos los vectores tangentes  $(\delta q^-, \delta q^+, \delta S^-, \delta S^+) \in T_{(q^-, q^+, S^-, S^+)}(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  que satisfacen (3.7) y como esta es una condición lineal en  $(\delta q^-, \dots, \delta S^+)$ , en cada punto base,  $\mathcal{D}$  define un subespacio del tangente (de modo que después tiene sentido hablar de bases de dicho espacio).

Queremos ver que dado  $(q^-, q^+, S^-, S^+) \in Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  hay  $2n+1$  campos vectoriales en  $Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definidos en un entorno de  $(q^-, q^+, S^-, S^+)$  que son una base de  $\mathcal{D}$  (en cada punto).

Tomamos cartas coordenadas  $(V^-, \phi^-)$  y  $(V^+, \phi^+)$  de  $Q$  tales que  $q^- \in V^-$  y  $q^+ \in V^+$ . Entonces tenemos los campos vectoriales  $\partial/\partial q_j^-$  y  $\partial/\partial q_j^+$  (para  $j = 1, \dots, n$ ).

Supongamos que  $D_4L_d \neq 0$  en todo  $Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Entonces definimos

$$\begin{aligned} \delta r_S &= \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{-D_3L_d}{D_4L_d} \frac{\partial}{\partial S}\right) \in T(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ \delta r_j^- &= \left(\frac{\partial}{\partial q_j^-}, 0, 0, \frac{F_d^{fr-}(\partial/\partial q_j^-)}{D_4L_d}\right) \in T(V^- \times V^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ \delta r_j^+ &= \left(0, \frac{\partial}{\partial q_j^+}, 0, \frac{F_d^{fr+}(\partial/\partial q_j^+)}{D_4L_d}\right) \in T(V^- \times V^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Es inmediato que estos  $2n+1$  campos vectoriales son suaves, están en  $\mathcal{D}$  y son linealmente independientes en cada punto de su dominio  $(V^- \times V^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Como  $\dim(T(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})) = 2n+2$  y (3.7) es una única condición lineal (escalar) y no nula por ser  $D_4L_d \neq 0$ , tenemos que  $\dim(\mathcal{D}) = 2n+1$ . Luego, los  $2n+1$  campos linealmente independientes tienen que ser una base de  $\mathcal{D}$  en cada punto. Concluimos que  $\mathcal{D}$  es regular.

El caso  $D_3L_d \neq 0$  es totalmente análogo.  $\square$

LEMA 3.15. *Dadas una curva discreta  $(q_d, S_d)$  en  $Q \times \mathbb{R}$  y una variación infinitesimal  $\delta q_d$  sobre  $q_d$ , si suponemos que  $D_3L_d(q_j, q_{j+1}, S_j, S_{j+1}) \neq 0$  para todo  $j$  o que  $D_4L_d(q_j, q_{j+1}, S_j, S_{j+1}) \neq 0$  para todo  $j$ , entonces existe una variación infinitesimal  $\delta S_d$  sobre  $S_d$  de modo que la variación infinitesimal  $(\delta q_d, \delta S_d)$  satisface (3.7).*

DEMOSTRACIÓN. Si  $D_3L_d \neq 0$  sobre la curva, podemos fijar un valor del último  $\delta S_N$  y así despejar  $\delta S_{N-1}$  de la igualdad en (3.7), luego podremos seguir despejando  $\delta S_{N-2}$  y así, hasta  $\delta S_0$ .

Si  $D_4L_d \neq 0$  sobre la curva, podemos fijar un valor de  $\delta S_0$  y así, poniendo  $\delta S^- = \delta S_0$  y  $\delta S^+ = \delta S_1$  en (3.7), se puede despejar  $\delta S_1$  de la igualdad. Luego podremos seguir

despejando  $\delta S_2$  y así, hasta  $\delta S_N$ . Entonces la variación  $(\delta q_d, \delta S_d)$  construida satisface (3.7).  $\square$

Todo STLFD permite definir un sistema dinámico cuyas trayectorias se definen a continuación. Dicha definición puede encontrarse en la Sección 3.2 de [11].

DEFINICIÓN 3.16. Sea  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$  un STLFD. Una curva discreta  $(q_d, S_d) : I_d \rightarrow Q \times \mathbb{R}$  que está sujeta a los vínculos cinemáticos (3.8) es trayectoria del sistema si satisface:

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} F_d^{ext}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = 0, \quad (3.9)$$

para todas las variaciones infinitesimales  $\delta q$  sobre  $q_d$  a extremos fijos y variaciones  $\delta S$ , tales que se satisfacen los vínculos variacionales (3.7).

El siguiente resultado permite caracterizar a las trayectorias de un STLFD como las soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas.

TEOREMA 3.17 (Ecuaciones de evolución para sistemas termomecánicos discretos). Sea  $(Q, L, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$  un STLFD. Supongamos que  $D_3 L_d \neq 0$  en  $(Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  o que  $D_4 L_d \neq 0$  en  $(Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Una curva discreta  $(q_d, S_d)$  es trayectoria del sistema si y solo si se verifican las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) \\ + F_d^-(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + F_d^+(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) = 0 \in T_{q_k}^* Q, \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \in C_K^d, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.11)$$

Donde  $F_d^- = F_d^{ext-} + F_d^{fr-}$  y  $F_d^+ = F_d^{ext+} + F_d^{fr+}$ .

NOTA 3.18.  $C_K^d$  es una subvariedad regular, por lo que se la puede describir localmente como el conjunto de ceros de varias funciones reales. Esta descripción permite ver a la condición  $(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \in C_K^d$  como un conjunto de ecuaciones.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos desarrollando el lado izquierdo de la ecuación (3.9). Sea una variación infinitesimal  $(\delta q_k, \delta S_k)$  de  $(q, S)$  que satisface (3.7), con  $\delta q$  a extremos fijos y sea  $(\gamma(t, s), \beta(t, s))$  la variación que genera  $(\delta q_k, \delta S_k)$ .

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) &= \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\gamma(k, s), \gamma(k+1, s), \beta(k, s), \beta(k+1, s)) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \delta q_k + D_2 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \delta q_{k+1} \\ &\quad + D_3 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \delta S_k + D_4 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \delta S_{k+1}], \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + \\ \sum_{k=0}^{N-1} F_d^{ext-}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \delta q_k + F_d^{ext+}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \delta q_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N-1} [D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1})] \delta q_k \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} [D_4 L_d(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) + D_3 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1})] \delta S_k + \\
&\quad + D_3 L_d(q_0, q_1, S_0, S_1) \delta S_0 + D_4 L_d(q_{N-1}, q_N, S_{N-1}, S_N) \delta S_N \\
&\quad + D_1 L_d(q_0, q_1, S_0, S_1) \delta q_0 + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N, S_{N-1}, S_N) \delta q_N \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} [F_d^{ext-}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + F_d^{ext+}(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k)] \delta q_k \\
&\quad + F_d^{ext-}(q_0, q_1, S_0, S_1) \delta q_0 + F_d^{ext+}(q_{N-1}, q_N, S_{N-1}, S_N) \delta q_N,
\end{aligned}$$

usando el vínculo variacional discreto (3.7) y sabiendo que  $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ , se anulan los términos de borde y se tiene que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N-1} (D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1})) \delta q_k \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} [F_d^{fr-}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + F_d^{fr+}(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k)] \delta q_k + \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} [F_d^{ext-}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + F_d^{ext+}(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k)] \delta q_k \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} [D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + \\
&\quad (F_d^{fr-} + F_d^{ext-})(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + (F_d^{fr+} + F_d^{ext+})(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k)] \delta q_k,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

para toda variación  $\delta q_k$  sobre  $q_k$  que provenga de un par  $(\delta q, \delta S)$  que satisfaga los vínculos variacionales discretos (3.7). Pero por el Lema 3.15, sabemos que para cualquier variación infinitesimal  $\delta q_k$  sobre  $q_k$  y con extremos fijos, existe una variación infinitesimal  $\delta S_k$  sobre  $S_k$  tal que  $(\delta q_k, \delta S_k)$  es una variación infinitesimal sobre  $(q_k, S_k)$  con extremos fijos en  $q$  y que satisface (3.7).

Supongamos ahora que  $(q_d, S_d)$  es una trayectoria del sistema, por lo que, por el Principio (3.9) la expresión izquierda de (3.9) se anula para toda variación infinitesimal sobre  $(q_d, S_d)$  a extremos fijos en  $q$  y que satisface (3.7). Por la reescritura del lado izquierdo de (3.9) hecha más arriba, sabemos que (3.12) se anula para todo  $\delta q_k$ , lo que sólo es posible cuando los coeficientes de  $\delta q_k$  en (3.12) son nulos. Pero estos coeficientes son el lado izquierdo de la ecuación (3.10), lo cual nos lleva a la validez de ésta. Por otro lado, la segunda ecuación (3.11) vale porque las trayectorias satisfacen los vínculos cinemáticos discretos (3.7).

Recíprocamente, si ahora consideramos  $(q_d, S_d)$  una curva discreta que satisface (3.10) y (3.11), sea  $(\delta q_k, \delta S_k)$  una variación infinitesimal sobre  $(q_d, S_d)$  donde  $q_d$  tiene extremos fijos y satisface (3.7). Por el desarrollo anterior

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} F^{ext-}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1})\delta q_k + F^{ext+}(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1})\delta q_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \left( D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) \right. \\
& \left. (F^{fr-} + F^{ext-})(q_k, q_{k+1}, S_k, S_{k+1}) + (F^{fr+} + F^{ext+})(q_{k-1}, q_k, S_{k-1}, S_k) \right) \delta q_k = 0,
\end{aligned}$$

entonces,  $(q_k, S_k)$  satisface la condición variacional del Principio de Lagrange–D’Alembert (3.9) y la condición (3.11) asegura que se satisfacen los vínculos cinemáticos (3.8). Entonces, por dicho Principio, concluimos que  $(q_k, S_k)$  es una trayectoria del sistema.  $\square$

NOTA 3.19. Se ve de la demostración del Teorema 3.17 que, en realidad alcanza con que la condición  $D_3 L_d(q^-, q^+, S^-, S^+) \neq 0$  o  $D_4 L_d(q^-, q^+, S^-, S^+) \neq 0$ , sea válida para puntos  $(q^-, q^+, S^-, S^+)$  sobre la curva  $q_d$  en cuestión.

NOTA 3.20. Al igual que en el caso continuo, las ecuaciones de evolución dadas por el Teorema 3.17 son las ecuaciones (3.12) de [11], donde no hay una deducción de estas, ni tampoco mencionan la condición del Lema 3.15 que permite realizar esta deducción.

EJEMPLO 3.21. Ejemplificaremos con una “versión a tiempo discreto” del sistema dado en el Ejemplo 3.11. El espacio de configuración es  $Q = \mathbb{R}$  y el lagrangiano discreto que proponemos es

$$L_d(x^-, x^+, S^-, S^+) = h \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \eta (x^-)^2 + U_0 e^{\alpha(S^- - S_0)} \right) \right),$$

con  $U_0, S_0, \alpha \in \mathbb{R}$  y  $h$  una constante real no nula, que representa un paso de tiempo. Además, las fuerzas de fricción discreta que proponemos son  $F_d^{fr-}(x^-, x^+, S^-, S^+) = -h\lambda \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right) dx^-$  y  $F^{fr+} = 0$ , donde  $\lambda \geq 0$  es el coeficiente de fricción de la masa con el gas.

Los vínculos cinemáticos discretos (3.8) para este sistema son

$$\alpha U_0 e^{\alpha(S^- - S_0)} (S^+ - S^-) = \frac{\lambda}{h} (x^+ - x^-)^2$$

y los vínculos variacionales discretos (3.7) son

$$\alpha U_0 e^{\alpha(S^- - S_0)} \delta S^- = \frac{\lambda}{h} (x^+ - x^-) \delta x^-.$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.17, tendremos las siguientes ecuaciones de evolución

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{1+h\frac{\lambda}{m}} \left( (2 - h^2 \frac{\eta}{m} + h \frac{\lambda}{m}) x_k - x_{k-1} \right) \\ S_{k+1} = \frac{1}{h} \frac{\lambda}{\alpha U_0} e^{-\alpha(S_k - S_0)} (x_k - x_{k-1})^2 + S_k. \end{cases} \quad k \geq 1$$

### 3. Existencia de flujo

En esta sección introduciremos algunas definiciones sobre la regularidad de un STLFD y probaremos un resultado que, bajo ciertas hipótesis, nos garantizará la existencia de un flujo discreto para las trayectorias estos sistemas.

NOTA 3.22. Recordando la definición, tenemos que una curva discreta  $q_d : I_d \rightarrow Q \times \mathbb{R}$  se puede escribir como  $q_d = ((q_0, S_0), (q_1, S_1), \dots, (q_N, S_N))$ . Por conveniencia, en esta sección, utilizaremos esta notación para referirnos a listas de elementos en un STLFD, con lo cual, admitiremos el abuso de notación en el argumento de las funciones con dominio  $(Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  (por ejemplo:  $L_d : (Q \times \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en vez de  $L_d : Q^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ). Ocasionalmente, llamaremos  $z_j := (q_j, S_j)$ , con  $j = 0, \dots, N$  a dichos puntos.

DEFINICIÓN 3.23. Sea  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$  un STLFD. Definimos las aplicaciones  $\mathbb{F}_f L_d^\pm : (Q \times \mathbb{R})^2 \rightarrow T^*Q$ , llamadas Transformadas de Legendre discretas termomecánicas:

$$\mathbb{F}_f L_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+) := (q^-, -D_1 L_d(q^-, S^-, q^+, S^+) - F_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+)), \quad (3.13)$$

$$\mathbb{F}_f L_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+) := (q^+, D_3 L_d(q^-, S^-, q^+, S^+) + F_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+)),$$

donde notamos  $F_d^\pm := F_d^{fr\pm} + F_d^{ext\pm}$ .

NOTA 3.24. Las ecuaciones del Teorema 3.17 para un STLFD  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$ , pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathbb{F}_f L_d^-(q_k, S_k, q_{k+1}, S_{k+1}) = \mathbb{F}_f L_d^+(q_{k-1}, S_{k-1}, q_k, S_k) & , k = 1, \dots, N-1, \\ (q_{k-1}, S_{k-1}, q_k, S_k) \in C_K^d & , k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.14)$$

DEFINICIÓN 3.25. Sea  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$  un STLFD, donde  $C_K^d = \rho_d^{-1}(\{0\})$  para una función suave  $\rho_d : (Q \times \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que tiene a 0 por valor regular. Diremos que el sistema es regular si, para cada  $(q^-, S^-, q^+, S^+) \in C_K^d$ , las aplicaciones lineales

$$\begin{pmatrix} D_3 \mathbb{F}_f L_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_4 \mathbb{F}_f L_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+) \\ D_3 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_4 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) \end{pmatrix} : T_{q^+} Q \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_{q^+}^* Q \oplus \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \mathbb{F}_f L_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_2 \mathbb{F}_f L_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+) \\ D_1 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_2 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) \end{pmatrix} : T_{q^-} Q \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_{q^-}^* Q \oplus \mathbb{R}$$

son ambas isomorfismos.

