Tesis de la

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Orientación Matemática

Una propuesta didáctica centrada en la participación y el aprendizaje colaborativo para la enseñanza del concepto de derivada en la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Luján

Torelli Ana Clara

Director: Dra. Martínez Alejandra Mercedes
Codirector: Dra. Fracchia Claudia Carina

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Comahue

2022

Dedico este trabajo a mis hijos Ezequiel, Noel y Liz, motores que me impulsan cada día a superarme para lograr mayores herramientas y ayudarlos en sus propias superaciones.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer, en primer lugar, a mi directora de tesis Alejandra Martínez por su acompañamiento en todo el proceso, por su ayuda incondicional y las posibilidades de crecimiento que me ofrece día a día.

A mi codirectora Carina Fracchia por su dedicación y por sus aportes en este trabajo.

A mis hijos Ezequiel, Noel, Liz y a mi hermana Lucía que me brinda un invalorable apoyo incondicional y alienta todos mis emprendimientos.

A mi mamá porque ella me forjó para ser una persona emprendedora y a valorar la superación a través del estudio, el trabajo y la dedicación.

A Ana, Adelaida, Silvina, Lidia y especialmente a Roxana que participaron de las experiencias de cátedra y me brindaron todo su apoyo y conocimientos.

Mis agradecimientos a todas las otras personas que directa o indirectamente, colaboraron en el desarrollo de este trabajo.

Ana Clara

Resumen

La posibilidad de producir conocimiento didáctico necesita sustentarse en una alternativa metodológica que ofrezca modos de validación. La Ingeniería Didáctica se muestra especialmente adecuada en tanto propone la modelización del conocimiento a través de situaciones de enseñanza.

Con el fin de mejorar la calidad educativa de los estudiantes, evitar el fracaso y las dificultades de permanencia y entendiendo que para producir un cambio real en las posibilidades de aprender de los estudiantes resulta indispensable hacer foco en la propuesta de enseñanza áulica.

En el presente trabajo se conciben distintas estrategias de enseñanza que apuntan a modificar el contrato didáctico en la clase mediante el diseño, la implementación y el registro de situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Se ponen como objeto de análisis contenidos de matemática, en este caso el concepto de derivada, proponiendo elementos que les permitan a los alumnos pensar nuevas relaciones para llegar a los conceptos a través de un aprendizaje colaborativo.

La propuesta se centra también en el proceso de evaluación formativa, estableciendo relaciones entre dicho proceso y las condiciones de enseñanza-aprendizaje.

Palabras claves

Ingeniería didáctica - Secuencia didáctica – Aprendizaje colaborativo – Evaluación formativa.

Abstract

The possibility of producing didactic knowledge needs to be supported by a methodological alternative that offers validation modes. Didactic Engineering is particularly appropriate as it proposes the modeling of knowledge through teaching situations.

In order to improve the educational quality of students, avoid failure and permanence difficulties, and understanding that in order to produce a real change in students' learning possibilities it is essential to focus on the classroom teaching proposal.

In this paper we conceive different teaching strategies that aim at modifying the didactic contract in the classroom through the design, implementation and recording of teaching-learning situations.

The object of analysis is mathematics content, in this case the concept of derivative, proposing elements that allow students to think of new relationships to reach the concepts through collaborative.

The proposal also focuses on the formative evaluation process, establishing relationships between this process and the teaching-learning conditions.

Key words

Didactic engineering - Didactic sequence - Collaborative learning - Formative evaluation.

