Tesis de Maestría

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Objetos, procesos y conflictos semióticos en la práctica de Lagrange: implicancias para la enseñanza de las Estructuras Algebraicas en la formación de profesores

Claudina Canter

Silvia Catalina Etchegaray

Director de Tesis

Virginia Montoro

Co - Director de Tesis

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Febrero, 2018

RESUMEN

Esta tesis tiene por objetivo específico estudiar los aspectos más relevantes en el proceso de construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones para pensar luego una manera de otorgarle sentido al estudio de las estructuras algebraicas en la carrera del profesorado en Matemáticas. Estudiar este proceso de construcción es distinguir qué tipo de preguntas fueron apareciendo a lo largo de su conformación, desde qué "lugar" fueron abordadas y cuáles de ellas son las que movilizaron cambios importantes en la perspectiva de análisis del problema matemático estudiado, deteniéndonos en el trabajo de Lagrange (1736 - 1813). Esta investigación se enmarca dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Se realizó un análisis epistémico integral centrando la atención en los elementos de significado que permiten articular los distintos *sistemas de práctica* que formaron parte de la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones. Luego se hizo una "macro" *configuración epistémica.* Sobre el trabajo de Lagrange se efectuó un primer nivel de análisis "epistémico – cognitivo" de sus prácticas matemáticas. Además se identificaron los objetos y procesos matemáticos presentes en sus prácticas destacando el nivel de algebrización alcanzado. También se presenta un análisis de la manera en que tres libros introducen al lector en el estudio de las estructuras algebraicas. Por último, se propone el análisis ontosemiótico de una práctica que se desarrolla actualmente en la UNRC.

Palabras claves: Estructuras Algebraicas, EOS, Niveles de algebrización, Configuración epistémica, Objetos y procesos matemáticos

ABSTRACT

The specific objective of this thesis is to study the most relevant aspects in the construction process of the Algebraic Theory of Equations in order to think about a way to give meaning to the study of algebraic structures in the Math Teacher career. Study this construction process is to distinguish what kind of questions were appearing along its conformation, from which "place" were approached and which of them are the ones that mobilized important changes in the perspective of analysis of the the mathematical problem studied, focusing in Lagrange's work (1736 - 1813). This research is framed within the *onto-semiotic approach* of mathematical *knowledge and instruction* (OSA). An integral epistemic analysis was carried out focusing on the elements of meaning that allow to articulate the different systems of practice that were part of the construction of the Algebraic Theory of Equations. Then, a first level of "epistemic-cognitive" analysis of Lagrange's mathematical practices was carried out. In addition, the mathematical objects and processes present in his practices were identified, highlighting the level of algebrization achieved. It also presents an analysis of how three books introduce the reader to the study of algebraic structures. Finally, an ontosemiotic analysis of a practice that is currently carried out in the UNRC is proposed

Keywords: Algebraic structures, OSA, algebrization levels, espistemic configuration, mathematical objects and processes

AGRADECIMIENTOS

A la Magister Silvia Etchegaray por haber aceptado dirigir este trabajo.

A la Magister Virginia Montoro por su predisposición para co dirigirme.

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue por haberme brindado la posibilidad de cursar este posgrado.

A Mateo, por cambiarme la vida

A mi mamá, mi hermana y mi abuela por su apoyo incondicional.

A Alejandro, Grisi y Molotov por acompañarme y ayudarme siempre.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Este trabajo pretende poner en evidencia la utilidad de algunas de las herramientas construidas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática para el análisis de prácticas matemáticas tanto personales como institucionales. Dicho análisis ayuda a responder a las preguntas ¿Cómo se "piensa" matemáticamente? ¿Cómo se "hace" matemática? ¿Cómo se "expresa" en matemática? ¿Cómo influyen los diversos contextos en la producción matemática?

Tal como lo expresa Tignol (2002) una forma de aprender cómo se "hace" matemática es conociendo como se ha hecho antes y la perspectiva histórica en la que estaba inmerso el trabajo matemático en cuestión.

Esta tesis tiene por objetivo específico estudiar los aspectos más relevantes en el proceso de construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones para pensar luego "desde otro lugar" una manera de otorgarle sentido al estudio de las estructuras algebraicas en la carrera del profesorado en Matemáticas. Estudiar este proceso de construcción es distinguir qué tipo de preguntas fueron apareciendo a lo largo de su conformación, desde qué "lugar" (concepciones/conocimientos) fueron abordadas y cuáles de ellas son las que movilizaron cambios importantes en la perspectiva de análisis del problema matemático estudiado, deteniéndonos especialmente -en esta tesis- en el trabajo innovador de Lagrange (1736 - 1813). Estas preguntas son muy importantes pues el desarrollo de una Teoría está directamente vinculado con el problema que se pretende resolver, más aún los cambios de dirección en la búsqueda de respuestas evidencian la no linealidad de construcción del conocimiento que resulta desafiante y muy necesario de identificar para comprender la complejidad epistémica de dicha construcción, que no sólo está ligada al grado de abstracción y generalización de los contenidos sino a los procesos que ella exige para su desarrollo.

El análisis se realiza sobre la Teoría Algebraica de Ecuaciones por dos razones, por un lado, de esta Teoría se dispone su inicio y su culminación por lo cual se pueden distinguir con precisión los distintos momentos en su construcción, es decir los problemas planteados en cada etapa y las conjeturas superadoras de cada una de ellas. Por otra parte, es en esta Teoría donde se evidencia la necesidad de construir las primeras estructuras algebraicas (grupo y cuerpo), objetos que regulan el conocimiento matemático de uno de los espacios curriculares del núcleo temático: Algebra, correspondiente a la formación específica del Profesor en Matemáticas, denominado en el Plan de estudios de la UNRC: Estructuras Algebraicas.

La Didáctica de la Matemática, que como campo científico es de reciente desarrollo, nos proporciona herramientas de análisis didáctico a través de diferentes aproximaciones teóricas. Dichas herramientas permiten realizar el estudio del tema en cuestión a fin de brindar un aporte para pensar sobre su enseñanza, en la formación inicial del Profesor en Matemática, desde otros lugares. En efecto, el Dr. Juan Díaz Godino, que es el iniciador y quien con un grupo de investigadores de diferentes lugares del mundo desarrolla el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), aporta herramientas teóricas para analizar en forma conjunta el pensamiento matemático, los ostensivos asociados a él, las situaciones donde se pone en juego y las técnicas, definiciones y argumentos que condicionan su desarrollo, siempre teniendo como regulador de estos elementos al uso operativo y discursivo del lenguaje matemático. El EOS nos brinda tanto instrumentos teóricos como una metodología para abordar esta investigación pues ayuda a lograr que se transparenten los momentos claves en el desarrollo de la Teoría estudiada.

En el capítulo 1 se exponen los fundamentos y la descripción del problema abordado en este trabajo. Además se enuncian las expectativas y los objetivos que se pretenden alcanzar.

En el capítulo 2, se realiza una breve descripción del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) especificando lo que este enfoque ha aportado para este estudio.

En el capítulo 3 se presenta un primer análisis epistémico integral centrando la atención en los elementos de significado que permiten articular los distintos *sistemas de práctica* que formaron parte de la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones a lo largo de todo su desarrollo. Para ello se atrapan las redes de relaciones matemáticas de cada uno de los momentos por los que se atravesó en la construcción de la teoría. Luego se realiza una "macro" *configuración epistémica* la cual permite tanto lecturas globales sobre cada sistema de prácticas matemáticas contextualizado en un momento social y cultural, como parciales sobre cada *elemento de significado* que varía al pasar de un *contexto* a otro.

En el capítulo 4, se desarrollan y analizan las primeras resoluciones a ecuaciones por radicales, dadas por algunos matemáticos de la época a fin de disponer explícitamente del tipo de conocimientos que circulaba en el momento en que se desarrolló el tema central de nuestro estudio. Este capítulo hace visible el "nudo gordiano" de este trabajo y nos coloca a las puertas de la investigación que llevara a cabo Lagrange sobre la búsqueda de técnicas generales de resolución de ecuaciones algebraicas, problema que regula toda la producción matemática en el marco de esta Teoría.

En el capítulo 5, se aborda específicamente el trabajo realizado por Lagrange y se realiza un primer nivel de análisis "epistémico – cognitivo" de las prácticas matemáticas que este célebre matemático llevó a cabo, construyendo configuraciones epistémicas de cada práctica identificada.

En el capítulo 6 se realiza un segundo nivel de análisis sobre las prácticas de Lagrange. Es decir se identifican los objetos y procesos matemáticos presentes en sus prácticas destacando el nivel de algebrización que el matemático alcanzó a lo largo de su trabajo.

En el capítulo 7, con el objetivo de empezar a conocer cómo "vive" este inicio a las estructuras en las instituciones de enseñanza donde hemos situado esta investigación, se presenta un análisis de la manera en que tres libros, utilizados en la actualidad en la formación del profesor de matemática, introducen al alumno en dicho estudio.

En el capítulo 8, con el objetivo de profundizar el modo en que la institución de enseñanza involucrada en esta investigación le otorga sentido al estudio de las estructuras, se propone el análisis ontosemiótico de una práctica que se desarrolla actualmente en la UNRC, teniendo en cuenta los conocimientos de álgebra de los estudiantes de tercer año del profesorado de matemática al inicio de la asignatura Estructuras Algebraicas y los aportes del estudio realizado al sistema de prácticas de Lagrange.

Por último, en el capítulo 9, se sintetiza lo desarrollado en este trabajo, categorizándolo en: Conclusiones acerca de la evolución histórica de la Teoría Algebraica de Ecuaciones a través del análisis sobre los cambios y transformaciones en los elementos de significado que la sustentan en sus distintas etapas de construcción; Conclusiones acerca del trabajo de Lagrange después de realizar tanto un análisis epistémico-cognitivo de su obra como un análisis pragmático de la misma, Conclusiones acerca del análisis realizado a libros de textos y prácticas que “viven” actualmente en la institución de enseñanza que intervino en esta investigación, Conclusiones sobre la relación entre los objetivos y expectativas que movilizaron este trabajo y Reflexiones finales.

CAPÍTULO 1

Fundamentos de la investigación

Este capítulo se centrará en los fundamentos de la investigación llevada a cabo, destacando los principales motivos que movilizaron la indagación sobre la construcción de una teoría matemática. Por otra parte se explicitarán las decisiones que ayudaron a delimitar el contexto histórico-cultural de indagación.

Además, se expondrán los objetivos perseguidos en este trabajo, dichos objetivos están relacionados con el conocimiento en profundidad de la construcción de una teoría matemática, en este caso en particular la Teoría Algebraica de Ecuaciones y con la conformación de un marco referencial de análisis. Fundamentalmente se trabajó en la dimensión epistémica pues se indagó sobre la naturaleza y desarrollo de los objetos matemáticos puestos a funcionar en los distintos momentos por los que atravesó la construcción de la teoría. Especialmente se analizaron las prácticas de Lagrange por su carácter innovador y visionario respecto al desarrollo de toda la teoría a fin de determinar los procesos matemáticos que están involucrados en ellas.

Para finalizar se explicitarán las expectativas planteadas al comenzar con este trabajo, las mismas están direccionadas a **la búsqueda de elementos que permitan más adelante poder determinar el grado de *idoneidad epistémica*[1] de determinados**

[1] Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia que trataremos de caracterizar en esta tesis.

procesos de enseñanza en la formación inicial del profesor en Matemáticas, específicamente en el ámbito de la Universidad Nacional de Río Cuarto.

1.1 Contextualización de la investigación

Este estudio se realizará en el marco del *Programa epistemológico*, más precisamente dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), cuyo iniciador es el Dr. Juan D. Godino quien, con un grupo de investigadores de diferentes lugares del mundo aportan herramientas teóricas para analizar en forma conjunta el pensamiento matemático, los ostensivos asociados a él, las situaciones donde se pone en juego y las técnicas, definiciones, proposiciones y argumentos que condicionan el desarrollo del conocimiento matemático, regulados además estos elementos por el uso operativo y discursivo del lenguaje matemático. El EOS proporciona tanto instrumentos teóricos-conceptuales como una metodología para abordar esta investigación y ayuda a des- transparentar los cambios y transformaciones de significados en los momentos claves del desarrollo del saber matemático estudiado.

Una de las metas a alcanzar en la tesis de Maestría es ampliar los marcos de referencia institucionales respecto al abordaje del estudio de las estructuras algebraicas en la educación superior, dando cuenta de la complejidad onto-semiótica de los sistemas de prácticas algebraicas que ponen al descubierto las configuraciones y los procesos necesarios para la emergencia de dichas estructuras (grupo, anillo, cuerpos etc.). Además se espera arrojar luz sobre el grado de *idoneidad epistémica* de posibles actividades que se plantean como potenciales generadoras de conocimiento útil para la comprensión de las estructuras algebraicas en la formación de profesores de matemática.

Dado que la idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados, respecto de un significado de referencia, en este trabajo se torna necesario constituir y desplegar un particular significado de referencia que permita, con alto grado de idoneidad epistémica, diseñar y analizar tareas que ayuden al desarrollo y comprensión de los nuevos niveles de algebrización del conocimiento matemático que exigen estos objetos algebraicos al ponerlos a funcionar. Un reciente avance teórico en la Didáctica de la Matemática que le otorga mayor significatividad al estudio propuesto es el trabajo de Godino, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) donde se plantean seis niveles de algebrización diferentes en la enseñanza obligatoria (primaria y secundaria). El sexto nivel (que hace referencia a la complejidad del acceso y desarrollo de las estructuras algebraicas) es el que se tratará además de profundizar y ampliar en esta tesis.

El Programa Epistemológico de la Didáctica de la Matemática plantea como puerta de entrada a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos la importancia de la problematización y desnaturalización de los saberes (*saber sabio para Chevallard*) antes de planificar que es lo que se va a enseñar (*saber a enseñar).*

> *"El saber sabio nos interesa porque ciertas exigencias que intervienen en la preparación didáctica del saber, están ya influyendo a partir de la constitución del saber sabio o al menos a partir de la formulación discursiva de ese saber".* (Chevallard, 1997).

Etchegaray (2010), sostiene que si se analizan prácticas, objetos y procesos en la construcción histórica de las matemáticas se visualiza un tipo de progreso que pone en evidencia que las definiciones, propiedades y teoremas que objetivizan -a través de un lenguaje específico- el saber matemático "sabio", progresan en relación directa con la cultura de cada época y dependiendo de los contextos que determinan sus usos.

La presentación final de una teoría acabada, como generalmente es presentada en los niveles superiores de enseñanza, no representa los distintos estadios por los que atravesó la misma ni pone al descubierto que la evolución se dio por cambios en la formulación y en el abordaje de los problemas, sino que muestra a la matemática como una ciencia exclusivamente deductiva, priorizando esta dimensión del trabajo matemático sobre cualquier otra característica del mismo. Dicho tipo de presentación oculta el verdadero trabajo que realizaron los matemáticos que intervinieron en su construcción, no muestra por ejemplo las preguntas ni las conjeturas que plantearon antes de formular y demostrar los teoremas que hacen al "producto" visible de la Teoría.

Un importante Matemático como Morris Kline (1973, citado por Markiewicz, 2005) expresa:

> *"El pensamiento matemático no es tan sólo razonamiento deductivo; no consiste simplemente en demostraciones formales. El proceso mental que sugiere qué se debe demostrar y cómo demostrarlo es una parte del pensamiento matemático, tanto como la demostración que eventualmente resulta de él. La extracción del concepto apropiado de una situación concreta, la generalización a partir de los casos observados, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía y los ejemplos intuitivos para una conjetura imprevista son modos matemáticos de pensamiento".*

Asimismo, investigadores en Didáctica de la Matemática como Godino (2004) afirman que los matemáticos no formulan un teorema "a la primera", antes de demostrar un teorema realizan tanteos previos, ejemplos y contraejemplos, encuentran la solución de un caso particular, modifican las condiciones iniciales y ven qué sucede, etc. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior.

Así es como se puede anticipar que dado que una Teoría matemática está constituida por un gran número de teoremas, su construcción resulta de un proceso muy complejo y necesita de la intervención de muchos matemáticos trabajando en forma colectiva y retomando constantemente lo realizado por otros.

Para conocer lo condicionamientos que existieron en la construcción de una teoría, resulta necesario el estudio de los *significados institucionales y personales*[2] de los objetos matemáticos en una época y tiempo determinado. El EOS sostiene que el estudio de trabajos generados a partir de "la detección y comparación de significados institucionales y personales" (Godino y Batanero, 1994, Godino, 2004) pone en evidencia que es fundamental la indagación sobre la naturaleza de los objetos para luego actuar sobre problemas concretos de la enseñanza y del aprendizaje de tales objetos.

Más aún, Godino (2003a) sostiene que:

> "*Desde una perspectiva pedagógica -y también epistemológica-, es importante diferenciar el proceso de construcción del conocimiento matemático de las características de dicho conocimiento en un estado avanzado de elaboración. La formalización, precisión y ausencia de*

[2] Significado institucional: hace referencia al conjunto de prácticas compartidas en el seno de una institución sobre un determinado objeto. Significado personal: conjunto de prácticas que realiza una persona ante una determinada situación.

ambigüedad del conocimiento matemático debe ser la fase final de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla".

Por todo esto, se decidió estudiar en profundidad los aspectos más relevantes de la práctica innovadora y visionaria realizada por Lagrange (1736 - 1813) en el proceso de construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones, es decir, qué tipo de preguntas fueron apareciendo a lo largo de su trabajo, desde qué "lugar" (concepciones/conocimientos) fueron abordadas y cuáles de ellas son las que movilizaron cambios importantes en la perspectiva de análisis del problema estudiado en el marco de la cultura matemática de la época. Este análisis permitirá hacer visibles algunas lagunas o vacíos de significación dentro de los mencionados procesos de algebrización, lo cual posibilitará la construcción de mejores condiciones para el desarrollo de procesos de aprendizaje y de enseñanza de las estructuras algebraicas.

Tal como lo expresa Tignol (2002) una forma de aprender cómo se "hace" matemática es conociendo como se ha hecho antes y la perspectiva socio- histórica en la que estaba inmerso el trabajo matemático en cuestión. El análisis onto-semiótico se realizará sobre el desarrollo de la Teoría Algebraica de Ecuaciones por dos razones, por un lado, de esta Teoría se dispone inicio y culminación por lo cual se pueden distinguir con precisión los distintos momentos en su construcción, es decir los problemas planteados en cada etapa y las conjeturas superadoras de cada una de ellas con los procesos necesarios para su resolución y /o demostración. Por otra parte, es en esta Teoría donde se evidencia la necesidad de construir las primeras estructuras algebraicas (grupo y cuerpo), objetos -que como se anticipara en la introducción de esta tesis- regulan el conocimiento matemático de uno de los espacios curriculares del núcleo temático: Algebra, correspondiente a la formación específica del Profesor en Matemáticas, denominado en el Plan de estudios de la UNRC: Estructuras Algebraicas. (Campo experimental del análisis realizado en esta investigación).

En el marco del EOS, se sostiene que una práctica matemática se considera algebraica si pone en funcionamiento cierto tipo de objetos y procesos, reconocidos por la institución matemática como “algebraicos”. Es así que se consideran objetos algebraicos a: relaciones binarias —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva, simétrica y/o antisimétrica), operaciones y sus propiedades, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.), funciones y estructuras, sus tipos y propiedades (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.). En el mismo sentido se reconocen como procesos algebraicos: los *procesos de particularización – generalización* (juegan un papel muy especial ya que la generalización es uno de los rasgos distintivos del razonamiento algebraico), el *proceso de unitarización* (cuando se observa una nueva entidad que tiene que ser objetivada mediante un nombre, una notación, etc. para poder ser utilizada en nuevas prácticas y el *proceso de reificación* (el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones). (Godino, Aké, Gonzato, 2014; Godino, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa ,2015)

Justamente estos autores, describen la existencia de distintos niveles de algebrización que dependen de los objetos y procesos algebraicos que cada sujeto puede poner en juego ante un tipo de tarea. En este marco, para nosotros es importante que en la formación inicial de profesores de matemática se promueva el tránsito y la reflexión por distintos niveles de algebrización, especialmente por aquellos que atrapen la complejidad de la construcción de las estructuras algebraicas, dado el elevado grado de abstracción y formalización que las mismas exigen. Para que esto sea posible resulta necesario que se diseñen tareas idóneas para cada nivel que se desea que los alumnos transiten y se amplíen los marcos de referencia institucional que den cuenta de la complejidad onto-semiótica de los sistemas de prácticas algebraicas, los cuales ponen al descubierto las configuraciones y procesos necesarios para la emergencia de las estructuras (grupo, anillo, modulo, cuerpos etc.)

La Didáctica de la Matemática, que como campo científico es de reciente desarrollo, proporciona herramientas de análisis didáctico a través de diferentes aproximaciones teóricas; que nos permitirán realizar el estudio del tema en cuestión intentando que, el mismo, aporte otra perspectiva sobre la enseñanza de las Estructuras Algebraicas en la formación inicial del Profesor en Matemática.

1.2 El problema y el contexto de indagación

La pregunta inicial que motivó el desarrollo de esta tesis y que surge al observar las prácticas de los estudiantes, futuros profesores en matemática, en la asignatura Estructuras Algebraicas es ***¿Por qué cuesta tanto aprender a trabajar en el "interior" de una estructura algebraica*?** Este interrogante desglosado y reinterpretado en el marco del EOS podría ser enunciado así: ***¿Por qué el significado personal que los alumnos construyen acerca de las estructuras algebraicas, a menudo, dista tanto del significado pretendido por la institución formadora? ¿Qué tipo de actividades serán propicias para acortar la distancia entre lo que los estudiantes comprenden y lo que se pretende que aprendan, desde la institución formadora*? *¿Por qué los futuros profesores suelen no establecer relaciones entre los objetos matemáticos con los que trabajaron en espacios curriculares anteriores y las estructuras algebraicas*?** Cabe destacar que estos son problemas docentes, aunque utilicemos algún tipo de lenguaje didáctico específico y no problemas didácticos. Tal como lo expresan Barquero Farras, Bosch y Gascon (2013) se denominan problemas docentes a los problemas "… *que se plantea el profesor como tal cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos. Los problemas docentes se formulan utilizando las nociones disponibles en la cultura escolar importadas habitualmente de los documentos curriculares (como, por ejemplo, las nociones de motivación, aprendizaje significativo, individualización de la enseñanza, adquisición de un concepto, abstracción, competencia, etc.). Los problemas docentes se formulan, normalmente, asumiendo y sin cuestionar no sólo las nociones sino también las ideas dominantes en la citada cultura escolar. En particular, en la formulación de un problema docente se suele asumir de manera acrítica la forma como se interpreta en la cultura escolar la matemática involucrada en el problema en cuestión*".

Para que los problemas docentes planteados se transformen en problemas didácticos hay que trabajar sobre la dimensión epistémica de los mismos, esta es la indagación que planeamos desarrollar y profundizar en esta tesis. Además, cabe destacar que desde el marco teórico didáctico que sostiene esta investigación es fundamental indagar en la dimensión epistémica la complejidad onto-semiótica de los sistemas de prácticas algebraicas y a eso nos abocaremos centralmente.

El Programa Epistemológico de la Didáctica de la Matemática plantea la entrada a la compleja problemática de enseñar y aprender a través de la problematización y desnaturalización de los saberes en cuestión, por tal motivo es necesario replantear la construcción y el uso de los objetos matemáticos en los ámbitos donde se los presenta como objetos a "estudiar" (Chevallard y otros, 1997).

Para lograr que dicho replanteamiento en la construcción y el uso de los objetos matemáticos sea realmente significativo, tanto para quienes enseñan como para aquellos que aprenden, es necesario un estudio minucioso acerca del modo en el que los matemáticos trabajaron. Es importante que en dicho estudio se haga foco tanto en la influencia del tipo de preguntas que se hacían como en la dirección de la búsqueda de sus respuestas.

Con el objetivo de dar alguna respuesta a la pregunta "¿Cómo se conoce en Matemática?", es fructífero estudiar las características de los momentos y circunstancias por los que han atravesado o atraviesan los matemáticos en la construcción de una teoría. Se tomará como macro unidad de análisis a "los sistemas de prácticas matemáticas de la Teoría Algebraica de Ecuaciones", que fue desarrollada a partir de la búsqueda de un método general que permitiera la resolución por radicales de una ecuación algebraica de cualquier grado.

El tema de estudio fue elegido, tal como ya se anticipara, teniendo en cuenta que esta Teoría alcanzó su completa madurez hace mucho tiempo, en el sentido que ha logrado llegar a la caracterización total de las ecuaciones que poseen el tipo de solución buscada. Esto hace que sea posible desvelar todos los estadios en la construcción de la misma. Además es un tema elemental, en el sentido en que se encuentra presente desde distintos ángulos en todos los niveles educativos, y que a su vez sostiene a nociones, conceptos, propiedades y formas de razonar fundamentales del álgebra escolar obligatoria y superior y por ende necesariamente presente en la formación de un profesor en Matemáticas.

Asímismo, la pregunta ¿Cómo se conoce en Matemática? que resulta transversal a toda la formación inicial de los estudiantes de matemática es reconocida muy escasamente, en dichos trayectos, como un problema didáctico.

Adúriz Bravo (2011) sostiene *que las ideas claves de la naturaleza de los objetos científicos que son propuestos para estudiar, "dicen algo" sobre las propias*

Ciencias cuando se les observa y analiza su funcionamiento en situaciones y contenidos específicos tanto en instituciones científicas como en instituciones donde se enseña y se aprende ciencia. En este caso las ecuaciones algebraicas, la evolución de sus técnicas, el cambio de problemas, la construcción de diversas conjeturas en la construcción de la teoría están "diciendo algo", parafraseando al Dr. Aduriz Bravo, de cómo funciona la Matemática tanto en la institución científica como en las instituciones formadoras de docentes.

Por todo esto, con sólo disponer de la teoría expuesta, se hace difícil encontrar las relaciones entre el problema que da origen al desarrollo teórico, en palabras de Chevallard, la "*razón de ser*" de cualquier objeto matemático y el o los teoremas o proposiciones que permitieron encontrar respuestas. Por ello es necesario otro tipo de estudio más allá del clásico estudio matemático. Con esta tesis se pretende aportar en dicha dirección.

1.3 Antecedentes de investigación desde dos perspectivas diferentes

Un primer paso, ineludible en esta búsqueda alternativa de cómo se construye el conocimiento matemático es el de recuperar el desarrollo científico desde trabajos que hagan visible las cuestiones que originan tal conocimiento**.** Así el trabajo de Piaget y García (1986) en el libro **"*Psicogénesis e Historia de la Ciencia*" plantea la evolución del conocimiento algebraico visibilizando el tipo de problemas y las diferentes redes de relaciones entre objetos.** Para los autores en esta construcción histórica y humana se pueden distinguir tres etapas que se pueden sintetizar de la siguiente manera y que nos han permitido situar también nuestro problema desde una necesaria perspectiva cognitiva, que tiene en cuenta la complejidad epistémica de los objetos en cuestión**:**

"La etapa **intra-operacional** está caracterizada por relaciones intra-operacionales entre ecuaciones que se presentan bajo formas aislables sin transformaciones de una en otra que impliquen la existencia de invariantes y sin composición entre ellas que conduzcan a definir estructuras.

La etapa **inter-operacional** está caracterizada por la correspondencia y transformaciones entre las formas aislables de la etapa anterior y con los invariantes que tales transformaciones exigen.

La etapa **trans-operacional** está caracterizada por la construcción de estructuras cuyas relaciones internas corresponden a los invariantes de las transformaciones inter-operacionales."

En la etapa intra-operacional se trata a cada ecuación en forma particular. En la etapa inter-operacional se trata de encontrar métodos generales de resolución transformando la ecuación dada en otra cuya solución sea conocida. Mientras que con Galois empieza la etapa trans-operacional pues concibe a **las propiedades** de las raíces de una ecuación como **manifestaciones de una estructura total de la cual tales propiedades resultan ser variaciones intrínsecas.**

Por otra parte, podemos recuperar como antecedentes relevantes relacionados con el estudio de las Estructuras Algebraicas como objeto a enseñar y a aprender a varias investigaciones situadas más en el campo de la Didáctica de la Matemática como las siguientes:

Dubinsky et al. (1994) realiza un primer estudio sobre el objeto Grupo, en él se explora la naturaleza del conocimiento de los estudiantes sobre nociones de Teoría de Grupos, se busca dar respuesta al interrogante ¿cómo un individuo puede desarrollar una comprensión de ciertos temas de Teoría de Grupos? Los autores presentan observaciones generales sobre el aprendizaje de algunos tópicos específicos, la naturaleza compleja de la comprensión y el papel de los errores en el marco acción-proceso-objeto-esquema (APOE). Los investigadores analizaron las dificultades de los estudiantes con la comprensión de conceptos del Álgebra Abstracta haciendo énfasis en la interpretación de algunos problemas propuestos a profesores de matemática de secundaria con el objetivo de darle sentido al trabajo con temas relacionados a la teoría de Grupos.

Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas (1997): en ella los investigadores trabajan con los conceptos de clases laterales, normalidad y grupos cocientes, que indudablemente se presentan en los procesos de enseñanza como generadores de importantes dificultades.

Brown et al., (1997) estudió la comprensión de los estudiantes sobre los grupos y los subgrupos: para el estudio utilizó la teoría APOE para describir las formas de conocer y los mecanismos de construcción de los conceptos. La metodología aplicada fue experimental basada en un programa informático con la participación de 51 estudiantes a los que se les realizaron cuestionarios y entrevistas individuales. En este estudio además de realizarse la descomposición genética se analizó el conjunto de las construcciones mentales denominadas esquemas que los estudiantes podían desarrollar para la comprensión del concepto grupo y subgrupo.

Hazzan (1999) también investiga sobre la comprensión de los objetos algebraicos, pero en este estudio se particulariza en el proceso de abstracción que realizan los estudiantes para llegar a la comprensión de ciertos tópicos de Teoría de Grupos.

Caroline Lajoie y Roberta Mura (2004) estudiaron las dificultades en el aprendizaje de los conceptos de subgrupo normal y grupo cociente en un contexto de enseñanza “tradicional” del álgebra abstracta en el primer ciclo universitario. En un primer momento realizaron un análisis *a priori* a fin de circunscribir los aspectos de esos conceptos que pueden plantear problemas. Luego, por métodos empíricos, observaron algunas dificultades que efectivamente manifestaron los estudiantes, tanto durante unas entrevistas individuales, como en las respuestas a un cuestionario escrito.

Omaida Sepúlveda (2016) en su tesis de doctorado indagó acerca de cuáles son los conocimientos matemáticos básicos que necesitan los estudiantes de formación matemática para una enseñanza idónea del objeto Grupo. Para llevar a cabo la investigación reconstruyeron los significados del objeto Grupo a través de su evolución histórica. A partir de este estudio, analizaron los significados del objeto de investigación pretendidos por los libros de texto: cuatro libros de los cursos clásicos de Teoría de Grupos y los planes de estudio de los estudiantes de formación matemática. Finalmente, como otra de las fases de la investigación diseñaron e implementaron un instrumento para evaluar el conocimiento de los estudiantes de formación matemática, sobre el objeto de investigación. Esta producción resulta muy importante para esta tesis de Maestría sobre todo por sus aportes en la dimensión epistémica, la cual pretendemos enriquecer con el actual estudio dado el marco metodológico en el que encuadraremos este trabajo.