TEOREMA 3.26 (Existencia de flujo). *Sea  $(Q, L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}, C_K^d)$  un STLFD regular, donde  $C_K^d = \rho_d^{-1}(\{0\})$  para una función suave  $\rho_d : (Q \times \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que tiene a 0 por valor regular. Supongamos que  $D_2 L_d \neq 0$  en  $(Q \times \mathbb{R})^2$  o que  $D_4 L_d \neq 0$  en  $(Q \times \mathbb{R})^2$ . Dada una trayectoria  $(z_0, z_1, z_2) \in (Q \times \mathbb{R})^3$  del sistema, existen entornos abiertos  $U$  de  $(z_0, z_1)$  y  $V$  de  $(z_1, z_2)$  en  $C_K^d$  y un difeomorfismo  $\Theta : U \rightarrow V$ , tales que:*

- $\Theta(z_0, z_1) = (z_1, z_2)$ ,
- Si  $\Theta(u_0, u_1) = (u_1, u_2)$  para  $(u_0, u_1) \in U$ , entonces  $(u_0, u_1, u_2)$  es trayectoria del sistema.

DEMOSTRACIÓN. La existencia de flujo en el sistema es un asunto local. Entonces, en vez de trabajar con la variedad  $Q$  podemos tomar coordenadas locales y trabajar con abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a suponer entonces que  $Q = \mathbb{R}^n$  e identificaremos  $T^*Q$  con  $Q \times Q^* \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (usando en  $Q = \mathbb{R}^n$  el producto interno canónico). En adelante llamaremos  $u_j := (q_j, S_j)$ , con  $j = 0, 1, 2$ , a los puntos de  $Q \times \mathbb{R}$ .

Definimos las aplicaciones  $\eta : (Q \times \mathbb{R})^3 \rightarrow Q \times Q$ ,  $\hat{\eta} : (Q \times \mathbb{R})^3 \rightarrow Q$  y  $\Phi : (Q \times \mathbb{R})^3 \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ :

$$\eta(u_0, u_1, u_2) := \mathbb{F}_f L_d^-(u_1, u_2) - \mathbb{F}_f L_d^+(u_0, u_1),$$

$$\hat{\eta} := \pi_2 \circ \eta,$$

$$\Phi(u_0, u_1, u_2) := (\hat{\eta}(u_0, u_1, u_2), \rho_d(u_1, u_2) - \rho_d(u_0, u_1)).$$

La idea es que, como  $\eta(u_0, u_1, u_2) \in T_{q_1}^*Q$ , podemos escribir  $\eta(u_0, u_1, u_2) = (q_1, \hat{\eta}(u_0, u_1, u_2))$ , de modo que la informaci3n relevante est1 en  $\hat{\eta}$ .

Por hip3tesis  $D_2L_d \neq 0$  3  $D_4L_d \neq 0$ , por lo que podemos usar el Teorema 3.17 y, en consecuencia, caracterizar las trayectorias del sistema mediante (3.14). Entonces,  $(u_0, u_1, u_2)$  es trayectoria del sistema si y s3lo si  $\rho_d(u_0, u_1) = 0$  y  $\Phi(u_0, u_1, u_2) = (0, 0)$ .

Seg3n el enunciado, tenemos la trayectoria  $(z_0, z_1, z_2) \in (Q \times \mathbb{R})^3$ , con lo cual  $\Phi(z_0, z_1, z_2) = (0, 0)$ . Tenemos que

$$D_3\Phi(z_0, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} D_3\hat{\eta}(z_0, z_1, z_2) \\ D_2\rho_d(z_1, z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2\mathbb{F}_fL_d^-(z_1, z_2) \\ D_2\rho_d(z_1, z_2) \end{pmatrix},$$

es decir,

$$D_3\Phi(z_0, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} D_3\mathbb{F}_fL_d^-(q_1, S_1, q_2, S_2) & D_4\mathbb{F}_fL_d^-(q_1, S_1, q_2, S_2) \\ D_3\rho_d(q_1, S_1, q_2, S_2) & D_4\rho_d(q_1, S_1, q_2, S_2) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Ahora, como el sistema es regular y estamos evaluando sobre una trayectoria, tenemos que  $D_3\Phi(z_0, z_1, z_2)$  es un isomorfismo. Entonces, por el Teorema de la Funci3n Impl3cita, existe un entorno abierto  $B \subset (Q \times \mathbb{R})^2$  que contiene a  $(z_0, z_1)$  y una funci3n suave  $H : B \rightarrow (Q \times \mathbb{R})$  tal que,  $H(z_0, z_1) = z_2$  y, para cada  $(u_0, u_1) \in B$ ,  $\Phi(u_0, u_1, H(u_0, u_1)) = (0, 0)$ .

Ahora definimos la aplicaci3n  $\Theta : B \rightarrow (Q \times \mathbb{R})^2$  por  $\Theta(u_0, u_1) := (u_1, H(u_0, u_1))$ . En general, la matriz

$$D\Theta(u_0, u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ D_1H(u_0, u_1) & D_2H(u_0, u_1) \end{pmatrix},$$

es invertible si y solo si  $D_1H(u_0, u_1)$  es invertible. Como  $\Phi(u_0, u_1, H(u_0, u_1)) = (0, 0)$  para todo  $(u_0, u_1) \in B$ , obtenemos que

$$0 = D_1\Phi(u_0, u_1, H(u_0, u_1)) + D_3\Phi(u_0, u_1, H(u_0, u_1))D_1H(u_0, u_1).$$

Entonces, como sabemos que  $D_3\Phi(z_0, z_1, z_2)$  es un isomorfismo,

$$D_1H(z_0, z_1) = -(D_3\Phi(z_0, z_1, z_2))^{-1}D_1\Phi(z_0, z_1, z_2).$$

Con lo cual,  $D_1H(z_0, z_1)$  es un isomorfismo si y solo si  $D_1\Phi(z_0, z_1, z_2)$  es un isomorfismo. Haciendo un desarrollo paralelo a (3.15) y usando la regularidad del sistema, se prueba que  $D_1\Phi(z_0, z_1, z_2)$  es un isomorfismo.

Por el desarrollo anterior y el Teorema de la Funci3n Inversa, tenemos que  $\Theta$  es un difeomorfismo local en  $(z_0, z_1)$ . M1s expl3citamente, existe un subconjunto abierto  $B' \subset B \subset (Q \times \mathbb{R})^2$ , que contiene a  $(z_0, z_1)$ , tal que  $\Theta|_{B'} : B' \rightarrow \Theta(B') \subset (Q \times \mathbb{R})^2$  es un difeomorfismo. En particular,  $(z_1, z_2) = \Theta(z_0, z_1) \in \Theta(B')$ .

Todav3a hay un peque1o detalle t3cnico: notemos que  $(u_0, u_1, H(u_0, u_1))$  es ‘‘casi’’ una trayectoria del sistema, pero no podemos asegurar que lo sea, pues sabemos que  $\rho_d(u_0, u_1) = \rho_d(u_1, H(u_0, u_1))$ , pero podr3a ser  $\rho_d(u_0, u_1) \neq 0$  (si  $(u_0, u_1) \notin C_K^d$ ), es decir, la curva  $(u_0, u_1, H(u_0, u_1))$  no tiene por que satisfacer los v3nculos cinem1ticos. Podemos arreglar este problema poniendo una nueva restricci3n:  $B' \cap C_K^d$  es una subvariedad embebida de  $B'$  y tendremos que,  $\Theta|_{B' \cap C_K^d} : B' \cap C_K^d \rightarrow \Theta(B' \cap C_K^d)$  es un difeomorfismo, que de hecho, es el flujo local del sistema definido cerca de la trayectoria  $(z_0, z_1, z_2)$ . Luego, el enunciado es verdadero si tomamos los entornos  $U = B' \cap C_K^d$  y  $V = \Theta(B' \cap C_K^d)$ .  $\square$

NOTA 3.27. Se observa en la demostraci3n que no son necesarias las condiciones  $D_2L_d \neq 0$  o  $D_4L_d \neq 0$  en todo el dominio. Alcanza con que una de las dos condiciones valga en  $(z_0, z_1)$  y  $(z_1, z_2)$ .

NOTA 3.28. Remarcamos que una hipótesis fuerte en el Teorema 3.26, es tener una trayectoria del sistema  $(z_0, z_1, z_2) \in (Q \times \mathbb{R})^3$ , además de la condición de regularidad. Esto se debe, fundamentalmente, a que el Teorema de la Función Implícita parte de un punto solución de una ecuación (y una condición de regularidad) para demostrar que hay una solución definida en un entorno de dicho punto. Sin esa hipótesis el argumento puede fallar, como mostraremos a continuación.

EJEMPLO 3.29. Mostraremos que, para un STLFD regular, no necesariamente existen trayectorias. Consideremos  $Q = \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y sean

$$L_d(q^-, S^-, q^+, S^+) := \int_0^{q^-+q^+} \text{Arctan}(x)dx + \alpha q^+ + S^-,$$

$$F_d^{fr-}(q^-, S^-, q^+, S^+) := e^{S^-} dq^- \quad \text{y} \quad F_d^{fr+}(q^-, S^-, q^+, S^+) := e^{S^+} dq^+,$$

donde  $\text{Arctan}$  es la rama principal del arcotangente, tomando valores en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Adicionalmente consideremos el conjunto de los vínculos cinemáticos

$$C_K^d = \rho_d^{-1}(\{0\}) \subset (Q \times \mathbb{R})^2 \quad \text{para} \quad \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) := S^- + S^+.$$

Notar que  $\rho_d$  es una función suave, por lo tanto,  $C_K^d$  es una subvariedad regular.

Consideremos el sistema  $(Q, L_d, F_d^{ext} = 0, F_d^{fr}, C_K^d)$  y calculemos las transformadas de Legendre discretas (3.13).

$$\mathbb{F}_f L_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+) = -(\text{Arctan}(q^- + q^+) + e^{S^-})dq^-,$$

$$\mathbb{F}_f L_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+) = (\text{Arctan}(q^- + q^+) + \alpha + e^{S^+})dq^+.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} D_3 \mathbb{F}_f L_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_4 \mathbb{F}_f L_d^-(q^-, S^-, q^+, S^+) \\ D_3 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_4 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+(q^-+q^+)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \mathbb{F}_f L_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_2 \mathbb{F}_f L_d^+(q^-, S^-, q^+, S^+) \\ D_1 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) & D_2 \rho_d(q^-, S^-, q^+, S^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(q^-+q^+)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que  $D_2 L_d(q^-, S^-, q^+, S^+) = 1$ , entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 3.17, salvo la existencia de una trayectoria inicial. Si reemplazamos en las ecuaciones (3.14), explícitamente tendremos

$$\begin{cases} S_0 + S_1 = 0, \\ S_1 + S_2 = 0, \\ -\text{Arctan}(q_1 + q_2) - e^{S_1} = \text{Arctan}(q_0 + q_1) + \alpha + e^{S_1}. \end{cases}$$

En particular, si reescribimos la tercera ecuación, tenemos que  $((q_0, S_0), (q_1, S_1), (q_2, S_2))$  es trayectoria del sistema si y sólo si

$$-(\text{Arctan}(q_1 + q_2) + \text{Arctan}(q_0 + q_1)) = \alpha + 2e^{S_1}.$$

Pero si tomamos  $\alpha \geq \pi$ , el lado izquierdo de la igualdad toma valores en  $(-\pi, \pi)$ , con lo cual la ecuación no tiene solución y, por lo tanto, el sistema no admite trayectorias.

Entonces, vemos que no todos los STLFD regulares admiten trayectorias. Es muy probable que aquellos sistemas que surgen por una “discretización” de un STLFD, que construiremos en la siguiente sección, tengan trayectorias. Lamentablemente, no hay un análisis de errores que nos permita garantizar esta última hipótesis.

NOTA 3.30. En [11], los autores enuncian la condición de regularidad para sistemas termomecánicos discretos y dicen que éstas implican la existencia de flujo para un sistema de este tipo, sin proveer ningún argumento. Como vemos en el Ejemplo 3.29, no todo sistema termomecánico regular tiene trayectorias, contradiciendo la afirmación de [11]. Por otro lado, el Teorema 3.26 muestra que con la hipótesis adicional de tener al menos una trayectoria del sistema regular discreto, entonces se puede asegurar la existencia de flujo local.

#### 4. Discretización de sistemas termomecánicos

En esta sección responderemos las preguntas que quedaron pendientes al final de la Sección 2 del Capítulo 2, es decir, veremos una manera de asociar un STLFD a un STLF, usando como ingrediente esencial un dato conocido como *aplicación de diferencias finitas*. El proceso de discretización descrito será ilustrado en el Capítulo 4, con ejemplos que mostrarán tanto la realización concreta del mismo, como la comparación entre la evolución del sistema continuo y la del sistema discreto construido.

Usualmente, las discretizaciones son difeomorfismos locales entre  $TQ$  y  $Q \times Q$  y la idea de las aplicaciones de diferencias finitas es agregar algunas condiciones para controlar mejor el comportamiento de estos difeomorfismos locales. La noción de aplicación de diferencias finitas fue introducida por R. McLachlan y M. Perlmutter en la Definición 6 de [16].

DEFINICIÓN 3.31. Sea  $X$  una variedad diferencial,  $N_0(\Delta_X)$  un entorno abierto de la diagonal de  $X \times X$  y  $T_0X$  un entorno abierto de la sección nula de  $TX$ . Un difeomorfismo

$$\psi_X : N_0(\Delta_X) \longrightarrow T_0X,$$

es una *aplicación de diferencias finitas* de  $X$  si satisface:

$$\psi_X(p, p) = 0_p \quad \forall p \in X.$$

Teniendo las variedades  $Q$  y  $\mathbb{R}$  junto a las aplicaciones de diferencias finitas  $\psi_Q$  y  $\psi_{\mathbb{R}}$ , podemos construir la siguiente aplicación de diferencias finitas:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_Q \times \psi_{\mathbb{R}} : N_0(\Delta_Q) \times N_0(\Delta_{\mathbb{R}}) \longrightarrow T_0Q \times T_0\mathbb{R}, \\ \psi(q^-, q^+, S^-, S^+) &= (\psi_Q(q^-, q^+), \psi_{\mathbb{R}}(S^-, S^+)). \end{aligned}$$

Utilizaremos esta aplicación para construir un sistema termomecánico discreto a partir de uno continuo.

NOTA 3.32. En adelante, únicamente consideraremos sistemas termomecánicos en los que  $P_H = 0$ . Esto será para simplificar la construcción del conjunto  $C_K^d$ , de los vínculos cinemáticos discretos.

Supongamos que tenemos  $(Q, L, F^{ext}, F^{fr}, P_H)$  un STLF con  $P_H = 0$  y una aplicación de diferencias finitas  $\psi$  como definimos arriba. Veamos como podemos construir un STLFD a partir de estos ingredientes.

Consideremos la función  $\tilde{\psi} : (Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \longrightarrow TQ \times \mathbb{R}$ , tal que

$$\tilde{\psi} = \psi_Q \times (\tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}}). \quad (3.16)$$

A partir del lagrangiano  $L$ , definimos el lagrangiano discreto:

$$L_d := hL \circ \tilde{\psi}, \quad (3.17)$$

donde  $h \in \mathbb{R}$  es el parámetro de “paso de tiempo”.

A partir de las fuerzas  $F : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*Q$ , donde  $F = F^{ext}$  o  $F = F^{fr}$ , obtenemos las fuerzas horizontales  $\hat{F} : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*TQ$ . Explícitamente, si  $w_{v_q} \in T_{v_q}TQ$ ,

$$\hat{F}(v_q, S)(w_{v_q}) := F(v_q, S)(\tau_{Q^*, v_q}(w_{v_q})).$$

Con estas aplicaciones podremos construir las fuerzas discretas.

Notar que, en cada punto,  $T_{(v,S)}^*(TQ \times \mathbb{R}) \cong T_v^*TQ \oplus T_S^*\mathbb{R}$ , con lo cual, podemos definir  $\hat{F}_E : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*(TQ \times \mathbb{R})$  como la extensión  $\hat{F}_E := (\hat{F}, 0)$ , de modo que  $\hat{F}_E$  es una 1-forma sobre  $TQ \times \mathbb{R}$ . Usaremos esto para definir una nueva función  $F_{Ed}$ , mediante el pullback de la 1-forma  $\hat{F}_E$  por  $\tilde{\psi}$  (ver Definición B.20):

$$F_{Ed} := h\tilde{\psi}^*(\hat{F}_E) : Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

donde  $h$  es un parámetro real y el subíndice “ $E$ ”, indica que la discretización se hizo sobre la 1-forma  $\hat{F}_E$ . Explícitamente, al evaluar en un vector  $(w^{Q \times Q}, w^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}) \in T(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , tendremos:

$$\begin{aligned} F_{Ed}(q^-, q^+, S^-, S^+)(w^{Q \times Q}, w^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}) &= h\hat{F}_E(\tilde{\psi}(q^-, q^+, S^-, S^+))(\tilde{\psi}_{*,(q^-, q^+, S^-, S^+)}(w^{Q \times Q}, w^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}})) \\ &= h\hat{F}_E(\tilde{\psi}(q^-, q^+, S^-, S^+))(\psi_{Q^*,(q^-, q^+)}(w^{Q \times Q}), (\tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}})_{*,(S^+, S^-)}(w^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}})) \\ &= h\hat{F}(\tilde{\psi}(q^-, q^+, S^-, S^+))(\psi_{Q^*,(q^-, q^+)}(w^{Q \times Q})). \end{aligned}$$

Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T^*(TQ \times \mathbb{R}) & & T^*(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ \uparrow \hat{F}_E & & \uparrow F_{Ed} = h\tilde{\psi}^*(\hat{F}_E) \\ TQ \times \mathbb{R} & \xleftarrow{\tilde{\psi}} & Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}$$

Si evaluamos  $F_{Ed}$  en vectores de la forma  $(0, 0, \delta S^-, \delta S^+) \in T(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , obtenemos

$$F_{Ed}(q^-, q^+, S^-, S^+)(0, 0, \delta S^-, \delta S^+) = h\hat{F}(\tilde{\psi}(q^-, q^+, S^-, S^+))(\psi_{Q^*,(q^-, q^+)}(0, 0)) = 0.$$

El espacio  $T^*(Q \times Q)$  se puede identificar con el subfibrado de  $T^*(Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  formado por todos los covectores que se anulan sobre vectores tangentes de la forma  $(0, 0, \delta S^-, \delta S^+)$ . Consecuentemente,  $F_{Ed}$  define una función:

$$F_d : Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*(Q \times Q),$$

Explícitamente, si  $w^{Q \times Q} \in T_{(q^-, q^+)}(Q \times Q)$ ,

$$F_d(q^-, q^+, S^-, S^+)(w_{(q^-, q^+)}) = h\hat{F}(\tilde{\psi}(q^-, q^+, S^-, S^+))(\psi_{Q^*,(q^-, q^+)}(w_{(q^-, q^+)})). \quad (3.18)$$

Notar que  $F_d(q^-, q^+, S^-, S^+) \in T_{(q^-, q^+)}^*(Q \times Q)$ , con lo cual,  $F_d$  preserva las fibras.

Finalmente tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T^*TQ & & T^*(Q \times Q) \\ \uparrow \hat{F} & & \uparrow F_d \\ TQ \times \mathbb{R} & \xleftarrow{\tilde{\psi}} & Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}$$

$F_d$  es la fuerza discreta que vamos a usar para construir el sistema discreto asociado al sistema continuo.

Ahora vamos a construir el conjunto  $C_K^d$  a partir de los v'nculos cinem'aticos. Para ello definimos la aplicaci3n  $\rho : TQ \times T\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\rho(q, \dot{q}, S, \dot{S}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{S}}(q, \dot{q}, S) \dot{S} - F^{fr}(q, \dot{q}, S) \dot{q}$ . Construimos su versi3n discreta  $\rho_d : Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como la composici3n

$$\rho_d := \rho \circ \psi. \quad (3.19)$$

As'ı podremos construir el conjunto deseado

$$C_K^d := \{(q^-, q^+, S^-, S^+) \in Q \times Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \rho_d(q^-, q^+, S^-, S^+) = 0\}.$$

Sabemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial \dot{S}}(v_q, S) = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}}(v_q, S)$$

y cuando el lagrangiano es del tipo  $L(v_q, S) = K(v_q) - U(q, S)$  se tiene que  $\frac{\partial \rho}{\partial \dot{S}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}} = -\frac{\partial U}{\partial S} \neq 0$ , pues  $\frac{\partial U}{\partial S} = T$  y siempre asumimos que la temperatura es positiva ( $T > 0$ ), con lo cual  $\rho_*(v_q, S)$  es sobreyectiva y  $\rho$  es una submersi3n.

Sabemos que, para que el sistema tenga soluciones, siempre habr'a puntos  $(v_q, S, \dot{S})$  que son f'isicamente compatibles, es decir, que verifican el v'nculo cinem'atico (3.2). Entonces tenemos que  $\rho_d(\psi^{-1}(v_q, S, \dot{S})) = 0$ , con lo cual  $C_K^d$  es no vac'ıa. Luego  $C_K^d$  es una subvariedad diferencial regular de  $(Q \times Q) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , pues la preimagen de un punto por una submersi3n (si es no vac'ıa) es una subvariedad regular (Corolario (5.9) de [3]).

Hasta ac'ı conseguimos construir  $L_d, F_d^{ext}, F_d^{fr}$  y  $C_K^d$  a partir del STLf  $(Q, L, F^{ext}, F^{fr})$  dado. Estos son los ingredientes que necesitamos para tener un STLfd que aproxime al continuo, lo cual es algo que vamos a ver en los ejemplos del Cap'ıtulo 4.

NOTA 3.33. El Ejemplo 3.21 ilustra la t'ecnica de esta secci3n, ya que fue construido usando la discretizaci3n

$$\psi(q^-, q^+, S^-, S^+) = (q^-, \frac{q^+ - q^-}{h}, S^-, \frac{S^+ - S^-}{h}).$$

Siguiendo con los lagrangianos del tipo  $L(v_q, S) = K(v_q) - U(q, S)$ , podemos calcular las derivadas  $D_3 L_d$  y  $D_4 L_d$ , desarrollando la f3rmula (3.17):

$$\begin{aligned} L_d(q^-, q^+, S^-, S^+) &= hL \circ \psi(q^-, q^+, S^-, S^+) \\ &= hK \circ \psi_Q(q^-, q^+) - hU \circ \tau_{Q \times \mathbb{R}} \circ \psi(q^-, q^+, S^-, S^+) \\ &= hK \circ \psi_Q(q^-, q^+) - hU(\tau_Q \circ \psi_Q(q^-, q^+), \tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}}(S^-, S^+)). \end{aligned}$$

Entonces, tendremos

$$D_4 L_d(q^-, q^+, S^-, S^+) = -hD_2 U(\tau_Q \circ \psi_Q(q^-, q^+), \tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}}(S^-, S^+)) \cdot D_2(\tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}})(S^-, S^+)$$

$$D_3 L_d(q^-, q^+, S^-, S^+) = -hD_2 U(\tau_Q \circ \psi_Q(q^-, q^+), \tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}}(S^-, S^+)) \cdot D_1(\tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}})(S^-, S^+)$$

donde  $-hD_2 U(\tau_Q \circ \psi_Q(q^-, q^+), \tau_{\mathbb{R}} \circ \psi_{\mathbb{R}}(S^-, S^+)) \neq 0$  pues  $D_2 U = \frac{\partial U}{\partial S} = T > 0$ .

Por otro lado  $\tau_{\mathbb{R}}(\psi_{\mathbb{R}}(S, S)) = S$ , entonces

$$D\tau_{\mathbb{R}}(\psi_{\mathbb{R}}(S, S)) = D_1\tau_{\mathbb{R}}(\phi_{\mathbb{R}}(S, S)) + D_2\tau_{\mathbb{R}}(\phi_{\mathbb{R}}(S, S)) = 1 = \frac{dS}{dS}.$$

Luego no pueden ser  $D_1(\tau_{\mathbb{R}}(\psi_{\mathbb{R}}(S, S)))$  y  $D_2(\tau_{\mathbb{R}}(\psi_{\mathbb{R}}(S, S)))$  simult'aneamente nulas, por lo que, la que no sea nula, tampoco lo ser'ı para los  $(S^-, S^+)$  que est'an cerca del  $(S, S)$  en cuesti3n.

Así, por el desarrollo anterior y sabiendo que  $D_2U = T \neq 0$ , se tiene que  $D_3L_d \neq 0$  o bien  $D_4L_d \neq 0$ , en un entorno de la diagonal. Debido a esta condición, es posible obtener las ecuaciones de movimiento del sistema discreto.

En resumen, en esta sección vimos como asociar a cada STLF, mediante una aplicación de diferencias finitas, una familia (parametrizada por  $h$ ) de STLFD tales que, localmente, satisfacen las hipótesis del Teorema 3.17. En el Capítulo 4 veremos cómo se hace esta construcción en dos casos concretos.



## Ejemplos de sistemas termomecánicos

En este capítulo veremos dos ejemplos de sistemas termomecánicos que nos permitirán discutir algunos aspectos interesantes del capítulo anterior. En la primera sección analizaremos el sistema del carro con fricción, que fue estudiado previamente en el artículo [7], adaptándolo a la formulación de STLF que desarrollamos en el capítulo anterior. Comenzaremos dando una breve descripción del sistema, refiriéndonos a las ecuaciones de estado formuladas en el trabajo previamente mencionado, luego siguiendo la propuesta sugerida en el capítulo anterior, propondremos un lagrangiano termomecánico, encontraremos la evolución temporal de la posición y de la entropía del sistema, para luego plantear y analizar dos discretizaciones posibles construidas a partir de las ideas desarrolladas en la Sección 4 del Capítulo 3. Realizaremos simulaciones de la evolución de este sistema para el caso continuo y el caso discreto (usando el programa Wolfram Mathematica versión 10), para luego hacer un breve análisis comparativo.

En la segunda sección, estudiaremos un sistema en el que la fuerza elástica de un resorte se contrapone a la presión generada por un gas. Aquí plantearemos la ecuación de Newton (1.1) del sistema y luego, usando las ecuaciones de estado termodinámico, veremos que es posible reducirlo a un sistema con una única variable (la posición) cuya trayectoria satisface la ecuación del Teorema 2.6. De este modo, podremos formular el sistema como un SML para luego recuperar la información termodinámica haciendo uso de las ecuaciones de estado. Por último veremos que la entropía del sistema permanece constante y sin embargo sus estados termodinámicos son variables, lo cual nos impide plantear el sistema como un STLF. Esto último se debe a que, en el Capítulo 3 y en [11], una hipótesis fuerte en la formulación de los STFL, es la mencionada en la Nota 3.2: el hecho de poder parametrizar los estados termodinámicos de un sistema por medio de la entropía. En resumen, este último ejemplo es importante, ya que nos mostrará que no siempre es posible formular un sistema termomecánico como un STLF de los que estudiamos en el capítulo anterior. Aún así, veremos que es posible darle una formulación diferente, en términos de otras variables termodinámicas y vínculos.

### 1. Primer sistema: Carro con fricción

Vamos a estudiar el ejemplo del carro con fricción del artículo [7] (Ejemplo 2.1) utilizando la formulación de [11] que venimos desarrollando a lo largo de todo este trabajo.

Consideremos un carro (chasis, ejes y ruedas) con masa  $m$ , cuyas ruedas ruedan sin deslizarse sobre una línea horizontal, por lo que la trayectoria del centro de masa es una línea recta. Las ruedas del carro están conectadas por pares con un eje, rígidamente unido a ellas, que atraviesa el carro de lado a lado (ver Figura 4.1). Existe una fuerza de fricción

entre cada eje y el chasis y se supone que es proporcional a la velocidad angular del eje. Asumiremos que no hay intercambio de calor entre el chasis del carro y el exterior, en otras palabras, el proceso es adiabático. También supondremos que el material de las ruedas es un aislante térmico perfecto y que tanto el momento de inercia de los ejes como de las ruedas, es despreciable. En consecuencia, no será necesario considerar las ruedas en el análisis mecánico del sistema y por lo tanto omitiremos la condición de rodadura como vínculo no holónimo para esta parte del sistema.

La fuerza de fricción crea un proceso termodinámico, de forma que se produce un aumento de la energía interna del chasis a medida que el carro se desplaza. En [7] hacen un tratamiento del proceso termodinámico desarrollando dos ecuaciones de estado para la energía interna y la entropía del sistema:

$$U = \nu T \quad \text{y} \quad S = S_\infty + \nu \log(T/T_\infty), \quad (4.1)$$

donde la constante  $\nu$  es una constante positiva, la capacidad térmica del chasis;  $T_\infty$  es una constante asociada a la temperatura del chasis y  $S_\infty$  es una constante asociada a la entropía del sistema. Más adelante daremos una interpretación más precisa de estas constantes.