En efecto, sumaremos al marco conceptual y metodológico que nos brinda el actual desarrollo del EOS, incluyendo los niveles de algebrización, la perspectiva psicogenética planteada por Piaget y García (1986), lo que nos permite entonces desplegar algunas de las preguntas que guiarán esta tesis: ¿Cuáles fueron las razones por las cuales la teoría algebraica de resolución de ecuaciones fue cambiando de etapas? ¿Qué sucesión de problemas se plantearon? ¿Son las técnicas las que cambiaron? ¿O las argumentaciones se realizaron desde otros lugares, sobre otros tipos de elementos, con otros lenguajes? ¿Cuáles fueron los procesos que se pusieron a funcionar en cada sistema de práctica? El nivel de algebrización desarrollado por los matemáticos que intervinieron en la construcción de dicha Teoría ¿Puede encuadrarse en los niveles ya caracterizados por el EOS? Este problema será investigado sobre un recorte del saber matemático y en un momento y circunstancia especial dado los propósitos específicos de esta tesis, y por tal motivo se profundizará en una de las transiciones reconocidas por Piaget y García: el cambio de la etapa **inter-operacional** a la **trans-operacional.** Toda transición es fuente de conflictos, y justamente eso es lo interesante si pensamos en la enseñanza y en el aprendizaje de estos conocimientos**.**

Se indagará específicamente uno de los trabajos neurales en el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas como lo es la obra de Lagrange quien fue no sólo uno de los matemáticos involucrados en la construcción de la Teoría, sino que fue el primero que **dudó** acerca de la existencia de la resolución por radicales para todas las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. Esta "obra" fue clave para el desarrollo de la teoría y es por ello que la adjetivamos en este trabajo como innovadora y visionaria.

A continuación se pasa a concretizar basándonos en los fundamentos planteados y en los antecedentes relevados, los objetivos y expectativas de logro de este trabajo.

1.4 Objetivos y expectativas

Los objetivos principales de esta investigación son:

- Detectar cuándo y por qué se producen los "quiebres"[3] y por ende los avances significativos en una Teoría matemática.

[3] Llamaremos "quiebre" a aquellas prácticas matemáticas que determinen modificaciones importantes en alguno de los elementos de significado y de ese modo logran abrir nuevos caminos de indagación.

- Ampliar los clásicos marcos de referencia institucionales respecto al abordaje del estudio de las estructuras algebraicas en la educación superior.
- Poner a funcionar estos nuevos marcos referenciales para analizar transposiciones didácticas especiales, como libros de textos de uso habitual y prácticas actuales para la presentación de las estructuras algebraicas en la formación de profesores en Matemática.

Para lo cual necesitamos determinar como objetivos específicos a los siguientes:

- Determinar cuáles son los cambios en la formulación del problema original que ocurren durante la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas objetivando así los diferentes sistemas de prácticas matemáticas a estudiar.
- Analizar las redes de relaciones matemáticas desde los contextos diferentes en que se desarrolla este conocimiento matemático, con el fin de hacer visibles articulaciones, quiebres, diferencias, etc, entre los diferentes sistemas de prácticas.
- Focalizar, en el trabajo realizado por Lagrange al intentar dar respuesta al problema de las soluciones de las ecuaciones por radicales, el análisis de significados de prácticas algebraicas y de tipos de razonamientos.
- Indagar cuáles son los objetos y procesos algebraicos que deben ponerse en juego para alcanzar niveles de algebrización superiores a los logrados por los estudiantes hasta el momento de iniciarse en el estudio de las estructuras algebraicas.

- Construir, a partir del análisis de los sistemas de práctica, el problema didáctico que involucre los cuestionamientos iniciales de enseñanza y aprendizaje de las estructuras algebraicas.
- Determinar el grado de idoneidad epistémica de determinados procesos de enseñanza que referencian o inician el estudio de las Estructuras algebraicas en la UNRC en la formación inicial del profesor en Matemáticas.

Las expectativas generadas para esta investigación son las siguientes:

- Se espera poner en evidencia a los elementos de significado determinantes que sustentan y producen los "quiebres" en una teoría.
- Se espera avanzar en la caracterización de los sistemas de práctica involucrados en esta obra matemática, construyendo así marcos referenciales de alto grado de idoneidad epistémica para el análisis de posteriores procesos de enseñanza.
- Se espera poder identificar procesos matemáticos necesarios a ser desarrollados para comprender y avanzar en el trabajo con estructuras algebraicas.
- Se espera determinar características propias de niveles de algebrización avanzados.
- Se espera aportar datos tanto de la dimensión epistémica como cognitiva que contribuyan a pensar la planificación de situaciones óptimas para ser implementadas en la formación inicial de profesores en Matemática.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

En este capítulo se referenciarán las bases teóricas utilizadas en esta tesis, caracterizando los constructos y herramientas puestas a funcionar para llevar adelante los distintos análisis realizados en esta investigación.

Se presenta una descripción de los aspectos más relevantes para esta investigación del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS); marco didáctico en el cual se encuadra este trabajo.

Por último se expondrán los pasos metodológicos seguidos al realizar los distintos análisis que se exhiben en esta tesis.

2.1 Descripción del EOS

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) es uno de los marcos teóricos con un importante desarrollo en la actualidad dentro de la Didáctica de la Matemática. Surge con el propósito fundamental de articular los conocimientos matemáticos, su enseñanza y su aprendizaje.

> "*No se trata de un modelo teórico acabado, sino de un sistema de nociones en proceso de elaboración y desarrollo cuya idea impulsora*

consiste en tratar de articular dentro de un sistema coherente las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas." (Godino, 1999)

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de *situación-problema*, se definen los conceptos teóricos de *práctica, objeto (personal e institucional*) y *significado*, con el fin de hacer explícito el triple carácter de la matemática mencionado anteriormente y de poner en evidencia que la construcción del conocimiento matemático es tanto *personal* como *institucional.*

Este enfoque se basa en los siguientes supuestos:

- Se propone un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006);
- Un modelo de cognición matemática - sobre bases semióticas (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce, 1931-58);
- Un modelo instruccional - sobre bases socio-constructivistas (Ernest, 1998; Brousseau, 1998);
- Un modelo sistémico – ecológico (Morin, 1977) que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural (Maturana y Varela, 1984) en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática

El conjunto de nociones teóricas que actualmente componen el EOS, tal como lo afirma Godino (2012), se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas (Figura 1), los cuales serán descriptos en su integridad para poder entender mejor las consecuencias del recorte realizado a la investigación para este trabajo y la necesidad de que quede planteada en esta tesis su necesaria prosecución en etapas siguientes, más allá que en esta tesis se pongan a funcionar sólo los constructos correspondientes a los dos primeros grupos:

1) *La noción de sistema de prácticas (operativas y discursivas)*, que asume una concepción pragmática – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional como personal. En este constructo se supone que la resolución de problemas es el elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Este primer nivel describe los sistemas de prácticas matemáticas y objetos matemáticos (previos y emergentes) que intervienen o pueden resultar de la realización de dichas prácticas (tareas, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones, lenguaje). Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática.

Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades primarias y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos/nociones entre sí.

Estos objetos estarán relacionado entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de práctica y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser socio – epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

2) *Las nociones de configuración de objetos y procesos matemáticos*, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. La adopción de una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado articula de manera coherente la concepción antropológica con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. En esta construcción los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos. Las configuraciones pueden ser epistémicas (conocimientos institucionales), cognitivas (conocimientos personales), afectivas, mediacionales (recursos tecnológicos y temporales), interaccionales y ecológicas. Entre los procesos podemos mencionar:

- proceso de materialización-idealización (asociado a la dualidad ostensivo - no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo ideal.
- proceso de particularización-generalización (dualidad ejemplar-tipo): el análisis de un objeto particular "ejemplar" permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos y el análisis de una propiedad sobre un conjunto de objetos nos lleva a pensar cómo funciona un caso particular.
- proceso de descomposición-reificación (dualidad sistémico - unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los

objetos intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero tras el proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.

- proceso de representación-significación (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir significado a una expresión. Los procesos de representación y significación son "densos" en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de problemas y pueden ser fuente de conflictos semióticos potenciales.
- proceso de personalización-institucionalización (dualidad personal-institucional): en una primera fase de estudio es necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su resolución (personalización). Luego del proceso de estudio, mediante una adecuada gestión docente, se promoverá la institucionalización de esos conocimientos.

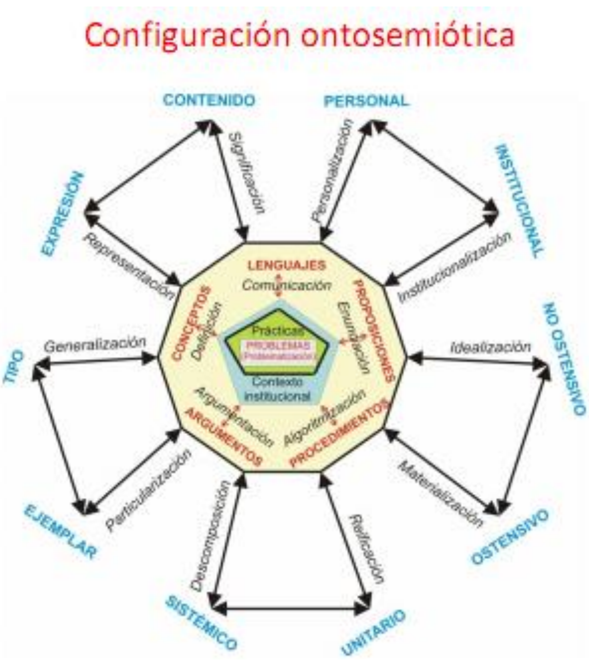


Figura 1: Configuración ontosemiótica (Fuente: Godino, 2014)

Este nivel de análisis ayuda a poner de manifiesto la complejidad onto-semiótica de la actividad matemática (en la figura 1 se puede observar la configuración ontosemiótica planteada por el EOS) y, brinda posibles explicaciones de los conflictos semióticos que se puedan producir en la realización de la misma.

3) *La noción de configuración didáctica,* como sistema articulado de roles docentes y discentes (de los alumnos). Constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática, tiene en cuenta la configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema.
4) *La noción de dimensión normativa,* sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico (G. Brousseau) y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.
5) *La noción de idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo se tendrán en cuenta, como ya se anticipara, los primeros dos grupos de constructos puestos a funcionar en instituciones diferentes (de producción y de enseñanza). En un primer análisis se trabajará sobre los ***sistemas de prácticas*** para luego reconocer una ***configuración epistémica*** que nos permita entender mejor los cambios de significados institucionales asociados a diferentes momentos culturales y en diferentes instituciones. Luego se estudiarán las ***configuraciones de objetos y procesos matemáticos***, emergentes e intervinientes en determinadas prácticas matemáticas institucionales (institución de producción matemática y de algunas de enseñanza como libros de textos y una práctica actual).

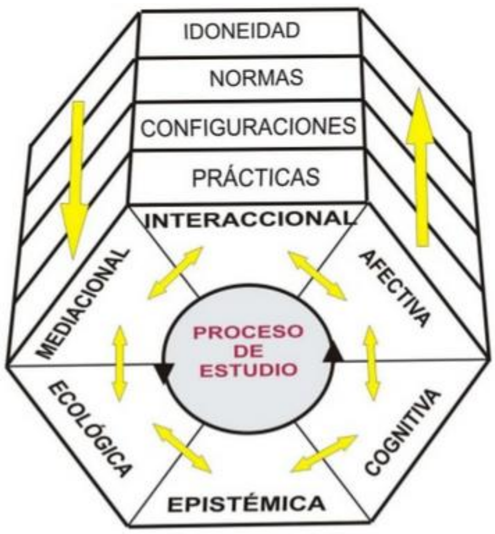


Figura 2: Facetas y niveles de análisis didáctico extraído de Godino (2011)

En el EOS se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo, para poder explicarlo se consideran dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel se encuentran las entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel están los objetos que emergen de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; se refiere a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. (Godino, Batanero y Font, 2007)

Se sabe que para la realización de una práctica matemática es necesario poner en funcionamiento determinados conocimientos. En dicha práctica matemática se ponen en juego situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Figura 3). Los lenguajes intervinientes (verbales, gráficos, etc.) son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica son adecuadas y regulan el significado de la producción matemática lograda.

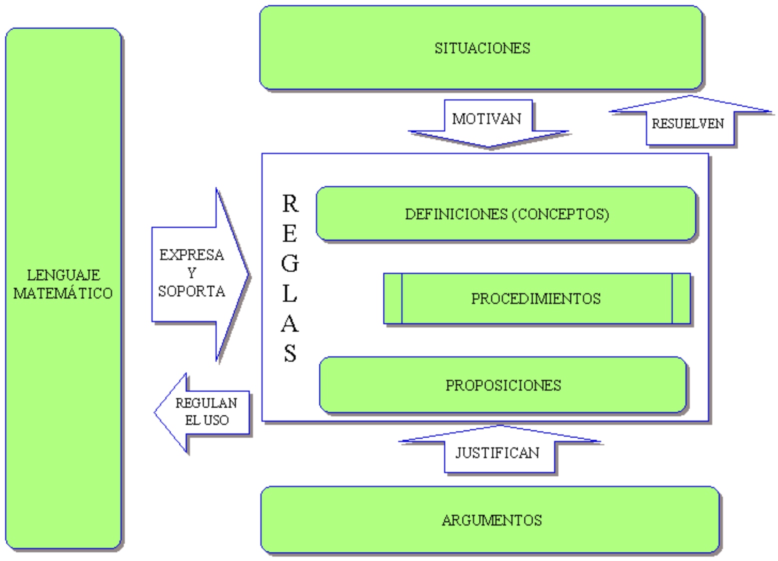


Figura 3: Configuración epistémica extraída de Font y Godino (2006).

A continuación se describen los elementos de significado que se muestran en la figura 3 y que serán identificados en las diferentes organizaciones matemáticas analizadas en esta tesis:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc.)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (ecuación, incógnita, raíz, polinomio, función, etc.)

- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, etc.)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o empíricos, conjeturales, etc.)

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

El EOS remarca la importancia, para la Didáctica de la Matemática, de indagar sobre la naturaleza de los contenidos matemáticos pues *no es posible estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos*. Es decir, para poder actuar sobre problemas didácticos concretos es necesario realizar, en primer lugar un análisis ontológico y epistemológico de los saberes que conforman y dan sentido a dichos problemas.

> *"La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia."* (Godino, 2003b)

Otra noción importante que define el EOS, y que ha resultado muy útil para este trabajo, es la noción de *holo-significado* de un objeto matemático, la misma representa la expresión de los diversos modelos asociados a dicho objeto (entendidos como un sistema único). Existen diferentes modelos asociados a un objeto matemático, cada uno con sus limitaciones y fortalezas. Un sujeto está capacitado para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce cuando puede establecer nexos firmes entre dichos modelos y uno o varios dominios matemáticos. El holo-significado incorpora las relaciones entre dichos modelos y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen. (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004). Justamente en este estudio se quiere poner en evidencia cómo en el proceso del desarrollo de la Teoría de ecuaciones se va construyendo un holo-significado de la misma a partir de los distintos modelos, que generó cada matemático o grupo de matemáticos en su momento, sobre la resolución de ecuaciones por radicales. El proceso de enseñanza y de aprendizaje del objeto que aquí se estudia es muy complejo pues detrás de cualquier teoría matemática hay muchos sistemas de prácticas operativas y discursivas para los distintos contextos en los cuales se desarrolla la misma. Según Godino y otros (2006) *son los sistemas de prácticas lo que constituyen el origen y razón de ser de toda noción matemática, es por este motivo que la enseñanza no puede estar restringida a la explicación de la definición más general posible del concepto matemático en cuestión.* No es suficiente quedarse con el resultado que da las condiciones que debe cumplir una ecuación algebraica para ser resuelta por radicales sino que es importante indagar en los sistemas de práctica qué dieron origen a dicho resultado.

Por otra parte, recientemente Godino y colaboradores definieron 6 niveles de algebrización, conocimiento que nos resultará útil pues tiene un componente didáctico importante que ayuda a entender el problema de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en general, y de los objetos algebraicos en particular. Tales niveles se listan y describen sintéticamente a continuación:

Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico): “*Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización*.” (Godino *et. al*, 2014). En una práctica matemática de nivel 0 pueden intervenir números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación.

Nivel 1 de algebrización (nivel incipiente de algebrización): “*Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.*” (Godino *et. al*, 2014). No es necesario que quien resuelva una determinada práctica matemática nombre en su razonamiento las propiedades que utiliza, lo importante es que establezca una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones.

Nivel 2 de algebrización (nivel intermedio de algebrización): “*Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma* $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$. *En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para* *obtener formas canónicas de expresión.*" (Godino *et. al,* 2014). Quién realice una práctica matemática en este nivel de algebrización puede plantear una generalización de tipo mixto, contextual y simbólico.

Nivel 3 de algebrización (nivel consolidado de algebrización): "*Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo* $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{Cx} \pm \mathrm{D}$*, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.*" (Godino *et. al,* 2014).

Nivel 4 de algebrización (uso de parámetros): "*El uso de parámetros como registro numérico (placeholder) y para expresar familias de ecuaciones y funciones es indicativo de un cuarto nivel de algebrización (...) Se trata de un primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica."* (Godino *et. al*, 2015). En este nivel de algebrización es preciso usar parámetros en las expresiones algebraicas en lugar de números.

Nivel 5 de algebrización (tratamiento de parámetros): "*Un nivel superior de algebrización se puede ligar a la actividad matemática desplegada cuando se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con otras variables. Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones, familia de funciones). Las operaciones que se realizan en las que intervienen parámetros, cuando son realizadas de manera comprensiva y no puramente* *algorítmica, implican una fase superior en el proceso de reificación de los objetos intensivos representados (familias de ecuaciones y funciones)*." (Godino *et. al*, 2015).

Nivel 6 de algebrización (trabajo con estructuras algebraicas): "*La introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o la de grupo), el estudio del álgebra de funciones (adición, sustracción, división, multiplicación y composición) son temas que se inician en Bachillerato, poniendo en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad que los considerados en el quinto nivel. Puede ser útil, por tanto, caracterizar un sexto nivel de algebrización que ayude a centrar la atención en la naturaleza específica de la actividad matemática implicada y su mayor complejidad ontosemiótica. Se trata de un primer encuentro con la estructura algebraica de espacio vectorial en la que se pone en juego un conjunto de objetos matemáticos (vectores) sobre los cuales se definen operaciones que cumplen un sistema de propiedades específicas. Esto exige un primer "estudio estructural" del conjunto de los vectores, ya que en este tipo de presentación (axiomática) se explicitan los invariantes de las propiedades de la suma de vectores (existencia de un mismo vector para todos que no produce cambios, existencia de un vector opuesto para cualquier vector, etc.). Además, se estudian relaciones entre las propiedades de los elementos que caracterizan un vector y los números reales (escalares), funcionando éstos como parámetros*." (Godino *et. al*, 2015).

2.2 Enfoque metodológico que sostiene la investigación y pasos a seguir

Desde el punto de vista metodológico, esta investigación, al igual que las realizadas en el marco del EOS combina métodos y técnicas pertinentes al problema investigado y al momento de la investigación. Por ejemplo, en estos momentos y para buena parte de este trabajo la reconstrucción retrospectiva de prácticas matemática que serán analizadas requiere de una fuente documental fiable para recuperar la trama de hechos ocurridos: elementos de significados puestos en juego en cada momento, interacciones, cambio de problemas, etc. Esta técnica de recolección de datos, denominada técnica indirecta, se basa en este trabajo en la lectura y análisis epistémico del texto Galois' Theory of Algebraic Equations de J. P. Tignol (2002). Se optó por el libro antes presentado pues en palabras de propio autor, el objetivo del texto es mostrarle al lector ***cómo se hace matemática*** y es este el objetivo que aportaría al problema de enseñanza que originó este trabajo. Para cumplir con dicho objetivo se detallan las experiencias colectivas de varias generaciones de matemáticos (en orden cronológico) desde los orígenes de la teoría hasta su culminación con el trabajo de Galois. Se eligió la bibliografía antes mencionada, al no poder contar con los trabajos originales, ya que la misma respeta tales ideas originales surgidas en cada época, según valoraciones de especialistas sobre esta bibliografía.

Las cuestiones que se refieren a la caracterización de significados tienen un carácter netamente descriptivo. Justamente el modelo teórico en el que enmarcamos esta investigación aporta una tipología de objetos y de procesos, anteriormente descripta, que generan categorías de análisis y son la guía para esa descripción. Además ante la búsqueda de relaciones entre diversos tipos de significados o sea ante el estudio de la "dinámica de los significados", también el modelo teórico seleccionado aporta criterios para seleccionar componentes o elaborar pautas para medir variables. En el estudio de la evolución y cambios de significados de una institución a otra hemos ampliado el estudio documental agregando libros de textos y prácticas de uso actual en la enseñanza de las estructuras. Esto nos indica tendencias existentes en una población determinada, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad institucional por lo que completamos este estudio con técnicas cualitativas. Particularmente el estudio de significados institucionales e instituciones de enseñanza será un estudio cualitativo con muestras reducidas (tres libros de textos y una práctica) y con finalidad exploratoria, orientado esencialmente a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas en posteriores investigaciones.

Por último el EOS y en particular la teoría de los significados sistémicos aporta un constructo como el de "*sistema de práctica*" asociado a toda organización matemática y que es un instrumento clave tanto para la evaluación de procesos de producción y de enseñanza de la matemática, que es como se usa en este trabajo como para el futuro diseño e implementación de procesos de estudios, con altos grado de idoneidad epistémica y didáctica, dirección ésta que pretendemos continuar en el doctorado.

Cómo ya se mencionara con anterioridad el interrogante didáctico que movilizó este trabajo fue "¿Cómo se conoce en Matemática?" a partir de esta pregunta y a fin de realizar una indagación más fina de las prácticas matemáticas que nos interesaban, cabe preguntarse: ¿Cuáles son las posibles interrelaciones que se pueden producir entre los distintos objetos de una obra matemática a lo largo de un tiempo y circunstancias dadas? ¿Por qué resulta necesario visibilizar tales interrelaciones? ¿Cuál fue el proceso sostenido en el tiempo que llevó a que se generaran dichas interrelaciones?

Más específicamente, sobre la teoría de Ecuaciones Algebraicas nos resulta interesante conocer: ¿Cuáles fueron las razones por las cuales la teoría algebraica fue modificándose? ¿Qué sucesión de nuevos problemas se plantearon? ¿Son las técnicas las que cambiaron? ¿O las argumentaciones se realizaron desde otros lugares, sobre otros tipos de elementos, con otros lenguajes? ¿Cuáles fueron los procesos que se pusieron a funcionar en cada sistema de práctica? ¿Se observaron relaciones entre diferentes tipos de elementos?

A fin de poder contestar los interrogantes planteados en los dos párrafos anteriores y en el marco metodológico y conceptual expuesto, los pasos a seguir fueron los siguientes: se realiza una primera **descripción** de los distintos sistemas de prácticas que "vivieron" y se desarrollaron en torno a distintos tipos de problemas en relación a las ecuaciones algebraicas. Luego se construye una "**macro" configuración epistémica** (figura 4) que tiene por objetivo centrar la atención en la **articulación** de los distintos *sistemas de práctica*, permitiendo tanto lecturas globales (sobre cada sistema contextualizado en un momento social y cultural) como parciales (sobre cada elemento de significado que varía al pasar de un contexto a otro).

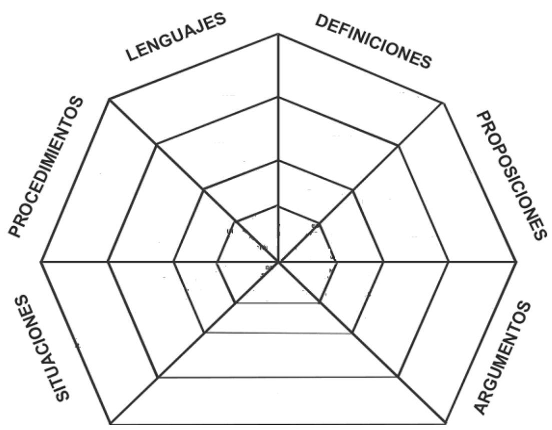


Figura 4: Configuración epistémica global

(Gráfico basado en Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font , V. y Wilhelmi, M. R., 2006)

Tomando en cuenta la información que brinda la configuración epistémica acerca de los momentos "claves" en la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas se indagó, como ya se dijera, con más profundidad el trabajo del matemático Lagrange.

Para analizar en profundidad las investigaciones realizadas por Lagrange, en primera instancia se estudiaron los métodos para la resolución de ecuaciones relevados por el ya nombrado matemático, con el objetivo de tener una visión más clara de los avances logrados hasta ese momento y como consecuencia comprender mejor el inicio de la obra de Lagrange. En segunda instancia se confeccionaron tres configuraciones epistémicas correspondientes a los tres sistemas de prácticas diferentes encontradas en el trabajo específico sobre esta temática de Lagrange. Dichas configuraciones brindan claros indicadores sobre las ideas y la producción matemática de esta figura clave para el desarrollo de esta Teoría.

Para trabajar sobre el segundo nivel de análisis didáctico que propone el EOS y así profundizar el análisis propuesto, se identificaron los procesos matemáticos existentes en los sistemas de práctica antes citados. Para ello se consideraron los objetos, procesos y significados involucrados en la resolución de la situación – problema en cuestión. Este tipo de análisis tiene como finalidad describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas analizadas para más tarde poder explicar potenciales conflictos semióticos que produce su realización.

Para poder describir dicha complejidad ontosemiótica fue necesario analizar en detalle la red de relaciones entre los diferentes elementos de significado que sostienen a las prácticas de Lagrange lo que conforma las configuraciones epistémicas que se desprenden de estas prácticas.

Luego, y teniendo en cuenta que los libros de texto representan uno de los materiales de consulta más utilizados por los estudiantes y docentes, se analizó el modo en el que se inicia el estudio de las estructuras algebraicas en tres libros de texto que actualmente se utilizan en la formación de grado de profesores y licenciados en matemática, al menos en la Universidad Nacional de Río Cuarto. El análisis consistió en identificar los contenidos tratados, los tipos de problemas usados para introducir las nociones, representaciones, elementos conceptuales, procedimentales, propiedades y modos de argumentación, así como la presencia de conflictos semióticos potenciales en las prácticas desplegadas.

Los materiales bibliográficos a analizar son los siguientes: Algebra Moderna de Herstein (1994), Números- Grupos – Anillos de Dorronsoro y Hernandez (1999) y Algebra de Lang (1977).

El marco de referencia institucional construido hasta aquí, fue utilizado para analizar la primera práctica propuesta en la asignatura Estructuras Algebraicas de Profesorado en Matemática de la UNRC. Se analizaron los tipos de prácticas y objetos que se ponen en juego al comenzar el trabajo con Estructuras Algebraicas. De este modo se pudieron visibilizar tanto objetos ostensivos como no ostensivos vinculados con este tipo de práctica introductoria. Además se analizó la intencionalidad de cada fragmento de dichas prácticas operativas y discursivas textualizadas.

CAPÍTULO 3

Construcción del Holo significado de la teoría de ecuaciones

El objetivo central de este capítulo es avanzar sobre la construcción del holo-significado de la Teoría de Ecuaciones como un primer paso para ampliar los clásicos marcos de referencias institucionales, en los que predomina esencialmente su carácter deductivo para producir conocimiento y que utilizan la mayoría de las instituciones de enseñanza superior. Para poder lograr dicho objetivo es necesario realizar una lectura profunda de los trabajos que formaron parte en diferentes circunstancias y tiempos de la construcción de esta teoría. Luego fue preciso organizar toda la información recabada poniendo a funcionar herramientas conceptuales metodológicas del EOS a fin de poder visualizar con mayor claridad las distintas interrelaciones entre los distintos elementos de significado que van conformando el significado global. Es decir el interés está puesto en describir el modo en que interaccionan el lenguaje, las situaciones, los conceptos, los argumentos, las acciones y las propiedades en cada momento y tiempo cultural ante la problemática planteada

Además teniendo en cuenta el objetivo central de este trabajo (comprender cómo y por qué se construyó la Teoría de Ecuaciones Algebraicas y cuáles fueron las características de los momentos claves para el avance de la misma) se estudió específicamente las relaciones entre los elementos de significado y los problemas que se buscaba resolver en cada etapa. En otras palabras, describir la *dinámica de los significados* de cada elemento cuando va modificándose el problema guía.

La herramienta teórica brindada por el EOS (configuración epistémica) que se utilizó -metafóricamente como una lupa- posibilitó la visualización, a través del juego dialéctico entre el *análisis* y la *síntesis,* de los momentos importantes en la construcción de una teoría que para nosotros están asociados a los cambios de significados que produjeron “quiebres” en dicha construcción. Como una teoría está constituida por varias y diversas prácticas matemáticas se utilizaron para su descripción, organización y análisis de una configuración epistémica por cada etapa de la teoría y una “macro” configuración epistémica para la visión global de la misma que ayudará no sólo a lecturas de prácticas “circulares”, o sea prácticas de una determinada época, sino también lecturas “de sectores triangulares” que permitan poner al descubierto cómo los objetos intervinientes se transforman y desarrollan en relación dialéctica con otros objetos y muy especialmente con los problemas que generan tales prácticas.

3.1 Holo-significado de la Teoría de Ecuaciones

Se comienza este estudio en concordancia con lo sostenido por Piaget y García (1986) respecto a donde se identifica el inicio del álgebra en la construcción del conocimiento matemático. Tales autores sostienen que el álgebra comienza con el trabajo de Vieta (1540-1603) que consistió en el estudio de las relaciones entre parámetros y variables de las ecuaciones, siendo además el primero en introducir una notación específica para los parámetros:

> *“La distinción crucial hecha por Vieta que le permite así dar un gran paso adelante y construir el álgebra como una nueva disciplina, es el pasaje del concepto de arithmos al concepto de símbolos generales.*

El arithmo hace referencia inmediatamente a las cosas o a las unidades, mientras que los símbolos utilizados por Vieta hacen referencia directamente a la propiedad de "ser un número"."(Piaget y García, 1986)

Aprovechando el hecho de que en la Teoría de Ecuaciones algebraicas se logra la explicitación de las condiciones necesarias y suficientes para saber cuándo una ecuación es resoluble por radicales, o sea el resultado que "cierra" una teoría, se analizaron, las situaciones/problemas, las acciones, los argumentos, las propiedades, el lenguaje y los conceptos involucrados en los diferentes momentos de evolución de la teoría conformando diferentes redes de relaciones. Cada una de estas configuraciones epistémicas modeliza aspectos parciales del holo-significado de la resolución de ecuaciones por radicales, que presentadas en conjunto ponen al descubierto la complejidad ontosemiótica del holo significado de la teoría.

La reconstrucción que se realizó del holo-significado de la resolución de ecuaciones por radicales está basada, como se anticipara, en el capítulo anterior, en el libro *Galois' Theory of Algebraic Equations* escrito por Tignol (2002). Se organizó dicha reconstrucción en cuatro configuraciones epistémicas (una por cada etapa considerada de la Teoría de Ecuaciones, las cuales responden cada una de ellas a cambios de problemas) que pueden verse en las figuras 3, 4, 5 y 6, y una "macro" configuración epistémica, que puede observarse en la figura 7.

3.1.1 Primera etapa de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

En el comienzo de la construcción de la Teoría de Ecuaciones los matemáticos de la época estaban abocados a la **búsqueda de soluciones particulares para las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, también particulares** (figura 5). Es importante tener en cuenta que la escritura de las ecuaciones difiere de la actual, es más, al comienzo ni siquiera se contaba con una notación específica.