Lo que queremos hacer ahora es formular el sistema como un STLF. Hasta ahora, las ecuaciones de estado (4.1) que describen la parte termodinámica del sistema, están parametrizadas por la temperatura  $T$ , pero para formular el sistema como en la Definición 3.1 necesitamos parametrizar los estados termodinámicos del sistema en función de la entropía  $S$ . Usando las ecuaciones (4.1) se puede despejar la siguiente fórmula para la energía interna en términos de la entropía:

$$U(S) = \nu T_\infty e^{\frac{S-S_\infty}{\nu}}.$$

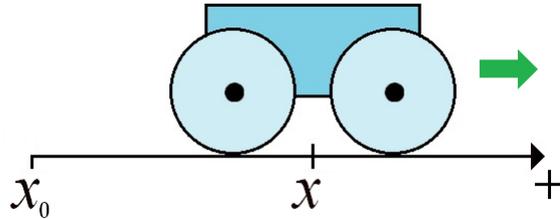


FIGURA 4.1. Modelo del carro con fricción.

Planteando el modelo de STLF tendremos que el espacio de configuración del sistema es  $Q = \mathbb{R}$ , correspondiente a la posición en el eje horizontal del centro de masa. El Lagrangiano que proponemos para el sistema es

$$L(x, \dot{x}, S) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \nu T_\infty e^{\frac{S-S_\infty}{\nu}},$$

donde  $\nu$ ,  $T_\infty$  y  $S_\infty$  son las constantes positivas que mencionamos antes. La fuerza de fricción es  $F^{fr}(x, \dot{x}, S) = -\mu \dot{x} dx$ , con  $\mu$  una constante positiva. Luego, por (3.2), los vínculos cinemáticos son

$$\frac{\partial L}{\partial S}(x, \dot{x}, S) \dot{S} = -T_\infty e^{\frac{S-S_\infty}{\nu}} \dot{S} = -\mu \dot{x}^2.$$

Luego, por el Teorema 3.9, tenemos las siguientes ecuaciones de evolución del sistema

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\mu\dot{x} \\ T_0 e^{\frac{S-S_\infty}{\nu}} \dot{S} = \mu\dot{x}^2. \end{cases} \quad (4.2)$$

La solución para la primera ecuación de (4.2) es

$$x(t) = x_0 + \frac{m\dot{x}_0}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu t}{m}}). \quad (4.3)$$

Por otro lado, la segunda de las ecuaciones (4.1) ya nos daba la forma explícita para  $S$  como función de  $T$  y dado que en [7] también encuentran la expresión

$$T(t) = T_\infty - \frac{m\dot{x}_0^2}{2\nu} e^{-\frac{2\mu t}{m}}, \quad (4.4)$$

juntando ambas, tenemos una fórmula explícita para  $S$  en función de  $t$

$$S(t) = S_\infty + \nu \log\left(1 - \frac{m\dot{x}_0^2}{2\nu T_\infty} e^{-\frac{2\mu t}{m}}\right). \quad (4.5)$$

NOTA 4.1. Las constantes  $T_\infty$  y  $S_\infty$  representan el valor asintótico de la temperatura y de la entropía respectivamente. Ambas constantes dependen de la temperatura inicial del chasis  $T_0$ , de la entropía inicial del sistema  $S_0$  y de la velocidad inicial  $\dot{x}_0$ . Podemos encontrar su valor despejando  $T_0 := T(0)$  en la ecuación (4.4) y  $S_0 := S(0)$  en la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} T_\infty &= T_0 + \frac{m\dot{x}_0^2}{2\nu} \\ S_\infty &= S_0 - \nu \log\left(1 - \frac{m\dot{x}_0^2}{2\nu T_\infty}\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ahora graficaremos la trayectoria  $x(t)$  y la entropía  $S(t)$ , para eso consideraremos las siguientes condiciones:  $\mu := 3$  Ns/m es el coeficiente de fricción,  $m := 5$  kg es la masa del carro,  $x_0 := 0$  m es la posición inicial,  $\dot{x}_0 := 2$  m/s es la velocidad inicial,  $T_0 := 300$  K es la temperatura inicial,  $S_0 := 0$  J/K es la entropía inicial y  $\nu := 1$  J/K es la capacidad térmica del chasis. Reemplazando en la fórmula (4.3) de la trayectoria continua y la fórmula (4.5) de la entropía, al graficar obtenemos las Figuras 4.2 y 4.3.

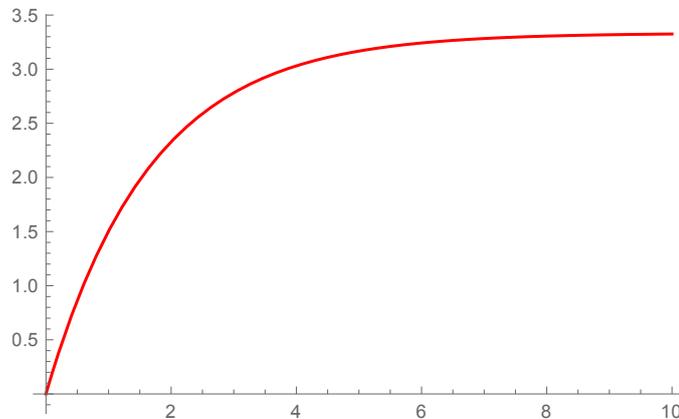


FIGURA 4.2. Gráfico de la posición  $x(t)$  en función del tiempo.

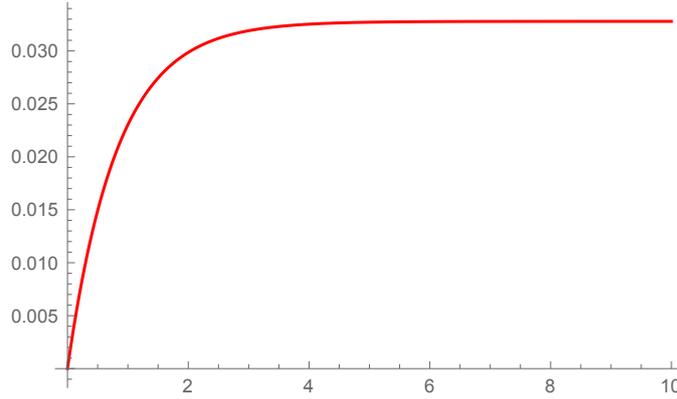


FIGURA 4.3. Gráfico de la entropía  $S(t)$  en función del tiempo.

**1.1. Proceso de discretización.** Ahora vamos a formular una versión discreta del ejemplo, para ello utilizaremos la discretización:

$$\psi(x^-, x^+, S^-, S^+) = \left( x^-, \frac{x^+ - x^-}{h}, S^-, \frac{S^+ - S^-}{h} \right), \quad (4.7)$$

donde  $h$  es un parámetro positivo, el paso de tiempo discreto.

Según (3.17) el lagrangiano discreto es

$$L_d(x^-, x^+, S^-, S^+) = h \left( \frac{m}{2} \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right)^2 - \nu T_\infty e^{\frac{1}{\nu}(S^- - S_\infty)} \right).$$

Además, por (3.16), tenemos que  $\tilde{\psi}(x^-, x^+, S^-, S^+) = (x^-, \frac{x^+ - x^-}{h}, S^-)$ . Entonces las fuerzas discretas son

$$F_d^{fr-}(x^-, x^+, S^-, S^+) = -h\mu \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right) dx^- \quad y \quad F_d^{fr+} = 0.$$

Reemplazando en la Ecuación (3.7) tenemos que los vínculos variacionales discretos son

$$T_\infty e^{\frac{1}{\nu}(S^- - S_\infty)} \delta S^- = \frac{\mu}{h} (x^+ - x^-) \delta x^-.$$

Según (3.19), los vínculos cinemáticos discretos son

$$T_\infty e^{\frac{1}{\nu}(S^- - S_\infty)} (S^+ - S^-) = \frac{\mu}{h} (x^+ - x^-)^2.$$

Así, por el Teorema 3.17, obtenemos las siguientes ecuaciones de evolución para el modelo discreto del sistema

$$\begin{cases} \frac{m}{h} (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) = -\mu (x_{k+1} - x_k) \\ T_\infty e^{\frac{1}{\nu}(S_{k-1} - S_\infty)} (S_k - S_{k-1}) = \frac{\mu}{h} (x_k - x_{k-1})^2. \end{cases} \quad k \geq 1$$

Ahora simulamos el sistema, para ello usaremos el siguiente código de Mathematica:

```
RecurrenceTable[{m*(1/h)*(x[n+1]-2*x[n]+x[n-1])==-mu*(x[n+1]-x[n]),
```

```
S[n]==(h*mu)/(T0*E^((S[n-1]-S0)/nu))*((x[n]-x[n-1])/h)^2+S[n-1],
```

```
x[0]==x0, S[0]==S0, x[1]==x0+vx0*h}, {x,S}, {n, 1, r}]
```

con las siguientes condiciones iniciales:  $\mu := 3$  Ns/m es el coeficiente de fricción,  $m := 5$  kg la masa del carro,  $x_0 := 0$  m es la posición inicial,  $\dot{x}_0 := 2$  m/s es la velocidad inicial,  $T_0 := 300$  K es la temperatura inicial,  $S_0 := 0$  J/K es la entropía inicial,  $\nu := 1$  J/K es

la capacidad térmica del chasis,  $h$  el paso de tiempo que reemplazaremos para distintos valores y  $r$  es el número de iteraciones, que depende del rango de tiempo para el que queramos simular el sistema.

Así obtenemos el Gráfico 4.4 de  $x_k$  (posición del carro en el tiempo discreto) para esas condiciones.

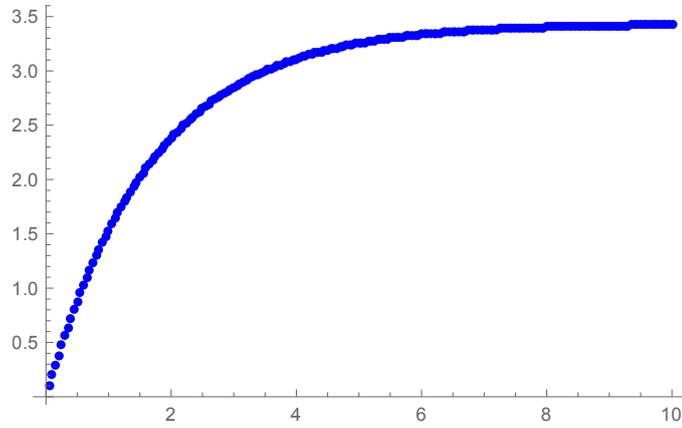


FIGURA 4.4. Gráfico de la posición  $x_k$  en función del tiempo  $t_k = kh$  para  $h = 0.05$  s.

Si ahora comparamos el Gráfico 4.2 y el Gráfico de  $x_k$  para distintos pasos de tiempo ( $h = 0.2$  s;  $h = 0.1$  s y  $h = 0.05$  s), tenemos la Figura 4.5, donde se puede ver que a medida que  $h$  es más pequeño, la curva discreta se ajusta mejor a la curva continua, esto nos dice que el comportamiento cualitativo de la aproximación es el correcto.

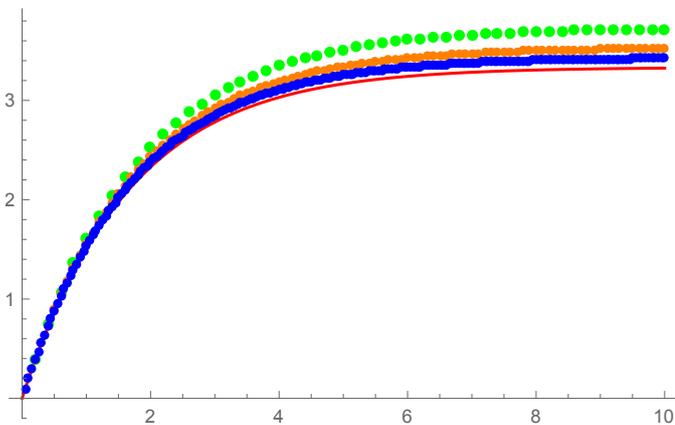


FIGURA 4.5. Comparación de curvas de posición para el caso continuo y el caso discreto: la curva roja corresponde a la trayectoria continua, la curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

Para ver que tan buena es esa aproximación calculamos los errores entre las trayectorias  $x_k$ , para los distintos valores de  $h$ , obtenidas con la discretización (4.7) y la trayectoria  $\{x(kh)\}_{k=1,2,\dots}$  obtenida a partir de evaluar la trayectoria continua en los valores discretos de tiempo. Así tenemos la función de errores  $E_k = x_k - x(kh)$  y la Figura 4.6, donde se pueden ver los gráficos de las distintas curvas de errores, para  $h = 0.05$  s,  $h = 0.1$  s y  $h = 0.2$  s, donde consideramos las mismas condiciones iniciales de antes.

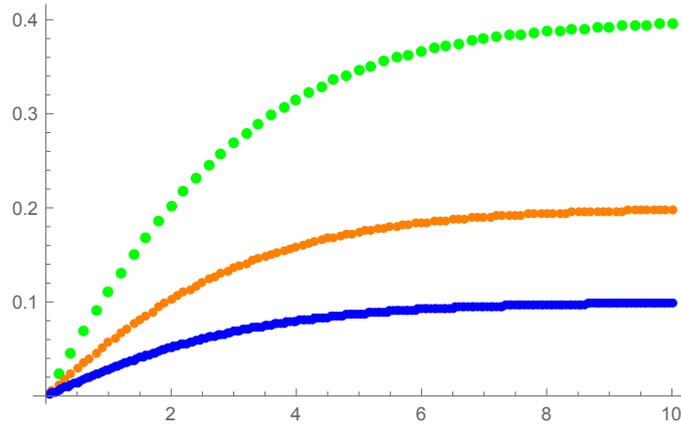


FIGURA 4.6. Gráfico de diferencias  $x_k - x(kh)$ . La curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

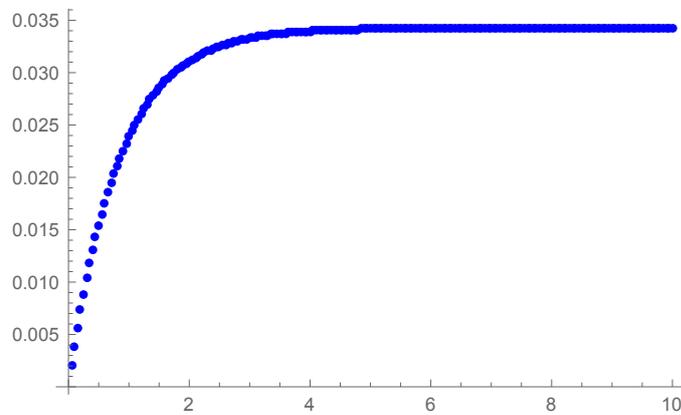


FIGURA 4.7. Gráfico de la entropía  $S_k$  en función del tiempo  $t_k = kh$  para  $h = 0.05$  s.

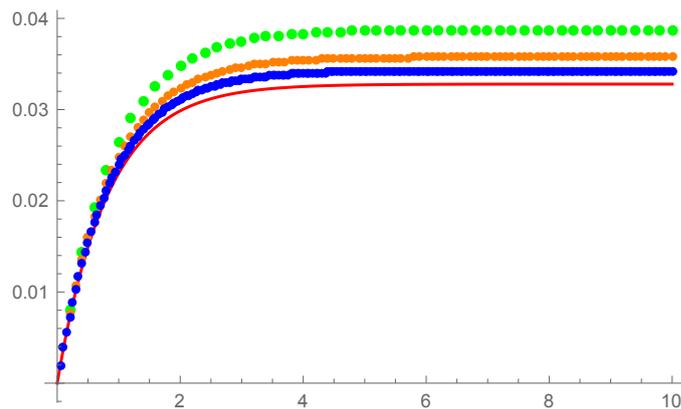


FIGURA 4.8. Comparación de curvas de entropía para el caso continuo y el caso discreto: la curva magenta corresponde a la entropía continua, la curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

Por otro lado, para las mismas condiciones iniciales y  $h = 0.05$  s, el Gráfico 4.7 muestra la evolución de la entropía en el tiempo.

Nuevamente, si comparamos el Gráfico 4.3 y el Gráfico de  $S_k$  para distintos pasos de tiempo ( $h = 0.2$  s,  $h = 0.1$  s y  $h = 0.05$  s), tenemos la Figura 4.8, donde se puede ver que a medida que  $h$  es más pequeño, la curva discreta se ajusta mejor a la curva continua.

Ahora, de forma similar a como hicimos antes, queremos calcular los errores entre las curvas de entropía  $S_k$ , para los distintos valores de  $h$ , obtenidas con la discretización (4.7) y la entropía  $\{S(kh)\}_{k=1,2,\dots}$  obtenida a partir de evaluar la entropía continua en los valores discretos de tiempo. Así tenemos la función de errores  $E_k = S_k - S(kh)$  y la Figura 4.9, donde se pueden ver los gráficos de las distintas curvas de errores, para  $h = 0.05$  s,  $h = 0.1$  s y  $h = 0.2$  s, donde consideramos las mismas condiciones iniciales de antes.

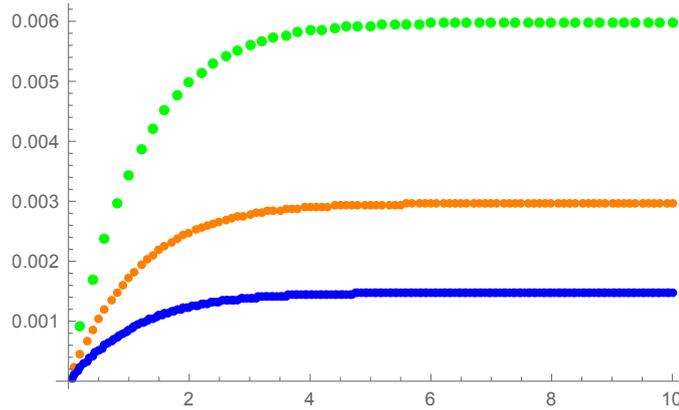


FIGURA 4.9. Gráfico de diferencias  $S_k - S(kh)$ . La curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

Hasta aquí, vemos que la formulación desarrollada a partir de la discretización (4.7) es razonable: aproxima las trayectorias exactas y los errores parecen decrecer linealmente con el valor de  $h$ . Ahora veremos que ocurre si utilizamos una segunda discretización.

### 1.2. Segunda discretización.

Ahora usaremos la discretización

$$\psi(x^-, x^+, S^-, S^+) = \left( \frac{x^- + x^+}{2}, \frac{x^+ - x^-}{h}, \frac{S^- + S^+}{2}, \frac{S^+ - S^-}{h} \right), \quad (4.8)$$

con lo cual, según la fórmula (3.17), el lagrangiano discreto es

$$L_d(x^-, x^+, S^-, S^+) = h \left( \frac{m}{2} \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right)^2 - \nu T_\infty e^{\frac{1}{\nu}(\frac{1}{2}(S^- + S^+) - S_\infty)} \right),$$

Además, por (3.16), tenemos que  $\tilde{\psi}(x^-, x^+, S^-, S^+) = \left( \frac{x^- + x^+}{2}, \frac{x^+ - x^-}{h}, \frac{S^- + S^+}{2} \right)$ . Entonces las fuerzas discretas, según 3.18, son

$$F_d^{fr\pm}(x^-, x^+) = -h\mu \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right) dx^-.$$

Según (3.7), los vínculos variacionales discretos son

$$\frac{1}{2} T_\infty \left( e^{\frac{1}{\nu}(\frac{1}{2}(S^- + S^+) - S_\infty)} \delta S^- + e^{\frac{1}{\nu}(\frac{1}{2}(S^- + S^+) - S_\infty)} \delta S^+ \right) = \mu \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right) \delta x^- + \mu \left( \frac{x^+ - x^-}{h} \right) \delta x^+$$

y, por (3.19), los vínculos cinemáticos son

$$T_\infty e^{\frac{1}{\nu}(\frac{1}{2}(S^- + S^+) - S_\infty)} (S^+ - S^-) = \frac{\mu}{h} (x^+ - x^-)^2,$$

luego, por el Teorema 3.17, las ecuaciones de evolución son

$$\begin{cases} \frac{m}{h}(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) = -\frac{1}{2}\mu(x_{k+1} - x_{k-1}) \\ T_\infty e^{\frac{1}{2\nu}(S_{k-1}+S_k)-S_\infty}(S_k - S_{k-1}) = \frac{\mu}{h}(x_k - x_{k-1})^2. \end{cases} \quad k \geq 1 \quad (4.9)$$

Ahora vamos a resolver la primera ecuación de (4.9) para la trayectoria  $x_k$  usando el siguiente código de Mathematica:

```
RecurrenceTable[{m*(1/h)*(x[n+1]-2*x[n]+x[n-1])==-(mu/2)*(x[n+1]-x[n-1]),
x[0]==x0, x[1]==x0+vx0*h}, x, {n, 1, r}]
```

con las siguientes condiciones iniciales:  $\mu := 3$  Ns/m es el coeficiente de fricción,  $m := 5$  kg la masa del carro,  $x_0 := 0$  m es la posición inicial,  $\dot{x}_0 := 2$  m/s es la velocidad inicial y  $h := 0.05$  s el paso de tiempo que consideraremos. Al graficar obtenemos la Figura 4.10 y para comparar distintos valores de  $h$  podemos ver la Figura 4.11.

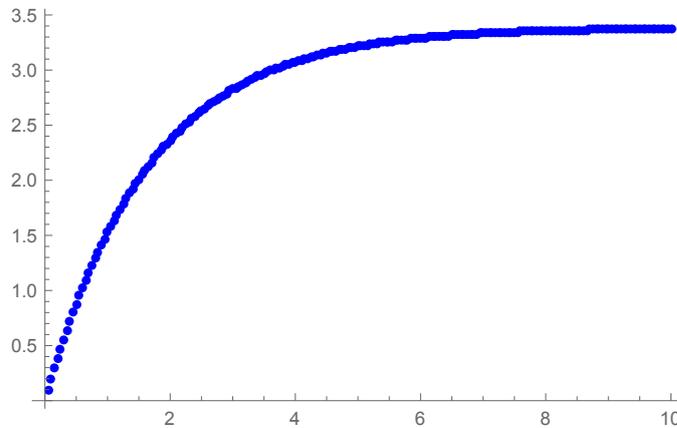


FIGURA 4.10. Gráfico de la posición  $x_k$  en función del tiempo  $t_k = kh$  para  $h = 0.05$  [s].

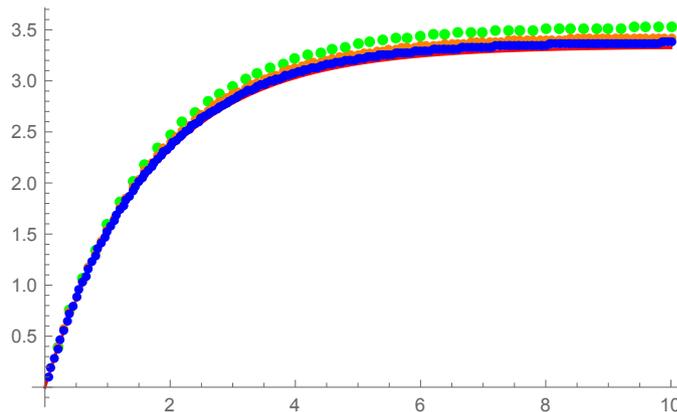


FIGURA 4.11. Comparación de curvas de posición para el caso continuo y el caso discreto: la curva roja corresponde a la trayectoria continua, la curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

La segunda ecuación de (4.9) para la entropía es más complicada de resolver, ya que es una recurrencia de segundo orden, con una variable implícita. Para poder resolverla utilizaremos el siguiente código de Mathematica:

```

S[0]:=S0,
S[1]:=k /. FindRoot[Ti*(Exp[1/v*((S0+k)/2-Si)])*(k-S0)==(u/h)*(vx0*h)^2,
{k, S0}],
For[i = 1, i <= r, i++, {ant = S[i], S[i + 1]=y /.
FindRoot[Ti*(Exp[1/v*((S[i]+y)/2-Si)])*(y-S[i])==2*(mu/h)*(p[i+1]-p[i])^2,
{y, ant}}] ]

```

con las mismas condiciones iniciales que usamos anteriormente. Al graficar obtenemos la Figura 4.12 y para comparar distintos valores de  $h$  podemos ver la Figura 4.13.

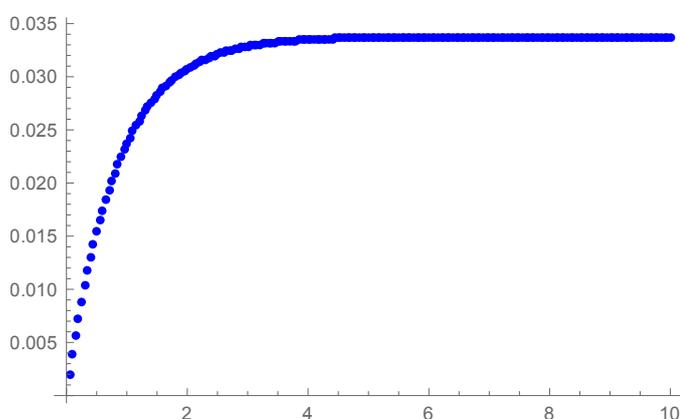


FIGURA 4.12. Gráfico de la entropía  $S_k$  en función del tiempo  $t_k = kh$  para  $h = 0.05$  s.

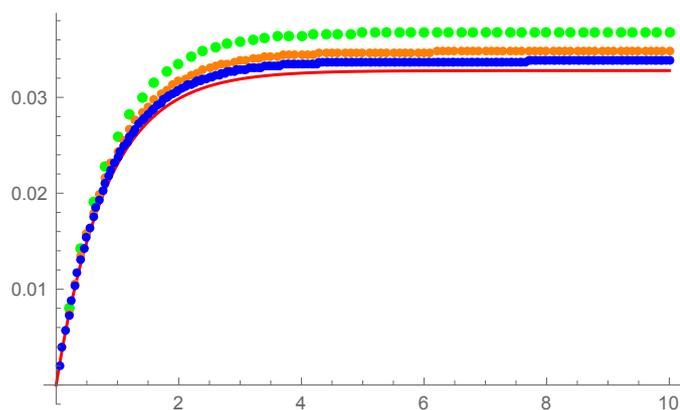


FIGURA 4.13. Comparación de curvas de entropía para el caso continuo y el caso discreto: la curva roja corresponde a la entropía continua, la curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

Ahora, de la misma manera a como hicimos antes, calculamos los errores de diferencia entre la curva continua y las curvas discretas (para los distintos valores de  $h$ ) para la posición y la entropía, obteniendo las Figuras 4.14 y 4.15.

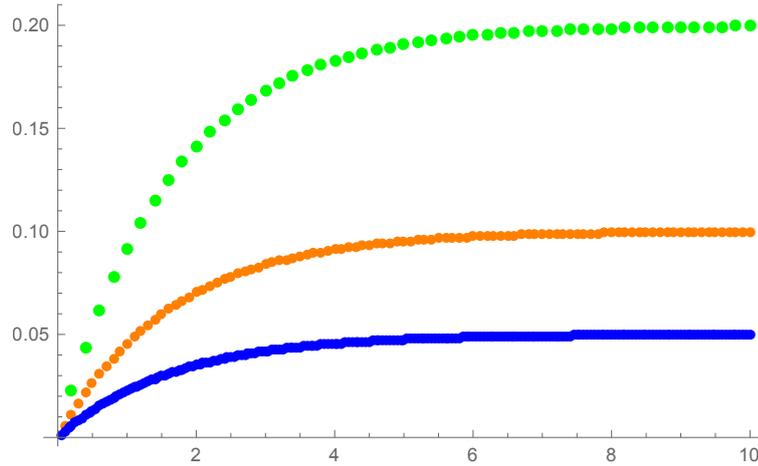


FIGURA 4.14. Gráfico de diferencias  $x_k - x(kh)$ . La curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

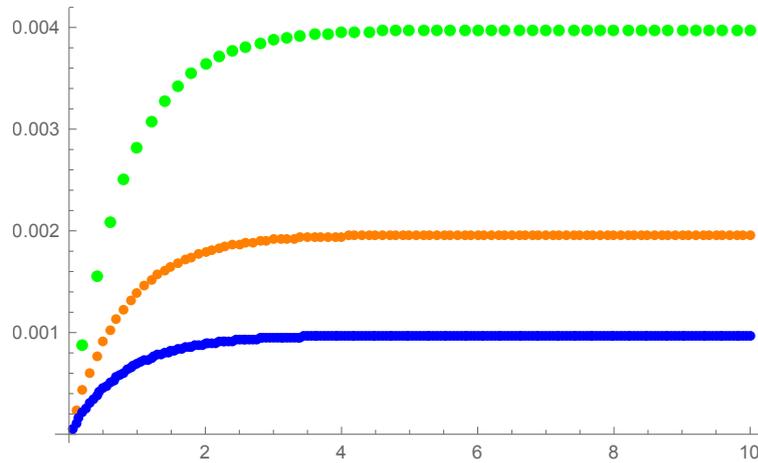


FIGURA 4.15. Gráfico de diferencias  $S_k - S(kh)$ . La curva verde corresponde a  $h = 0.2$  s, la curva naranja corresponde a  $h = 0.1$  s y la curva azul corresponde a  $h = 0.05$  s.

**1.3. Conclusiones.** Podemos ver que la posición y la entropía discretas que provienen de la segunda discretización (4.8) aproximan mejor a las curvas continuas, sin embargo la segunda ecuación de (4.9) es implícita, por lo que hace falta utilizar un método numérico que nos de una solución de la ecuación implícita en cada iteración y esto es una clara diferencia frente a la primera discretización (4.7), pues esto hace que el método sea computacionalmente más costoso. Existen otras posibles discretizaciones que podrían ser usadas para discretizar sistemas termomecánicos según lo formulado en la Sección 4 del Capítulo 3, por lo que un posible trabajo a futuro sería estudiar distintos tipos de discretizaciones para sistemas termomecánicos y analizar sus ventajas y desventajas, más aún, se podría realizar un estudio de la dependencia de los errores entre las trayectorias discretas y la continua en función del orden de contacto de la discretización que se usa.