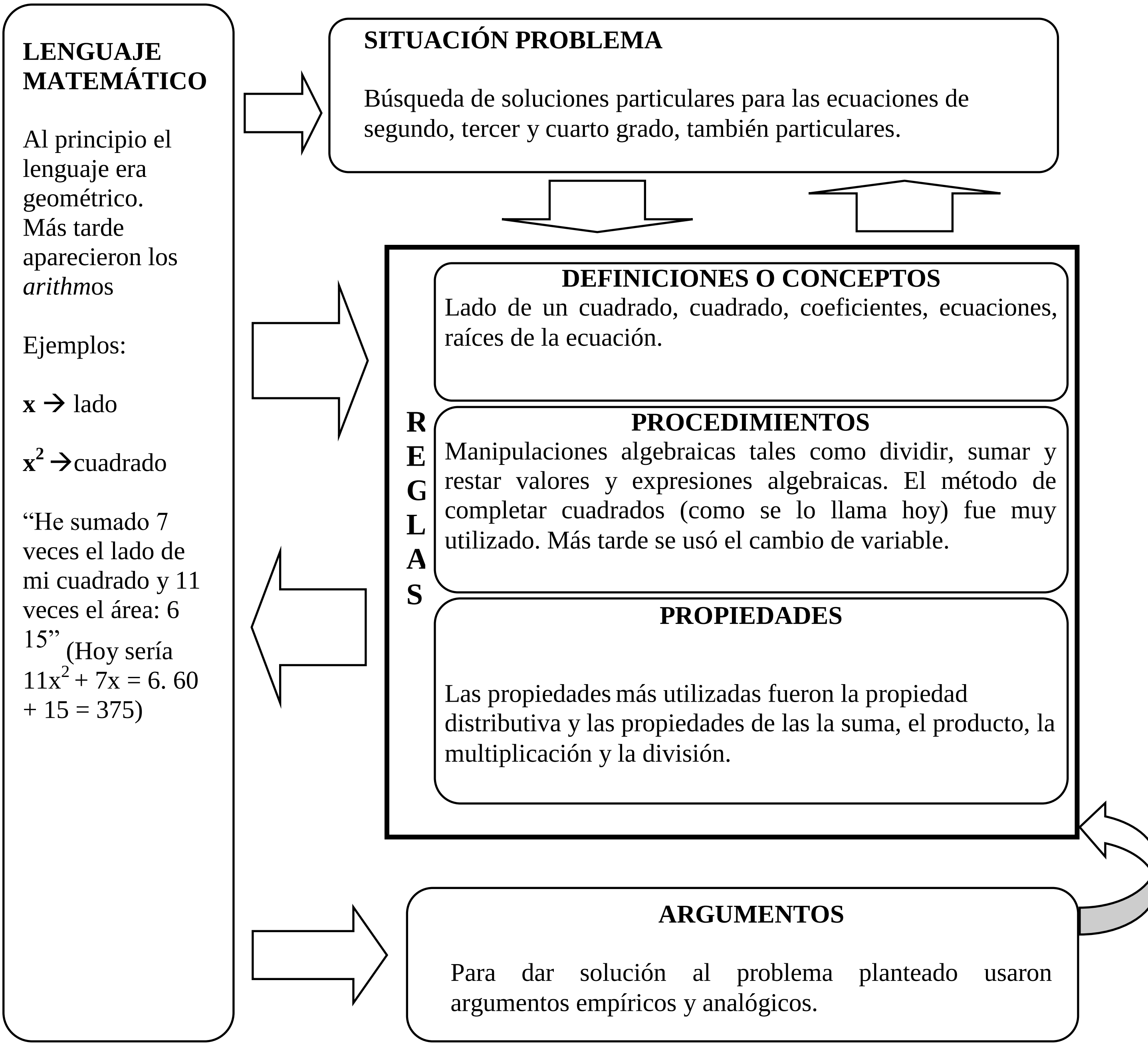


Figura 5: Configuración epistémica de la primera etapa de la Teoría de Ecuaciones.

En un principio (en el año 2000 A. C. aproximadamente) su lenguaje era geométrico, la incógnita, que actualmente se denomina **x,** se denominaba «lado» y $\mathbf{x^2}$ «cuadrado». En una traducción realizada sobre una tabilla de arcilla de los babilonios se puede leer "He sumado 7 veces el lado de mi cuadrado y 11 veces el área: 6 15" (Aubry y otros, 1992), en el lenguaje actual, teniendo en cuenta que ellos manejaban un sistema de numeración sexagesimal, sería la ecuación $11x^2 + 7x = 6.\ 60 + 15 = 375$. Como puede observarse los coeficientes sólo representaban la cantidad de veces que se tenía en cuenta ya sea un lado o un área de un cuadrado. Más tarde, en Grecia y en Arabia, aparecieron los *arithmos*[4] que representaron un gran paso para el desarrollo de la teoría pues es el primer acercamiento al símbolo que se conoce.

Para encontrar la resolución por radicales de cada tipo de ecuación los procedimientos que usaban requerían sólo manipulaciones algebraicas que hoy podrían asociarse a las prácticas de dividir, sumar y restar valores y expresiones algebraicas. El método de completar cuadrados (no con esta denominación) fue muy utilizado para eliminar términos en las distintas ecuaciones. En algunos casos para poder encontrar solución a las ecuaciones recurrían al cambio de variable. En tal sentido Boyer (1986) menciona "*en otro texto los babilonios se arreglan para reducir la ecuación* $11x^2 + 7x = 6; 15$ *a la forma canónica* $x^2 + px = q$ *, multiplicando primero por 11 los dos miembros para convertirla en la* $(11x)^2 + 7(11x) = 1{,}8; 45$*, que es la forma canónica salvo que la incógnita es ahora* $y = 11x$ *y la solución para y es fácilmente obtenida por la regla familiar* $y = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$"

En esta etapa para encontrar las raíces de la ecuación los matemáticos en algunos casos explicaban literalmente sus razonamientos y en otros utilizaban *arithmos* planteando así un primer nivel de generalización (Godino *et al*, 2015). Los conceptos que se manejaban eran los de ecuaciones, coeficientes y raíces aunque con un significado distinto al que se le da hoy, ligado a un contexto geométrico.

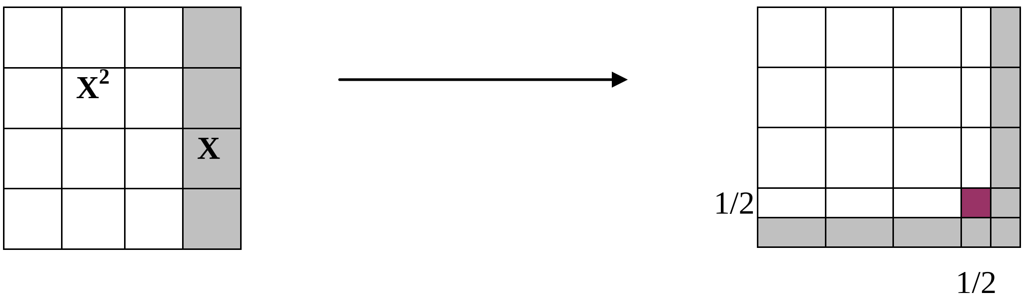
Las propiedades más utilizadas eran la propiedad distributiva y las propiedades de las operaciones matemáticas (suma, producto, potencia y radicación). Un ejemplo

[4] los arithmos son letras que representan números específicos

del uso de estas propiedades puede observarse en la traducción realizada por Van der Waerden (1975) de una tablilla babilónica: *He sustraído del área, el lado de mi cuadrado y esto es 14,30. Tomas 1, el coeficiente y lo divides en dos partes esto es 0;30. Multiplicas 0;30 y 0;30 esto es 0;15. Agregas a 14,30 los 0;15. Su raíz es 29;30. Sumas a 29;30 los 0;30 que habías multiplicado por si mismo esto da 30 y este es el lado del cuadrado.*

Transformado estas indicaciones al lenguaje, simbología y sistema de numeración actual sería: dada la ecuación $x^2 - x = 870$, tomo 1 que es el coeficiente de ambos términos y lo divido por 2, obtengo ½. A este resultado lo elevo al cuadrado y obtengo ¼. Luego le sumo ¼ a ambos miembros de la ecuación (se completan cuadrados). La ecuación original es equivalente a $(x - ½)^2 = 870{,}25$, le aplico la raíz cuadrada a ambos miembros y obtengo que $x - ½ = \pm 29{,}5$. Como los babilonios no tenían números negativos solo se quedaban con la respuesta positiva, en decir x = 30.

Los argumentos que usaron fueron empíricos y analógicos. La analogía se realizaba con resoluciones geométricas como se puede ver en el siguiente ejemplo.



Luego $x^2 - x + ¼ = (x - ½)^2$

3.1.2 Segunda etapa de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

En la segunda etapa de la construcción de la Teoría el interés estaba en **encontrar un método general para la resolución de ecuaciones por radicales** (un primer cambio de problema), es decir se intentaba hallar un método que permitiera resolver todas las ecuaciones sin importar su grado (figura 6).

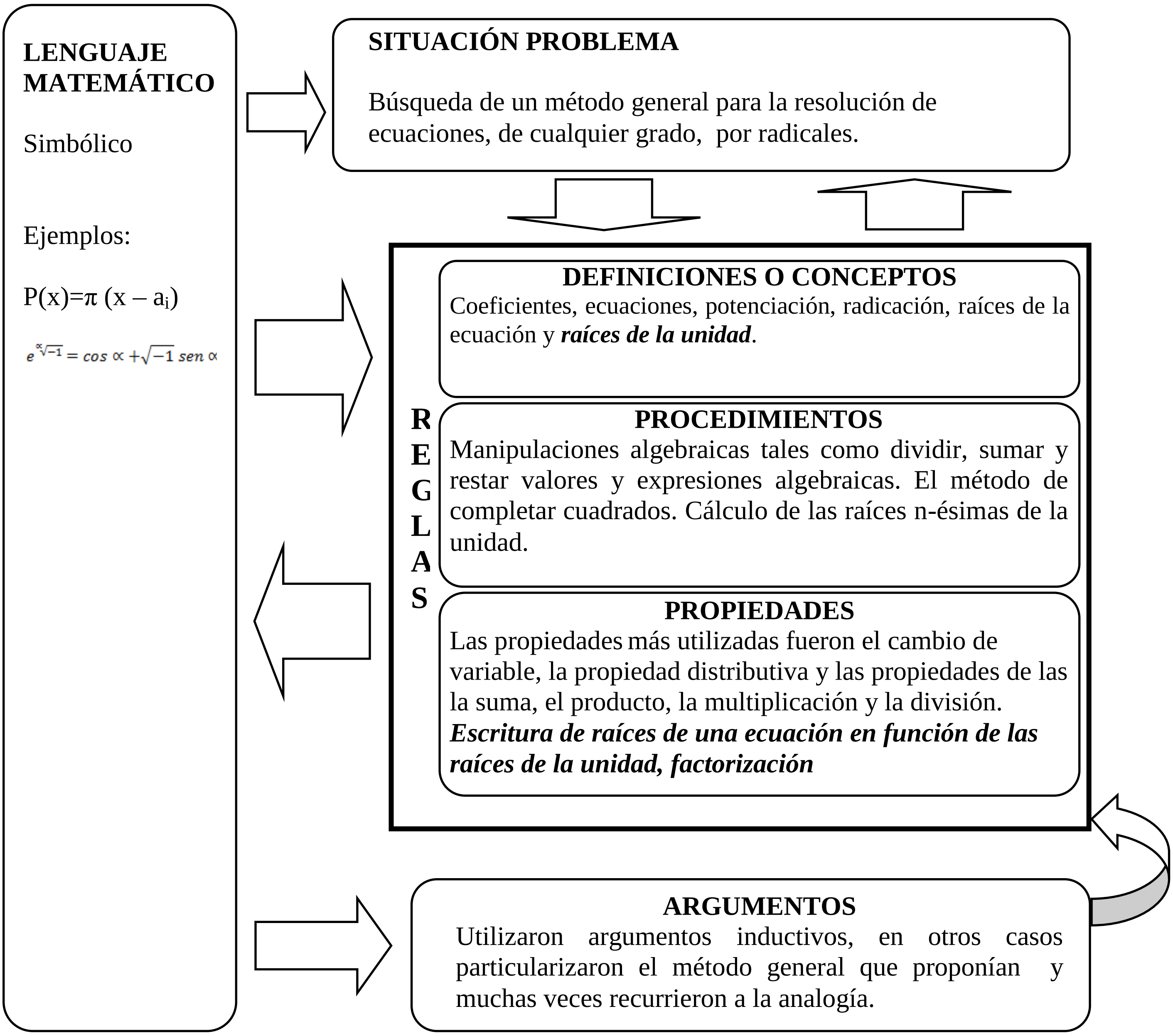


Figura 6: Configuración epistémica de la segunda etapa de la Teoría de Ecuaciones.

Los matemáticos de la época, para tratar de comprobar si los métodos que proponían servían, utilizaban las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. A los conceptos que se manejaban con anterioridad se agrega el concepto de **raíces de la unidad** (este nuevo objeto se agrega pues las raíces de una ecuación de grado n pueden escribirse en función de las n-ésimas raíces de la unidad). Para la constitución de los métodos generales, además de completar cuadrados y realizar manipulaciones algebraicas, tuvieron que calcular las raíces de la unidad, es decir; aparece **una nueva técnica**.

El logro de un método general para la resolución de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado estuvo directamente relacionado al lenguaje simbólico que utilizaron. Esto permitió la escritura de un polinomio a partir de sus raíces (factorización) y denotar las raíces de la unidad (más tarde se pudo escribir las raíces de una ecuación en función de las raíces de la unidad). En esta etapa utilizaron argumentos inductivos en algunos casos, en otros particularizaban el método general que proponían y muchas veces recurrieron a la analogía; por ejemplo algunas ecuaciones de cuarto grado podían resolverse analógicamente como ecuaciones de segundo grado.

3.1.3 Tercera etapa de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

La tercer etapa es clave en la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas pues **se problematizó la existencia de solución por radicales para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco** (figura 7). Es justamente sobre esta etapa donde aplicaremos un "zoom" para su análisis, lo que será descripto en el capítulo 5. El planteo de la conjetura de la inexistencia de soluciones por radicales para ecuaciones de grado arbitrario se ve impulsado por el estudio de los métodos existentes. Para poder hacer más creíble dicha conjetura se utilizaron argumentos inductivos. Recordemos que no es en este momento cultural donde se logra una demostración de tal conjetura.

En el contexto geométrico se desarrolla paralelamente una importante producción ligada a la construcción con regla y compás de polígonos regulares, más tarde dicha producción se relacionará con el problema que estamos estudiando en el contexto algebraico. Desde esa rama de la matemática, se aporta un sub problema[5] respecto al que se estaba abordando desde el álgebra, "la resolución de ecuaciones ciclotómicas".

LENGUAJE MATEMÁTICO

Se utilizó un lenguaje simbólico. El lenguaje matemático se utilizó para relacionar funciones distintas

Ejemplos:

$x^n - s_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n s_n = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$

$R_n(x) = \prod\prod (x-(a_0+a_1 w+\ldots+a_{n-1} w^{n-1}))$

$P(x_1,\ldots,x_n)=f(s_1,\ldots,s_n)$

SITUACIÓN PROBLEMA

Se problematiza la existencia de solución por radicales para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco.

REGLAS

DEFINICIONES O CONCEPTOS

Se pusieron a funcionar: coeficientes, ecuaciones, raíces de la ecuación, raíces de la unidad. Los números primos. Ecuaciones ciclotómicas. **Emergente: Resolvente de Lagrange**.

PROCEDIMIENTOS

Manipulaciones algebraicas: dividir, sumar y restar valores y expresiones algebraicas. Método de completar cuadrados. Cálculo raíces n–ésimas de la unidad. Factorizaciones de los polinomios, permutación de las raíces.
Emergente: **Escritura de los coeficientes en función de las raíces d**el **polinomio original**.

PROPIEDADES

Las propiedades más utilizadas fueron el cambio de variable, la propiedad distributiva y las propiedades de las la suma, la multiplicación y la división. También se utilizó la propiedad que tiene las ecuaciones de poderse escribir en función de las raíces de la unidad. Las propiedades algebraicas de los sistemas de ecuaciones.

ARGUMENTOS

Se planteó la conjetura de la inexistencia de soluciones para ecuaciones de grado mayor o igual a 5. Para hacer más creíble dicha conjetura se utilizaron argumentos inductivos.

Figura 7: Configuración epistémica de la tercera etapa de la Teoría de Ecuaciones.

Los polinomios ciclotómicos Φ_n (n = 1, 2, 3,…..) tienen la particularidad de tener por raíces a las raíces n-ésimas primitivas de la unidad, son definidos

[5] Este sub-problema es un foco de indagación que no será desvelado en esta tesis, quedando un problema abierto que puede reformular en un futuro el marco de referencia institucional que estamos elaborando.

inductivamente por $\Phi_1(x) = x - 1$ y para $n \geq 2$ $\Phi_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{\prod\limits_{\substack{d/n \\ d \neq n}} \Phi_d(x)}$ donde d recorre el conjunto de los divisores de n con $d \neq n$. En particular si p es un número primo se tiene $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x - 1$. En esta etapa Gauss probó que las ecuaciones ciclotómicas son solubles por radicales.

Al igual que en la etapa anterior el lenguaje utilizado fue el simbólico, pero en este caso el lenguaje matemático se utilizó sólo para relacionar funciones distintas, no lográndose objetivar y por ende nombrar con una notación específica las permutaciones, en tanto objeto algebraico. Además de los conceptos que se venían manejando, los números primos toman protagonismo a la hora de intentar dar solución al problema planteado ya que son utilizados para contrastar, ejemplificar y probar parcialmente conjeturas surgidas en cada práctica, usándolos como base multiplicativa de los enteros. En cuanto a las propiedades, se incorporan las propiedades algebraicas de los sistemas de ecuaciones, las cuales están relacionadas a la escritura de los coeficientes en términos de las variables. Esta original idea genera la posibilidad de observar un primer “quiebre” en la Teoría ya que pone por primera vez en evidencia la relación existente entre los coeficientes y las permutaciones de las raíces de las ecuaciones (vale insistir que las permutaciones son utilizadas, -en este momento histórico-, con su significado aritmético). Fue justamente dicha relación la que más tarde permitió la caracterización algebraica de las ecuaciones y como consecuencia de esto el cierre de la teoría. Cabe destacar que ni la caracterización, ni el cierre de la teoría se alcanzaron con los sistemas de prácticas desarrollados en este período.

3.1.4 Cuarta etapa de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

Se puede realizar un primer análisis de la culminación de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas observando la figura 8.

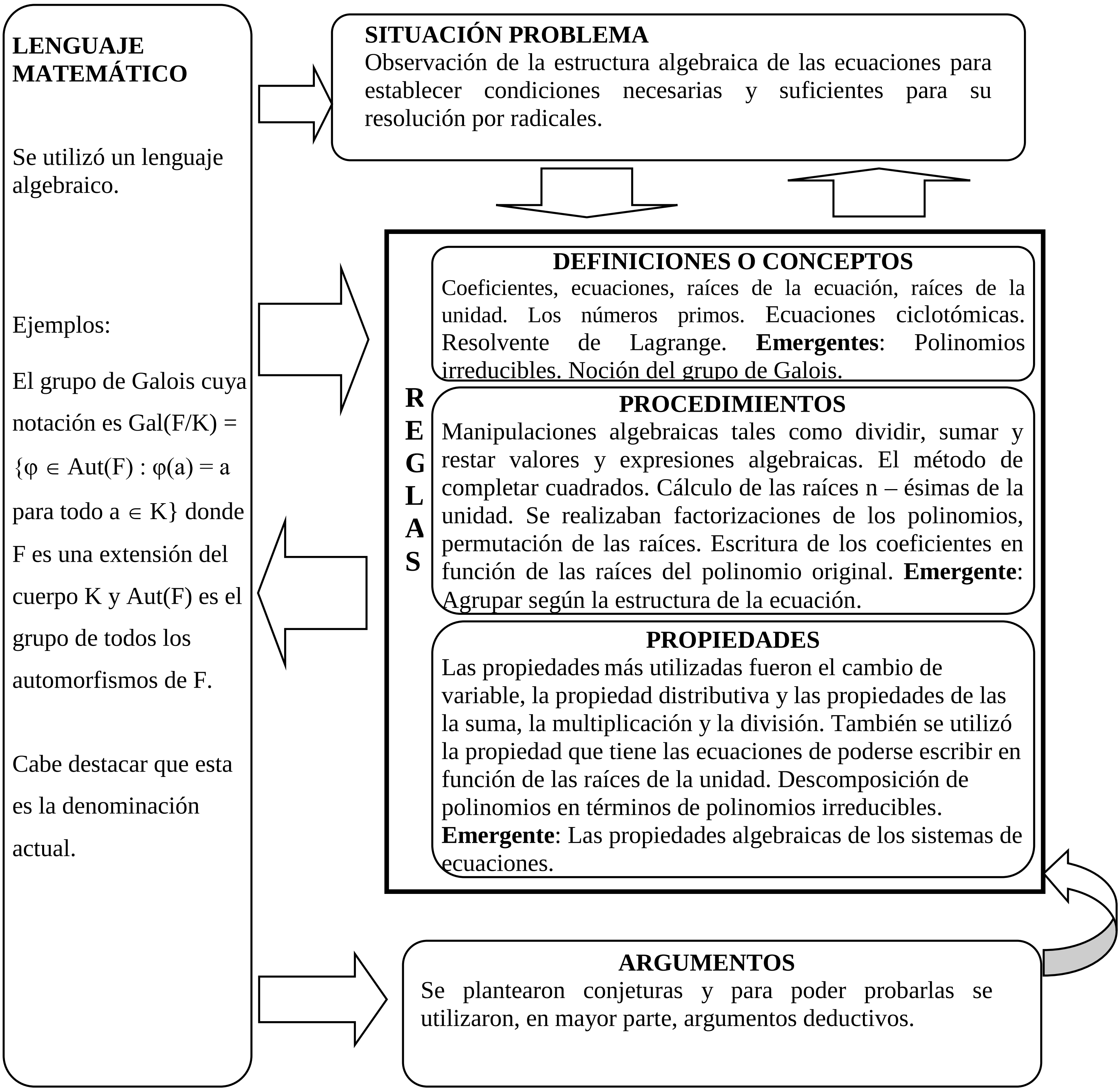


Figura 8: Configuración epistémica de la cuarta etapa de la Teoría de Ecuaciones.

En esta etapa se produce otro gran "quiebre" ya que el problema a resolver era encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pudiera ser resuelta por radicales, pues ya Ruffini había demostrado que podía ser posible que una ecuación no tuviera solución. En este sentido Piaget y García (1986) afirman "*Ruffini retoma las ideas de Lagrange para intentar demostrar la imposibilidad de encontrar una solución por radicales de una ecuación de quinto grado. Aun cuando su demostración queda incompleta, el marco conceptual en el interior del cual trabaja Ruffini lo sitúa en un lugar excepcional dentro de este período ínter-operacional del álgebra, muy próximo ya a la etapa siguiente que Galois tendrá el mérito de inaugurar*". Para lograr este objetivo se necesitó hacer explícita la estructura algebraica de las ecuaciones.

Sobre la base de este trabajo finalmente lograron establecer las condiciones antes buscadas. En esta etapa Galois, tomando el trabajo de sus antecesores, logró conjugar en una sola pregunta los problemas abordados por los matemáticos que lo antecedieron, ya que aunque la génesis de esta teoría viene dada por la búsqueda de soluciones a las ecuaciones, Abel y Ruffini, como lo anticipara en el párrafo anterior, fueron los que demostraron que no toda ecuación es soluble por radicales, lo que hizo que surgiera entonces un nuevo interrogante **¿Cuáles serán las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pueda ser resuelta por radicales?**

Las acciones que realizaron los matemáticos de la época, entre los cuales se destaca el trabajo de Galois, para poder encontrar las condiciones necesarias y suficientes que determinen si una ecuación es o no soluble por radicales fueron variadas, pero el agrupar de las ecuaciones según su estructura fue una acción clave para cumplir con sus objetivos. La idea básica de Galois fue asociar a cualquier ecuación un grupo de permutaciones de las raíces. Este grupo consiste en todas las permutaciones que preservan las relaciones entre las raíces; muestra así hasta qué punto las raíces son intercambiables (claramente en este momento histórico el significado de las permutaciones se ha transformado, es necesaria una definición funcional de las mismas para capturar esta fundamental relación invariante). La visión brillante de Galois era que este grupo proporciona una "medida eficaz" de la dificultad de una ecuación. En particular, la solubilidad de la ecuación por radicales puede traducirse en términos del grupo asociado. Esto se logra describiendo el comportamiento del grupo bajo extensión del campo base. Galois demuestra que las ecuaciones irreducibles de grado primo son solubles por radicales si y sólo si alguna de las raíces puede expresarse racionalmente en términos de dos de ellas.

El lenguaje utilizado fue puramente algebraico, la fortaleza de este lenguaje es lo que les permitió poder avanzar en sus investigaciones. Entendemos por lenguaje algebraico a aquel **que permite explorar la estructura del objeto o del problema** y de este modo obtener su solución. Tal como lo expresa Godino y Font (2003) "*La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución*."

Un claro ejemplo de la potencia lenguaje algebraico, como el que operativiza relaciones de dependencia entre expresión y contenido como las de tipo componencial, o sea cuando dos o más objetos componen un sistema que hace emerger otro nuevo objeto) es cuando se expresa al grupo de Galois con la siguiente notación: $Gal(F/K) = \{\varphi \in Aut(F) : \varphi(a) = a \text{ para todo } a \in K\}$ donde F es una extensión del cuerpo K y Aut(F) es el grupo de todos los automorfismos de F. En este caso la construcción del grupo de Galios (el nuevo objeto emergente) permitió analizar las características de sus elementos para más tarde poder establecer las condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio sea soluble por radicales.

En esta etapa se introdujo además, el concepto de polinomio irreducible (a partir de una analogía con el comportamiento de los números primos en el conjunto de los números enteros), dicho concepto fue construido para poder observar las regularidades en la estructura de los polinomios y luego poder clasificarlos y agruparlos. Para poder lograr dicha clasificación fue necesaria la descomposición de polinomios en producto de polinomios irreducibles. Los argumentos utilizados en esta etapa para determinar las condiciones necesarias y suficientes de la solubilidad por radicales de los polinomios fueron fundamentalmente deductivos. Además cabe destacar que también en esta época se generaron muchas conjeturas que luego fueron demostradas o refutadas. El pensamiento conjetural está presente a lo largo de toda construcción de una teoría matemática. Este cambio de tipo de argumento refleja justamente un cambio de pensamiento y de validación sobre lo que “se dice” y “se hace”.

3.1.5 Configuración Epistémica Global de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

Teniendo en cuenta las configuraciones epistémicas de cada etapa en la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas se elaboró una “macro” configuración epistémica que permite tener tanto una visión global de la Teoría como una visión parcial sobre las transformaciones de cada elemento de significado (Figura 9). Dicha configuración puede leerse, como ya se anticipara, tanto con una mirada circular, que correspondería a una visión integral de cada configuración epistémica en un momento y espacio dado, como parcialmente, a lo largo de cada “sector triangular”, que sintetiza la evolución/transformación/cambio, a través de las distintas etapas, de cada elemento de significado.

A continuación analizaremos la evolución en cada uno de los elementos de significado, comenzaremos con las situaciones/problemas/cuestionamientos que estuvieron involucrados en el desarrollo de dicha teoría, pues es de nuestro interés destacar en este trabajo, que el progreso de una teoría está regulado esencialmente por el cambio en este elemento de significado y es ese cambio el que actuó como el referente para poder pensar la evolución de esta teoría en cuatro etapas.

Si miramos el triángulo naranja, que corresponde a las distintas situaciones, podemos ver la evolución de las mismas a lo largo de las cuatro etapas (mirada "vertical"). En un comienzo se estudiaron ecuaciones particulares de segundo, tercer y cuarto grado tratando de encontrar soluciones particulares y luego tratando de encontrar un método general para hallarlas. La primera pregunta que plantea un interrogante general fue **¿Cómo se pueden expresar las soluciones de una ecuación en término de sus coeficientes?**

Más tarde se dedicaron al estudio de métodos existentes a fin de predecir si una ecuación era resoluble por radicales, enfocando el problema en buscar la razón de su eficiencia. Un cambio de perspectiva fundamental fue plantearse la posibilidad de existencia de un método general para encontrar la solución de ecuaciones de grado mayor o igual a 5. Para avanzar en estos sentidos se infiere que se plantearon preguntas tales como **¿Qué información se puede obtener si se escriben los coeficientes en función de las variables? ¿Serán solubles por radicales las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco?**

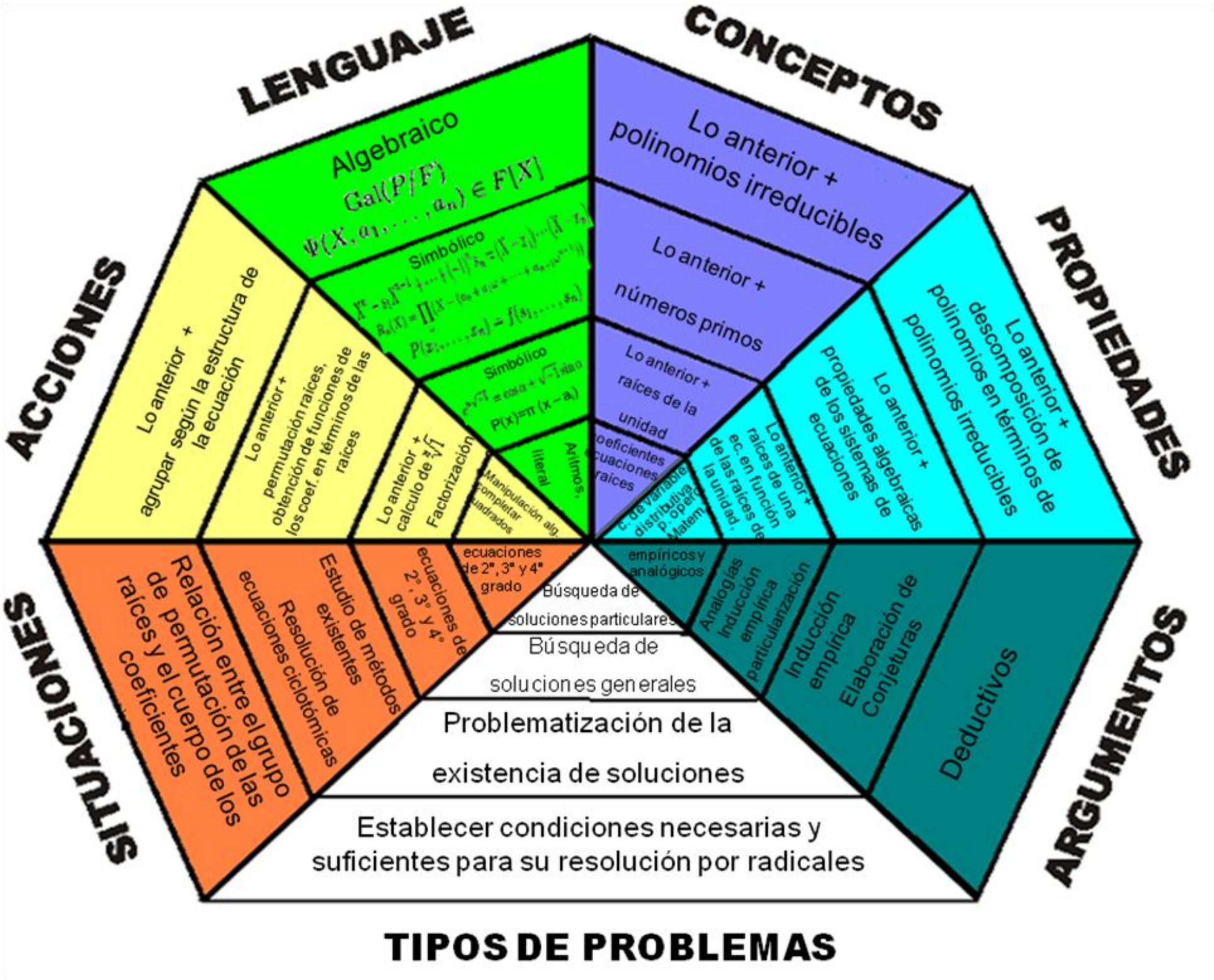


Figura 9: “Macro” configuración epistémica de la Teoría de Ecuaciones, basada en una representación del holo-significado de función (Godino, J; Wilhelmi, M; Bencomo, D (2006).

También pudieron encontrar la resolución de un tipo de ecuaciones particulares: las ecuaciones ciclotómicas al tratar de responder a una cuestión geométrica **¿Cuáles son los polígonos regulares construibles con regla y compás?** Ya en la etapa de culminación de la teoría y de mayor grado de algebrización, teniendo claro que no siempre es posible escribir las raíces de una ecuación en función de sus coeficientes usando suma, resta, multiplicación y raíz, se logró identificar ciertos invariantes en las ecuaciones, y se halló una demostración de condiciones necesarias y suficientes para la resolución de una ecuación por radicales. Estos resultados estuvieron regulados por los siguientes nuevos interrogantes: **¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación sea resoluble por radicales? ¿Cuáles son las relaciones que permanecen estables?** Y por ende se encontraron condiciones necesarias y suficientes para la resolución de los polígonos regulares con regla y compás. Esta relación entre dos contextos (el algebraico y el geométrico) que confluyen en la construcción de una teoría que permite resolver problemas tan dispares como las condiciones para la resolución por radicales de una ecuación de grado mayor que 5 y las condiciones para la construcción de polígonos regulares con regla y compás, abre una línea de indagación muy rica en relaciones matemáticas que plantearían, tal vez, nuevos caminos para definir las estructuras algebraicas, pero que no van a ser indagadas en este trabajo, dado el recorte epistémico e institucional ya señalado en la introducción de esta tesis.