## 2. Segundo sistema: Fuerza elástica se contrapone a la presión de un gas

Ahora vamos a estudiar el segundo sistema termomecánico de este capítulo: se trata de una caja cerrada con paredes adiabáticas, donde en el extremo izquierdo tenemos fijo un

resorte (cuya extensión en equilibrio tiene largo  $x_0$ ) que a su vez, en su extremo derecho está fijado a una masa que funciona como pared móvil para el recinto que queda formado del lado derecho, el cual contiene un gas ideal. La caja tiene largo  $x_0$  y el área de la pared móvil es  $A$ .

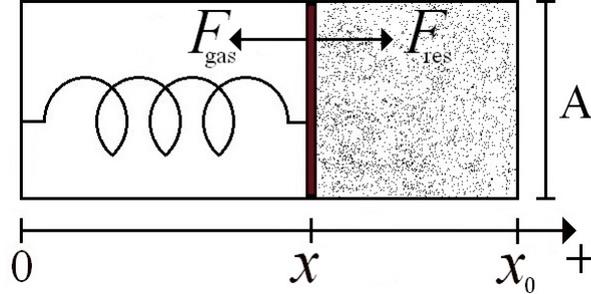


FIGURA 4.16. Esquema del sistema

La relación entre el volumen  $V$  ocupado por el gas y la posición de la masa  $x$  es

$$V = A(x_0 - x). \quad (4.10)$$

Según el Gráfico 4.16, la fuerza elástica que aplica el resorte contra la pared móvil (posicionada en  $x(t)$ ) tiene sentido positivo y la podemos escribir como  $F_{res}(t) = k(x_0 - x(t))$ , con  $k$  la constante de elasticidad del resorte. Por otro lado tenemos la fuerza que ejerce el gas sobre la pared móvil, que se opone a la fuerza del resorte, la podemos escribir como  $F_{gas}(t) = -P(t)A$ , donde  $P(t)$  es la presión que ejerce el gas sobre la pared móvil a tiempo  $t$ . Ahora, con los datos que tenemos, vamos a escribir la ecuación de Newton (1.1) aplicada a la pared móvil:

$$m\ddot{x}(t) = F_{res}(t) + F_{gas}(t) = k(x_0 - x(t)) - P(t)A. \quad (4.11)$$

En esta ecuación tenemos dos incógnitas ( $x$  y  $P$ ), por lo que sería suficiente poder relacionar a  $P$  con  $x$ . Afortunadamente, haciendo un análisis termodinámico del sistema, veremos que es posible encontrar dicha relación y para ello será necesario considerar ciertas ecuaciones de estado.

**2.1. Análisis termodinámico.** Inicialmente para caracterizar los estados del sistema y su evolución debemos considerar las variables  $x, S, U, N, V, T$  y  $P$ , pero algo que podemos ver rápidamente es que, dado que la caja es cerrada, el número de moles se mantiene constante ( $N = N_0$ ), de esta manera descartamos  $N$ . Dado que el sistema es adiabático y que el gas es ideal, podemos utilizar la ecuación de estado (C.7) para relacionar la presión y el volumen:

$$PV^{5/3} = \xi, \quad (4.12)$$

donde  $\xi$  es una constante. De esta ecuación obtenemos que

$$P = \xi V^{-5/3}. \quad (4.13)$$

Ahora bien, para obtener la temperatura y la energía interna, podemos usar las ecuaciones de estado  $PV = NRT$  y  $U = \frac{3}{2}NRT$  (ecuaciones (C.5) y (C.6)) y el hecho de que  $N = N_0$ , con lo cual si reemplazamos  $P$  como en (4.13) tendremos las siguientes fórmulas:

$$T(V) = \frac{\xi V^{1-5/3}}{N_0 R}$$

$$U(V) = \frac{3}{2}\xi V^{-2/3}.$$

Podemos ver que la temperatura y la energía interna del sistema dependen únicamente del volumen. Más adelante veremos que la entropía del sistema es constante y hablaremos de que consecuencias tiene esto sobre la formulación que venimos desarrollando a lo largo del Capítulo 3.

Volviendo a la ecuación (4.11), si usamos la relación (4.10) en (4.13) podemos reemplazar la presión  $P = \xi V^{-5/3} = \xi A^{-5/3}/(x_0 - x)^{5/3}$  en la ecuación (4.11), tendremos finalmente que

$$m\ddot{x}(t) = k(x_0 - x(t)) - \frac{\xi A^{1-5/3}}{(x_0 - x(t))^{5/3}}, \quad (4.14)$$

esta es una ecuación que únicamente depende de la variable posición  $x(t)$ . Es decir, el sistema termomecánico que habíamos considerado en un principio puede reducirse, mediante la ecuación de estado (4.12) y el vínculo (4.10), para convertirse en un sistema puramente mecánico, del cual podemos recuperar la información de los estados termodinámicos volviendo a usar las ecuaciones mencionadas.

Desde el punto de vista de la Geometría Diferencial lo que vemos es que, desde un principio, el estado del sistema queda determinado por los parámetros  $x, S, U, N, V, T$  y  $P$ . Luego, las distintas ecuaciones de estado permiten ir “cortando” subvariedades de este espacio para obtener una “región” en la que puede existir el sistema. Finalmente uno ve que el sistema es parte de una subvariedad que puede ser parametrizada únicamente en términos de  $x$ . Llegado este punto, se describe la dinámica en términos de  $x$  y se ve cuál es la trayectoria  $x(t)$ . Sin embargo, esto no dice cuál es el comportamiento de todas las variables del sistema. Para dar una descripción del resto de las variables hay que recordar que el estado del sistema es una subvariedad (que se puede parametrizar en términos de  $x$ ) del espacio de los estados y de allí se despejan las demás variables.

En definitiva, para poder caracterizar el sistema, salvo la evolución de la entropía, de la que hablaremos más adelante, debemos considerar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = k(x_0 - x(t)) - P(t)A \\ P(t)(V(t))^{5/3} = \xi \\ V(t) = A(x_0 - x(t)) \\ T(t)N_0R = \xi(V(t))^{-2/3} \\ U(t) = \frac{3}{2}\xi(V(t))^{-2/3}. \end{cases}$$

**2.2. Planteamiento como un STLF.** Ahora consideramos el lagrangiano mecánico

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - W(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - x)^2 + \frac{\xi A^{-2/3}(x_0 - x)^{-2/3}}{-2/3}, \quad (4.15)$$

NOTA 4.2. El potencial  $W(x)$  es la suma de dos términos, el primero  $\frac{1}{2}k(x_0 - x)^2$  corresponde a la fuerza elástica del resorte y el segundo  $-\xi A^{-2/3}(x_0 - x)^{-2/3}/(-2/3)$  corresponde a la presión del gas relacionada con el estado termodinámico del sistema.

Ahora usemos el Teorema 2.6 aplicado al lagrangiano (4.15) y tendremos que

$$m\ddot{x} - k(x_0 - x) + \frac{\xi A^{-2/3}}{(x_0 - x)^{5/3}} = 0,$$

de esta manera tenemos nuevamente la ecuación (4.11), es decir, a partir del lagrangiano propuesto, recuperamos la ecuación de Newton del sistema. De esta manera podemos considerar el SML del lagrangiano (4.15), en el que si agregamos la relación (4.10) y la ecuación de estado (4.12), podemos obtener toda la información del sistema termomecánico. Pero ¿qué ocurre cuando queremos considerarlo como un STLF? Tanto en nuestra definición de STLF (Definición 3.1) como a la formulación planteada en [11], una hipótesis fuerte es que el estado termodinámico de estos sistemas pueda ser parametrizado por la entropía, con lo cual, para plantear el sistema de esta forma, tenemos que poder parametrizar las variables termodinámicas del sistema en términos de  $S$ . Si observamos la ecuación (C.8) de la entropía, dado que  $N = N_0$ , lo que tendremos es

$$S = S_0 + N_0 R \log \left[ \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left( \frac{V}{V_0} \right) \right],$$

pero las ecuaciones de estado  $U = \frac{3}{2}NRT$  y  $PV = NRT$  nos permiten escribir  $U = \frac{3}{2}PV$ , con lo cual

$$S = S_0 + N_0 R \log \left[ \left( \frac{3PV}{2U_0} \right)^{3/2} \left( \frac{V}{V_0} \right) \right],$$

ahora usamos que  $P = \xi V^{-5/3}$  y desarrollando, finalmente se obtiene que

$$S = S_0 + N_0 R \log \left[ \left( \frac{3\xi}{2U_0} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{V_0} \right) \right],$$

como vemos  $S$  es constante, es decir, el sistema es isoentrópico. Sin embargo, a pesar de ser un sistema isoentrópico, sus estados de equilibrio evolucionan en el tiempo, pues la relación (4.10) nos indica que el volumen  $V$  y consecuentemente la presión  $P$  cambian según la posición de la pared móvil. Por esta razón no podremos caracterizar los estados termodinámicos del sistema usando la entropía.

En conclusión, este sistema nos muestra que no todos los sistemas termomecánicos pueden ser tratados con el formalismo de un STLF que consideramos en el Capítulo 3 y que proponen en [11]. En particular, en el caso de un sistema isoentrópico en el que los estados de equilibrio evolucionan, la entropía es constante y no nos provee información de cómo estos evolucionan ni tampoco nos indica cuál es el estado termodinámico del sistema en un instante dado. Sin embargo, existe la posibilidad de darles un formalismo que involucre otras variables termodinámicas diferentes a la entropía, como podrían ser la temperatura o el volumen. Más aún, tendría que ser posible pensar en sistemas cuyos estados se pueden describir como subvariedades (de dimensión mayor a 1) del espacio de todos los estados, usando los vínculos que sean necesarios. En el artículo [7], los autores proponen una posibilidad de formalizar los sistemas termomecánicos utilizando otras variables además de la entropía, con lo cual, un posible trabajo a futuro sería desarrollar una versión para sistemas termomecánicos discretos del formalismo propuesto en dicho artículo.



## Conclusiones y trabajos a futuro

A continuación presentaremos algunas conclusiones de este trabajo y daremos una lista de temas que podrían tratarse en futuros trabajos.

### Conclusiones:

- Con definiciones precisas de sistemas termomecánicos continuo y discreto pudimos caracterizar sus trayectorias -definidas variacionalmente en ambos contextos- en términos de sistemas de ecuaciones, diferenciales ordinarias para los primeros y algebraicas para los últimos. Estas demostraciones completan las provistas en [11] donde se omiten algunos detalles e hipótesis.
- En cuanto a la existencia de trayectorias para los sistemas termomecánicos discretos hemos mostrado como un sistema, aún satisfaciendo las condiciones de regularidad dadas en [11], puede no tener trayectorias. Por el contrario, si uno de estos sistemas tiene al menos una trayectoria, probamos la existencia de un flujo local definido cerca de la trayectoria en cuestión. Este punto corrige la afirmación de [11] acerca de que la condición de regularidad del sistema discreto alcanza para la existencia de trayectorias.
- Discutimos con cuidado la discretización de un sistema termomecánico continuo usando aplicaciones de diferencia finita. Si bien no realizamos un análisis de errores de los sistemas obtenidos, exploramos estos sistemas mediante ejemplos y vimos que, numéricamente, la dinámica del sistema discreto converge a la del continuo.
- Desarrollamos y discutimos el ejemplo de un sistema termomecánico cuya descripción excede los límites de la formulación propuesta en [11].
- Aprendimos e incorporamos la utilización de software que nos permitió realizar simulaciones de la dinámica de distintos sistemas.

### Trabajo a futuro:

- Distintas discretizaciones: profundizar el estudio de distintas discretizaciones poniendo énfasis en estudiar el orden de los errores en las mismas. Esto serviría para motivar un posterior análisis de errores de los integradores así construidos.
- Desarrollar una versión discreta del formalismo propuesto en [7].
- Analizar cuidadosamente las consecuencias de incorporar una función transferencia de calor a los sistemas termomecánicos discretos.

- Estudiar la existencia de estructuras simplécticas o de contacto en el caso de los sistemas termomecánicos discretos (tal vez para los continuos también). En particular, hallar ecuaciones que controlen la evolución con el flujo de dichas estructuras y ver, si existen, condiciones bajo las cuales estas estructuras son conservadas.
- Estudiar bajo qué hipótesis se puede probar que la familia de sistemas termomecánicos discretos obtenidos mediante una aplicación de diferencias finitas a un sistema continuo es un sistema regular. Eventualmente, estudiar la existencia de trayectorias en el caso de este tipo de sistemas discretos.
- Estudiar la existencia de magnitudes conservadas. En particular estudiar el comportamiento de la energía de un sistema termomecánico.

## Método para una recurrencia

En esta sección buscaremos una solución analítica a la Ecuación (2.5) del Ejemplo 2.22:

$$q_{k+1} = \frac{1}{1 + h\frac{\lambda}{m}} \left( (2 - h^2\frac{k}{m} + h\frac{\lambda}{m})q_k - q_{k-1} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Comenzamos reescribiendo las constantes  $A = \frac{1}{1+h\frac{\lambda}{m}}(2 - h^2\frac{k}{m} + h\frac{\lambda}{m})$  y  $B = \frac{1}{1+h\frac{\lambda}{m}}$ , para obtener

$$q_{k+1} = Aq_k - Bq_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{A.1}$$

Para resolver (A.1) proponemos una solución  $q_k = x^k$  para alguna constante  $x$  a determinar, con lo cual obtenemos la ecuación característica  $x^2 - Ax + B = 0$ , de la que obtenemos las soluciones

$$x_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}.$$

Según las condiciones iniciales presentadas en el Ejemplo 2.22, debemos considerar el caso  $B > (A/2)^2$ . Entonces escribimos  $x_1$  y  $x_2$  como

$$x_1 = z = \frac{A}{2} + i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2}, \quad x_2 = \bar{z} = \frac{A}{2} - i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2}.$$

Luego, debido a la linealidad de (A.1), su solución general es

$$q_k = C_1 z^k + C_2 \bar{z}^k,$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$  constantes que determinaremos a partir de las condiciones iniciales  $q_0$  y  $q_1$  dadas. Luego tendremos

$$\begin{cases} q_0 = C_1 + C_2 \\ q_1 = C_1 z + C_2 \bar{z} \end{cases}$$

y despejando tendremos,

$$\begin{cases} q_0 z - q_1 = C_2 (z - \bar{z}) \\ q_1 - q_0 \bar{z} = C_1 (z - \bar{z}) \end{cases},$$

reemplazando ahora en la solución general se tiene,

$$\begin{aligned} q_k(z - \bar{z}) &= (q_1 - q_0 \bar{z})z^k + (q_0 z - q_1)\bar{z}^k, \\ q_k(z - \bar{z}) &= q_1(z^k - \bar{z}^k) - q_0(\bar{z}z^k - z\bar{z}^k). \end{aligned}$$

Si escribimos  $z = |z|e^{i\theta}$  y  $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$ , con  $0 \leq \theta < 2\pi$ , tenemos que  $\bar{z}z^k = |z|^{k+1}e^{i(k-1)\theta}$ , con lo cual, reemplazando obtenemos,

$$q_k 2i|z| \sin(\theta) = q_1 2i|z|^k \sin(k\theta) - q_0 2i|z|^{k+1} \sin((k-1)\theta).$$

Finalmente sabiendo que  $|z| = \sqrt{(A/2)^2 + B - (A/2)^2} = \sqrt{B}$ ,

$$q_k = q_1 (\sqrt{B})^{k-1} \frac{\sin(k\theta)}{\sin(\theta)} - q_0 (\sqrt{B})^k \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad (\text{A.2})$$

con  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{B}}\right)$ .