Al observar el triángulo amarillo, correspondiente a las acciones, podemos ver que se comienza con acciones básicas como manipulaciones algebraicas que se manifiestan fundamentalmente a través de adiciones, productos y cálculo de raíces de expresiones algebraicas. Conforme al avance de la teoría no se dejan de lado acciones utilizadas anteriormente sino que se las complementa con acciones nuevas. Estas incorporaciones están vinculadas al tipo de problema que se estaba tratando de resolver.

Al querer encontrar un método general para la resolución de ecuaciones era necesario poder escribir las raíces de una ecuación siguiendo alguna regularidad, es por eso que se utiliza **el cálculo de las raíces de la unidad**.

Cuando los matemáticos problematizaron la existencia de soluciones para toda ecuación independientemente de su grado tuvieron que accionar de modo que el trabajo que realizaran les brindara herramientas para poder dar una respuesta al problema. Es por este motivo que fue necesario cambiar la perspectiva con la que se estaba trabajando y estudiar las relaciones entre los coeficientes y las raíces de un polinomio, para esto Lagrange construyó sistemas de ecuaciones donde cada coeficiente era escrito en función de las raíces.

Tomando todo el trabajo realizado por los matemáticos que lo precedieron, Galois logró agrupar las ecuaciones no por su grado como se había clasificado en la institución matemática hasta el momento, sino por su simetría, es decir a cada ecuación le asoció **el grupo de permutaciones** que dejan invariante cualquier ecuación racional formada por una combinación de las raíces de la ecuación original. Sin proponérselo lo que estaba haciendo Galois era agrupar las ecuaciones según su estructura, esto le permitió dar respuesta al problema planteado en la etapa final, o sea encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación sea soluble por radicales.

En el caso del lenguaje (triángulo verde) también se observan cambios de funcionamiento y procesos de algebrización, **cada cambio de pregunta en las distintas etapas se ve acompañado por un cambio en el tipo de lenguaje utilizado o en la algebrización del mismo**. En cada uno de los momentos por los que atravesó esta teoría el lenguaje utilizado fue muy importante para dar respuesta a los problemas planteados. En algunos casos como en la primera etapa sirvió para comunicar los métodos particulares (lenguaje literal) y para plasmar las fórmulas que resolvían las ecuaciones (*arithmos*). En otros casos el lenguaje fue artífice necesario para poder resolver el problema planteado, esto se dio sobre todo en la última etapa pero Lagrange también utilizó la fortaleza del lenguaje simbólico para lograr conjeturar acerca de la inexistencia de soluciones por radicales para ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. En otras palabras, el lenguaje se uso no sólo para comunicar sino para transformar objetos y construir nuevos objetos, o sea en sus tres funciones: representar, transformar y componer. Tal como se adelantara en párrafos anteriores, la gran diferencia entre el lenguaje simbólico utilizado en la época anterior a Lagrange y el utilizado por él, es el tipo de relaciones que encierran. En el caso de Lagrange el lenguaje se utilizó fuertemente para **relacionar funciones,** destacando la igualdad entre funciones que en apariencia eran distintas, por ejemplo reescribiendo los polinomios de raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como otro polinomio cuyas raíces son $s_1, s_2, \ldots, s_n$, donde los s_i con $(i=1,\ldots,n)$ son polinomios simétricos distintos, por ejemplo

Los conceptos utilizados también se fueron incrementando o transformando su significado a medida que se avanzaba en la construcción de la teoría, esto da cuenta de que en cada etapa la tarea se iba complejizando cada vez más. En un primer momento se manejaban solamente los conceptos de **ecuación, coeficientes y raíces**, con un significado fundamentalmente geométrico (ver la descripción presentada para el heptágono central), en la segunda etapa se agregó el concepto de **raíces de la unidad**, en la tercera etapa además se tomaron en cuenta los **números primos** (incorporados para contrastar hipótesis o para tener una primera aproximación a un resultado que después se generalizaría utilizando una versión del Teorema Fundamental del Aritmética) y en la culminación de la teoría se añadió el concepto de **polinomio irreducible** como un claro representante de objeto algebraico, ellos juegan un papel equivalente en el anillo de polinomios al que juegan los números primos en el anillo de los números enteros.

Las propiedades involucradas en cada etapa están directamente relacionadas con los conceptos que se manejaban y con los problemas planteados. En primera instancia cuando se trataba de encontrar soluciones particulares alcanzaba con utilizar el cambio de variable, la propiedad distributiva y las propiedades de las operaciones matemáticas (suma, producto, potencia y radicación). Cuando se intentó generalizar los métodos anteriores fue necesario además escribir las raíces de una ecuación en función de las raíces de la unidad y factorizar los polinomios. Para plantear la conjetura de que no toda ecuación era soluble por radicales se tuvieron que tener en cuenta las propiedades algebraicas de los sistemas de ecuaciones (escribir sistema de ecuaciones **donde las variables independientes fueran las que antes eran las variables dependientes y viceversa**). Para poder clasificar las ecuaciones teniendo en cuenta su estructura fue necesaria la descomposición de polinomios en términos de polinomios irreducibles para luego poder establecer las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación sea resuelta por radicales.

En el tipo de argumentos utilizados en cada etapa se puede visualizar con claridad el real trabajo del matemático, es decir se logra observar que la ciencia matemática no avanza exclusivamente por deducciones. En un primer momento se usaron argumentos empíricos y analógicos, luego para corroborar que los métodos "generales" daban resultado se los particularizó y además se argumentó inductivamente. Cuando la línea de trabajo que tenía en la época no arrojaba los resultados esperados, Lagrange analizó cuidadosamente todo lo construido hasta el momento y **conjeturó** acerca de la inexistencia de soluciones por radicales para toda ecuación de grado mayor o igual a 5. Finalmente Galois en un comienzo también planteó conjeturas en pos de poder obtener un Teorema de caracterización, fin último del trabajo matemático, logró demostrarlas mediante argumentos deductivos.

3.2 A modo de conclusión

El holo-significado de cualquier objeto matemático (noción, teorema, razonamiento, teoría, etc) representa entonces un marco referencial de los significados institucionales, en este caso de la institución matemática. Para elaborar un proyecto de enseñanza debería tenerse en cuenta dicho marco como parte de la referencia institucional, pues es en esta institución de producción donde se visibiliza cuáles fueron las decisiones tomadas por los matemáticos que permitieron hacer evolucionar el problema y no sólo las nociones, las proposiciones y los teoremas que se pretenden enseñar, ya que en **este estudio se demuestra que el logro de cualquier resultado o la definición de cualquier noción proviene de un proceso de pensamiento y acción matemática mucho más compleja que el planteo deductivo sobre distintas proposiciones.**

Con este estudio, además, queda al descubierto que para avanzar en el nivel de algebrización del problema planteado es determinante, en un primer momento, superar el significado de *arithmo p*or el del símbolo, luego significar los elementos de coeficiente y variable para más tarde poner uno en función del otro. En este sentido Godino et al (2015) plantea un proceso de seis niveles para lograr la algebrización de las matemáticas escolares (los primeros tres en el nivel primario y los últimos tres en el nivel secundario): el proto-algebraico incipiente, el proto-algebraico intermedio, el algebraico consolidado, el uso de parámetros, la manipulación de parámetros y las tareas estructurales. Es pertinente rescatar y citar en esta tesis este trabajo de Godino para no olvidar que estos estudios epistemológicos tienen "puesta su mira" en la mejora de la enseñanza.

CAPÍTULO 4

Métodos analizados por Lagrange

En este capítulo se detallarán algunos de los métodos de resolución por radicales para ecuaciones de grado menor a cinco analizados por Lagrange en el inicio de sus investigaciones respecto de este tema. Es importante disponer de dichos métodos para comprender mejor el trabajo de Lagrange pues estudiándolos con detenimiento se pueden hallar regularidades y posibles indicios de que no es posible la resolución por radicales de toda ecuación de grado mayor o igual a cinco.

El problema, en un principio, estaba planteado en un contexto aritmético, lo cual implicó que durante mucho tiempo se tratara de dar respuesta a dicho problema utilizando métodos que involucraran el estudio de las propiedades de los números en relación a las operaciones, pues los matemáticos de aquella época estaban buscando establecer relaciones entre este tipo de propiedades (asociatividad de la suma y el producto, conmutatividad de la suma y el producto, existencia del neutro aditivo y del neutro multiplicativo, existencia del inverso aditivo y del inverso multiplicativo, distributividad del producto con respecto a la suma, distributividad de la potencia y la raíz respecto al producto)

Como se observó en el capítulo anterior, los primeros métodos que surgieron para resolver ecuaciones por radicales fueron desarrollados de forma empírica y tomando polinomios particulares, más tarde, los matemáticos de la época (1500-1770), trataron de generalizar dichos métodos.

4.1 Cálculo de las raíces de un polinomio de grado menor a cinco

El teorema fundamental del álgebra garantiza que todo polinomio de la forma $P(x) = a_n x^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$ donde sus coeficientes son reales o complejos, tiene n raíces en C. Sin embargo la demostración de este teorema no proporciona método alguno para el cálculo explícito de las raíces. Gauss (1799, citado por Tignol J P, 2002) realiza una primera demostración de este teorema. Cabe destacar que este resultado tan importante (pero no constructivo) fundamentó aún más la necesidad de buscar métodos para la resolución de ecuaciones.

La resolución de una **ecuación de primer grado**, $ax + b$, no reviste mayor dificultad, es claro que su única raíz es $x = - b/a$. Y que por lo tanto se escribe en función de los coeficientes relacionados por operaciones racionales.

La **ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$, tiene las mismas raíces que la que se obtiene dividiendo los coeficientes por a, es decir $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Con la idea de completar cuadrados para que en la expresión no aparezca la incógnita elevada a distintas potencias se suma y resta $\frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

y de aquí se tiene que

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) = 0$$

Luego

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = -(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})$$

Aplicando la raíz cuadrada a ambos miembros obtenemos

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

Al despejar x se tiene

$$x = -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

O sea

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

De esta manera se consiguió una fórmula para calcular las raíces de la ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes relacionados mediante operaciones racionales y aplicando la raíz cuadrada.

Para obtener las raíces de una **ecuación de tercer grado**, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con $a \neq 0$, se divide por a (análogamente a la anterior resolución) con lo cual se obtiene

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = 0$$

Luego se reemplaza x por $(y - \frac{b}{3a})$ con el objetivo de eliminar el término de segundo grado, entonces

$$(y-\frac{b}{3a})^3+\frac{b}{a}(y-\frac{b}{3a})^2+\frac{c}{a}(y-\frac{b}{3a})+\frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}y^2 - \frac{2b^2}{3a^2}y + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{c}{a}y - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + y^2(-\frac{b}{a} + \frac{b}{a}) + y(\frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}) + (-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}) = 0$$

$$y^3 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2})y + (\frac{d}{a} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}) = 0$$

Si p = $(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2})$ y q = $(\frac{d}{a} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3})$, se tiene $y^3 + py + q = 0$

Las raíces de esta última ecuación difieren de las de la primera en $\frac{b}{3a}$, por lo tanto alcanza con estudiar las ecuaciones *cúbicas sin término de segundo grado* (aquí se produce un cambio de problema pues el método propuesto resuelve ecuaciones cúbicas sin término de grado 2). Si se supone que t es una raíz de $y^3 + py + q = 0$ y se considera la siguiente ecuación auxiliar: $w^2 - tw - \frac{p}{3} = 0$. Por lo visto anteriormente las raíces de la misma serán:

$$u = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4\frac{p}{3}}}{2} \text{ y } v = \frac{t - \sqrt{t^2 + 4\frac{p}{3}}}{2}$$

de donde u + v = t y u.v = - $\frac{p}{3}$.

Si en la ecuación $y^3 + py + q = 0$ se reemplaza y por t = u +v se obtiene

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

como u.v = - $\frac{p}{3}$, se deduce que 3uv + p = 0, luego resulta que

$$u^3 + v^3 = -q \quad y \quad u^3 . v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

por lo que u^3 y v^3 son raíces de z2 + qz - $\frac{p^3}{27}$ = 0, resolviendo esta ecuación se tiene

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad y \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

entonces

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad y \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

luego $t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Teniendo en cuenta que la raíz cúbica de un número complejo toma tres valores, hay tres posibilidades para u (u_1, $u_2 = u_1.\varepsilon$, $u_3 = u_1.\varepsilon^2$, donde ε es una raíz cúbica primitiva de la unidad por lo que $\varepsilon^3 = 1$) y tres posibilidades para v (v_1, $v_2 = v_1.\varepsilon$, $v_3 = v_1.\varepsilon^2$), por lo que aparentemente habría nueve posibilidades para t, pero como se tiene que cumplir u + v = t y u.v = - $\frac{p}{3}$ simultáneamente, t sólo puede tomar 3 valores distintos.

$$t_1 = u_1 + v_1 \quad .$$

$$t_2 = u_1.\varepsilon + v_1.\varepsilon^2$$

$$t_3 = u_1.\varepsilon^2 + v_1.\varepsilon$$

Para calcular las raíces de una **ecuación de cuarto grado**, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, con $a \neq 0$ se divide por a. Luego para eliminar el término de tercer grado se reemplaza x por $y - \frac{b}{4a}$. La ecuación resultante es entonces

$$(y-\frac{b}{4a})^4+\frac{b}{a}(y-\frac{b}{4a})^3+\frac{c}{a}(y-\frac{b}{4a})^2+\frac{d}{a}(y-\frac{b}{4a})+\frac{e}{a}=0$$

$$y^4-\frac{b}{a}y^3+\frac{3b^2}{8a^2}y^2-\frac{b^3}{16a^3}y+\frac{b^4}{256a^4}+\frac{b}{a}y^3-\frac{3b^2}{4a^2}y^2+\frac{3b^3}{16a^3}y-\frac{b^4}{64a^4}+\frac{c}{a}y^2-\frac{bc}{2a^2}y+\frac{b^2c}{16a^3}+\frac{d}{a}y-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a}=0$$

$$y^4+(\frac{b}{a}-\frac{b}{a})y^3+(\frac{3b^2}{8a^2}-\frac{3b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})y^2+(\frac{3b^3}{16a^3}-\frac{b^3}{16a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a})y+(\frac{b^4}{256a^4}-\frac{b^4}{64a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a})=0$$

$$y^4+(-\frac{3b^2}{8a^2}+\frac{c}{a})y^2+(\frac{2b^3}{16a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a})y+(-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a})=0$$

Si $p=(-\frac{3b^2}{8a^2}+\frac{c}{a})$, $q=(\frac{2b^3}{16a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a})$ y $r=(-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a})$ se tiene la ecuación $y^4+py^2+qy+r=0$, cuyas raíces difieren de las de la ecuación dada en $\frac{b}{4a}$. Basta entonces resolver las ecuaciones cuárticas de este último tipo. Para ello se suman y se restan las expresiones ey^2 y $\frac{e^2}{4}$. Así la ecuación anterior tiene las mismas raíces que

$$y^4+ey^2+\frac{e^2}{4}-ey^2-\frac{e^2}{4}+py^2+qy+r=0$$

O sea

$$(y^2+\frac{e}{2})^2-[(e-p)y^2-qy+(\frac{e^2}{4}-r)]=0$$

El primer término es un cuadrado perfecto y el segundo lo será siempre que elijamos e de modo que $q^2 - 4(e - p)(\frac{e^2}{4} - r) = 0$. Esta última expresión es una ecuación cúbica en la incógnita e. Resolviendo esta ecuación se obtienen tres raíces que, por lo visto anteriormente se pueden expresar mediante operaciones racionales y radicales en función de sus coeficientes, que en este caso son los mismos que los de la ecuación $y^4+py^2+qy+r=0$.

Si llamamos t a una de dichas raíces, la ecuación

$$(y^2+\frac{e}{2})^2-[(e-p)y^2-qy+(\frac{e^2}{4}-r)]=0$$

queda $(y^2+\frac{t}{2})^2-(t-p)(y-t)^2=0$, que como es una diferencia de cuadrados puede escribirse

$$[y^2+\frac{t}{2}+\sqrt{t-p}(y-t)].[y^2+\frac{t}{2}-\sqrt{t-p}(y-t)]=0$$

Por lo tanto las raíces de $(y^2+\frac{t}{2})^2-(t-p)(y-t)^2=0$ se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$y^2+\frac{t}{2}+\sqrt{t-p}(y-t)=0$$
$$y^2+\frac{t}{2}-\sqrt{t-p}(y-t)=0$$

Las raíces de estas dos ecuaciones, son en consecuencia de todo la anterior, las raíces de $y^4+py^2+qy+r=0$.

Por último para obtener las raíces de $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, a las raíces de la ecuación $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ se le resta $\frac{b}{4a}$.

La búsqueda de una fórmula general que permitiera hallar las raíces de los polinomios, cualquiera fuera su grado, fue impulsada por Bezout en 1765. Dicho método es de particular interés porque explicita el uso de raíces de la unidad (Euler y Tschirnhaus propusieron métodos similares).

El método consistía en calcular las raíces n-ésimas de la unidad y construir el polinomio $R_n(X) = \prod_{\omega}(X - (a_0 + a_1\omega + ...+ a_{n-1}\omega^{n-1}))$ donde ω representa a las raíces n-ésimas de la unidad.

Teniendo en cuenta que los valores $X = a_0 + a_1\omega + ...+ a_{n-1}\omega^{n-1}$ correspondientes a cada raíz n-ésimas de la unidad ω son todos distintos, las raíces de $R_n(X) = 0$ son conocidas.

Ahora, para resolver una ecuación mónica arbitraria P(X) = 0 de grado n, se deben determinar los parámetros $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ de tal modo que el polinomio $R_n(X)$ sea idéntico a P(X). Luego las raíces de P(X) = 0 son de la forma

$$X = a_0 + a_1\omega + ...+ a_{n-1}\omega^{n-1}$$

El problema es que no conocían un método para encontrar los valores adecuados para $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, de manera tal que R_n sea idéntico a P. Sin embargo si habían encontrado la forma de hallar dichos valores para n = 2, 3 y 4. Esto los impulsaba a buscar un método general para resolver ecuaciones de cualquier grado.

4.2 A modo de síntesis

Se pueden observar ciertos invariantes en la resolución de las ecuaciones detalladas anteriormente, tanto en los polinomios de segundo, tercer y cuarto grado lo primero que se hace es obtener un polinomio mónico con las mismas raíces que el original, para esto se divide a todo el polinomio por su coeficiente principal.

En las ecuaciones de tercer y cuarto grado se realiza un cambio de variable a fin de poder reescribir una ecuación sin el término de segundo grado en el primer caso, y sin el término de tercer grado en el segundo caso. Luego, para hallar las raíces, se utilizan ecuaciones auxiliares de grado inferior a la dada y se utilizan los métodos encontrados con anterioridad para la resolución de las mismas.

En todos los casos lo que se busca es encontrar una ecuación equivalente a la ecuación inicial donde sea más fácil encontrar sus raíces. Lo que los lleva a redifinir el problema en una ecuación de grado menor que la que estaban resolviendo. Cabe destacar que siempre se focalizaba en el grado de la ecuación (propiedad de un número) y en la relación del grado con las raíces (nuevamente propiedad de un número y relaciones entre este tipo de propiedades.)

En el próximo capítulo se detallará el análisis, desarrollado por Lagrange, de estos métodos.

CAPÍTULO 5

Análisis epistémico del aporte de Lagrange a la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

En este capítulo se analizará el trabajo de Lagrange, que sin duda fue clave para el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas y para nuestro objetivo didáctico se transforma en el período más importante a indagar. Dicho trabajo puede subdividirse en tres partes: el estudio de los métodos existentes, el desarrollo de nuevos constructos matemáticos y la elaboración de un método que pretendió ser general.

Es muy interesante tener presente cómo el avance de una teoría está relacionado con el análisis y reflexión sobre los resultados alcanzados con anterioridad. Este es un claro ejemplo de "cómo se hace matemática" en la institución científica.

Por otra parte también se puede observar cómo el intento por dar respuesta a un problema es disparador de otros problemas puramente matemáticos, en este caso fue el **estudio exhaustivo del grupo de permutaciones de las raíces de una ecuación**.

Por último, se pone al descubierto cómo el contexto científico – matemático de la época condiciona el trabajo de los científicos ya que a pesar de contar Lagrange con algunos elementos que lo hicieron dudar acerca de la existencia de un método para resolver ecuaciones de grado mayor o igual a cinco, él intentó durante toda su época de producción encontrar un método general. En otras palabras, no pudo concretizar un "quiebre" epistemológico que le permitiera tornar a su conjetura en un enunciado "creíble", a pesar de haber avanzado en el modo de argumentar, elaborar la conjetura estratégica para la construcción de una nueva teoría y crear nuevas técnicas. Con respecto a las características del presente estudio, esto resulta iluminador para nuestro trabajo de tesis aportando un matiz al significado institucional de conjetura muy interesante.

5.1 Estudio de los métodos existentes para la resolución de ecuaciones

Hasta la segunda mitad del siglo XVIII, la teoría algebraica de ecuaciones había avanzado bastante. En esta época, como ya se adelantara en el capítulo anterior, se contaban con varios métodos de resolución de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, pero no se había podido elaborar un método para resolver por radicales ecuaciones de grado igual o mayor a cinco.

Esta imposibilidad de encontrar un método que resolviera una ecuación independientemente de su grado llamó la atención de Lagrange por lo que se abocó al estudio de los métodos existentes. Tal como él mismo expresa su objetivo era:

> "*… examinar varios métodos encontrados hasta la fecha para la solución algebraica de ecuaciones, para reducirlos a los principios generales, y para ver por qué estos métodos son exitosos en ecuaciones de tercer y cuarto grado y no lo son en grados mayores.*" (Citado por Tignol, 2002)

Para estudiar la articulación entre los distintos elementos de significado de esta práctica matemática se realizó la configuración epistémica (figura 10). A través de ella se puede observar cómo se determinan y porqué funcionan los métodos existentes para la resolución de ecuaciones, lo cual supone un profundo trabajo de búsqueda y reflexión por parte de Lagrange.

LENGUAJE MATEMÁTICO

Simbólico: Incógnitas, números reales, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz. Igualdad, ecuación, sistema de ecuaciones, notación polinomial, etc.

Ejemplos:

$$X^3 + pX + q = 0$$

$$X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

$$R_n(X) = \prod_\omega (X - \mathrm{Y}(w))$$

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

$$\Phi(f)=0$$

$$b_1 = -\frac{x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}$$

$$a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i\right)$$

SITUACIÓN PROBLEMA

Determinar cómo y por qué funcionan los métodos existentes para la resolución de ecuaciones.

REGLAS

DEFINICIONES O CONCEPTOS

Previos: ecuación, raíz, coeficientes, polinomios, sistema de ecuaciones, raíces de la unidad, polinomios simétricos elementales, división de polinomios.

Emergentes: resolvente de Lagrange

PROCEDIMIENTOS

Previos: métodos de resolución de ecuaciones de 2°, 3° y 4° grado (uso de ecuación auxiliar), manipulaciones algebraicas (cambio de variable).

Emergentes: determinar las raíces de las ecuaciones auxiliares como función de las raíces de la ecuación propuesta y las raíces de la unidad.

PROPOSICIONES

Previas: Teorema fundamental del álgebra, teorema fundamental de fracciones simétricas.

Emergentes: La ecuación auxiliar utilizada para resolver una ecuación cúbica produce a lo sumo 3 raíces distintas.

Las raíces de la ecuación auxiliar (para resolver una cúbica) son obtenidas a partir de la expresión $\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$ donde x_i son raíces de la ecuación original y ω es una raíz de la unidad.

Si alguna expresión de x_1, x_2, x_3 es la raíz de la ecuación reducida, cualquier otra expresión obtenida a partir de ésta por permutaciones de x_1, x_2, x_3 también será una raíz.

Sea f una fracción racional con n indeterminadas $x_1, \dots, x_n$. Si f toma m diferentes valores cuando las indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ son permutadas de todas las formas posibles, entonces f es una raíz de la ecuación mónica $\Theta = 0$ de grado m, cuyos coeficientes son simétricos en $x_1, \dots, x_n$. Si f es la raíz de otra ecuación $\Phi = 0$ con coeficientes simétricos en $x_1, \dots, x_n$, entonces gr$\Phi \geq m$

a_k (coeficiente de la ecuación auxiliar del método de Bezout) es raíz de una ecuación de grado n! que ${a_k}^n$ toma sólo (n-1)! valores. Además, si n es primo, ${a_k}^n$ es una raíz de una ecuación de grado n-1 donde sus coeficientes pueden ser determinados por las soluciones de una ecuación simple de grado (n-2)!.

ARGUMENTOS

Utilizados: Demostraciones deductivas, argumentos empíricos

Emergente: Argumentos basados en "sospechas".

Figura 10: Configuración epistémica del primer sistema de prácticas de Lagrange.

Lagrange logra caracterizar las raíces de las ecuaciones auxiliares utilizadas para dar solución a las ecuaciones originales, poniendo al descubierto la expresión a partir de la cual son obtenidas y la estructura de dichas ecuaciones. Es decir pudo demostrar que los coeficientes de la ecuación son polinomios simétricos en relación a las raíces de la ecuación original y además concluyó que el grado de la ecuación auxiliar está directamente relacionado con la cantidad de valores que toma la expresión que las origina al permutarse las raíces de la ecuación original.

Como puede observarse en este primer sistema de práctica, Lagrange realiza un estudio estructural de las ecuaciones algebraicas. Esto es justamente así pues, estudió relaciones entre las propiedades de los elementos, obteniendo así propiedades de propiedades.

Godino *et al.* (2015) distingue en el nivel 5 de algebrización prácticas ligadas a operaciones comprensivas con parámetros y el establecimiento de relaciones entre ellos. Por otra parte prácticas relacionadas con algunas estructuras algebraicas tales como los grupos pueden considerarse dentro del nivel 6 de algebrización. En relación a esta clasificación podría decirse que las relaciones establecidas por Lagrange y los nuevos objetos que intervienen en sus prácticas perteneces a un nivel intermedio entre el 5 y el 6.

Este trabajo sentó las bases para el surgimiento de una nueva rama de estudio dentro del álgebra, las estructuras algebraicas.

El elemento de significado emergente más relevante de esta etapa, dada las características de este estudio, fue la conjetura que formuló en términos de un interrogante una vez analizado el método de Bezout:

> "*Como se desprende del análisis que acabamos de dar de los principales métodos para hallar las soluciones de ecuaciones, todos estos métodos se*

reducen al mismo principio general, a saber: 1º, que la ecuación o ecuaciones dadas (las que usualmente se denominan ecuaciones reducidas) resulten ser de un grado menor que el grado de la propuesta o por lo menos descomponible en otras ecuaciones de grado menor; 2º, que los valores de las raíces buscadas pueden deducirse fácilmente de ellas. ***El arte de resolver ecuaciones consiste en descubrir las funciones de las raíces que tienen las propiedades antes mencionadas****, pero ¿es siempre posible encontrar tales funciones, para las ecuaciones de cualquier grado, es decir, para cualquier número de raíces? Esta es una pregunta que parece muy difícil de responder en general."* (Lagrange 1770, citado por Tignol, 2002) (Las negritas son decisión de la autora de esta tesis).

Esta conjetura está vinculada con algunos resultados que obtuvo al buscar las razones del funcionamiento del mencionado método de Bezout que, como se describiera en el capitulo anterior, pretendió formular un método general. Lagrange observó que las raíces de la ecuación propuesta de grado n son de la forma $a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}$, donde ω es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1. Si ζ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, las n raíces de la unidad son: 1, $\zeta,\quad \zeta^2, \dots ,\quad \zeta^{n-1}$.

Sustituyendo sucesivamente 1, $\zeta,\quad \zeta^2, \dots ,\quad \zeta^{n-1}$ por ω se obtiene la siguiente expresión de las raíces:

$$x_1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

$$x_2 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$$

$$x_3 = a_0 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta^4 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{2(n-1)}$$

…

$$x_n = a_0 + a_1\zeta^{n-1} + a_2\zeta^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)(n-1)}$$

Luego, en general:

$$x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \zeta^{(i-1).j} \qquad\qquad i = 1, \dots, n \qquad (5)$$

Este sistema es fácil de resolver para a_0, a_1, a_2, a_{n-1} : para obtener los valores de a_k , es suficiente multiplicar cada ecuación por una potencia adecuada de ζ de modo que el coeficiente de a_k sea 1, y sumando las ecuaciones resultantes se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta^{(j-k).(i-1)} \right) \qquad (6)$$

Si $j \neq k$, entonces ζ^{j-k} es una de las raíces n-ésimas de la unidad distinta de 1. Por lo tanto ζ^{j-k} es una raíz de

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

Luego,

$$\sum_{i=0}^{n} \zeta^{(j-k).(i-1)} = 0$$

Luego, en el lado derecho de (6), todos los términos son cero salvo el correspondiente al índice $j = k$, el cual es na_k . Así la ecuación (6) queda:

$$a_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i \right) \qquad (7)$$

Es fácil ver que si x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_n son consideradas indeterminadas independientes, todos los valores obtenidos para a_k de todas permutaciones de x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_n son distintas. Por lo tanto, a_k es raíz de una ecuación de grado n!.

Sin embargo, Lagrange muestra que $a_k{}^n$ toma sólo (n-1)! valores. Además, si n es primo, $a_k{}^n$ es una raíz de una ecuación de grado n-1 donde sus coeficientes pueden ser determinados por la soluciones de una ecuación simple de grado (n-2)!. Así, para $n = 5$, la determinación de $a_k{}^5$ necesita de soluciones de una ecuación de grado 3!=6.

Si n no es primo, el resultado es más complicado. Usando un argumento similar al caso de n primo, Lagrange muestra que si $n = p.q$ donde p es primo, y si k es divisible por q , $a_k{}^p$ es raíz de una ecuación de grado $p - 1$ cuyos coeficientes dependen de una ecuación simple de grado $\frac{n!}{(p-1)p(q!)^p}$. Para $n = 4$ se sigue que $a_2{}^2$ puede ser hallada resolviendo una ecuación de grado $\frac{4!}{1.2.(2!)^2}$ =3, pero para $n = 6$, para determinar $a_3{}^2$ se necesita resolver una ecuación de grado $\frac{6!}{1.2.(3!)^2}$ =10.

Como puede observarse cuando el grado de la ecuación es mayor o igual a cinco el grado de la ecuación auxiliar es mayor que el grado de la ecuación original.

Esta observación y la expresión algebraica que obtuvo para las raíces de la ecuación auxiliar en función de las raíces de la ecuación original lo llevaron a preguntarse ¿Cuántos valores puede tomar una función auxiliar por la permutación de las raíces de la ecuación original?

5.2 La relevancia de las permutaciones en la resolución de ecuaciones

En la sección anterior se mostró la indagación que realizó Lagrange acerca de los métodos existentes para la resolución de ecuaciones por radicales. Esta investigación lo llevó a trabajar con las permutaciones de las raíces de las ecuaciones.

En efecto, dicho trabajo le permitió obtener los primeros resultados de la actual Teoría de Grupos y de la denominada actualmente Teoría de Galois aunque él no fue consciente de ello.

Cabe destacar que a pesar de haber logrado probar importantes proposiciones donde las permutaciones juegan un papel determinante, Lagrange no elaboró ninguna notación específica para las permutaciones por lo que algunos argumentos propuestos por él se hicieron difíciles de comprender. Vemos aquí la importancia de materializar en una notación adecuada el objeto matemático logrado, no sólo para poder comunicar los avances sino sobre todo para visualizar su contenido semántico que difería notablemente del uso aritmético que se le puede dar a las permutaciones de cierta cantidad de elementos. El significado aritmético está asociado a los problemas de combinatorias, mientras que en esta situación se exige entender a las permutaciones funcionando como funciones biyectivas munidas de la operación composición para obtener nuevas funciones biyectivas.

Para el análisis de esta etapa se utiliza en este trabajo la notación de permutaciones que se usa más habitualmente en la actualidad pues no se cuenta con los escritos originales y además porque dicha notación facilita la comprensión lectora de esta tesis dado el valor instrumental de la misma.

Continuando con el trabajo de la etapa anterior y con el objetivo de comprobar la posibilidad de la resolución de ecuaciones por radicales cualquiera sea el grado de la ecuación, Lagrange planteó un nuevo problema: **obtener información sobre el número de valores que puede tomar una función auxiliar por la permutación de las raíces de la ecuación original.** Puede verse en la figura 11 la configuración epistémica que se genera a partir de su nuevo problema.

LENGUAJE MATEMÁTICO

Simbólico: Incógnitas, permutaciones, números reales, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz. Igualdad, ecuación, notación polinomial, notación de conjuntos y sus operaciones, etc.

Ejemplos:

(la notación no fue creada por Lagrange)

$\sigma(f(x_1, \dots, x_n))$

$f\left(x_{\sigma_{(1)}}, \dots, x_{\sigma_{(n)}}\right)$

S_n $\quad \sigma \in S_n$

$|S_n| = n!$

I(f)

$m = \frac{n!}{|I(f)|}$

$\sigma \circ \tau(f) = \sigma(f) = f_i$

$S_n = \bigcup_{i=1}^{m} I(f \mapsto f_i$

SITUACIÓN PROBLEMA

Obtener información sobre el número de valores que puede tomar una función auxiliar por la permutación de las raíces de la ecuación original.

REGLAS

DEFINICIONES O CONCEPTOS

Previos: ecuación, raíz, coeficientes, polinomios, raíces de la unidad, polinomios simétricos elementales, permutación, valor absoluto, función biyectiva, factorial, conjuntos.

Emergentes: grupo de permutaciones de una fracción racional (S_n), grupo de permutaciones que dejan invariarte a una función racional (I(f))

PROCEDIMIENTOS

Previos: composición de permutaciones, unión e intersección de conjuntos, producto de monomios, factorización de polinomios, operaciones con polinomios, manipulaciones algebraicas.

PROPOSICIONES

Previas: Teorema fundamental del álgebra, teorema fundamental de fracciones simétricas.

Emergentes: Sea $f = f(x_1, \dots, x_n)$ una fracción racional en n indeterminadas. El número m de los diferentes valores que toma f al permutar $x_1, \dots, x_n$ es igual al cociente de $n!$ por el número de permutaciones que dejan invariante a f.

($m = \frac{n!}{|I(f)|}$)

Si la función f mantiene el mismo valor cuando dos o tres o un número mayor de permutaciones diferentes se hacen entre las raíces $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$, las raíces de la ecuación $\Theta = 0$ serán iguales de dos en dos, de tres en tres, etc.; de modo que Θ será igual a θ^2 o a θ^3, etc., y por lo tanto la ecuación $\Theta = 0$ se reduce a $\theta = 0$, cuyo grado será igual a , $\frac{n!}{2}$ o igual a $\frac{n!}{3}$, etc.

Sea f y g dos fracciones racionales en n indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si f toma m diferentes valores por las permutaciones que dejan invariante g, entonces f es una raíz de una ecuación de grado m cuyos coeficientes son fracciones racionales en g y en los polinomios simétricos elementales $s_1, s_2, \dots, s_n$.

ARGUMENTOS

Demostraciones deductivas, construcción de conjeturas por experimentación con casos particulares. Argumentos empíricos.

Figura 11: Configuración epistémica del segundo sistema de prácticas de Lagrange.

En este sistema de práctica el **emergente principal** son las proposiciones elaboradas por Lagrange para dar respuesta a su nuevo problema planteado. Es interesante observar que el teorema:

Sea $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *una fracción racional en* n *indeterminadas. El número* m *de los diferentes valores que toma* f *al permutar* $x_1, \ldots, x_n$ *es igual al cociente de* $n!$ *por el número de permutaciones que dejan invariante a* f *.*

$$m = \frac{n!}{|I(f)|}$$

El resultado anterior da origen al conocido y actual **Teorema de Lagrange** que se estudia en la asignatura: Estructuras Algebraicas, es decir el famoso teorema es fruto de un proceso de descontextualización[6] que realizaron matemáticos que sucedieron a Lagrange. Se dice que ocurrió un proceso de descontextualización pues la relación existente entre el grupo de las permutaciones de las raíces de una ecuación (S_n) y el subgrupo de las permutaciones que dejan invariante a una fracción racional (I(f)) fue el proceso que movilizó la enunciación del teorema antes mencionado, pero la demostración de este actual resultado escapa al juego de lenguaje y relaciones del contexto donde fue gestado.

En efecto, el teorema de Lagrange, como hoy se conoce, se enuncia en los libros universitarios de Álgebra moderna o Estructuras algebraicas de la siguiente manera:

Sea $\mathbf{H}$ *un subgrupo de un grupo finito* G *. Entonces,* $|\mathbf{H}|$ *divide a* $|\mathbf{G}|$ *.*

Puede observarse que este teorema ha sido enunciado **dentro de una nueva teoría,** la teoría de grupos (inexistente en la época de Lagrange), el trabajo de

[6] Se habla de «descontextualización» para hacer referencia al proceso que desprende al objeto del contexto en el cual emergió por primera vez y lo sitúa (lo pone a funcionar) en otro contexto.

descontextualización que realizaron los matemáticos que continuaron el trabajo de Lagrange no fue para nada sencillo ya que tuvieron que hacer funcionar este resultado en un contexto que exigía relaciones entre “grupos” y “subgrupos” (relaciones entre estructuras ya reconocidas en la Institución Matemática como nuevos objetos matemáticos). Por lo tanto se puede apreciar que en la versión actual del teorema la sustitución de $\boldsymbol{n}!$ por el orden (módulo) de un grupo finito cualquiera y la de I(f) por H (subgrupo de un grupo) conlleva para su comprensión un proceso cognitivo y de trabajo matemático mucho más complejo que una simple “traducción” de un caso particular (el grupo de las permutaciones) a uno general (el grupo como concepto abstracto) como muchas veces se suele presentar en los textos universitarios.

Retomando el trabajo de Lagrange, los resultados obtenidos en esta etapa lo motivaron para volver a pensar en la posibilidad de poder construir un método general para la resolución por radicales de cualquier ecuación, dejando de esta manera atrás la conjetura realizada en la primera etapa de su trabajo. En otras palabras, estos resultados y el paradigma de la época “ganaron” por sobre las importantes “sospechas” logradas en su trabajo anterior, lo que nos pone delante de un hecho histórico muy significativo que nos revela el valor de la “fuerza” del mandato institucional y la relatividad cultural para decidir sobre la producción personal.

5.3 Construcción de un método general

Una vez que Lagrange estudió minuciosamente las distintas relaciones que se podían establecer entre las raíces de la ecuación que se pretendía resolver y la ecuación auxiliar a utilizar para tal fin, creyó que tenía elementos suficientes como para diseñar su propio método de resolución “olvidándose”, que en un principio había observado algunas regularidades que lo llevaron a pensar que tal vez las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco **no** tendrían solución.

Llama la atención que teniendo una conjetura basada en observaciones realmente relevantes no intentara probarla, sin duda el medio científico en el que estaba inmerso no le facilitó dar ese gran paso. En muchos casos el "contrato científico" es muy difícil de romper pues en cierta medida se trata de romper un esquema cultural y los cambios culturales requieren mucho tiempo y audacia. En este momento cultural, el contrato científico sostenía, sin lugar a nuevas dudas, que siempre se podía encontrar soluciones a un problema planteado, no se podían imaginar que una solución a un problema podía ser que NO tuviera solución.

Por esto, fiel a los matemáticos de la época Lagrange también se planteó como problema **encontrar un método general para la resolución de ecuaciones por radicales y estar convencido a priori que el mismo existía.** Para su construcción se basó en todas la proposiciones que había elaborado anteriormente.

Una vez diseñado su método para resolver ecuaciones, en principio planteado como método general pero sólo probado para ecuaciones de grado 2, 3 y 4, Lagrange consideró que su trabajo había sido una contribución realmente importante a esta rama de la matemática, en sus palabras:

> *"Estos son, si no me equivoco, los principios genuinos de la solución de ecuaciones y el análisis más adecuado para llegar a ella; como se ve, todo se reduce a un tipo de cálculos de combinaciones, por lo cual, al resultado que uno llega se encuentra* a priori," (Lagrange 1770, citado por Tignol, 2002)

Este nuevo problema que se planteo Lagrange originó un nuevo sistema de práctica.

La estrategia planteada por Lagrange para resolver ecuaciones es la siguiente: para resolver una ecuación de grado n , hay que encontrar una secuencia (finita) de fracciones racionales $V_0, V_1, \dots, V_r$ en n indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ tal que la primera función V_0 sea simétrica en $x_1, \dots, x_n$ y la última función V_r sea una de las raíces, por ejemplo $V_r = x_1$, y para $i = 1, \dots, r$ las funciones V_i satisfacen lo siguiente:

(1) $V_i^n = V_{i-1}$, o

(2) el número de valores de V_i bajo las permutaciones que dejan invariante a V_{i-1}, es estrictamente menor que n .

En el caso (1), la función V_i puede ser calculada de las anteriores por la extracción de una raíz n-ésima, y en el caso (2) se puede encontrar mediante la resolución de una ecuación de grado menor que n . Dado que la última función es una raíz de la ecuación propuesta, esto significa que la raíz se puede encontrar por sucesivas extracciones de raíces y soluciones de ecuaciones de grado menor. La secuencia $V_0, V_1, \dots, V_r$ indica el orden en el cual se disponen los cálculos. Las otras raíces se pueden encontrar de la misma manera, sustituyendo por $V_0, V_1, \dots, V_r$ funciones similares. (Más precisamente, para algún $\sigma \in S_n$ la raíz $\sigma(V_r)$ puede encontrarse con la secuencia $\sigma(V_0) = V_0, \sigma(V_1), \dots, \sigma(V_r)$).

Para $n = 2$, se elige

$$V_0 = (x_1 - x_2)^2 ,$$

$$V_1 = x_1 - x_2 ,$$

$$V_2 = x_1 .$$

Por lo tanto, V_1 se puede hallar mediante la extracción de la raíz cuadrada de V_0 y V_2 entonces se puede encontrar de forma racional, ya que $V_2 = \frac{1}{2}(V_1 + (x_1 + x_2))$.

La estrategia para resolver ecuaciones explicada anteriormente es algo complicada de entender, por tal motivo a fin de lograr una mayor comprensión, a continuación se presenta un ejemplo donde se ponen a funcionar las técnicas descriptas.

Ejemplo:

Dada la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ cuyas raíces son x_1 y x_2 se tiene que

$$x^2 + bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) \Rightarrow b = -(x_1 + x_2) \text{ y } c = x_1.x_2$$

Ahora se aplica el método antes descripto

$$V_0 = (x_1 - x_2)^2,$$

Lo que interesa es ver cuál es el valor de V_0 teniendo en cuenta el valor de los parámetros b y c:

$$b^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1.x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2c + x_2^2$$

Además $V_0 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1.x_2 + x_2^2 = x_1^2 - 2c + x_2^2$, luego restando miembro a miembro se obtiene

$$b^2 - V_0 = 4c \Rightarrow V_0 = b^2 - 4c$$

Ahora se busca una expresión para V_1

$$V_1 = x_1 - x_2,$$

y se obtuvo de V_0 aplicando la raíz cuadrada luego $V_1 = \pm\sqrt{b^2 - 4c}$, por último se tiene

$$V_2 = x_1.$$

con $V_2 = \frac{1}{2}(V_1 + (x_1 + x_2)) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{b^2 - 4c} - b)$ que es la fórmula que se conoce para el cálculo de raíces de una ecuación de grado 2.

Para $n = 3$, se puede elegir para V_0 cualquier función simétrica, por ejemplo $V_0 = (x_1 + x_2 + x_3)^3$, luego (denotando por ω a una raíz cúbica de la unidad distinta de 1)

$$V_1 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3,$$

$$V_2 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3,$$

$$V_3 = x_1.$$

Ya que V_1 toma sólo dos valores por todas las permutaciones de x_1, x_2, x_3 dichos valores se pueden encontrar resolviendo una ecuación cuadrática. A continuación, V_2 se encuentra mediante la extracción de una raíz cúbica de V_1 y finalmente, ya que V_3 es invariante bajo las permutaciones que dejan invariante a V_2 (sólo la identidad deja invariante a V_2), se puede determinar racionalmente de V_2, es decir mediante la resolución de una ecuación de grado 1. Del mismo modo, x_2 y x_3 pueden determinarse racionalmente de V_2.

Para $n = 4$, se puede elegir para V_0 cualquier función simétrica, luego

$$V_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),$$

$$V_2 = x_1 + x_2,$$

$$V_3 = x_1.$$

De hecho, V_1 puede determinarse resolviendo una ecuación cúbica, ya que sólo toma tres valores por las permutaciones de x_1, x_2, x_3, x_4. Luego, V_2 puede determinarse resolviendo una ecuación cuadrática, ya que sólo toma dos valores bajo las permutaciones que dejan invariante V_1, y finalmente, V_3 puede encontrarse a través de una ecuación cuadrática, ya que sólo toma dos valores bajo las permutaciones que dejan invariante V_2. La raíz x_2 es entonces fácilmente encontrada, ya que esta es la otra raíz de la ecuación cuadrática que arroja el valor de V_3 $(= x_1)$, y las otras raíces x_3 y x_4 son encontradas por cálculos similares: $x_3 +\ x_4$ es la otra raíz de la ecuación que arroja el valor de V_2, y x_3, x_4 son las raíces de una ecuación cuadrática. Este es el modelo que se sugiere por la solución de Ferrari para las ecuaciones de cuarto grado. Otras opciones son posibles; por ejemplo, usando la resolvente de Lagrange, se puede elegir:

$$V_1 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 ,$$

$$V_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 ,$$

$$V_3 = x_1 .$$

La primera función V_1 es la raíz de una ecuación cúbica, y V_2, V_3 son obtenidos resolviendo sucesivamente dos ecuaciones cuadráticas.

Se puede observar que Lagrange encontró un método distinto para resolver las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado que no dependía de un cambio de variable, sino que era el final de una sucesión de razonamientos ordenados y profundos que utilizaban la teoría de los polinomios simétricos, la teoría de las permutaciones de las raíces y la teoría de las resolventes. Sin embargo no logró demostrar que su método podía ser utilizado con ecuaciones de cualquier grado. Teniendo en cuenta sus propias palabras se puede inferir que no trató de profundizar su investigación en este sentido.

> *"Sería oportuno que se aplicara a las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, cuyas soluciones son hasta ahora desconocidas; pero estas aplicaciones requieren una cantidad muy grande de investigaciones y combinaciones, cuyo éxito en realidad, sigue siendo muy dudoso para que podamos abordar este problema por ahora. Sin embargo, esperamos volver a él en otro momento, y vamos a estar contentos de haber sentado aquí las bases de una teoría que nos parece nueva y general."* (Lagrange 1770, citado por Tignol, 2002)

5.4 A modo de conclusión

Los distintos sistemas de práctica analizados están muy relacionados, no sólo porque forman parte central de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas sino porque los emergentes de cada uno de ellos dan lugar a la formulación de un nuevo problema.

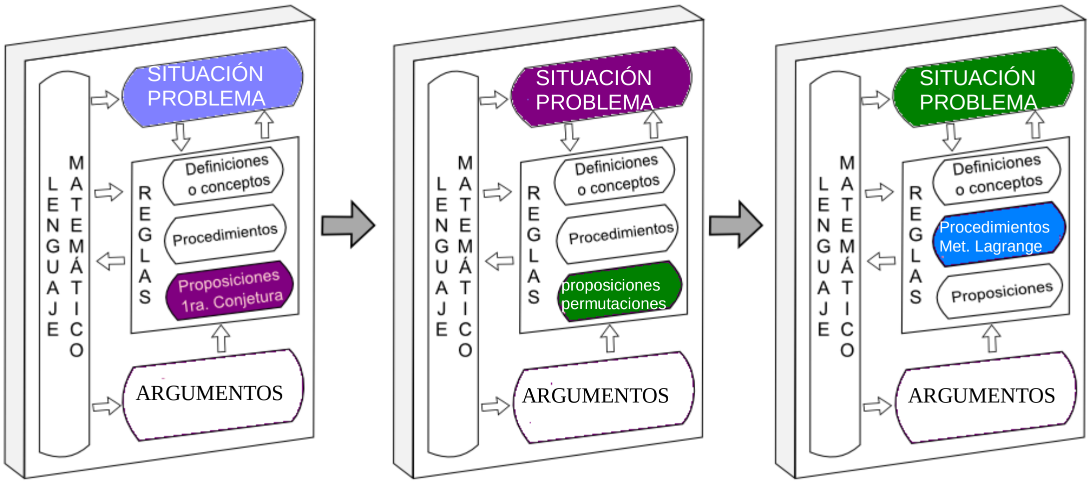


Figura 12: Principales emergentes y **relación** entre las configuraciones epistémicas

Tal como puede verse en la figura 12 los tres sistemas de prácticas están relacionados entre sí. El primer sistema de práctica, correspondiente al análisis de los métodos existentes para resolver ecuaciones, tiene como emergente principal a la conjetura “en acto” que vive en este interrogante explicitado por Lagrange**: ¿es siempre posible encontrar funciones auxiliares para las ecuaciones de cualquier grado, es decir, para cualquier número de raíces?** Dicha conjetura es el origen del segundo sistema de práctica ya que, como se explicitara anteriormente, el grado de las ecuaciones auxiliares está vinculado con la cantidad de valores distintos que toma la expresión algebraica que calcula las raíces de la ecuación auxiliar en función de las raíces de la ecuación original al permutarse estas últimas. Por tal motivo Lagrange se planteó como nuevo problema **conocer la cantidad de valores que puede tomar la**

función antes mencionada por la permutación de las raíces de la ecuación original. La indagación sobre este nuevo problema requirió mucho trabajo, para resolverlo Lagrange tuvo que demostrar varias proposiciones y teoremas (detallados anteriormente). Los resultados que obtuvo fueron muy interesantes e importantes para el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, sin embargo, no fueron bien aprovechados por Lagrange ya que dichos resultados lo condujeron a pensar que utilizándolos podría **encontrar una método general para resolver ecuaciones por radicales.** Es decir, fue el puntapié inicial para la constitución del problema del tercer sistema de práctica. El emergente más notable de este último sistema de práctica fue el nuevo método propuesto por Lagrange, este método lejos de ser general solo pudo ser probado para ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Si nos quedáramos sólo con los resultados finales de su producción, se podría decir que no pudo cumplir con su cometido. Sin embargo la riqueza de objetos y procesos que se generaron con estas prácticas matemáticas, nos permiten identificar variables y categorías de análisis didáctico fundamentales para esta indagación. El haber utilizado los polinomios simétricos como punto de partida para resolver las ecuaciones por radicales involucra un avance en el nivel de algebrización con respecto a los métodos precedentes pues es un primer paso para la materialización de las permutaciones como funciones. Es decir se aproxima a los significados funcionales de los constructos que sentaron las bases para comienzo de la construcción del grupo como estructura algebraica. Por lo expuesto anteriormente se puede decir que esta tercera práctica de Lagrange se encuentra entre el quinto y el sexto nivel de algebrización.

Por último vale rescatar que lo expuesto en este apartado pone en evidencia, al menos en este caso, que no es real la linealidad secuencial y temporal del trabajo matemático que ingenuamente se espera encontrar (tal como aparece en los libros de texto científicos) al estudiar un determinado proceso de estudio. Por ejemplo, no siempre es cierto que después de que un matemático plantee una conjetura su trabajo subsiguiente consista en tratar naturalmente de probar o refutar dicha conjetura. En este caso concreto el contexto científico matemático que imperaba en el momento, junto a la imposibilidad de materializar con una "notación específica" el nuevo contenido semántico de las permutaciones, incidieron con mayor fuerza en la producción del prolífero matemático que los indicios que él observó, de que no existiría solución para toda ecuación. Lagrange, al igual que los matemáticos precedentes, trató de encontrar un método general para la resolución de ecuaciones dejando de lado una veta muy importante de su propio trabajo, la que más tarde fue tomada por sus sucesores para lograr "cerrar" la Teoría de Ecuaciones.

CAPÍTULO 6

Procesos matemáticos presentes en la práctica de Lagrange

En este capítulo se realizará el segundo nivel de análisis didáctico que propone el EOS sobre el sistema de prácticas de Lagrange. El mismo consiste en analizar los procesos matemáticos y concretos conflictos semióticos existentes en una práctica matemática, para lo cual es imprescindible considerar los objetos, procesos y significados involucrados en la resolución de Lagrange de la situación – problema en cuestión. Este tipo de análisis tiene como finalidad describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas analizadas para más tarde poder explicar potenciales conflictos semióticos que pueden producirse según cómo se gestione su complejidad semiótica en un posible proceso de enseñanza.

Para poder describir la complejidad ontosemiótica antes señalada fue necesario en primer lugar, analizar en detalle la red de relaciones entre los diferentes elementos de significado que sostienen las prácticas de Lagrange lo que conforma las configuraciones epistémicas descriptas y explicadas en el capítulo anterior de esta tesis. En segundo lugar se necesita identificar los distintos procesos intervinientes endicha práctica, lo cual no es tarea sencilla pues en muchos casos hay más de un proceso involucrado en la resolución de una situación – problema y hay determinados procesos que son densos en toda la actividad matemática.

Recodemos que en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) se considera que un proceso matemático[7] es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada. Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo (por una persona o un conjunto de personas), para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada).

Para avanzar en esta dirección es necesario realizar un análisis pragmático[8] de los sistemas de práctica de Lagrange que complementaremos con el análisis semántico ya realizado en el capítulo anterior con el fin de poder explicar potenciales conflictos semióticos, como lo anticipáramos, en un posterior proceso de estudio de estos temas. Si bien este análisis se realiza a prácticas institucionales, la información recabada es de mucha utilidad para planificar futuras tareas en la formación inicial de profesores de matemática, pues se transformarán en marcos referenciales institucionales que permita analizar la *idoneidad epistémica* de posibles transposiciones didácticas para dicha formación.

Cabe destacar que tanto el análisis pragmático como el análisis semántico se realizaron sólo sobre aquellas prácticas de Lagrange que contribuyeron al avance en la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones. Es decir, se omitió del análisis el último sistema de práctica de Lagrange donde el problema a resolver era encontrar un método general para resoluciones de ecuaciones de cualquier grado, cuestión sobre la

---

[7] En el EOS, tal como se especificó en el marco teórico, existen varios niveles de análisis. El segundo nivel de análisis comprende el análisis de objetos y procesos matemáticos. Se sabe que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, etc. Por tanto, desde el EOS se ha seleccionado una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados. Aquí se analizarán procesos "elementales" tales como: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

[8] Basado en los atributos duales contextuales planteados por el EOS.

que no pudo avanzar ya que justamente se demostró tiempo después que es imposible encontrar un método general.

6.1 Análisis pragmático de las prácticas de Lagrange

6.1.1 Procesos duales ¿completos?

Antes de comenzar con el análisis pragmático de los sistemas de práctica de Lagrange es bueno aclarar que no todos los procesos que viven en dichas prácticas se desarrollan en el mismo nivel de algebrización y que tanto las dualidades como los objetos primarios de las diferentes configuraciones epistémicas se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a reconocer una variedad amplia de procesos que pasaremos a identificar y describir a continuación, algunos asociados/sostenidos a las dualidades, y otros directamente a los objetos primarios. Es decir, si en el análisis de la actividad matemática podemos identificar y segregar un objeto primario de la línea del movimiento al que pertenece, por ejemplo, una proposición, quiere decir que podremos encontrar un intervalo de tiempo en el que hay un inicio cuyo final es este objeto primario y podemos considerar como un proceso de enunciación el que se ha realizado en este intervalo de tiempo.

Asimismo tales objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: *ostensivo - no ostensivo*, **dualidad que sostiene al proceso de materialización-idealización**) donde un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo ideal; *ejemplar-tipo,* **dualidad que sostiene** al **proceso de particularización-generalización** donde el análisis de un objeto particular "ejemplar" permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos y el análisis de una propiedad sobre un conjunto de objetos nos lleva a pensar cómo funciona un caso particular; *sistémico – unitario*, dualidad cuyo proceso asociado es el **proceso de descomposición-reificación** donde el problema global puede descomponerse en problemas elementales, en el cual los objetos intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero, tras el proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas; *expresión-contenido*, **dualidad que pone al descubierto que** la actividad matemática, los procesos de construcción y el uso de los objetos se caracterizan por ser esencialmente relacionales y que esa relación se establece por medio de funciones semióticas entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado). El proceso asociado a esta dualidad es: **proceso de representación-significación** que consiste en atribuir significado a una expresión como resultado del establecimiento justamente de funciones semióticas. Los procesos de representación y significación son "densos" en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de problemas y por último, ya situados en una clase de matemática, la dualidad personal-institucional **cuyo proceso asociado** es el **proceso de personalización-institucionalización**: en una primera fase de estudio es necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su resolución (personalización).

Luego del proceso de estudio, mediante una adecuada gestión docente, se promoverá la institucionalización de esos conocimientos. Estos mismos objetos, en un primer curso de Estructuras Algebraicas tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje. Estas facetas se complementan de manera dual y dialéctica y son aplicables a los distintos objetos primarios. (Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V., 2007). Los procesos antes detallados pueden encontrarse en todos los niveles de algebrización. Es decir un mismo proceso puede tener lugar en cualquiera de los niveles de algebrización dependiendo de los objetos algebraicos que se pongan en juego y del modo en que se ponen en juego.

Si bien para representar objetos y procesos algebraicos pueden utilizarse numerosos tipos de lenguajes como el lenguaje coloquial, gráfico, tabular, incluso el gestual, en la práctica de Lagrange la diversidad de tipos de lenguaje antes mencionados no se visualizan. Se podría pensar que dado el nivel superior de algebrización alcanzado por el matemático hace necesaria la utilización de un lenguaje alfanumérico. En tal sentido Radford, citado por Godino *et. al.* (2014), sostiene que:

> *"Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización".*

Un resumen del análisis pragmático realizado a las dos primeras prácticas de Lagrange (incluidos los métodos para la resolución de ecuaciones por radicales estudiados por él) puede verse en el cuadro 1 que se presenta a continuación. En dicho cuadro pueden observarse los distintos procesos matemáticos detectados en esta etapa de la construcción de la teoría, los mismos se encuentran ordenados según las dualidades que los sostienen (sin tener en cuenta, en este momento, el nivel de algebrización al cual pertenecen).

El proceso de reificación – descomposición es el más utilizado para la resolver las situaciones – problemas que se presentaron en este estadio de la teoría, por lo que se puede inferir que, para arrojar luz sobre la resolución por radicales de las ecuaciones, fue preciso descomponer el problema principal en sub problemas (tratados en cada caso como una unidad) para luego tener una mirada sistémica e integral del mismo.

Otro de los procesos que con más frecuencia se pueden identificar es el de significación – representación, lo que evidencia la importancia de atribuir significado contextual a los modos de expresar la actividad matemática desarrollada. En otras palabras, en este caso se manifiesta que la comprensión del significado del contenido en un contexto está íntimamente relacionada con el modo de expresarlo.

Curiosamente, uno de los procesos menos utilizados fue el de particularización – generalización, entonces vale preguntarnos ¿es éste el proceso principal presente en un razonamiento algebraico? Al parecer no siempre es así y sin embargo es éste un planteo muy común cuando se enseña matemática en los niveles superiores. En dicho nivel se naturalizan los otros procesos por los que se debe transitar en una producción matemática, no estudiando situaciones problemas que permitan el juego dialéctico entre la mirada sistémica y la unitaria de los objetos o descomponiendo objetos y problemas que “deban” ser reificados para su comprensión.

En primera instancia, presentaremos un cuadro que plantea varios ejemplos de procesos asociados a las dualidades planteadas con anterioridad, para luego identificar y segregar un objeto primario de la línea del movimiento al que pertenece; es decir, segregar un objeto primario correspondiente, por ejemplo, a la categoría de las prácticas discursivas, en concreto, las propiedades y teoremas que relacionan la cantidad de permutaciones de las raíces de una ecuación con su grado, que son en realidad los que sintetizan la más importante obra emergente del trabajo de Lagrange. Entre la entrada (¿Cuál es dicha relación? ¿Se pueden caracterizar sus invariantes?) y la salida (tres propiedades y dos teoremas, en síntesis 5 proposiciones) podemos considerar que se ha producido un complejo proceso de enunciación que presentaremos en un nuevo cuadro.

Presentación de procesos (asociados a las dualidades):

Tipos de procesos	**Procesos activados en las prácticas matemáticas analizadas**
Materialización – Idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo)	1. La relación entre parámetros y raíces (no ostensivo) se puede materializar con los polinomios simétricos. Esto ocurre cuando se trabaja con el método de Tschirnhaus (para resolver ecuaciones). 2. El método de Ferrari para resolver ecuaciones llama *u* al valor que le permite descomponer la ecuación de grado 4 en dos ecuaciones de grado 2. Es decir, está materializando un valor que se sabe existe, pero no se conoce el valor real.
Particularización – Generalización (dualidad extensivo – intensivo)	1. Lagrange generaliza la escritura de las raíces de una ecuación a partir de las raíces n-ésimas de la unidad tomando como precedente la escritura de las raíces de las ecuaciones de grado menor a 5. El problema está en hallar los valores de los coeficientes a_k(con k =3,…, n-2) que acompañan a las nombradas raíces n-ésimas de la unidad.
Descomposición – Reificación (dualidad sistémico – unitario)	1. En el método de Cardano ocurren dos descomposiciones, una al comienzo cuando transforma la ecuación dada en un sistema donde una de las ecuaciones intervinientes es lineal y la otra es cúbica pero sin término cuadrático. Luego descompone esta última ecuación en otro sistema de ecuaciones de dos variables que le permitirá después reificar para trabajar con una ecuación de grado 6 pero que puede ser tratada como una de grado 2 mediante un cambio de variable. Más tarde vuelve a reificar las 6 raíces obtenidas, determinando de esta forma las 3 raíces que dan solución a la ecuación planteada en un comienzo. 2. En el método de Tschirnhaus, se descompone una vez

	al comienzo para constituir un sistema de dos ecuaciones, una cuadrática y la otra cúbica, pero sin término lineal ni cuadrático. Luego de darle solución a la ecuación cúbica se reifica para relacionar estás ecuaciones del sistema con la ecuación inicial. Más tarde se vuelve a descomponer la ecuación conformada antes para hallar los valores de los coeficientes de la ecuación auxiliar en función de las raíces de la ecuación propuesta. Luego reifica escribiendo los coeficientes de la ecuación auxiliar en función de los coeficientes de la ecuación original. De esta forma se puede obtener de manera racional las raíces de esta nueva ecuación lo que finalmente llevará a la solución de la ecuación inicial.
Representación – Significación (dualidad expresión – contenido)	1. Usos de las raíces de la unidad para expresar las raíces de una ecuación dada (en los métodos de Bezout, Euler y Tschirnhause) 2. Construcción de un polinomio auxiliar para resolver una ecuación propuesta: $R_n(x) = \prod_{\omega}(x-(a_0+a_1\omega+...+a_{n-1}\omega^{n-1}))$ 3. Determinación de las raíces de las ecuaciones auxiliares como funciones de las raíces de la ecuación propuesta. Lagrange muestra las propiedades de las raíces de las ecuaciones auxiliares. 4. Representación de los parámetros en función de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad. (Tschirnhause). 5. Representación de las raíces de una ecuación como combinación lineal de las raíces n-ésimas de la unidad.