## Cosas varias de Geometría Diferencial

Consideremos  $M$  una variedad diferencial y sea  $p \in M$ . Sea  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una carta coordenada tal que  $p \in U \subset M$ . Definimos  $\mathcal{C}_p$  como el conjunto de curvas suaves que pasa por  $p$ :

$$\mathcal{C}_p = \{\gamma \in C^\infty((-1, 1), M) \mid \gamma(0) = p\}.$$

Ahora, sobre este conjunto, definimos la siguiente relación de equivalencia:

Sean  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_p$

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}. \quad (\text{B.1})$$

DEFINICIÓN B.1. Dado  $p \in M$ , llamaremos *espacio tangente* a  $M$  en  $p$  al conjunto

$$T_p M := \mathcal{C}_p / \sim. \quad (\text{B.2})$$

LEMA B.2. *La relación de equivalencia  $\sim$  está bien definida, independientemente de la carta coordenada elegida.*

DEMOSTRACIÓN. Sea un par de curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tales que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  y  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , es decir

$$\left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}.$$

Consideremos otra carta  $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $p \in W$ . Si restringimos  $\phi$  y  $\psi$  a  $U \cap W$  tendremos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = d_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} \\ &= d_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \gamma_2) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Resumiendo

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}$$

Recíprocamente si  $\left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}$ , podemos volver a usar el desarrollo anterior para tener que  $\left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}$  y con eso  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ .

Lo anterior muestra que la relación de equivalencia  $\sim$  está bien definida, independientemente de la carta coordenada elegida.  $\square$

TEOREMA B.3. *Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $n$ , con  $p \in M$ . Entonces,  $T_p M$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con  $\dim(T_p M) = \dim(M)$  y ni la definición de  $T_p M$ , ni su estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, dependen de la carta coordenada elegida para definir las.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una clase  $[\gamma] \in T_p M$  y una carta coordenada de  $M$ ,  $(U, \phi)$  tal que  $p \in U$ , consideremos el vector  $x = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0}$ . Esto define una función  $\Gamma_\phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\Gamma_\phi([\gamma]) = x$ . Notar que  $\Gamma_\phi$  no depende del representante de  $[\gamma]$ , pues si  $\gamma_2 \in [\gamma]$  entonces  $\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0} = x$ .

También podemos ver que, si tomamos otra carta  $\psi : V \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $p \in V$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \Gamma_\psi([\gamma]) &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \left( \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0} \right) = D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi([\gamma])), \end{aligned}$$

es decir

$$\Gamma_\psi([\gamma]) = D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi([\gamma])). \quad (\text{B.3})$$

Consideremos ahora la función  $\tilde{\Gamma}_\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  tal que  $\tilde{\Gamma}_\phi(x) = [\tilde{\gamma}]$  es la clase de la curva  $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  definida por  $\tilde{\gamma}(t) = \phi^{-1}(tx + \phi(p))$ , donde  $\epsilon > 0$  es suficientemente chico para que  $tx + \phi(p) \in \phi(U)$ , pues  $\phi(p) \in \phi(U)$  que es abierto.

Veamos que  $\tilde{\Gamma}_\phi$  y  $\Gamma_\phi$  son mutuamente inversas. Por un lado, si  $[\gamma] \in T_p M$ , sabemos que

$$\Gamma_\phi([\gamma]) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0} = x$$

y a su vez, si  $[\tilde{\gamma}(t)] = \tilde{\Gamma}_\phi(x)$ , tendremos

$$x = \frac{d}{dt}(\phi \circ \phi^{-1}(tx + \phi(p)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \tilde{\gamma})|_{t=0}, \quad (\text{B.4})$$

es decir  $\tilde{\Gamma}_\phi(\Gamma_\phi([\gamma])) = \tilde{\Gamma}_\phi(x) = [\tilde{\gamma}]$ . Pero  $\frac{d}{dt}(\phi \circ \tilde{\gamma})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0}$ , entonces  $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ , con lo cual  $\tilde{\Gamma}_\phi(\Gamma_\phi([\gamma])) = [\gamma]$ . Por otro lado si  $x \in \mathbb{R}^n$ , por (B.4) tendremos que  $\tilde{\Gamma}_\phi(x) = [\tilde{\gamma}]$ , entonces  $\Gamma_\phi(\tilde{\Gamma}_\phi(x)) = \Gamma_\phi([\tilde{\gamma}]) = x$ . Por lo tanto,  $\tilde{\Gamma}_\phi = \Gamma_\phi^{-1}$ .

Definimos la estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de  $T_p M$  haciendo que la biyección  $\Gamma_\phi$  sea un isomorfismo de espacios vectoriales. Es decir, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v_p, w_p \in T_p Q$  con  $x = \Gamma_\phi(v_p)$  e  $y = \Gamma_\phi(w_p)$ , tendremos en  $T_p Q$  la operación:

$$\lambda v_p + w_p := \Gamma_\phi^{-1}(\lambda x + y),$$

donde  $\Gamma_\phi^{-1}(\lambda x + y) = [\phi^{-1}(t(\lambda x + y) + \phi(p))]$ . Notar que

$$\lambda x + y = \Gamma_\phi(\lambda v_p + w_p). \quad (\text{B.5})$$

Si ahora tomamos otra carta  $\psi : V \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $p \in V$ , tendremos:

$$\lambda x' + y' = \lambda \Gamma_\psi(v_p) + \Gamma_\psi(w_p)$$

por (B.3),

$$= \lambda D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(v_p)) + D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(w_p))$$

por ser  $D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}$  lineal,

$$= D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\lambda \Gamma_\phi(v_p) + \Gamma_\phi(w_p))$$

por definición de  $x$  e  $y$ ,

$$= D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\lambda x + y)$$

por (B.5),

$$= D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(\lambda v_p + w_p))$$

nuevamente por B.3

$$= \Gamma_\psi(\lambda v_p + w_p).$$

Resumiendo tenemos:

$$\lambda x' + y' = \Gamma_\psi(\lambda v_p + w_p).$$

Con lo cual, al aplicar  $\Gamma_\psi^{-1}$  tendremos

$$\Gamma_\psi^{-1}(\lambda x' + y') = \Gamma_\psi^{-1}(\Gamma_\psi(\lambda v_p + w_p)) = \lambda v_p + w_p.$$

Es decir, la suma en  $T_pM$  no depende de la carta coordenada, con lo cual su estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial está bien definida. Además,  $T_pM$  tiene dimensión  $m$ , pues  $T_pM \cong \mathbb{R}^n$  y  $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(M) = n$ .  $\square$

NOTA B.4. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v_p, w_p \in T_pM$ , las operaciones en  $T_pM$  son:

$$v + w = [\phi^{-1}(t\Gamma_\phi(v_p + w_p) + \phi(p))]$$

$$\lambda v_p = [\phi^{-1}(t\Gamma_\phi(\lambda v_p) + \phi(p))]$$

DEFINICIÓN B.5. Dada una función  $F : M \rightarrow N$  suave, definimos la diferencial de  $F$  en  $p \in M$ , como la aplicación  $F_{*,p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ , tal que

$$F_{*,p}(v_p) = [F \circ \gamma], \tag{B.6}$$

donde  $\gamma$  es cualquier curva en la clase  $v_p$ .

PROPOSICIÓN B.6.  $F_{*,p}$  está bien definida.

DEMOSTRACIÓN. Dado  $v_p \in T_pM$ , se tiene que  $F \circ \gamma$  es una curva que pasa por  $F(p)$  y  $[F \circ \gamma] \in T_{F(p)}N$ .

Veamos que  $F_{*,p}$  no depende de  $\gamma$ , para ello consideremos una carta  $(\phi, U)$ , con  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de  $M$  y una carta  $(\psi, V)$ , con  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de  $N$ , tales que  $p \in U$  y  $F(p) \in V$ . Sea otra curva  $\gamma' \in v_p$ , entonces tendremos

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ F \circ \gamma') \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ F \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma') \right|_{t=0} \\ &= D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \left( \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma') \right|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

como  $\gamma' \sim \gamma$ ,

$$\begin{aligned} &= D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \left( \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \right|_{t=0} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\psi \circ F \circ \gamma) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Es decir,  $F \circ \gamma \sim F \circ \gamma'$ . Con lo cual,  $[F \circ \gamma] = [F \circ \gamma']$ , entonces  $F_{*,p}$  no depende de la curva elegida.

Por otro lado, dado que  $F_{*,p}$  está definida como una clase de equivalencia y habíamos visto que las clases no dependen de las cartas, tendremos que  $F_{*,p}$  tampoco depende de la carta. Por todo lo anterior,  $F_{*,p}$  está bien definida.  $\square$

PROPOSICIÓN B.7. Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave. Si  $(U, \phi)$  es una carta, con  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de  $M$  que contiene a  $p$  y  $(V, \psi)$  es una carta, con  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de  $N$  que contiene a  $F(p)$ , entonces la expresión local de  $F_{*,p}$  es:

$$F_{*,p}(v_p) = \Gamma_\psi^{-1}(D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(v_p))).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v_p \in T_pM$ , entonces

$$\begin{aligned}
F_{*,p}(v_p) &= \Gamma_\psi^{-1} \circ \Gamma_\psi \circ F_{*,p} \circ \Gamma_\phi^{-1}(\Gamma_\phi(v_p)) \\
&= \Gamma_\psi^{-1} \circ \Gamma_\psi([F \circ \phi^{-1}(\phi(F(p)) + t\Gamma_\phi(v_p))]) \\
&= \Gamma_\psi^{-1} \left( \frac{d}{dt}(\psi \circ F \circ \phi^{-1}(\phi(F(p)) + t\Gamma_\phi(v_p))) \Big|_{t=0} \right) \\
&= \Gamma_\psi^{-1}(D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(v_p))).
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN B.8.  $F_{*,p}$  es lineal.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v_p, w_p \in T_pM$ , entonces:

$$\begin{aligned}
&\lambda F_{*,p}(v_p) + F_{*,p}(w_p) \\
&= \lambda \Gamma_\psi^{-1}(D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(v_p))) + \Gamma_\psi^{-1}(D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(w_p))) \\
&= \Gamma_\psi^{-1}(\lambda D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(v_p)) + D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(w_p))) \\
&= \Gamma_\psi^{-1}(D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\lambda \Gamma_\phi(v_p) + \Gamma_\phi(w_p))) \\
&= \Gamma_\psi^{-1}(D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\Gamma_\phi(\lambda v_p + w_p))) \\
&= F_{*,p}(\lambda v_p + w_p)
\end{aligned}$$

□

El siguiente diagrama de espacios vectoriales y transformaciones lineales, nos muestra las relaciones entre los ellos:

$$\begin{array}{ccc}
T_pM & \xrightarrow{F_{*,p}} & T_{F(p)}N \\
\Gamma_\phi \downarrow & & \uparrow \Gamma_\psi^{-1} \\
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

DEFINICIÓN B.9. Sea  $M$  una variedad diferencial. Llamaremos fibrado tangente, al conjunto

$$TM := \cup_{p \in M} T_pM. \quad (\text{B.7})$$

Vamos a darle a  $TM$ , una topología y estructura de variedad diferencial, a partir de la estructura de  $M$ . Para empezar, definimos la función  $\tau : TM \rightarrow M$  tal que  $\tau(v_p) = p$ ,  $\forall v_p \in T_pM$ . Luego, dado  $A \subseteq M$ ,  $\tau^{-1}(A) = \cup_{p \in A} T_pM$ .

Sea  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I\}$  un atlas de  $M$ . Consideremos las funciones  $\Phi_\alpha : \tau^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \phi(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  tales que  $\Phi_\alpha(v_p) = (\phi_\alpha(\tau(v_p)), \phi_{\alpha*,\tau(v_p)}(v_p))$ , con imagen  $\phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Dado que las funciones  $\phi_\alpha$  y  $\phi_{\alpha*,p}$  son inyectivas, tendremos que  $\Phi_\alpha$  también lo es y por lo tanto, si la restringimos a su imagen, tiene inversa  $\Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(\tau^{-1}(U_\alpha)) \rightarrow \tau^{-1}(U_\alpha)$ . Dado  $v_p \in TM$  notaremos  $\phi_\alpha(p) = x$  y  $\phi_{\alpha*,p}(v_p) = \dot{x}$ , es decir,  $\Phi_\alpha(v_p) = (x, \dot{x})$ .

Definimos la topología sobre  $TM$  generada por

$$\{B \subseteq TM / B = \Phi_\alpha^{-1}(A) \text{ para algún } A \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ abierto y } \alpha \in I\}.$$

Veamos ahora que  $\{(\tau^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha), \alpha \in I\}$  es un atlas para  $TM$ . Por un lado,  $\cup_{\alpha \in I} \tau^{-1}(U_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} (\cup_{p \in U_\alpha} T_pM) = \cup_{p \in M} T_pM = TM$ , pues  $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ . Por otro lado, dados  $(\tau^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$

y  $(\tau^{-1}(U_\beta), \Phi_\beta)$ , usando el hecho de que las cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \phi_\beta)$  son compatibles, se deduce que la función,  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : \Phi_\beta(\tau^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tal que

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, \dot{x}) = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x), D(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})_x(\dot{x})), \quad (\text{B.8})$$

es diferenciable. Por lo tanto,  $(\tau^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$  y  $(\tau^{-1}(U_\beta), \Phi_\beta)$  son compatibles.

Además, dado un abierto  $A \subset M$ , existen cartas  $(\tau^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$  tales que  $A = \cup_{\alpha \in I} (A \cap U_\alpha)$  y

$$\tau^{-1}(A \cap U_\alpha) = \Phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(A \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n).$$

Pero,  $\phi_\alpha(A \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$  es abierto, con lo cual

$$\tau^{-1}(A) = \cup_{\alpha \in I} \tau^{-1}(A \cap U_\alpha), \quad (\text{B.9})$$

es abierto y  $\tau$  es continua. También tenemos que

$$\phi_\alpha \circ \tau \circ \Phi_\alpha^{-1}(x, \dot{x}) = x,$$

es diferenciable, por lo tanto,  $\tau$  es suave.