Cuadro1: Procesos duales y objetos matemáticos activados en las prácticas analizadas

Presentación de un proceso asociado a un tipo de objeto particular:

1) ¿Existe alguna relación entre el grado de la ecuación de la cual es raíz una fracción racional y los diferentes valores que puede tomar la misma al permutar sus indeterminadas?	Enunciación	PROPOSICIÓN: Sea f una fracción racional con n indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$. Si f toma m diferentes valores cuando las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ son permutadas de todas las formas posibles, entonces f es una raíz de la ecuación mónica $\Theta = 0$ de grado m, con coeficientes simétricos en $x_1, \ldots, x_n$ (pueden expresarse en función de polinomios simétricos elementales). Si f es la raíz de otra ecuación $\Phi = 0$ con coeficientes simétricos en $x_1, \ldots, x_n$, entonces: Grado $\Phi \geq m$.
2) ¿Qué relación existe entre las raíces de una ecuación y las raíces de la unidad?	Enunciación	Lagrange propone los polinomios de la forma: $t(\omega) = x_1 + x_2\omega + x_3\omega^2 + x_4\omega^3 \ldots + x_n\omega^{n-1}$ donde ω es una raíz n-ésima de la unidad y las x_i ($i = 1, .., n$) son las raíces de la ecuación propuesta. Dichos polinomios se denominan hoy resolvente de Lagrange y sirven para hallar las raíces de las ecuaciones reducidas en los métodos estudiados. Luego tenemos: $$x_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{\omega} \omega^{-(i-1).k}\, t(\omega)\right),$$
3) ¿Cuál será la relación que existe entre la cantidad	Enunciación	TEOREMA. Sea $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ una fracción racional en n indeterminadas. El número m de los diferentes valores que toma

de valores diferentes que toma una fracción racional al permutar sus indeterminadas y la cantidad de permutaciones posibles entre dichas indeterminadas?		f al permutar $x_1, \dots, x_n$ es igual al cociente de $n!$ por el número de permutaciones que dejan invariante a f. $$m = \frac{n!}{\lvert I(f) \rvert}$$
4) ¿Qué relación existe entre dos fracciones racionales con la misma cantidad de indeterminadas?	Enunciación	TEOREMA. Sea f y g dos fracciones racionales en n indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si f toma m diferentes valores por las permutaciones que dejan invariante g, entonces f es una raíz de una ecuación de grado m cuyos coeficientes son fracciones racionales en g y en los polinomios simétricos elementales $s_1, s_2, \dots, s_n$.
5) ¿Cuál será el grado de la ecuación auxiliar necesaria para resolver por radicales una ecuación dada?	Enunciación	Lagrange además demuestra que si una función $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ no se altera con la permutación de dos raíces, entonces las raíces son iguales de a pares. Luego el grado de la ecuación auxiliar necesaria para hallar las raíces será $\frac{n!}{2}$. Del mismo modo cuando no se altera la función al permutar 3, 4, … raíces el grado de la ecuación auxiliar será $\frac{n!}{3}$, $\frac{n!}{4}$, etc.

Cuadro 2: Proceso de enunciación asociado a prácticas discursivas

Tal como ya se había adelantado, se analizará en detalle cada uno de los procesos matemáticos detectados (tanto los asociados a las dualidades como a un objeto primario particular) para conocer en qué nivel de algebrización se producen y así identificar el grado de algebrización de la actividad matemática desarrollada por Lagrange, pues una de nuestras hipótesis es que el grado de algebrización de la actividad de Lagrange supera los desarrollados hasta el momento y por ende, plantea conflictos semióticos que deben ser tenidos en cuenta al pensar formas de enseñar las estructuras algebraicas.

En relación a los procesos duales de Materialización – Idealización detectados se puede decir que ambos pertenecen al quinto nivel de algebrización ya que las actividades matemáticas desplegadas requieren la realización de cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con distintas variables. Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del cuarto nivel (familia de ecuaciones, familia de funciones).(Godino *et. al.*, 2015).

Es importante aclarar que tanto en el cuarto como en el quinto nivel los objetos algebraicos con los que se trabajan son los mismos, la diferencia entre ambos niveles radica en las operaciones que se ponen en juego. Mientras que en el cuarto nivel se estudia “la forma” de las familias de ecuaciones o funciones, en el quinto nivel se toma a dichas familias como objetos matemáticos y se opera con ellas como un todo.

Se identificó solo un proceso de Particularización – Generalización, en este caso se trata de la generalización de la escritura de las raíces de una ecuación a partir de las raíces n-ésimas de la unidad tomando como precedente la escritura de las raíces de las ecuaciones de grado menor a 5. En este caso no se está trabajando con las familias de las ecuaciones de los distintos grados si no que se está tratando de unificar una escritura para las raíces de una ecuación cualquiera sea su grado. Es decir, el objeto matemático involucrado ha cambiado por lo que no se puede incluir a este proceso dentro del quinto nivel de algebrización.

Por otra parte, en el sexto nivel de algebrización se estudia a las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades estructurales, por lo que en este nivel de algebrización tampoco se puede identificar al proceso que se está analizando. Entonces vale preguntarse ¿A qué nivel de algebrización pertenece? Tal parece que a ninguno de los presentados por la teoría didáctica (Godino *et. al.*, 2015). Teniendo en cuenta las relaciones que se ponen en juego en el proceso en cuestión proponemos incluirlo en un nivel intermedio entre el nivel 5 y el nivel 6 lo que indudablemente expondría un aporte al marco conceptual sobre el que estamos referenciando este análisis.

Los procesos de Descomposición – Reificación hallados pertenecen a los métodos de resolución por radicales para ecuaciones de tercer y cuarto grado respectivamente. Si bien las operaciones algebraicas que se realizan son más complejas que las necesarias para dar solución a una ecuación de segundo grado, los objetos sobre los cuales se trabaja son las familias de las ecuaciones de grado 3 y grado 4 y el procedimiento de resolución consiste en la realización de cálculos analíticos (sintácticos) que implican el uso de uno o más parámetros, junto con variables o indeterminadas.

> *"Las operaciones que se realizan en las que intervienen parámetros, cuando son realizadas de manera comprensiva y no puramente algorítmica, implican una fase superior en el proceso de reificación*

de los objetos intensivos representados (familias de ecuaciones y funciones).” (Godino *et. al.*, 2015).

En relación a los procesos de Representación – Significación detectados se puede decir que los procesos 1, 2 y 5 se corresponderían con un nivel intermedio entre en el nivel 5 y el nivel 6 pues establecer las relaciones necesarias, tanto para definir una raíz en función de las raíces de la unidad o construir el polinomio auxiliar que permita darle solución a una ecuación propuesta (una ecuación auxiliar dependiendo el grado del polinomio en cuestión), requiere realizar cálculos analíticos con los parámetros y las variables y es necesaria la comprensión del funcionamiento y de las propiedades de estas familias de ecuaciones.

El estudio de los métodos existentes para la resolución de ecuaciones por radicales realizado por Lagrange se encuentra en el sexto nivel de algebrización ya que al escribir las raíces de las ecuaciones auxiliares como funciones de las raíces de la ecuación propuesta necesariamente está estudiando el funcionamiento del anillo de polinomios (aunque no se haya materializado, y por ende, institucionalizado esta estructura matemática como tal). Además, con este modo de trabajo Lagrange logra poner en evidencia las propiedades de las raíces de las ecuaciones auxiliares.

Tschirnhause, al representar los parámetros de la ecuación dada en función de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad, también está inmiscuyéndose en la estructura de los polinomios, estudiando de este modo su funcionamiento y sus propiedades.

Por último, como puede verse en el cuadro 2, se identificaron claramente cinco enunciación. No todos estos procesos pertenecen al mismo nivel de algebrización aunque su alcance y demostración denotan la insuficiencia de los niveles, hasta ahora, presentados por las distintas teorías de Didáctica de la Matemática. Cabe aclarar que

Godino *et. al.* (2015) reconoce que es posible alcanzar niveles de algebrización mayores a los que han podido caracterizar, la siguiente cita así lo demuestra:

> *"…es posible que el nivel 6 de algebrización, cuya descripción refleja una fase incipiente de reificación de los objetos intensivos intervinientes, se pueda complementar con otros dos niveles más avanzados, propios de los estudios universitarios. Esta es una cuestión abierta a futuras investigaciones."*

El proceso de enunciación 2 puede ubicarse entre el quinto y el sexto nivel de algebrización ya que Lagrange logra materializar una escritura para encontrar las raíces de los polinomios auxiliares necesarios para la resolución de ecuaciones (hasta grado 5). Si bien no está trabajando en el interior de una estructura, pues no ahonda en las propiedades ni el funcionamiento del anillo de polinomios, sí necesita reconocer algunas propiedades de los polinomios y establecer relaciones entre las ecuaciones auxiliares y los coeficientes de las ecuaciones a resolver. Este trabajo es mucho más profundo que la mera realización de cálculos analíticos que pertenecen claramente al cuarto nivel de algebrización.

Los procesos de enunciación 1, 3 y 4 están relacionados con la invarianza de determinados polinomios cuando las raíces son permutadas. Estos teoremas no solo aportan al conocimiento de propiedades dentro de una estructura sino que también arrojan luz sobre algunas propiedades de las propiedades de los polinomios. Es decir, aquí el nivel de algebrización es superior al nivel 6 caracterizado por el EOS ya que no solo se tiene en cuenta a la estructura para el estudio sino que, como ya se anticipó, se estudian las **propiedades de las propiedades de objetos algebraicos**.

El proceso 5 (de enunciación) merece ser destacado pues esta proposición es la puerta de ingreso a la construcción de una estructura algebraica, en este caso el grupo de Galois. Es decir aquí no se estudia a una estructura existente, **se otorgan herramientas para construirla**. Este proceso se encuentra en el mayor nivel de algebrización alcanzado en las prácticas de Lagrange en pos de avanzar en la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas.

6.1.2 Procesos duales ¿incompletos?

Algunos procesos matemáticos detectados en las prácticas de Lagrange están incompletos, es decir no se genera el ida y vuelta (la relación dialéctica que se exige como potenciadora de un proceso) propio de los procesos asociados a las dualidades. Es interesante observar que la incompletitud que aquí pudimos detectar de estos procesos genera un estancamiento para el avance de la teoría en ese momento cultural específico. A continuación se detallarán los procesos duales incompletos hallados en los sistemas de prácticas analizados.

Al analizar los distintos métodos existentes para resolución de ecuaciones por radicales, Lagrange comienza a permutar las raíces de las ecuaciones para determinar cómo y porqué funcionan los métodos. De esta manera obtiene, aunque sin saberlo, los primeros resultados que conformarán, a posteriori, la Teoría de Grupos y la Teoría de Galois. Estos resultados fueron archivados sin ni siquiera explicitar una notación específica para las permutaciones. Es decir, Lagrange puso a funcionar las permutaciones, las idealizó, pero no pudo objetivarlas, no realizó una materialización de dicho objeto matemático lo que conlleva a la ausencia de una representación específica para las permutaciones. Al no poder materializar las permutaciones se ocultó la potencialidad sintáctica de las mismas y de este modo se estancó el avance de la teoría algebraica pues no se pudo evidenciar que el conjunto de las permutaciones con la operación composición tenían características que las constituirían en una estructura algebraica, el grupo de las permutaciones (de n elementos) que permitirían más adelante caracterizar todos los grupos.

Varios de los resultados presentados en el cuadro 1 que involucran permutaciones son olvidados en este período (una muestra de ello es que, como ya se dijo antes, no contaba con una notación específica para las permutaciones).

Al no poder materializar la estructura algebraica de las permutaciones no pudo detectar las propiedades invariantes de este conjunto, sin embargo el estudio realizado le permitió reconocer algunas relaciones algebraicas estables entre las raíces de una ecuación. Este descubrimiento le dio herramientas para animarse a proponer un método "general" para resolver ecuaciones. Sucede que dicho método solamente sirvió para ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Es decir Lagrange quiso generalizar un método que servía para algunas ecuaciones pero no logró hacerlo aunque trató de demostrar que su método era general.

Por lo expuesto anteriormente se puede observar que el proceso dual Particularización – Generalización no pudo ser completado por el matemático en cuestión evidenciándose nuevamente la importancia de transitar en forma "completa" por los procesos duales para lograr avances en una teoría.

6.2 Reflexión sobre el capítulo

El estudio minucioso de los objetos (primer nivel de análisis) y de los procesos (segundo nivel de análisis) matemáticos involucrados en la práctica de Lagrange permite arrojar luz sobre la importancia que tiene la relación dialéctica de los procesos objetivados por el EOS. En este caso se puede pensar que los procesos incompletos antes detallados significaron un obstáculo para poder encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de grado mayor o igual que cinco sea soluble por radicales.

Aquí puede observarse con claridad como los procesos duales están ligados estrechamente con los objetos matemáticos y el modo en el que dichos objetos son utilizados y puestos en relación. Por ejemplo, Lagrange conocía el hecho de permutar parámetros y raíces pero no concebía a las permutaciones como funciones con características singulares que funcionan dentro de una estructura algebraica. Este hecho le imposibilitó obtener resultados más significativos dentro de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas referentes a la caracterización de grupo.

Si bien el segundo nivel de análisis propuesto por el EOS plantea la necesidad de describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas en cuestión para luego identificar potenciales conflictos semióticos a producirse en el proceso de enseñanza, en el presente estudio no es posible identificar tales conflictos pues el análisis no es referido a un proceso de enseñanza y aprendizaje ya que se tienen en cuenta prácticas institucionales.

> *"Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno*

o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales." (Godino, Batanero y Font, 2007)

La cita anterior deja en evidencia la imposibilidad de detectar conflictos semióticos en este estudio. Sin embargo, el análisis realizado permite formular hipótesis sobre ciertos "puntos críticos" de la práctica de Lagrange, donde se pudieron detectar **vacíos de significación.** Por ejemplo, y en relación principalmente a las permutaciones, el matemático las significaba como un intercambio de números y no como funciones con ciertos invariantes cuando se las operaba. Este necesario cambio de significado, bloqueado desde lo cognitivo, es posiblemente una de las explicaciones por las cuales Lagrange no pudo avanzar en el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, colocando de este modo a estos objetos matemáticos (las permutaciones) en un lugar de preponderancia epistémica para comprender el funcionamiento de una estructura.

CAPÍTULO 7

Inicio al estudio de las Estructuras Algebraicas en libros de texto

En la actualidad no se dispone de numerosas investigaciones didácticas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las Estructuras Algebraicas, sin embargo existe un gran desarrollo de la Didáctica de la Matemática que permitiría planificar la introducción de dichos objetos matemáticos en la formación inicial de profesores de matemática con una carga de "sentido" importante justamente para la formación de un profesor, mucho más allá de su lugar preponderante e indiscutido que desempeñan en la Teoría Matemática actual.

Ahora bien, ¿dónde recurrimos, en general, quienes estamos a cargo de la formación inicial de profesores para referenciar teóricamente a estos objetos de enseñanza? Los libros de texto representan uno de los materiales de consulta más utilizados por los estudiantes y docentes, por tal motivo cabría preguntarse en primer lugar: ¿Cómo se inicia el estudio de las estructuras algebraicas en los libros de texto más utilizados en la actualidad? En segundo lugar: los autores del material bibliográfico ¿Ponen en juego los procesos y objetos matemáticos que dieron origen a las Estructuras Algebraicas en el ámbito científico? En otras palabras, ¿la introducción de las estructuras en los libros responden a problemas que le otorguen "sentido" tanto epistémico como cognitivo?

A lo largo de este capítulo se analizará el modo en el que se inicia el estudio de las estructuras algebraicas en tres libros de texto que actualmente se utilizan en la formación de grado de profesores y licenciados en matemática en diversas instituciones formadoras. En dicho análisis se identificará esencialmente el contexto en donde se introduce la noción de grupo, primera estructura algebraica con la que se inician todos los programas de estudio de las estructuras algebraicas. Siguiendo a Font y Godino (2006) se entiende el contexto de manera ecológica, es decir como entorno del constructo en cuestión por lo cual, las preguntas que ayudarán a responder el primer interrogante serán: ¿En qué lugar se halla? ¿Qué tiene a su alrededor? ¿Dónde vive? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona? ¿A qué problemas responde?

Los materiales bibliográficos a analizar son los siguientes: *Algebra* de Lang (1977), *Algebra Moderna* de Herstein (1994) y *Números- Grupos – Anillos* de Dorronsoro y Hernandez (1999). El análisis se realiza utilizando algunas herramientas teóricas del EOS (Godino, Batanero, Font, 2007; Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

7.1 Herramienta metodológica para el análisis de textos

Font y Godino (2006) proponen una clasificación de libros de texto nos ayuda a interpretar en términos de una configuración a los diferentes tipos de conocimiento desplegados en los tres textos analizados en relación a la introducción de la Estructura de grupo.

En las configuraciones epistémicas axiomáticas se usa el método axiomático. Se trata de una configuración epistémica (figura 13) "*en la que se presupone un carácter convencional a las reglas matemáticas y, por tanto, los conceptos que se definen y las proposiciones que se introducen no se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática*." (Font y Godino, 2006).

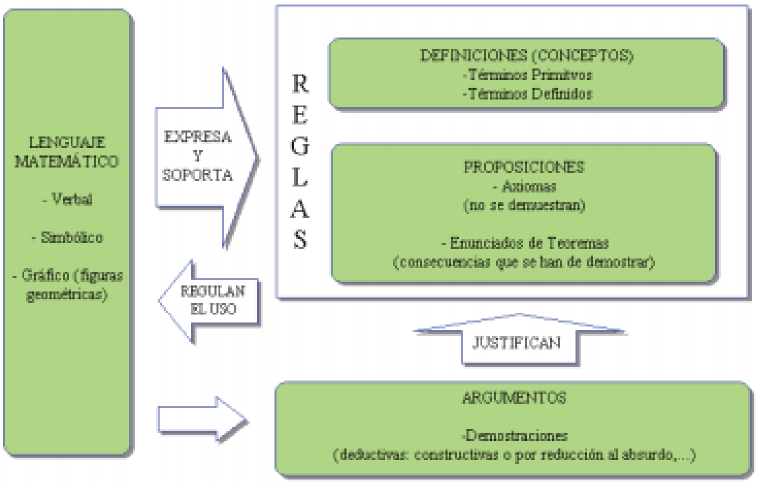


Figura 13: Configuración epistémica axiomática (Font y Godino, 2006, p.73)

En las configuraciones epistémicas formalistas (Figura 14) hay conceptos que se suponen conocidos y otros que se introducen en el capítulo mediante definiciones, luego se dan ejemplos para clarificar las mismas. Al final de cada capítulo se propone una lista de problemas descontextualizados. Los procedimientos son básicamente técnicas de demostración (usadas en la demostración de los teoremas) de tipo deductivo que tienen que aplicarse en la resolución de los problemas del final del capítulo.

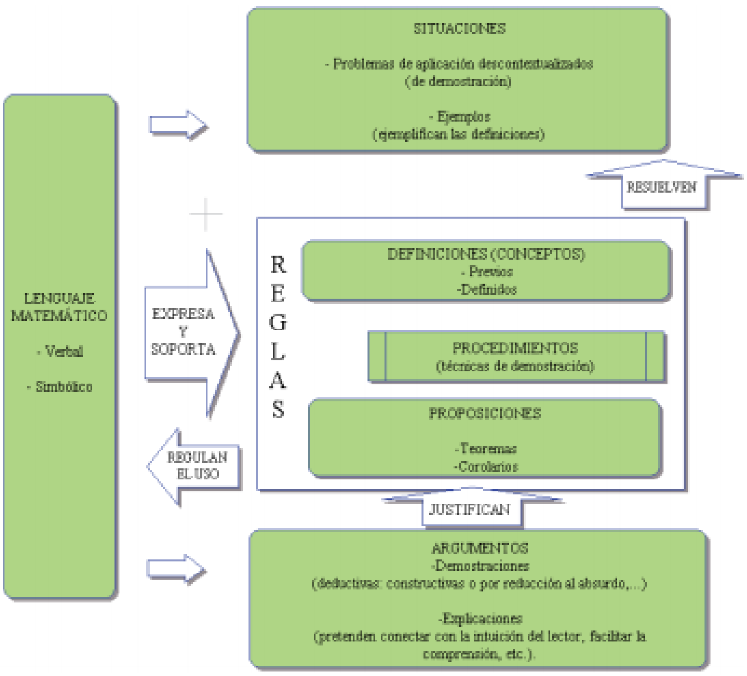


Figura 14: Configuración epistémica formalista (Font y Godino, 2006, p. 75)

7.2 Análisis del libro "Álgebra" de Serge Lang

En el libro de Lang (1977) encontramos la definición de grupo en el primer capítulo. Este autor, inicia el estudio de las Estructuras Algebraicas definiendo: ley de composición, elemento neutro y monoide. Más adelante también presenta al monoide conmutativo o abeliano y a los submonoides. Concluye el estudio de los monoides brindando un ejemplo de dicho objeto matemático donde el conjunto involucrado son las clases de homeomorfismos de superficies compactas.

Al terminar el trabajo con los monoides el autor define la estructura algebraica de grupo y brinda tres ejemplos de dicha estructura algebraica. Uno de esos ejemplos es el grupo de permutaciones. Cabe destacar que los ejemplos que brinda no son muy detallados y no invitan al lector a trabajar en la manipulación algebraica de los elementos de los grupos ejemplificados. Es decir, el autor presenta sintéticamente algunos ejemplos de grupos.

Las definiciones presentadas no están precedidas por una situación – problema que evidencie la necesidad definir un nuevo objeto matemático. Se puede inferir que el autor decide comenzar por la definición de ley de composición y elemento neutro pues las necesita lógicamente, para definir posteriormente monoide y grupo. Esta manera de presentar la matemática da cuenta pobremente del proceso de construcción del contenido matemático. En este libro impera una presentación gradual de las estructuras desde las que poseen menor cantidad de operaciones y propiedades a las que tienen mayor número de operaciones y propiedades. (Monoide-grupo-anillo-cuerpo), y en las que las definiciones son enunciadas para ser luego utilizadas, lo que no da cuenta cabal del modo constructivo del trabajo matemático.

Una vez que el lector cuenta con todas las definiciones, el autor Lang muestra un ejemplo para que el lector pueda corroborar que el conjunto con la operación indicada cumple con la definición de monoide dada con anterioridad.

El texto presenta una alta complejidad semiótica pues se presuponen conocidos, y por ende, con significado personal, muchos símbolos y conceptos. En el inicio de este capítulo no solo se trabaja con objetos algebraicos sino que también se hace referencia a objetos topológicos lo que implica un conocimiento avanzado en variar de las ramas de la matemática por parte del lector para lograr la comprensión del texto. Es decir, que para realizar una lectura compresiva del primer capítulo del este libro se requiere del conocimiento de nociones de análisis matemático, de álgebra y de topología.

En el inicio del capítulo analizado predominan las definiciones y no brinda la oportunidad de realizar procedimientos para resolver situaciones, problemas o demostrar proposiciones, salvo en dos oportunidades en las que se requiere de una demostración, y para concretarla se utiliza la inducción matemática.

Las proposiciones son referidas a propiedades de los monoides con n elementos. La definición de grupo está dada como una extensión de la definición de monoide. En el comienzo del estudio de las estructuras algebraicas no hay situaciones a resolver sino que lo que se hace es una comprobación de definiciones (del mismo modo que se señaló en párrafos anteriores con la definición de monoide).

Al finalizar el capítulo se presentan una serie de problemas donde el lector debe demostrar de manera deductiva lo que se pide. No se da lugar a conjeturas ni al trabajo empírico como una posibilidad de contrastación de posibles conocimientos a construir.

En particular para el texto de Lang (1997) se puede decir que la configuración epistémica que tiene asociada es cercana a la axiomática que se plantea en el artículo (Font y Godino, 2006) (figura 13), aunque no parte de axiomas, si presenta definiciones y teoremas que son usados más tarde para demostrar diferentes proposiciones de manera deductiva. La situación – problema que motiva el trabajo matemático presentado no pueden hallarse en forma explícita en el texto pero por lo que se expone se podría suponer que la motivación está puesta en ordenar los conocimientos de estructuras algebraicas de manera totalmente descontextualizada.

7.3 Análisis del libro “Algebra Moderna” de Herstein

El trabajo con la estructura de grupo aparece en el segundo capítulo del libro *Algebra Moderna* de Herstein (1994). En el capítulo 1 se abordan nociones que el autor llama preliminares para el estudio de las estructuras algebraicas y que indudablemente serán las consideradas disponibles para el trabajo con las estructuras. Entre las nociones matemáticas que presenta se encuentran los conjuntos, las aplicaciones y los números enteros.

En relación a los conjuntos, los describe, introduce la notación respectiva y trabaja con sus operaciones. Más tarde define relación de equivalencia y clase de equivalencia, en ambos casos le brindan al lector varios ejemplos. Al finalizar la sección se listan problemas para que el lector utilice las nociones estudiadas.

En cuanto a las funciones, en primer lugar, el autor hace referencia a la función cuadrática (que supone conocida por los lectores) para presentar los elementos involucrados en una aplicación. Luego define aplicación apoyándose en lo trabajado anteriormente. Quién estudie con este libro puede encontrar numerosos ejemplos de aplicaciones. Más tarde se sub divide a las aplicaciones en inyectiva, suryectiva y biyectiva, todos los casos están acompañados de ejemplos. Al final de esta sección se proponen problemas que invitan al lector a realizar pruebas deductivas. Consideramos importante destacar en este punto, la presencia de las funciones que aunque presentadas en el texto de forma descontextualizada exigen para su aprendizaje la puesta en relación de objetos y procesos que fundamentaron los trabajos previos a la construcción de las estructuras en la ciencia Matemática. Justamente en el capítulo anterior de esta tesis se explican minuciosamente los procesos y relaciones que Lagrange desarrolló para entender el funcionamiento de las ecuaciones donde las funciones juegan un importante papel para la producción de sus conjeturas.

Al final del capítulo 1 se puede estudiar acerca de los números enteros. Las nociones matemáticas trabajadas son: inducción matemática, algoritmo de Euclides, máximo común divisor, números primos relativos, número primo y congruencia. Al final de la sección se encuentran problemas de aplicación.

En el capítulo 2 el autor retoma lo trabajado en el capítulo anterior y va avanzando con los objetos matemáticos involucrados en la definición de grupo. Más específicamente recuerda al lector la definición del conjunto de funciones biyectivas sobre un conjunto S (A(S)) para luego probar que: dicho conjunto es cerrado respecto a la composición de aplicaciones, la composición de funciones es asociativa, que A(S) tiene un elemento neutro y que todo elemento de A(S) tiene un inverso. Después de dicho trabajo define grupo. Acá se ve con claridad como el autor naturaliza el proceso de generalización desconociendo su carácter dual con el de particularización, justamente obviando el inmenso e importante camino recorrido por Lagrange, que detecta en el conjunto especial de funciones biyectivas (las permutaciones de las raíces de una ecuación) el camino para avanzar en la resolución del problema algebraico de cómo solucionar las ecuaciones de grado mayor e igual a cinco.

Algunas definiciones están precedidas por una situación que evidencie la necesidad de comenzar con dichas definiciones, sin embargo no en todos los casos es así. Las definiciones que el autor considera que ya son conocidas por el lector son presentadas sin un trabajo anterior mientras que las definiciones de los "nuevos" objetos matemáticos si lo tienen.

Los elementos lingüísticos utilizados en el texto no se consideran sabidos por el lector sino que son introducidos de a poco a lo largo del capítulo 1. Hay pocas nociones y notaciones que se consideran conocidas con antelación por lo que la lectura del primer capítulo posee un bajo nivel de complejidad semiótica.

Los elementos conceptuales identificados están relacionados con la Teoría de Conjuntos, las funciones y los números enteros. Cada uno de los conceptos utilizados son definidos en el capítulo. Cabe destacar que no siempre las definiciones preceden al uso de dichos conceptos, en algunas oportunidades la definición es dada cuando se genera la necesidad de ella después de haber trabajado con algunos ejemplos que involucran alguno de los conceptos detallados.

En el capítulo de nociones preliminares se presentan varias proposiciones que son demostradas por el autor. Se trata de demostraciones sencillas que involucran distintos métodos de demostración. Se presentan demostraciones directas o por reducción al absurdo.

Las proposiciones también están relacionadas con la Teoría de conjuntos, las funciones y los números enteros. Estas proporciones ayudan a evidenciar relaciones entre conjuntos, aplicaciones y números enteros según corresponda. Todas las proposiciones identificadas son presentadas con su demostración (utiliza analogías, argumentos inductivos y deductivos), dejando como tarea para el lector solamente los casos análogos a los ya demostrados.

Volviendo a la clasificación propuesta por Font y Godino (2006) se puede decir que la configuración epistémica que le correspondería a este libro sería formalista (figura 14) ya que aun cuando, como ya se dijo con anterioridad, en algunos casos los ejemplos anteceden la presentación de nuevas nociones para hacer notar la necesidad de que sean definidas; pues las situaciones – problemas en su mayoría aparecen descontextualizadas y los ejemplos en casi todos los casos son utilizados para ejemplificar definiciones.

Pero... justamente una configuración formalista no permite emerger nuevos problemas que exijan “nuevas” relaciones que ayuden a construir “nuevos” objetos. En otras palabras, más allá de la intención del autor de plantear un capítulo de conocimientos preliminares, estos conocimientos no se hacen funcionar a posteriori para resolver nuevos problemas y dejar al descubierto sus limitaciones.

7.4 Análisis del libro “Números- Grupos – Anillos” de Dorronsoro y Hernandez

En el libro *Números- Grupos – Anillos (*Dorronsoro y Hernandez, 1999*)* la definición de grupo se encuentra en el tercer capítulo, dicha definición surge como generalización de varios ejemplos (grupos de permutaciones, de matrices y transformaciones rígidas de figuras geométricas). Aquí se pone a funcionar un proceso que los otros textos habían naturalizado, el de particularización-generalización y en un contexto de alta idoneidad epistémica como lo es el trabajo con conjuntos de permutaciones, aunque no referencien permutaciones especiales como las de las raíces de una ecuación. El autor incluye diferentes representaciones de grupos antes de dar la definición formal (tablas, por comprensión y gráficos). Esta decisión favorece la posibilidad de movilizar el proceso dual de representación-significación, esencial para la construcción del objeto: grupo. En otras palabras, se tiene en cuenta la complejidad semiótica de esta temática.

El primer capítulo se titula “conjuntos y aplicaciones” en él se presentan nociones elementales sobre conjuntos. Aquí se trabaja con los constructos matemáticos de manera intuitiva. Cómo su título lo indica las nociones matemáticas involucradas son los conjuntos (se incluyen aquí relaciones binarias) y las aplicaciones.

El estudio de los conjuntos comienza con una definición intuitiva de los mismos acompañada de algunos ejemplos sencillos, más adelante son incorporadas las operaciones entre conjuntos, se introduce la notación respectiva. Para finalizar la sección se define el conjunto de las partes de un conjunto y el producto cartesiano. Luego se listan problemas en los que se requiere probar distintos resultados sobre conjuntos y sus operaciones. Esta sección nos permite anticipar que el abordaje de las estructuras está vinculado a la Teoría de Conjuntos, lo cual pone en evidencia una importante diferencia con el surgimiento de las mismas en el seno de la ciencia Matemática. Por este motivo y respecto al segundo interrogante planteado para analizar los libros de textos, ya podemos anticipar que la configuración de objetos y procesos va a estar atravesada por un lenguaje diferente.

Los autores incluyeron en el capítulo 1 del libro la definición de relación binaria, dicha definición es ejemplificada con las relaciones de igualdad, desigualdad y divisibilidad en el conjunto de números enteros. También definen la relación de equivalencia, las clases de equivalencia, la partición de un conjunto y el conjunto cociente. Cabe destacar que se incluyen ejemplos de cada noción tratada. Esta sección finaliza con una lista de problemas en los que hay trabajar con las definiciones dadas. La emergencia del objeto: conjunto cociente pone de manifiesto la necesidad de pensar sobre “propiedades de propiedades”, o sea exige un nivel de algebrización mayor que el que se necesita para avanzar en la teoría de la divisibilidad. En otras palabras, los procesos que exige que se transiten son homologables a los que transitó Lagrange, más allá de no estar trabajando con los mismos objetos y lenguajes.

Antes de referirse a las funciones mencionan que una correspondencia entre dos conjuntos (A y B) es toda regla que asocia a los elementos de dichos conjuntos. Las toman como un subconjunto del conjunto A x B. A partir de lo anterior definen la noción de función y exponen la notación correspondiente. Más tarde especifican que se entiende por aplicaciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas, todos los casos están acompañados de ejemplos. Para culminar definen operación binaria cerrada y las propiedades asociativa y conmutativa, elemento neutro y elemento inverso (se muestran ejemplos en todos los casos). Al final de esta sección se proponen problemas que involucran demostraciones deductivas para su resolución.

También se trabaja con la noción de conjunto finito y conjunto infinito para luego presentar la cardinalidad de un conjunto. Además se precisa cuándo un conjunto es numerable. Se demuestra que el conjunto de los números reales no es numerable. Este apartado finaliza con problemas para ser resueltos por el lector.

Al final del capítulo 1 se encuentran algunos comentarios históricos acerca del surgimiento de las nociones vinculadas a la teoría de conjuntos. En esta sección se menciona el trabajo de los matemáticos: George Boole, Georg Cantor, Kart Weiertrass, Leopold Kronecker y Kart Gödel.

En el capítulo 2 se trabaja con los números naturales, se describe su composición, se mencionan las operaciones de suma y producto detallando las propiedades de ambas (asociativa, conmutativa y existencia de elemento neutro). Además se vinculan las operaciones antes mencionadas con la propiedad distributiva. Luego se muestra la insuficiencia de los números naturales para resolver una ecuación sencilla que hace necesaria la aparición de los números enteros. En esta conjunto numérico se incorpora una nueva propiedad para la suma, la existencia de elemento opuesto. Más tarde se incorpora el conjunto de los números racionales y con ellos una nueva propiedad para el producto, la existencia de inverso multiplicativo. Además se incorporan algunas proposiciones, con sus respectivas demostraciones, como el algoritmo de la división y el principio de inducción en N. Ambas proposiciones están sucedidas por varios ejemplos que las ponen a funcionar. Se finaliza la sección con algunos problemas.

El algoritmo de Euclides es utilizado para desarrollar un procedimiento con el objetivo de encontrar el máximo común divisor entre dos números. Para ello se presentan algunos lemas con sus respectivas demostraciones y más tarde se ejemplifica el procedimiento. El trabajo anterior es aprovechado para definir cuándo dos números son primos entre sí. Se demuestran algunos corolarios que involucran números primos entre sí. Luego se define a la ecuación diofántica, dicha definición es acompañada por algunos resultados que la incluyen y varios ejemplos. Se concluye la sección con varios problemas.

El Teorema Fundamental del Aritmética es otro apartado de este capítulo. Antes de demostrar este teorema los autores demuestran que la cantidad de números primos es infinita y exponen un procedimiento para encontrar números primos. Luego se exhiben algunos ejemplos en los cuales se pone a funcionar el teorema. La sección finaliza con problemas cuya resolución queda a cargo del lector.

La noción de congruencia es definida y ejemplificada. Se incluyen proposiciones que demuestran que la relación de congruencia es de equivalencia y se mencionan algunas propiedades de dicha relación. Luego se utiliza la relación de congruencia para probar algunos resultados sobre divisibilidad. Además se enuncia y demuestra el pequeño teorema de Fermat. En todos los casos es ejemplifica. El cierre de la sección incluye problemas de aplicación de las nociones trabajadas.

El capítulo 2 finaliza con algunos comentarios históricos acerca la teoría de números. En esta sección se menciona el trabajo de los matemáticos: Euclides, Diofanto, Fermat, Newton, Descartes, Euler, Wiles, Legendre y Gauss.

En los capítulos iniciales del libro se presentan distintas expresiones matemáticas acompañadas por su respectivo significado cuando aparecen por primera vez en el texto. Las nociones y notaciones que se consideran conocidas por el lector son básicas ya que son con las que usualmente se trabaja en el secundario.

En los primeros dos capítulos se definen numerosos conceptos por lo que el lector incorpora mucha información al estudiarlos. Sin embargo la introducción de dichos conceptos es antecedida o precedida de variados ejemplos que clarifican su significado. En algunos casos la incorporación de nociones es una necesidad que surge por algún problema propuesto por los autores.

Los procedimientos presentados en el capítulo 1 están relacionados a la Teoría de conjuntos y son, en su mayoría, bastante sencillos y explicados en detalle. En el segundo capítulo algunos de los procedimientos son complejos y se deja para que realice el lector ciertos pasos intermedios o partes de las demostraciones. En el texto no sólo se realizan demostraciones de resultados sino que también se proponen algunos algoritmos debidamente justificados.

En el libro nuevamente se encuentran las proposiciones sobre conjuntos, aplicaciones, divisibilidad y congruencia. Estas proporciones aportan herramientas para trabajar con conjuntos, aplicaciones y números enteros a fin de avanzar hacia la introducción de las estructuras algebraicas. La mayor parte de las proposiciones son presentadas con su demostración, pero en algunos casos se deja como tarea para el lector pasos intermedios o los casos análogos a los ya demostrados.

En los primeros dos capítulos de este libro los autores utilizan argumentos intuitivos en algunos casos (sobre todo cuando se está trabajando con ejemplos) para luego demostrar las proposiciones utilizando analogías, argumentos inductivos y deductivos.

Esta detallada descripción de todos los elementos de significados que preceden a la presentación del objeto *grupo*, pone nuevamente en evidencia que el autor plantea el trabajo con las estructuras algebraicas desde la Teoría de conjuntos y no desde las ecuaciones.

Al igual que el libro de Herstein (1994), este libro tiene muchas características de un texto formalista pero a su vez muchas de los constructos matemáticos que se definen son antecedidas por varios ejemplos de los cuales el autor captura los invariantes para poder dar una definición genérica. Además, en algunos momentos deja preguntas pendientes para el lector invitándolo a reflexionar sobre distintas relaciones existentes entre las nociones trabajadas, lo cual nos permite asegurar que su carácter no es totalmente formalista de acuerdo a la categorización planteada en Font y Godino (2006).

7.5 Consideraciones finales del capítulo

El análisis realizado de cada libro de texto permite identificar las relaciones entre los objetos elementales que sostienen la presentación de la estructura de grupo y los procesos que proponen cada uno de los autores. El primer libro analizado incluye muchas nociones en pocas páginas, lo que supone una naturalización de la complejidad semiótica que conlleva el aprendizaje de tales objetos matemáticos. Las numerosas definiciones aparecen listadas y los pocos ejemplos que se brindan tienen un nivel de complejidad muy elevado pues se entrelazan con conceptos de otros contextos matemáticos tales como el topológico. Es decir, los ejemplos pueden resultar dificultosos para clarificar las definiciones o proposiciones planteadas. Antes de definir grupo no se establece ninguna relación con permutaciones u objetos algebraicos conocidos, pues esta definición es una extensión de la de monoide.

La configuración epistémica que se correspondería con el libro de Lang sería una intermedia entre la axiomática y la formalista por lo que la hemos de denominar Configuración epistémica formalista rígida.

Herstein comienza su libro con las nociones preliminares que considera necesarias para iniciar el estudio de las Estructuras Algebraicas. El abordaje que realiza el autor es conjuntista – formalista, dado el lenguaje utilizado y el tipo de objetos presentados. El autor brinda numerosos ejemplos para clarificar conceptos o poner a funcionar proposiciones. En algunos casos estos ejemplos también son utilizados para mostrar como necesaria algunas de las nociones matemáticas con las que se trabaja.

Es importante destacar que Herstein no solo utiliza argumentos deductivos en su texto sino que también se vale de argumentos inductivos y analogías para otorgarle significado a las proposiciones que luego serán utilizadas para definir grupo.

Al igual que Lang, Herstein no propone un trabajo con las permutaciones antes de definir grupo.

La configuración epistémica asociada al libro de Herstein estaría entre la configuración formalista y la empírica pero más cerca de la formalista por lo que podríamos definirla como configuración epistémica formalista laxa.

En el último libro analizado, Dorronsoro y Hernandez proponen también la inclusión de nociones preliminares para trabajar con estructuras algebraicas. La descripción detallada de los elementos de significado antes presentada demuestra que los autores plantean el trabajo con las estructuras algebraicas a partir de la Teoría de conjuntos y no desde las ecuaciones.

Cabe destacar que el texto moviliza al lector a pensar sobre las “propiedades de propiedades” de los objetos matemáticos, o sea exige un nivel de algebrización mayor que el necesario para avanzar en la teoría de la divisibilidad (abordada en las nociones preliminares). Se puede decir que los autores proponen transitar por procesos homologables a los que transitó Lagrange, aunque se trabaje con otros objetos y lenguajes.

Antes de dar la definición de grupo los autores proponen analizar diferentes ejemplos de conjuntos con operaciones asociadas haciendo notar que cumplen con algunas regularidades (las propiedades que un conjunto con una operación dada tienen que poseer para ser considerado un grupo). El libro presenta un trabajo con permutaciones pero totalmente despegado de la resolución de ecuaciones por radicales.

La configuración epistémica con la cual puede representarse este libro está también entre la formalista y la empírica solo que no está tan cerca de la formalista por lo que hemos decidido denominar: configuración formalista para la enseñanza.

De esta manera el análisis de estos textos nos ha permitido no solo conocer la diferencia de presentaciones de las estructuras algebraicas en la propia institución matemática para la formación de profesores sino que también nos permitió ampliar la clasificación de configuraciones de libros de texto presentada por Font y Godino (2006).

CAPÍTULO 8

Análisis ontosemiotico a una práctica sobre el abordaje de las Estructuras Algebraicas

El análisis llevado a cabo en los capítulos anteriores de esta tesis contribuyó para comenzar a construir un marco de referencia institucional que ayude a determinar el grado de idoneidad epistémica de procesos de enseñanza vinculados al abordaje de las estructuras algebraicas en la formación inicial del profesor en Matemáticas. Dicho marco referencial se utilizará para analizar la primera práctica propuesta en la asignatura Estructuras Algebraicas de Profesorado en Matemática de la UNRC.

Esta primera práctica se diseñó teniendo en cuenta las relaciones de objetos elementales y procesos duales que el proceso histórico de la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas puso al descubierto. En primer lugar se realiza una discusión acerca del significado de la palabra método, explicitando que el avance de la matemática se ha producido siempre por una tensión permanente entre ***método y objeto***, para después plantear un par de problemas aritméticos que movilizarán el tránsito de la aritmética al álgebra de las ecuaciones. La tercera actividad tiene por objetivo generar la necesidad de escribir los coeficientes de una ecuación en función de las raíces de dicha ecuación, procedimiento esencial en la obra de Lagrange. A continuación, y contextualizando este nuevo conocimiento en el momento histórico correspondiente se plantea la importancia de observar el comportamiento de las funciones que permiten permutar todas las raíces de una ecuación. Cabe aclarar que aquí las permutaciones son entendidas como funciones biyectivas de un conjunto en sí mismos (el de las raíces de las ecuaciones). Se finaliza esta práctica con una tarea que tiene por objetivo la búsqueda de invariantes entre las propiedades de una operación determinada dentro de un conjunto. Cabe destacar que este es un primer diseño de tareas para introducir el complejo trabajo con las estructuras algebraicas. El estudio, análisis y modificación del mismo se complementará en el avance de esta investigación.

Para el análisis de estas primeras prácticas se utilizó como herramienta la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos con el propósito de revelar los objetos ostensivos y no ostensivos que intervienen en cada una de las actividades matemáticas propuestas y las relaciones entre los mismos. (Godino et al., 2014)

El análisis que se realiza en este capítulo es muy importante para el posterior avance en el diseño de tareas con un alto grado de idoneidad didáctica, problemática que queda abierta y que marca un importante desafío para mejorar las actuales actividades propuestas a los alumnos del profesorado en Matemática.

8.1 Configuraciones ontosemioticas implicadas en el abordaje de las Estructuras Algebraicas

En esta sección se analizarán los tipos de prácticas y objetos que se ponen en juego al trabajar con los primeros problemas propuestos en la asignatura Estructuras Algebraicas del profesorado de Matemática de la UNRC, correspondiente al segundo cuatrimestre del tercer año de la carrera. Se tratará de mostrar que en cada una de estas prácticas están involucrados tanto objetos ostensivos como no ostensivos que permiten transitar por un modo de "hacer" y "razonar" que visibilizan la complejidad semiótica y epistémica que sostiene la construcción de las estructuras en la ciencia matemática.

Además se pone al descubierto la intencionalidad de cada fragmento de las prácticas operativas y discursivas textualizadas.

8.1.1 Configuración de objetos y significados de la primera actividad

El problema que aquí se analiza es el siguiente:

Un grupo de 18 amigos cenan juntos y a la hora de pagar resulta que alguno de ellos no llevan dinero. Esto comporta que cada uno de los restantes pague $13 más de lo que le correspondía. Si sabemos que la cena costó $1170, ¿Cuántos amigos no pagaron porque no tenían dinero? (Gascón, 2007)

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Un grupo de 18 amigos cenan juntos y a la hora de pagar resulta que algunos de ellos no llevan dinero.	<u>Conceptos</u>: Números Naturales, desigualdad entre números	Se describe el marco en el que se desarrolla la situación. Son más las personas que comieron que las que pueden pagar.
Esto comporta que cada uno de los restantes pague $13 más de lo que correspondía.	<u>Conceptos</u>: Números Naturales, división y suma. <u>Procedimientos</u>: reparto por partes iguales, adición de dos cantidades	Se fija el monto a añadir a la cuenta de quienes tiene dinero. Se presupone que la división se hizo por partes iguales.
Si sabemos que la cena costó $1170, ¿Cuántos amigos no pagaron porque no tenían dinero?	<u>Conceptos disponibles</u>: Números Naturales, igualdad, división y suma. <u>Conceptos emergentes</u>: arithmos. <u>Procedimientos</u>: Síntesis (razonamiento progresivo, desde los datos a la búsqueda de la incógnita). Análisis(razonamiento regresivo, implica el reparto por partes iguales y la realización de una sustracción)	Se establece el monto total de la cuenta. Se enuncia la cuestión problemática de la tarea.

Tabla 3: Configuración de objetos y significados de la primera actividad

La situación presentada es un problema aritmético, para resolverlo no es necesario el uso de incógnitas aunque teniendo en cuenta que los estudiantes de la asignatura tienen conocimientos algebraicos, es posible que la utilicen. Una posible solución al problema propuesto que posee un primer nivel de algebrización, podría ser:

Se utiliza el **dato**: Importe total de la factura: \$1170. Luego la cantidad que le correspondería pagar a cada comensal es 1170/18 = \$65. Pero cada uno de los que pagó lo hizo de la siguiente manera: 65 + 13 = 78. O sea el número de amigos que llevaron dinero fue: 1170/78 = 15. Luego la **incógnita** se **obtiene** como 18 − 15 = 3.

Este modo de resolver este problema es puramente **aritmético**. De los datos se llega a través de operaciones aritméticas a decir cuál es el valor de la incógnita que interviene en el razonamiento como un objeto no ostensivo.

Ahora bien, ¿por qué procesos se transita? Aunque se esté manipulando números y operaciones entre números conocidas.

En este caso el alumno realizaría en primera instancia un proceso de descomposición, al dividir la cuenta en 18, un proceso de significación y luego de representación al sumar 13 al resultado anterior. Para poder dar la respuesta al problema es necesario que reifique volviendo a pensar en la totalidad de comensales. Esta resolución discursiva del problema aritmético es la verbalización de un método denominado: ***Síntesis*** (es el razonamiento progresivo en los problemas, desde los datos a la búsqueda de la incógnita). Pero…¿Cuál sería el análisis esperado al implementar esta actividad en la formación de profesores? ¿De qué otra manera esperamos que se resuelva para avanzar en niveles de algebrización que permitan entender la necesidad de construir nuevos objetos algebraicos tales como las ecuaciones y nuevos métodos algebraicos como el cálculo ecuacional?

Se espera que realicen el razonamiento regresivo: supongamos el problema resuelto, por lo que el razonamiento va desde la incógnita al dato lo que complementa la síntesis a través del denominado análisis del problema. Poner en relación estos dos procedimientos permite la explicitación del importante método de ***Análisis-Síntesis***.

Este modo de resolver este problema sería llamar x a la cantidad de amigos que no llevan dinero. Por lo tanto $18 - x$ es la cantidad de amigos que pagaron. Entonces la cantidad pagada por cada uno de los que llevan dinero es: $1170/(18 - x)$, lo que debería ser igual a $(1170/18 + 13)$ que a su vez es igual a $65 + 13$. Luego se despeja la incógnita y se obtiene el resultado.

Cabe destacar que en este caso la letra es utilizada como un *arithmo* pues hace referencia inmediatamente a la cantidad de amigos que no habían pagado, es una letra que reemplaza un número. En este caso los procesos involucrados son los mismos que en el caso anterior sólo que se le agrega el proceso de materialización de la incógnita al llamarla x, que permite disponer de un nuevo **objeto ostensivo**: ***la incógnita***, totalmente necesaria para resolver el siguiente tipo de problema que permitirá avanzar en niveles de algebrización de la aritmética.

8.1.2 Configuración de objetos y significados de la segunda actividad

A continuación se muestra la situación problemática analizada en este inciso:

Un grupo de amigos cenan juntos y a la hora de pagar resulta que 3 de ellos no llevan dinero. Esto comporta que cada uno de los restantes pague $13 más de lo que correspondía. Si sabemos que la cena costó $1170 ¿cuántos amigos han cenado? (Gascón, 2007)

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Un grupo de amigos cenan juntos y a la hora de pagar resulta que 3 de ellos no llevan dinero.	<u>Conceptos</u>: Números Naturales, desigualdad entre números	Se describe el marco en el que se desarrolla la situación. Son más las personas que comieron que

		las que pueden pagar. En este problema la cantidad de amigos es la incógnita mientras que la cantidad de personas que no pagaron es dato (**se ha cambiado, respecto al anterior, la incógnita por el dato y viceversa**).
Esto comporta que cada uno de los restantes pague \$13 más de lo que correspondía.	<u>Conceptos</u>: Números Naturales, división y suma. <u>Procedimientos</u>: reparto por partes iguales, adición de dos cantidades	Se fija el monto a añadir a la cuenta de quienes tiene dinero. Se presupone que la división se hizo por partes iguales.
Si sabemos que la cena costó \$1170, ¿Cuántos amigos no pagaron porque no tenían dinero?	<u>Conceptos disponibles</u>: Números Naturales, igualdad, división y suma. <u>Conceptos emergentes</u>: Ecuación, incógnita. <u>Procedimientos</u>: El patrón de Análisis Síntesis fracasa (no permite obtener el valor numérico de la incógnita), aunque proporciona una cadena de ecuaciones equivalentes. Para resolver el problema se requiere manipular la utilización de una **ecuación** y técnicas que constituyen el **cálculo ecuacional.**	Se establece el monto total de la cuenta. Se enuncia la cuestión problemática de la tarea.

Tabla 4: Configuración de objetos y significados de la segunda actividad

En este caso el problema exige para su resolución transitar por un nivel de algebrización superior al anterior pues, es necesario utilizar un nuevo objeto: una ecuación y técnicas propias del cálculo algebraico para su manipulación. Una posible resolución para esta segunda actividad podría ser:

Llamar x al número de amigos que cenaron, luego se restan las personas que no pagaron $(x - 3)$. Entonces la cantidad de dinero abonada por cada amigo que pagó es $1170/(x - 3)$. O sea que cada uno debería haber pagado $(1170/(x - 3)) - 13$.

Como dato se tiene el importe de la factura, entonces se tiene la siguiente igualdad: $1170 = x((1170/(x - 3)) - 13)$; o sea la cantidad que debía pagar cada uno es: $1170/x = ((1170/(x - 3)) - 13)$, lo que haciendo una transformación tenemos la cantidad abonada por cada pagador: $(1170/x) + 13 = ((1170/(x - 3))$ y esto es equivalente a: $x - 3 = 1170/((1170/x) + 13)$ que es el número de amigos que pagan y por ende la incógnita que era la cantidad de amigos que cenan resulta:

$$x = 3 + 1170/((1170/x) + 13).$$

Aquí no queda resuelto el problema pues se tiene incógnita en ambos términos, por lo que se hace necesario nuevas manipulaciones algebraicas y se tiene que:

$$(1170/x) + 13 = ((1170/(x - 3))$$

$$(1170/x) = ((1170/(x - 3)) – 13$$

$$1170= x((1170/(x – 3) – 13)$$

$$1170 = 1170\, x / (x -3) – 13\, x$$

$$1170\, (x - 3) = 1170x - 13\, x\, (x – 3)$$

$$0 = 13\, x^2 – 39\, x – 3510$$

Luego utilizando la fórmula para resolver ecuaciones de grado dos se obtiene que x puede tomar los valores 18 ó –15. La respuesta es 18 pues se trata de personas.

Teniendo en cuenta este procedimiento se identifica la puesta en funcionamiento del proceso de materialización cuando se designa con x a la cantidad de amigos, luego al dividir en cuantas partes iguales se está descomponiendo. Cuando se escribe la primera igualdad se significa el enunciado del problema y luego se representa con la ecuación. Al tratar de despejar la incógnita se tiene en cuenta que la relación de igualdad se mantenga por lo que es preciso que se signifique dicha relación y a la vez se represente cada paso. Al finalizar el problema es necesario que se reflexione sobre el significado del resultado teniendo en cuenta el contexto del problema. Claramente el método de análisis-síntesis no puede ser aplicado. Con respecto al *arithmo*, éste evoluciona al *símbolo general*. El *arithmo* hace referencia inmediatamente a las cosas, es una letra que reemplaza un número, mientras que el símbolo hace referencia directamente a la propiedad de ser número. Pero la evolución del objeto no alcanza. Hubo que hacer evolucionar el método **¿cómo se tornan accesibles estos nuevos objetos (las ecuaciones) a través de un método más general**? Acá está la verdadera raíz del razonamiento algebraico que consiste no sólo en hacer abstracción del número y trabajar con "especies" sino, una vez reconocidas éstas hay que considerarlas como invariantes en las transformaciones de una ecuación (nuevamente la tensión entre método y objeto) (Piaget, y Gracia, 1984). Justamente una nueva decisión didáctica es presentarle a los estudiantes la siguiente actividad, que pone en su resolución al descubierto ciertas relaciones y propiedades entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones. Esta decisión está basada en la importancia que dichas relaciones, al ser detectadas y generalizadas, han tenido para el avance de la Teoría de ecuaciones algebraicas.

8.1.3 Configuración de objetos y significados de la tercera actividad

La tarea que se les propone a los estudiantes es la siguiente:

¿En toda ecuación cuadrática si las raíces son enteras los coeficientes de la ecuación también son enteros?

La resolución de esta situación permite hacer emerger la relación que existe entre raíces y coeficientes. Es decir se precisa escribir los coeficientes en función de las raíces, procedimiento esencial en la obra de Lagrange, como ya se anticipara. Cabe aclarar que no es tarea sencilla descubrir cuál es la fórmula para obtenerlos.

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
¿En toda ecuación cuadrática si las raíces son enteras los coeficientes de la ecuación también son enteros?	Conceptos disponibles: números enteros, funciones cuadráticas, coeficientes, raíces de una ecuación. Procedimiento disponible: Escribir la ecuación en función de sus raíces o las raíces en función de los coeficientes Emergente: Escribir los coeficientes en función de las raíces.	Se espera poner en evidencia la relación dual que existe entre coeficientes y raíces de una ecuación. Los coeficientes en función de las raíces.

Tabla 5: Configuración de objetos y significados de la tercera actividad

Teniendo en cuenta que los estudiantes del profesorado ya tienen como conocimiento disponible la fórmula que determina las raíces en función de los coeficientes o la ecuación en función de las raíces, lo que se espera en un curso de estructuras algebraicas es que al aplicar este conocimiento y realizar algunos cálculos ecuacionales rápidamente escriban los coeficientes en función de las raíces. En otras palabras, se espera que no sea una dificultad la aplicación del procedimiento conocido ni la emergencia de la nueva propiedad, pues el objetivo es reflexionar sobre las diferentes relaciones y procesos que se producen para ir identificando nuevos niveles de algebrización por los que hay que transitar antes de construir y manipular propiedades en una estructura.

Obtenidas de alguna manera las fórmulas: $c = x_1 \cdot x_2$ y $b = -(x_1 + x_2)$.

sólo resta justificar, para dar solución al problema planteado, que los coeficientes serán enteros ya que la suma y el producto son cerrados en Z.

Los procesos involucrados serían el de particularización – generalización si los estudiantes probaran con casos particulares y luego lograrán, una generalización de las fórmulas. También exige un proceso de materialización al tener que objetivar y notar los nuevos polinomios obtenidos para dar cuenta de la validez de las fórmulas que relacionan los coeficientes con las raíces de las ecuaciones. A continuación se intenta generalizar a ecuaciones de mayor grado y reflexionar sobre las propiedades invariantes de los polinomios que se van obteniendo a partir de la siguiente actividad.

8.1.4 Configuración de objetos y significados de la cuarta actividad

Se realiza el siguiente interrogante:

¿Cuáles son las relaciones existentes entre las raíces de una ecuación general de grado 3 y los valores de los coeficientes en función de dichas raíces? ¿Qué sucede si se cambia el orden de "uso" de las raíces? Trabajar tanto en las ecuaciones de grado dos como las de grado tres.

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
¿Cuáles son las relaciones existentes entre las raíces de una ecuación general de grado 3 y los valores de los coeficientes en función de dichas raíces?	<u>Conceptos disponibles</u>: números enteros, funciones cúbicas, coeficientes, raíces de una ecuación. <u>Procedimiento:</u> Escribir la ecuación en función de sus raíces, escribir los coeficientes en función de las raíces.	Se espera poner en evidencia la relación que existe entre coeficientes y raíces de una ecuación cúbica analizando las expresiones resultantes al escribir los coeficientes en función de las raíces.
¿Qué sucede si se cambia el orden de "uso" de las raíces? Trabajar con las ecuaciones de grado tres.	<u>Conceptos disponibles</u>: números enteros, funciones cuadráticas y cúbicas, coeficientes, raíces de una ecuación. <u>Conceptos emergentes</u>: Polinomios simétricos <u>Procedimiento:</u> Permutar las raíces dentro de las expresiones obtenidas al escribir los coeficientes en función de las raíces de las ecuaciones dadas.	Se problematiza la invariancia de ciertos polinomios al permutar las variables.

Tabla 6: Configuración de objetos y significados de la cuarta actividad

Para poder dar una respuesta a la pregunta planteada, al igual que en el inciso anterior, se espera que los estudiantes logren vincular la forma general de la ecuación de una función cúbica con la ecuación factorizada de la misma. Es decir:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)$$

Teniendo en cuenta que al dividir por el coeficiente a una ecuación cúbica se obtiene una ecuación equivalente se puede asumir que a = 1, luego:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) = (x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) (x - x_3)$$

$$= x^3 - x^2x_1 - x^2x_2 - x_1x_2x_3 - x^2x_3 + xx_1x_3 + xx_2x_3 + x_1x_2x$$

$$= x^3 + x^2 (- x_1 - x_2 - x_3) + x(x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2) + x_1x_2x_3$$

Entonces, $b = - x_1 - x_2 - x_3$, $c = x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2$ y $d = x_1x_2x_3$

Al trabajar en el interior de los polinomios obtenidos los alumnos podrán observar que la permutación de las raíces dentro de cada uno de ellos no modifica dichos polinomios razón por la cual son llamados *polinomios simétricos*. Justamente estos nuevos objetos ayudaron a Lagrange a conjeturar nuevas relaciones algebraicas que cumplían los métodos de resolución de ecuaciones que estaba indagando.

Al igual que en el problema anterior, está involucrado un proceso de materialización al identificar cada coeficiente con un polinomio simétrico.

Llegado a este punto, se intenta que sean los propios estudiantes quienes encuentren las funciones de las raíces que dejan invariantes a estos nuevos objetos que se han dado por llamar polinomios simétricos, transitando así en un nuevo nivel de algebrización a partir de transitar por los procesos que le permitieron a Lagrange avanzar en su estudio.

8.1.5 Configuración de objetos y significados de la quinta actividad

En esta actividad, justamente para movilizar los procesos antes mencionados, se les solicita a los estudiantes que respondan al siguiente interrogante:

¿Qué funciones de {x_1, x_2} → {x_1, x_2} dejan a los polinomios simétricos elementales invariantes? donde x_1, x_2 son raíces de ecuaciones de segundo grado. Realicen un trabajo análogo para tres variables.

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)	Uso e intencionalidad de las prácticas
¿Qué funciones de {x_1, x_2} → {x_1, x_2} dejan a los polinomios simétricos elementales invariantes? donde x_1, x_2 son raíces de ecuaciones de segundo grado.	Conceptos: funciones, polinomio simétrico, invarianza, raíces de una ecuación. Procedimiento: Definir funciones distintas sobre un conjunto de dos elementos.	Se plantea el problema a resolver dando como datos los elementos del conjunto involucrado

Tabla 7: Configuración de objetos y significados de la quinta actividad

En esta actividad se pretende que los alumnos puedan definir funciones que dejen invariantes a los polinomios elementales. Para ello es necesario que las funciones sean biyectivas pues de otra manera no se respetaría la invarianza solicitada.

La funciones posibles son $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$, es decir, la función identidad y la otra posibilidad es definir $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_1$.

En este caso, para resolver este problema, es necesario materializar la idea de función y luego representar las funciones solicitadas.

Continuando con la idea de que lo que emerge de una actividad debería considerarse disponible para la siguiente y que, por lo tanto, es necesario ponerla a funcionar, es que adquiere sentido la próxima actividad.

8.1.6 Configuración de objetos y significados de la sexta actividad

La quinta actividad a resolver por los alumnos es la siguiente:

Dado un conjunto A = {a_1, …, a_n}, se puede considerar el conjunto de todas las funciones biyectivas de A en A.

a) ¿Se podría operar con esas funciones?

b) ¿Podría definir alguna operación que tenga la propiedad que al operar dos elementos cualesquiera del conjunto de funciones biyectivas el elemento resultante pertenezca al mismo conjunto?

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Dado un conjunto A = {a_1, …, a_n} , se puede considerar el conjunto de todas las funciones biyectivas de A en A.	<u>Conceptos</u>: Conjunto, función, biyectividad, permutaciones.	Se describen las condiciones a tener en cuenta al resolver los incisos siguientes.
¿Se podría operar con esas funciones?	<u>Conceptos</u>: Conjunto, función, biyectividad, permutaciones. <u>Procedimientos</u>: Establece una relación entre la operación existente entre funciones y este “nuevo” objeto matemático.	Se desea que se establezcan relaciones con la operación entre funciones con el objetivo de que identifiquen propiedades.
¿Podría definir alguna operación que tenga la propiedad que al operar dos elementos cualesquiera del conjunto de funciones biyectivas el elemento resultante pertenezca al mismo conjunto?	<u>Conceptos</u>: Conjunto, función, biyectividad, permutaciones. <u>Procedimientos</u>: trabajar con la composición entre funciones	Se pretende que se demuestre que al componer dos funciones biyectivas sobre un mismo conjunto se obtiene otra función biyectiva.

Tabla 8: Configuración de objetos y significados de la sexta actividad

Para el inciso a) los estudiantes podrían trabajar con la composición de funciones, que es la operación entre funciones que conocen, y observar que como estos "nuevos" objetos matemáticos también son funciones, dicha operación también puede ser utilizada en este caso. También podrían trabajar con otras operaciones tales como la suma o el producto pero de ser así deberán tener en cuenta que no siempre obtendrán una función biyectiva al operar con dos elementos del conjunto dado (por ejemplo $f(x) = x$ es una función biyectiva, $g(x) = x^3$ también lo es pero su producto no pertenece al dicho conjunto). En este caso los procesos duales involucrados son los de representación y significación.

Para el inciso b) los alumnos podrían experimentar el resultado de la composición entre algunas de las funciones biyectivas en A y observar que el resultado es otra función biyectiva en A. Después podrían tratar de demostrar que siempre ocurre esto. Aquí los procesos implicados son los de particularización y generalización.

8.1.7 Configuración de objetos y significados de la séptima actividad

La sexta actividad a resolver por los alumnos es la siguiente:

Si ahora consideramos como "A" el conjunto de los "n primeros naturales" ¿En qué se transforma el conjunto definido en la actividad anterior?

a) Describa este conjunto particular que llamaremos S_n

b) Enuncie diferentes representaciones de los elementos que conforman Sn con el objetivo de elegir la notación más eficaz para opera con ellos.

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Si ahora consideramos como "A" el conjunto de los "n primeros naturales", ¿En qué se transforma el conjunto definido en la actividad anterior?	<u>Conceptos</u>: Conjunto, función, biyectividad, permutaciones.	Se describen las condiciones a tener en cuenta al resolver los incisos siguientes.