En conclusión, hemos probado el siguiente resultado.

**TEOREMA B.10.** *Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $n$ . El conjunto  $TM$  con la topología y el atlas que definimos arriba es una variedad diferencial con dimensión  $2n$  y  $\tau$  es una función suave.*

**DEFINICIÓN B.11.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciales. Sea  $F : M \longrightarrow N$  una función suave. Definimos la aplicación diferencial  $F_* : TM \longrightarrow TN$  como

$$F_*(v) := F_{*,\tau(v)}(v).$$

**PROPOSICIÓN B.12.**  *$F_*$  es suave.*

**DEMOSTRACIÓN.** Basta elegir convenientemente dos cartas  $(\tau_M^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$  y  $(\tau_N^{-1}(V_\beta), \Psi_\beta)$  de  $TM$  y  $TN$  respectivamente, para notar que

$$\begin{aligned} \Psi_\beta \circ F_* \circ \Phi_\alpha^{-1}(x, \dot{x}) &= \Psi_\beta \circ F_*(v_p) = \Psi_\beta(F_{*,p}(v_p)) \\ &= (\psi_\beta(F(p)), \psi_{*,F(p)}(F_{*,p}(v_p))) \\ &= ((\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1})(x), D(\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1})_x(\dot{x})), \end{aligned}$$

es diferenciable (pues sus funciones componentes lo son). Por lo tanto  $F_*$  es suave.  $\square$

**DEFINICIÓN B.13.** Dado  $p \in M$ , llamaremos espacio cotangente a  $M$  en  $p$  al espacio dual  $T_p^*M = (T_pM)^*$ .

**DEFINICIÓN B.14.** Sea  $M$  una variedad diferencial. Llamaremos fibrado cotangente, al conjunto

$$T^*M := \cup_{p \in M} T_p^*M. \quad (\text{B.10})$$

El siguiente resultado puede encontrarse en la página 276, del libro [14] de J. M. Lee.

**TEOREMA B.15.** *Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $n$ . El conjunto  $T^*M$  es una variedad diferencial con dimensión  $2n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** De forma similar a cuando le dimos estructura a  $TM$ , debemos empezar por definir la función  $\tau^* : T^*M \longrightarrow M$  tal que  $\tau^*(\sigma_p) = p, \forall \sigma_p \in T_p^*M$ . Luego, dado  $A \subseteq M, \tau^{*-1}(A) = \cup_{p \in A} T_p^*M$ .

Sea  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I\}$  un atlas de  $M$ . Sabemos que para cada  $p \in U$ , las funciones  $\{\partial/\partial\phi^j\}_{j=1,\dots,n}$  forman una base de  $T_pU$ . Entonces, podemos definir  $\{d\phi^1, \dots, d\phi^n\}$  como la base dual a  $\{\partial/\partial\phi^1, \dots, \partial/\partial\phi^n\}$ , con lo cual, cualquier elemento  $\sigma_p \in T_p^*U$ , se puede escribir como  $\sigma_p = \sum_{j=1}^n a_j d\phi^j$ , donde  $a_j : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, n$ , son funciones

suaves. Definimos entonces las funciones coordenadas,  $\Phi_\alpha : \tau^{*-1}(U_\alpha) \longrightarrow \phi_\alpha(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ , como

$$\Phi_\alpha(\sigma_p) := (\phi_\alpha(\tau^*(\sigma_p)), (a_1(\tau^*(\sigma_p)), \dots, a_n(\tau^*(\sigma_p)))).$$

La topología sobre  $T^*M$  es la generada por

$$\{B \subseteq T^*M / B = \Phi_\alpha^{-1}(A) \text{ para algún } A \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ abierto y } \alpha \in I\}.$$

Es posible comprobar que  $\{(\tau^{*-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha), \alpha \in I\}$  es un atlas para  $T^*M$ .  $\square$

DEFINICIÓN B.16. Dada una función suave  $F : M \longrightarrow N$ , definimos el pullback por  $F$  en  $p \in M$ , como la aplicación  $F_p^* : T_{F(p)}^*N \longrightarrow T_p^*M$  tal que, para cada  $\sigma \in T_{F(p)}^*N$  y cada  $v \in T_pM$ :

$$F_p^*(\sigma)(v) = \sigma(F_{*,p}(v)). \quad (\text{B.11})$$

DEFINICIÓN B.17. Sea  $M$  una variedad diferencial, entonces un campo vectorial (sobre  $M$ ) o sección del fibrado tangente, es una función suave  $\chi : M \longrightarrow TM$  tal que, para cada  $p \in M$ ,

$$\tau \circ \chi(p) = p.$$

DEFINICIÓN B.18. Una distribución  $\mathcal{D}$  sobre  $TM$  es la unión ( $\forall p \in M$ ) de subespacios vectoriales  $S_p \subset T_pM$ , con la condición de que exista un  $r$  natural ( $1 \leq r \leq n$ ) y para cada  $p \in M$  exista un abierto  $U_p$  y campos vectoriales  $\chi_j : M \longrightarrow TM$  con  $j = 1, \dots, r$ , tales que para cada  $q \in U_p$ ,  $\{\chi_1(q), \dots, \chi_r(q)\}$  sea una base de  $S_q$ .

DEFINICIÓN B.19. Sea  $M$  una variedad diferencial, una 1-forma (sobre  $M$ ) o sección del fibrado cotangente, es una función suave  $\omega : M \longrightarrow T^*M$  tal que, para cada  $p \in M$ ,

$$\tau^* \circ \omega(p) = p.$$

Ahora daremos la definición de pullback para 1-formas, que puede encontrarse en la página 285 de [14].

DEFINICIÓN B.20. Sea una función suave  $F : M \longrightarrow N$  y  $\omega$  una 1-forma sobre  $N$ . Llamaremos pullback de  $\omega$  por  $F$ , a la 1-forma  $F^*\omega$  sobre  $M$ , definida como

$$(F^*\omega)(p) = F_p^*(\omega(F(p))),$$

que actúa sobre un vector  $v \in T_pM$  por

$$(F^*\omega)(p)(v) = \omega(F(p))(F_{*,p}(v)).$$



## Apéndice Termodinámica

En [11] los autores siguen la termodinámica del no equilibrio propuesta en [18]. Sin embargo, para el abordaje de los ejemplos presentes en este trabajo nos bastará con el conocimiento de los sistemas clásicos de la termodinámica del equilibrio (o cuasi-equilibrio), descritos en [5]. En este apéndice introduciremos algunas nociones mínimas de Termodinámica, para poder facilitar la comprensión de algunos conceptos básicos tratados en este trabajo.

Informalmente hablando, la idea de sistema termodinámico es la de un conjunto de materia confinada en un entorno delimitado por paredes con ciertas propiedades. En un sistema termodinámico existen diferentes variables termodinámicas que pueden, en alguna medida, caracterizar el comportamiento del sistema o sus propiedades. Las variables termodinámicas que, en nuestro caso, nos permitirán estudiar un sistema termodinámico son las siguientes variables reales:  $T$  la temperatura,  $U$  la energía interna,  $S$  la entropía,  $V$  el volumen y  $P$  la presión. En términos matemáticos podemos pensar que estos parámetros existen en un abierto de  $\mathbb{R}^5$  y un sistema termodinámico podemos identificarlo con un subconjunto de dicho espacio, el cual recibe el nombre de estados (o estados de equilibrio) del sistema.

NOTA C.1. Existen otras variables termodinámicas que no serán relevantes en este trabajo, como el número de moles  $N$ , que consideraremos constante ( $N = N_0$ ) y el potencial químico  $\mu$ , que directamente no utilizaremos. Además, la variable volumen  $V$ , solo será relevante en la sección 2 del Capítulo 4.

Identificaremos a los llamados estados de equilibrio con los valores de las variables antes mencionadas, matemáticamente hablando, un estado de equilibrio es un punto en  $\mathbb{R}^5$ . En un sistema termodinámico, un proceso termodinámico es una curva en el sistema.

Dados un sistema termomecánico y las variables termodinámicas que caracterizan sus estados de equilibrio, llamaremos ecuaciones de estado a aquellas ecuaciones que involucren dichas variables. Estas ecuaciones de estado caracterizan los subconjuntos que identifican al sistema. En el caso que se conozcan una cantidad suficiente de ecuaciones de estados, dicha información puede codificarse con la siguiente estructura formal.

En Termodinámica, existe la llamada Primera Ley de la Termodinámica, la cual establece una relación entre la energía interna del sistema y la energía que se intercambia con el entorno. Denominamos calor  $Q$  al intercambio de energía térmica y trabajo  $W$  al intercambio de energía mecánica.

$$\Delta U = Q - W, \tag{C.1}$$

donde  $\Delta U$  representa la variación de la energía interna del sistema. Esta ley refleja el principio de conservación de energía para el caso de sistemas termodinámicos: la variación de energía interna en un sistema termodinámico es igual a la diferencia entre la cantidad de calor y la cantidad de trabajo intercambiados por el sistema con sus alrededores.

Para los casos que veremos en este trabajo, asumiremos que vale la llamada condición de cuasi-estaticidad, motivo por el cual valen las siguientes igualdades

$$dW = PdV \quad \text{y} \quad dQ = TdS.$$

Luego, la variación infinitesimal de C.1 es

$$dU = TdS - PdV. \quad (\text{C.2})$$

Presentamos las llamadas relaciones fundamentales de la termodinámica, las cuales son equivalentes entre si y nos dicen que: la energía interna  $U$  puede escribirse en función de  $S$  y  $V$ , y del mismo modo, la entropía  $S$  puede escribirse en función de  $U$  y  $V$ .

$$U = U(S, V), \quad (\text{C.3})$$

$$S = S(U, V). \quad (\text{C.4})$$

Si derivamos (C.3) obtenemos la variación infinitesimal de la energía interna:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S}dS + \frac{\partial U}{\partial V}dV.$$

A partir de la cual, se definen formalmente las variables  $T$  y  $P$ :

$$T := \frac{\partial U}{\partial S},$$

$$P := -\frac{\partial U}{\partial V},$$

recuperando la Ecuación C.2.

Un sistema termodinámico se dice adiabático si sus paredes no permiten el intercambio de calor entre el sistema y el exterior, lo cual significa que  $dQ = 0$ . En los sistemas adiabáticos se tiene entonces que  $dU = PdV$ , es decir, la variación de la energía interna depende de la presión y el volumen. Un sistema adiabático en el que el número de moles permanece constante ( $N = N_0$ ), se dice aislado.

**EJEMPLO C.2 (Gas ideal).** Un ejemplo clásico de sistema termodinámico, es el del gas ideal mono-atómico, para el cual tenemos las siguientes ecuaciones de estado que lo caracterizan (sección 3.4 de [5]).

- Relación entre la presión  $P$ , el volumen  $V$ , el número de moles  $N_0$ , la constante universal de los gases  $R$  y la temperatura  $T$ :

$$PV = N_0RT. \quad (\text{C.5})$$

- Relación entre la energía interna  $U$ , el número de moles  $N_0$ , la constante universal de los gases  $R$  y la temperatura  $T$ :

$$U = \frac{3}{2}N_0RT. \quad (\text{C.6})$$

- Si el sistema es adiabático tenemos la siguiente relación entre la presión  $P$  y el volumen  $V$ :

$$PV^{5/3} = \xi, \quad (\text{C.7})$$

donde  $\xi$  es una constante positiva.

A partir de las ecuaciones de estado se puede dar una forma explícita para la relación fundamental C.4 (Ecuación (3.34) de [5]). Para el caso donde  $N$  es constante se tiene

$$S(U, V) = S_0 + N_0 R \log \left[ \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left( \frac{V}{V_0} \right) \right], \quad (\text{C.8})$$

donde  $R \approx 8,314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$  es la constante universal de los gases. De ella podemos despejar la relación fundamental C.3:

$$U(S, V) = U_0 e^{\frac{2}{3RN_0}(S-S_0)} \left( \frac{V}{V_0} \right)^{-1}. \quad (\text{C.9})$$

En el caso en que  $V$  es constante ( $V = V_0$ ), tendremos

$$U(S) = U_0 e^{\frac{2}{3RN_0}(S-S_0)}. \quad (\text{C.10})$$

NOTA C.3. En un sistema termodinámico, las relaciones fundamentales condensan la información del sistema, que por lo general, es desconocida, salvo excepciones.





## Agradecimientos

- A Javier y Maxi, que fueron mis mentores en esta etapa tan importante.
- A mis amigos y familiares, por estar siempre apoyándome.
- A mis padres, que me bancaron desde siempre.
- A la Universidad Nacional del Comahue, por darme la posibilidad de formarme como un profesional.
- A la Matemática, por darme gran felicidad y motivación en cada día.



## Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978. Second edition, revised and enlarged, With the assistance of Tudor Rațiu and Richard Cushman.
- [2] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. With the collaboration of J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden, With scientific input from P. S. Krishnaprasad, R. M. Murray and D. Zenkov, Systems and Control.
- [3] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.
- [4] N. Borda. Sistemas mecánicos discretos con vínculos de orden 2. Tesis de Maestría en Ciencias Físicas, Instituto Balseiro, Bariloche, Argentina, 2011.
- [5] H. B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley, 2nd edition, 1985.
- [6] H. Cendra and S. Grillo. Generalized nonholonomic mechanics, servomechanisms and related brackets. *J. Math. Phys.*, 47(2):022902, 29, 2006.
- [7] H. Cendra, S. Grillo, and M. Palacios Amaya. Elementary thermo-mechanical systems and higher order constraints. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 19(1):Paper No. 39, 36, 2020.
- [8] J. Cortés and S. Martínez. Non-holonomic integrators. *Nonlinearity*, 14(5):1365–1392, 2001.
- [9] J. Cortés Monforte. *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems*, volume 1793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [10] J. Fernández, C. Tori, and M. Zuccalli. Lagrangian reduction of nonholonomic discrete mechanical systems. *J. Geom. Mech.*, 2(1):69–111, 2010. Also, [arXiv:1004.4288](https://arxiv.org/abs/1004.4288).
- [11] F. Gay-Balmaz and H. Yoshimura. Variational discretization of the nonequilibrium thermodynamics of simple systems. *Nonlinearity*, 31(4):1673–1705, 2018.
- [12] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980. Addison-Wesley Series in Physics.
- [13] J. L. Lagrange. *Mecanique analytique*. Courcier imprimeur, 1811.
- [14] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [15] J. E. Marsden and M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numer.*, 10:357–514, 2001.
- [16] R. McLachlan and M. Perlmutter. Integrators for nonholonomic mechanical systems. *J. Nonlinear Sci.*, 16(4):283–328, 2006.
- [17] I. Newton. *Philosophie naturalis principia mathematica*. Royal Society of London, 1687.
- [18] E. Stueckelberg and P. Scheurer. *Thermocinetique Phenomenologique Galileenne*. Basel Birkhauser, 1974.