Describa este conjunto particular que llamaremos Sn	Conceptos: Conjunto, función, biyectividad, permutaciones. Procedimientos: idealización de las permutaciones como funciones.	Se espera que surja en esta descripción la idea de que las permutaciones no son solo un intercambio de números (significado aritmético) sino que son funciones biyectivas.
Enuncie diferentes representaciones de los elementos que conforman Sn con el objetivo de elegir la notación más eficaz para opera con ellos.	Conceptos: Conjunto, función, biyectividad, permutaciones. Procedimientos: materialización de la idea de las permutaciones como funciones.	Se pretende poner al descubierto la necesidad de una notación adecuada para potencial el trabajo con las permutaciones. Aquí los elementos del conjunto son permutaciones.

Tabla 9: Configuración de objetos y significados de la séptima actividad

La idea de esta actividad es que los estudiantes vinculen lo trabajado anteriormente con las permutaciones a fin de que éstas sean entendidas como funciones y no sólo como intercambio de elementos. Aquí el proceso involucrado es el de una nueva idealización de este objeto tan esencial para el avance de la Teoría.

Se espera que los alumnos logren capturar en una notación las características de las funciones descriptas. La idea es que esta notación haga operativo el trabajo con ellas. Es decir que puedan realizarse operaciones y que quede evidenciado el resultado. No debemos olvidarnos que fue justamente la incompletitud de este proceso dual: idealización-materialización que provocó un estancamiento en la importante obra de Lagrange. Por lo que se intenta a través de esta actividad que la materialización necesaria de este objeto sea producida por los propios alumnos, para que comprendan las ventajas de poseer una notación específica y semióticamente “potente” para operar con las permutaciones. Pueden surgir numerosas maneras de denotar a estas funciones pero se pretende que la regularidad entre todas ellas sea que se deje claro cuál es la imagen de cada elemento, para ello es posible que marquen la diferencia de cada función con la función identidad. Por ejemplo podría ser f_{12} si la imagen de cada elemento es el mismo elemento a excepción de los elementos x_1 y x_2. También es posible hagan uso de representaciones matriciales ($\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$) o flechas ($1 \rightarrow 4$; $2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow 2$; $4 \rightarrow 3$).

8.1.8 Configuración de objetos y significados de la octava actividad

La última actividad de la primera práctica de la asignatura Estructuras Algebraicas se puede ver a continuación y avanza significativamente en un nuevo nivel de algebrización:

Busquemos nosotros relaciones que permanecen estables en estos nuevos conjuntos los S_n.

1) Escribir como quedarían formalizados el S_1, S_2, y S_3.

2) Comparemos ahora el funcionamiento de S_1, S_2, y S_3 con la misma operación en cada uno de ellos.

a) Explicite propiedades de esa operación que se mantengan invariantes en los tres conjuntos.

b) ¿Podría enunciar alguna propiedad de esa operación que no se mantenga estable en los tres conjuntos?

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Busquemos nosotros relaciones que permanecen estables en estos nuevos conjuntos los Sn.	<u>Conceptos</u>: Conjunto, permutaciones (como funciones).	Se describen las condiciones a tener en cuenta al resolver los incisos siguientes.
Escribir como quedarían formalizados el S_1, S_2, y S_3. .	<u>Conceptos</u>: Conjunto, permutaciones (como funciones). <u>Procedimientos</u>: materialización de la idea de conjunto de permutaciones.	Se pretende poner al descubierto la necesidad de conocer los elementos del conjunto de las permutaciones. Además es importante la manera de denotar dichas permutaciones para su posterior operativización.
Explicite propiedades de	<u>Conceptos</u>: Conjunto,	Se pretende evidenciar que

esa operación que se mantengan invariantes en los tres conjuntos	permutaciones (como funciones), asociatividad. <u>Procedimientos</u>: experimentación con los elementos de cada conjunto.	la propiedad asociativa de la composición es un invariante en los 3 conjuntos
¿Podría enunciar alguna propiedad de esa operación que no se mantenga estable en los tres conjuntos?	<u>Conceptos</u>: Conjunto, permutaciones (como funciones), conmutatividad. <u>Procedimientos</u>: experimentación con los elementos de cada conjunto.	Se pretende evidenciar que la propiedad conmutativa de la composición no es invariante en los 3 conjuntos

Tabla 10: Configuración de objetos y significados de la octava actividad

En ésta tarea es espera que los estudiantes puedan definir los 3 conjuntos solicitados y luego operar con sus elementos. Una posible representación para el primer inciso podría ser:

$$S_1 = \{Id\}; S_2 = \{Id, \sigma\}; S_3 = \{ Id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$$

Donde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

En los siguientes ítems los alumnos pueden experimentar operando con los elementos de los conjuntos a fin de concluir que en todos los casos la operación es asociativa mientras que es conmutativa en S_1 y S_2 pero no lo es en S_3.

En esta actividad se ponen en juego los procesos de materialización, en la primer parte, y de particularización, en la segunda parte.

Godino y colaboradores (2015) sostienen que, las operaciones en las que intervienen parámetros, *"... cuando son realizadas de manera comprensiva y no puramente algorítmica, implican una fase superior en el proceso de reificación de los* *objetos intensivos representados (familias de ecuaciones y funciones).*” Por lo cual el nivel de algebrización de esta actividad sería el quinto.

8.2 Reflexiones del capítulo

El significado de referencia hasta ahora alcanzado nos permite analizar el diseño de la primera práctica de la asignatura Estructuras Algebraicas que actualmente se implementa en la UNRC. El análisis realizado puso al descubierto la trama de objetos y procesos que la resolución de tales situaciones podría poner en juego. Este estudio es muy importante pues permite identificar posibles conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación.

Las actividades que se presentaron involucran el trabajo tanto con conceptos conocidos previamente por los estudiantes como con nociones nuevas. La significación de estas nuevas nociones se va dando de manera gradual y siempre estableciendo algún vínculo con los constructos ya conocidos. En general los procedimientos esperados no distan demasiado de los procedimientos que los estudiantes saben realizar, lo que nos asegura idoneidad cognitiva. Este tipo de actividades apuntan a que sean los propios estudiantes los que materialicen a las permutaciones en tanto funciones, más allá de su conocido significado numérico. Cabe destacar que la intencionalidad didáctica es lograr, en este primer momento de la materia, que se comprenda la necesidad de hacer funcionar las permutaciones como funciones y detectar en este funcionamiento ciertos invariantes, a partir del conocimiento que poseen los alumnos de las permutaciones entre números. Este hecho es clave para la comprensión posterior del significado de grupo sobre el que se avanzará más adelante ya que como se ha visto en los trabajos precedentes de Canter y Etchegaray (2014 y 2013), Lagrange tuvo entre sus principales obstáculos epistémicos la no materialización de las permutaciones como funciones, ya que sólo pudo usarlas como sustituciones entre números, donde además dichos números eran raíces de las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado. Este cambio de contexto que genera significados diferentes “exige” por parte de quienes enseñamos un proceso de estudio especial que “obligue” al uso de estos objetos en otro juego de lenguaje al que fueran construidos en sus inicios.

Es importante resaltar que la enseñanza de las Estructuras Algebraicas debe partir y centrarse en el uso de situaciones – problemas, como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. Tales situaciones deben darle la posibilidad al estudiante de explorar y experimentar con distintos objetos matemáticos. Es conveniente que el docente reconozca con antelación los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos y lenguajes implicados en las actividades presentadas en la clase, a fin de contribuir en la adquisición “con sentido” de tales objetos por parte de los estudiantes.

Tal como lo expresa Godino et al. (2014) los desafíos del profesor de matemática para el logro de una enseñanza idónea son: 1) tomar conciencia de la naturaleza compleja del razonamiento matemático implicado 2) reconocer las configuraciones de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de los problemas (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos); 3) implementar procesos de estudio que contemplen procesos didácticos de exploración, formulación/comunicación, validación, ejercitación y evaluación.

Por lo expuesto anteriormente consideramos que el estudio realizado en este capítulo que apuntaría al tercer desafío planteado por Godino et al (2014) resulta ser uno de los primeros pasos que contribuirían en gran medida a la mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las Estructuras Algebraicas, siempre y cuando los puntos 1 y 2 sean de alguna manera transitados por los docentes a cargo de la enseñanza de la estructuras. En los primeros capítulos de esta tesis se ha intentado poner al descubierto, justamente ambos desafíos.

CAPÍTULO 9

Conclusiones y reflexiones finales

El análisis realizado a la Teoría Algebraica de Ecuaciones puede encuadrarse dentro de un estudio histórico-epistemológico pues se basó en un texto que respeta la manera en la que se desarrolló la teoría en la época en la que vivieron los matemáticos relacionados con ella, y además se estudió minuciosamente el conocimiento institucional emergente de cada una de las etapas que conformaron esta teoría. Por otra parte, aunque no se contara con los escritos originales, se tuvo en cuenta los distintos sistemas de práctica de Lagrange, es por esto que se puede decir que también tiene un corte cognitivo.

A pesar de que en cada capítulo se han plasmado las conclusiones a las que se arribó después de realizar los distintos análisis, se considera importante sintetizar las mismas a modo de cierre de esta tesis. Para tal fin se han tenido en cuenta los siguientes aspectos: la evolución histórica de la teoría algebraica de ecuaciones; el trabajo de Lagrange después de realizar un análisis epistémico-cognitivo de su obra; el trabajo de Lagrange después de realizar un análisis pragmático de su obra; algunas propuestas editoriales sobre estructuras algebraicas disponibles en las universidades; una práctica propuesta para el inicio en el estudio de las estructura algebraicas y el grado de alcance de los objetivos y expectativas que movilizaron este trabajo.

9.1 Conclusiones acerca de la evolución histórica de la Teoría Algebraica de Ecuaciones

La construcción de la configuración epistémica global permitió identificar los distintos sistemas de prácticas por los que atravesó la teoría. Se pudo observar el tipo de evolución producido en todos los elementos de significado que la van conformando y lo más importante que se puso en evidencia fue que la evolución de los mismos está íntimamente ligada al tipo de problema que se planteaban los matemáticos en cada etapa cuyo contenido está regulado por el lenguaje utilizado. Este análisis ha permitido describir y diferenciar cuatro etapas:

- En la primera etapa los babilónicos, griegos y árabes (antiguos) tenían por objetivo encontrar las soluciones para ecuaciones particulares de segundo, tercer y cuarto grado. El carácter particular de este tipo de problemas se transforma, indudablemente, en obstáculo para el avance en la construcción de una teoría. Por otra parte, el lenguaje literal muy ligado a la geometría, con el que contaban no contribuía para lograr una mirada distinta del problema, más englobante, con posibilidades de generar procesos de generalización.
- En la segunda etapa se produce un cambio de problema asociado indudablemente al uso de los *arithmos* pues intentaron encontrar un método general para la resolución de ecuaciones por radicales. Aunque no consiguieron el método buscado, sí encontraron un método general para las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto. En este caso el lenguaje utilizado (simbólico) fue de gran ayuda pues pudieron escribir un polinomio a partir de sus raíces y escribir las raíces de una ecuación en función de las raíces de la unidad. Este proceso dual (descomposición – reificación) que pone en relación distintas funciones es

esencial en la búsqueda de generalizaciones. En esta etapa se utilizó la inducción, la particularización y la analogía como argumentación para el trabajo realizado.

- La que hemos determinado como tercera etapa es muy importante en la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas porque después de profundos análisis a los métodos de resolución particulares se problematiza la existencia de solución por radicales para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. Aquí el cambio de problema es clave y permite un "quiebre" en el trabajo que se venía realizando. Lagrange (el primero en dudar de la existencia de una solución general) conjetura acerca de la inexistencia de ecuaciones después de **construir funciones donde los coeficientes se obtuvieran a partir de las raíces del polinomio original.** Una vez conformadas las funciones estudió el comportamiento de las mismas al permutar las raíces. Sin embargo, no logra materializar como un "objeto algebraico" a las permutaciones de las raíces.
- En la cuarta etapa se sitúa la culminación de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas. Aquí se buscaban las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pudiera ser resuelta por radicales. Es Galois quien estudiando la estructura algebraica de aquellas ecuaciones solubles por radicales consigue explicitar las mencionadas condiciones. Los argumentos utilizados en esta etapa fueron predominantemente deductivos.

El análisis detallado que se realizó de cada una de las etapas que reconocimos en el desarrollo de la Teoría Algebraica de Ecuaciones representa un marco objetivo de los significados institucionales (institución matemática), este marco conforma el holo-significado de la teoría. En el marco del EOS es muy importante contar con el holo-significado porque es la referencia epistémica a tener en cuenta a la hora de elaborar un proyecto de enseñanza ya que para plantear un aprendizaje significativo en las aulas es bueno conocer el modo y contenido del trabajo de los matemáticos que construyeron la teoría, pues éste conforma la referencia para el significado pretendido. En particular, conocer cuáles son las decisiones, las relaciones y procesos involucrados que transitaron los matemáticos que permitieron la evolución del problema y más tarde la resolución del mismo, puede ayudar a planificar situaciones que promuevan la construcción y circulación del conocimiento en el aula. Con el análisis realizado queda claro que no alcanza con exponer las nociones, las proposiciones y los teoremas que se pretenden enseñar enlazándolos deductivamente para lograr que los alumnos alcancen un aprendizaje sobre las estructuras algebraicas, que realmente exige "salir" del clásico pensamiento aritmético, geométrico y analítico.

9.2 Conclusiones acerca del trabajo de Lagrange después de realizar un análisis epistémico-cognitivo de su obra

Tras realizar las configuraciones epistémicas-cognitivas de los tres sistemas de práctica diferenciados en el trabajo de Lagrange, se extrajo la siguiente información:

- Al comenzar el trabajo con las ecuaciones Lagrange logra diferenciarse de sus antecesores pues su problema era conocer **cómo y porqué** funcionaban los métodos existentes. Utilizando una estrategia innovadora pudo observar que cuando el grado de la ecuación es mayor o igual a cinco el grado de la ecuación auxiliar necesaria para la resolución era mayor que el grado de la ecuación original. Fueron estos resultados los que lo hicieron dudar a cerca de la existencia de una solución para toda ecuación. Con un pensamiento ingenuo sobre el quehacer matemático podríamos suponer que una vez planteada la conjetura, Lagrange se iba a dedicar a probarla o desestimarla, sin embargo no sucedió esto.

Queda claro que el camino en la construcción de los saberes no es para nada unidireccional y que entre muchos de los factores que intervienen aparecen las tensiones que "viven" en el marco epistémico-cultural sobre el que se hace matemática como un importante productor de condicionantes. La profundización de sus observaciones fue bastante conservadora, sólo se limitó a investigar la cantidad de valores que puede tomar una función auxiliar por la permutación de las raíces de la ecuación original.

- En la segunda parte de su trabajo Lagrange pudo **conjeturar** y más tarde **demostrar** muchos resultados muy importantes para la matemática. Entre ellos se encuentra el conocido Teorema de Lagrange estudiado en los cursos de Estructuras Algebraicas, aunque la versión que hoy conocemos es producto de un nuevo proceso de descontextualización del resultado logrado por Lagrange en su contexto de investigación. En esta etapa su trabajo fue "convencional" pues después de realizar pruebas empíricas elaboró conjeturas que luego demostró en el ámbito de las ecuaciones, o sea se amoldó al contexto en el que estaba trabajando. Si bien, como ya se mencionó, los resultados que obtuvo fueron muy importantes, podemos observar que con un trabajo "convencional" no se producen los grandes "quiebres" en las teorías, hace falta un cambio de perspectiva en la mirada del problema. Otra particularidad a observar en esta etapa es el trabajo que Lagrange realizó con las permutaciones obteniendo los primeros resultados de la actual Teoría de Grupos y de la Teoría de Galois. Sin embargo estos resultados quedaron archivados ya que no logró materializar las permutaciones elaborando una notación especial, lo que le hubiera permitido objetivarlas como el elemento esencial en su "osada" producción. La falta de una notación propia que pusiera al descubierto el carácter funcional de las mismas hizo que esta parte de su obra quedara invisible tanto para el resto de la comunidad matemática como para él mismo. Aquí se puede observar con claridad que no darle entidad que sintetice los diversos significados de las permutaciones a partir de un ostensivo particular, cerró nuevos caminos en el proceso de investigación lo que nos hace pensar que es el proceso de denotación del objeto el que otorga el significado global del mismo.

- Lagrange termina su participación en la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones proponiendo un **nuevo método** para la resolución de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Si bien el método era completamente distinto a los anteriores sigue resolviendo los mismos problemas que resolvían los métodos previos, es decir no logra un avance sustancial, desde lo que significa “nuevo” en una teoría, pero si es un ejemplo de un objeto resultante de un proceso de generalización en un contexto determinado (dominio acotado). Si bien Lagrange plantea su método como general en todo el dominio de las ecuaciones no logra demostrar dicha generalidad (no lo consigue porque tal generalidad es falsa). Tal como se remarcara al finalizar el capítulo 5, llama mucho la atención que Lagrange quisiera encontrar un método general para la resolución de ecuaciones cuando en la primera parte de su trabajo encontró indicios muy fuertes de la imposibilidad de resolver por radicales toda ecuación. Esto es un indicio más de que romper los esquemas y preceptos de la institución matemática imperante en una época determinada no es para nada sencillo, pareciera que se necesita mucho más que argumentos empíricos que hagan presagiar que una hipótesis fuertemente instalada en la comunidad matemática sea falsa. Podemos establecer, en este caso, un parangón entre lo que sucede en las aulas en cuanto al rol y a la determinación de actitudes y acciones por parte de los estudiantes que impone el "contrato didáctico" y el quehacer de Lagrange regulado por una suerte de "contrato científico" muy difícil de romper.

9.3 Conclusiones acerca del trabajo de Lagrange después de realizar un análisis pragmático de su obra

Mediante el segundo nivel de análisis realizado a las prácticas de Lagrange llegamos a las siguientes conclusiones:

- En algunas de las prácticas analizadas se observa que Lagrange utiliza procesos duales. Los procesos de representación – significación sirvieron para solucionar varios de los problemas resueltos por el matemático. Estos procesos han sido los más reconocidos en la obra de Lagrange en este tramo de su trabajo. Es importante resaltar que tratándose de los primeros pasos para la construcción de un nuevo objeto matemático (Estructuras Algebraicas) es esperable que haya muchas nociones para significar y representar. Se identificaron además procesos de descomposición – reificación y de materialización – idealización al analizar algunos de los métodos indagados por Lagrange. Los procesos de particularización – generalización son puestos a funcionar cuando el matemático realiza el análisis de los métodos existentes.
- En otras prácticas de Lagrange se realizan algunas relaciones sin que se pongan en práctica sus correspondientes procesos dialécticos. Al realizar un estudio minucioso a los métodos existentes Lagrange permuta las raíces de las ecuaciones para obtener conclusiones acerca de cómo y porqué funcionan los métodos. Aquí idealiza a las permutaciones cómo un intercambio entre variables y les da un uso funcional. Sin embargo no logra materializar el objeto matemático que había

idealizado, esto tuvo -como ya se adelantara en el apartado anterior- cómo consecuencia el ocultamiento de las potencialidades y propiedades de las permutaciones para resolver esta situación. Así mismo, en la última práctica de Lagrange analizada se puede observar que él logra diseñar un método para la resolución de ecuaciones por radicales que evaluó solamente en ecuaciones de grado 2, 3 y 4. De este modo no logró generalizar el método que si particularizó para las ecuaciones antes mencionadas. Aquí vemos que la imposibilidad de generalizar dicho método trajo como consecuencia un aporte poco significativo para el avance de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas.

9.4 Conclusiones acerca de propuestas editoriales sobre Estructuras Algebraicas

Se analizaron tres libros que suelen utilizarse en los cursos de Estructuras Algebraicas con las características que se detallan a continuación:

- En el libro *Algebra* de Lang (1977) la introducción a las Estructuras Algebraicas se realiza en unas pocas páginas por lo que se incluyen varias definiciones y algunas proposiciones sin ejemplos ni reflexión previa lo cual podría dificultar el entendimiento del texto al lector. El tipo de lenguaje utilizado y los ejemplos que se presentan hacen presumir que el autor espera que quien lea su libro tenga un conocimiento matemático bastante elevado. Cabe destacar que la definición de grupo no es antecedida por ningún trabajo con permutaciones u otros objetos algebraicos, lo que nos evidencia una total naturalización de la complejidad epistémica de dichos objetos pensado como objetos a enseñar. La configuración epistémica que se correspondería con el libro de Lang sería intermedia entre la axiomática y la formalista, que hemos denominado configuración epistémica formalista rígida.

- En el libro *Algebra Moderna* de Herstein (1994) las nociones no se consideran ya conocidas por el lector por lo que se van presentando de manera paulatina junto con su respectiva notación matemática. El autor destina dos capítulos completos para trabajar con constructos que ayudarán a la comprensión de las Estructuras Algebraicas. Lo interesante es que antes de dar una definición formal de los conceptos se brinda una idea intuitiva de los mismos. Hay un intento de transitar por algunos procesos antes de "denotar" el objeto. Los ejemplos son utilizados por Herstein para clarificar conceptos o poner a funcionar proposiciones. Dichos ejemplos son variados y no muy complejos. Es importante aclarar que el autor no propone un trabajo con las permutaciones antes de definir grupo. La configuración epistémica asociada este libro tiene algunas características de la configuración formalista pero tiene otras (pocas) que la acercan a una configuración empírica. Podría decirse entonces que el libro *Algebra Moderna* tiene una "configuración epistémica formalista laxa".
- En el libro *Números- Grupos – Anillos* de Dorronsoro y Hernandez (1999) se incluyen dos capítulos con nociones preliminares para trabajar con estructuras algebraicas. Entre estas nociones se encuentran definiciones y resultados sobre la Teoría de Conjuntos, divisibilidad y congruencia. Aquí las demostraciones son realizadas en su mayoría con mucho detalle aunque hay algunas que son dejadas como ejercicio para el lector. Los autores incluyeron numerosos ejemplos que contribuyen a la comprensión de los conceptos y proposiciones presentadas. En este libro se propone analizar diferentes ejemplos de conjuntos con operaciones asociadas haciendo notar que cumplen con algunas regularidades antes de

oficializar la definición de grupo. Hay un claro manifiesto de poner a funcionar el proceso de particularización-generalización para presentar la definición de grupo. Aquí si se propone un trabajo con permutaciones, pero desligado de la resolución de ecuaciones por radicales, o sea el significado no tiene origencontextual. La configuración epistémica a la que puede asociarse este libro es por momentos formalista pero tiene también algunas características de la empírica podría decirse que presenta una "configuración formalista para la enseñanza".

En síntesis, aunque difieran en el tipo de configuración, en todos los textos analizados está ausente el sentido de las estructuras algebraicas asociado a una problemática epistemológica determinado por lo que, consideramos necesario trabajar sobre este aspecto cuando se piensa en este objeto matemático: estructuras algebraicas, para enseñar.

9.5 Conclusiones acerca de la práctica propuesta para el inicio en el estudio de las Estructuras Algebraicas

Algunas conclusiones a las que se arribaron luego de analizar la primera práctica de la asignatura Estructuras Algebraicas correspondiente a la carrera de Profesorado en Matemática de la UNRC:

- Las primeras actividades retoman conocimientos que los alumnos ya han significado en espacios curriculares anteriores.
- Se avanza progresivamente con la construcción de nuevos conceptos, vinculando éstos con los saberes disponibles de los estudiantes.
- Se presentan distintas situaciones a fin de lograr una mirada funcional de las permutaciones. El objetivo de estas tareas es otorgarle herramientas al alumno

para que logre la comprensión del significado de grupo. Creemos que es importante trabajar esta idea de grupo en el contexto de las permutaciones, referenciando esta valoración instruccional en el estudio epistémico-cognitivo realizado en los primeros capítulos de esta tesis.

En síntesis, con este estudio se tomó conciencia de lo complejo que resulta la construcción del significado de una estructura algebraica. Indudablemente realizar y reconocer las configuraciones de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de los problemas propuestos contribuirá a la mejora en el diseño de las futuras prácticas. De esta manera queda abierto un camino para seguir transitando.

9.6 Conclusiones sobre los objetivos y expectativas que movilizaron este trabajo

En términos generales se han podido cumplir los objetivos planteados en esta investigación ya que al realizar una configuración epistémica global se pudo vislumbrar cuáles habían sido los distintos cambios de problemas ocurridos en el transcurso de la elaboración de la teoría y cuáles son los elementos de significado que movilizan y producen estos cambios de problemas. Además una vez delimitados los problemas se objetivaron las distintas etapas que marcaron la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones, se hicieron visibles articulaciones, “quiebres” y diferencias entre ellas, facilitando esto el análisis de la red de relaciones entre los elementos de significado.

Para estudiar en profundidad uno de los mencionados “quiebres” se analizó en detalle los distintos sistemas de prácticas de Lagrange, logrando descubrir alguno de los escollos por los que atravesó este matemático en su afán de dar respuesta al problema de la resolución por radicales. Cabe destacar que al analizar el momento en que duda por primera vez, Lagrange no actuó en consecuencia (de acuerdo a nuestro actual significado de conjetura), sino optó por respetar las normas epistémicas y culturales de la época. Aunque Lagrange no rompió con las estructuras de la comunidad matemática de ese entonces sin duda abrió una nueva puerta para la investigación posterior, por tal motivo también consideramos que produjo un "quiebre" epistemológico.

Con el análisis de objetos y procesos realizados a las prácticas de Lagrange, que contribuyeron la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, se pudieron detectar aquellos procesos duales que se pusieron en juego en la resolución de diferentes problemas. Además, se pudieron desvelar algunos procesos duales incompletos que no le permitieron al matemático realizar avances importantes. Dicho análisis nos permitió reconocer la complejidad ontosemiótica de los constructos matemáticos involucrados.

Con todo el estudio realizado sobre las prácticas de Lagrange se logró construir un marco de referencia institucional que permitirá delimitar con mayor idoneidad el significado pretendido al iniciar el estudio de las Estructura Algebraicas en la UNRC. Consideramos que dicho grado de idoneidad epistémico y cognitivo de las prácticas que se están implementando en la actualidad en la universidad, en tanto institución de enseñanza, podría continuar mejorándose a la luz del marco referencial construido.

Si bien uno de los objetivos principales de esta investigación es muy general y ambicioso (poder detectar cuándo y por qué se producen los avances significativos en una Teoría matemática) creemos que se han conseguido desvelar ciertos elementos que hacen al desarrollo, "quiebre", estanco de esta teoría particular.

Por otra parte, es importante remarcar que se ha logrado ampliar el marco de referencia institucional respecto del estudio de las estructuras algebraicas en la educación superior. El estudio realizado a transposiciones clásicas de las estructuras, concretizadas en libros de textos de uso común, da cuenta del mencionado avance.

En cuanto a las expectativas para esta investigación concluimos que:

- En relación a la primera expectativa se pudo poner en evidencia que el cambio de problema ocurrido en cada etapa produjo avances importantes en la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas. En particular, la intensión de encontrar un método general genera prácticas muy diferentes a las que genera la problematización de la inexistencia de dicho método, este cambio de problema constituye lo que denominamos un “quiebre” en la teoría pues fue el impulsor de lo que hoy es la Teoría de Grupos.
- Respecto de la segunda expectativa se puede decir que se logró avanzar en la caracterización de los sistemas de práctica involucrados en esta obra matemática lo que sienta bases sólidas para que en futuras investigaciones se pueda disponer de marcos referenciales institucionales que ayuden a determinar el grado de idoneidad epistémica de los procesos de enseñanza en la formación inicial del profesor.
- Se lograron identificar los procesos que llevó adelante Lagrange para dar solución a variados problemas. Si bien hemos podido dilucidar algunos de los procesos matemáticos necesarios para poder comprender el trabajo global con estructuras algebraicas, aún queda mucho camino por recorrer. En esta tesis pusimos en evidencia la riqueza analítica de este nivel de análisis del EOS para explicar las dificultades que tienen los estudiantes para trabajar en el marco de las estructuras.

En otras palabras, nos permitió avanzar en la investigación de nuestro problema docente.

- Se pudo ampliar la caracterización de los niveles de algebrización más avanzados, lo que nos plantea una importante contribución al marco teórico que regula esta tesis.
- La quinta expectativa, es posiblemente la más lograda ya que aporta datos muy significativos que ayudarán sin duda a formular situaciones epistémicamente idóneas para ser implementadas en la formación inicial de profesores en Matemática asegurando también idoneidad cognitiva. En otras palabras es la que más claramente nos marca el camino a seguir. Nuestro gran desafío de enseñanza y aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

- Adúriz Bravo, A. (2011). *Desde la enseñanza de los "productos de la ciencia" hacia la enseñanza de los "procesos de la ciencia" en la Universidad*. Colección de Cuadernillos de actualización para pensar la Enseñanza Universitaria. Año 6. Nº3. U N de Río Cuarto.

- Asiala, M., Brown, A., De Vries, J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). Research in collegiate mathe matics education, 2, 1-32. Providence, RI: American Mathematical Society.

- Aubry, D., Blimo, M., Duboi, D., Escofier, J., Hamon, G., Hely. J., Julien, A., Le Laouenan M. (1992), Faire des Mathematiques ´ A` Partir de Leur Histoire I.R.E.M. De Rennes

- Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroup. Journal of Mathematical Behavior, 16(3), 187 - 239.1999

- Canter, C. y Etchegaray, S. (2013) *Análisis epistémico del aporte de Lagrange a la construcción de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas.* XXXVI Reunión de Educación Matemática. Rosario.

- Canter, C. y Etchegaray, S. (2014) *Hacia la construcción de un marco de referencia para la enseñanza de las estructuras algebraicas: un estudio onto-semiótico a la práctica de Lagrange.* V Reunión Pampeana de Educación Matemática. Santa Rosa, La Pampa.
- Chevallard, Yves (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE, Buenos Aires.
- Dubinsky, E., Leron, U., Dautermann, J., & Zazkis, R. (1994) On learning fundamental concepts of group theory. Educational Studies in Mathematics, 27(3), 267-305.
- Etchegaray, S (2001) "*Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales en Teoría de números*". Tesis de Maestría UNRC.
- Etchegaray, S (2010) "Reflexiones y aportes para repensar la enseñanza de la Matemática". *Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias*."*YUPANA*". Pag, 11-26. Nº5.10.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educaçao Matemática Pesquisa, 8 (1), 67-98.
- Gascón, J. D. (2007). El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. Escuela de invierno de Didáctica de la Matemática, Buenos Aires, Argentina.
- Godino, J. D. (1999) Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. Ponencia presentada en el III Simposio de la SEIEM, Valladolid.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques 22, (2/3): 237–284.

- Godino, J. D (2003a). Libro: *Teoría de las funciones semióticas*: Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Universidad de Granada (España).Distribución en Internet: http//www.ugr.es/local/godino.
- Godino, J. D. (2003b). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Godino J. D (2004) fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452. Granada, España.
- Godino, J. D. (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil, 2011
- Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada.
- Godino J. D. y Font V. (2003) Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y

Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452. Granada, España

- Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32 (1), 199-219.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 117-142.
- Godino, J. D.; Wilhelmi, M; Bencomo, D (2006). Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de Ingeniería. Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería. Universidad Católica Perú.
- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. Educational Studies in Mathematics, 40(1), 71-90.
- Konic (2011) " *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de números decimales"* Tesis Doctoral, depositada en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Konic, P (2005) “*Significados institucionales del Número Pi: Implicancias Didácticas*” Tesis de Maestría U.N.R.C

- Lajoie, Caroline y Mura, Roberta (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. Recherches en didactique des mathématiques, 24 (1), 45-79.

- Marckiewicz, M; (2005) "*El Rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la Matemática*" Tesis de Maestría U.N.R.C

- Piaget J. y Garcia R. (1986) "Psicogénesis e Historia de la Ciencia". Editorial Siglo XXI. Buenos Aires, Argentina.

- Piaget, J García, R (1984). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI editores.

- Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556).

- Sepúlveda, O. (2016). Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

- Tignol J P (2002) Galois' Theory of Algebraic Equations. World Scientific.

- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2004). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (URL: http://www.ugr.es/local/jgodino).