Índice General

Capítulo 1 Introducción 1

1.1 Propósitos de investigación 1

1.2 Definición del problema 2

1.3 Objetivos 7

1.4 Hipótesis 8

1.5 Marco de trabajo 8

1.6 Organización de la tesis 9

Capítulo 2 Marco teórico 10

2.1 Ingeniería didáctica 10

2.2 Aprendizaje colaborativo 14

2.3 Secuencia didáctica y su relación con el contrato didáctico. 15

2.4 Evaluación Formativa 17

Capítulo 3 Diseño metodológico 22

3.1 Características generales de la propuesta didáctica 22

3.2 Análisis preliminares 23

3.2.1.Análisis epistemológico 23

3.2.2. Análisis didáctico 29

3.2.3. Análisis cognitivo 32

3.3 Análisis a priori: El diseño de la propuesta 33

3.3.1 Consideraciones generales de la propuesta 34

3.3.2 Ejercicio inicial de la cursada 36

3.3.3 Secuencia didáctica 37

3.3.4 Trabajo Práctico Obligatorio 46

3.3.6 Evaluación grupal 48

3.3.7 Evaluación individual 50

3.4 Experimentación 51

3.4.1 Consignas del ejercicio inicial 51

3.4.2 Secuencia didáctica 52

3.4.3 Evaluación grupal 59

3.4.4 Evaluación individual 60

3.5 Análisis a posteriori 60

3.5.1 Análisis sobre la consigna del ejercicio inicial 61

3.5.2 Análisis de la secuencia 62

3.5.3 Análisis del Trabajo Práctico Obligatorio 64

3.5.4 Análisis de la Evaluación grupal 64
3.5.5 Análisis de la Evaluación individual 65
Capítulo 4 Análisis de entrevistas 83
4.1 Comentarios respecto al trabajo grupal 83
4.2 Comentarios respecto a la consigna 6 85
4.3 Comentarios de las evaluaciones 85
4.4 Comentarios de los trabajos prácticos obligatorios 86
4.5 Desdoblamiento de parciales 87
Capítulo 5 Resultados 89
Capítulo 6 Conclusiones 102
Líneas de trabajo futuras 105
Bibliografía 110
Anexos 115
Anexo 1 – Producción de los estudiantes 115
Anexo 2 – Entrevistas 131
Anexo 3 – Ejercicios complementarios 140

Índice de Figuras

3. 1 Primer trayectoria 39
3. 2 Segunda trayectoria 39
3. 3 Representación de cuadrados 41
3. 4 Desarrollo de la población de la mosca de fruta 45
3. 5 Foto de la trayectoria del chorro de agua 47
3. 6 Trayectoria del chorro de agua 47
3. 7 Gráfica de una función por parte 48
3. 8 Rendimiento de miel en función del número de obreras 49
3. 9 Gráfico de una función por parte 51

5. 1 Primer trayectoria 91
5. 2 Segunda trayectoria 91
5. 3 Representación de cuadrados 93
5 4 Desarrollo de la población de la mosca de fruta 96
5 5 Gráfico de f(x) 97
5 6 Gráfico de g(x) 97
5 7 Gráfico de h(x) 98
5 8 Gráfico de la derivada a) 98
5 9 Gráfico de la derivada b) 98
5 10 Gráfico de la derivada c) 99
5 11 gráfica de la función f(x) y su derivada 99
5 12 Gráfica de una función por parte 101
5 13 Gráfica de una función por parte 102
5 14 Gráfica de f(x) 105

Índice de cuadros

3. 1 Definición de derivada.. 44
3. 2 Rendimiento de miel por número de obreras.. 49
3. 3 Datos e incógnitas de las dos consignas presentadas... 59

4. 1 Entrevistas. Comentarios respecto al trabajo grupal.. 84
4. 2 Entrevistas Comentarios respecto a la consigna 6.. 85
4. 3 Entrevistas Comentarios respecto a las evaluaciones 86
4. 4 Entrevistas Comentarios respecto al trabajo práctico obligatorio 87
4. 5 Entrevistas Comentarios respecto al desdoblamiento de parciales 88

Capítulo 1
Introducción

1.1 Propósitos de investigación

Las universidades argentinas se han visto en la necesidad concreta y urgente de implementar acciones que reviertan la situación de desgranamiento y abandono estudiantil.

Con el fin de mejorar la calidad educativa de los estudiantes, evitar el fracaso y las dificultades de permanencia, desde 2007 la Universidad Nacional de Luján (UNLu) contó con un programa de tutorías para estudiantes de la carrera de Ingeniería Agronómica de dicha Institución. La participación como docente en dicho programa y, a su vez, desde 2011, su participación en un proyecto interdisciplinario de investigación relacionado con estas tutorías, han situado a la autora de esta tesis en una perspectiva que entiende que para producir un cambio real en las posibilidades de aprender de los estudiantes resulta indispensable hacer el foco en la propuesta de enseñanza áulica. La misma se lleva a cabo en la asignatura Matemática General, ubicada en el segundo cuatrimestre del primer año de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Luján.

La posibilidad de producir conocimiento didáctico necesita sustentarse en una alternativa metodológica que ofrezca modos de validación reconocidos por la comunidad científica. Desde su perspectiva, la Ingeniería Didáctica, se muestra especialmente fértil en tanto abre un proceso de problematización de los contenidos y propone la modelización del conocimiento a través de situaciones de enseñanza basadas en la realidad, otorgándole valor a la propuesta de esta investigación.

La Ingeniería Didáctica se considera pertinente para elaborar una propuesta de enseñanza porque supone, de manera inherente al diseño metodológico, un ida y vuelta recursivo entre la reflexión y la acción. Esta propuesta metodológica otorga potencialidad al estudio de casos a través del desarrollo de análisis preliminares, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori, a fin de indagar y comprender mejor la problemática y plantear soluciones que posibiliten un mejor aprendizaje de la de los objetos matemáticos, en particular, de la derivada, que es el objeto de interés en el que se enfoca este trabajo. El concepto de derivada, es considerado por su importancia para la formación de un ingeniero, posibilitando la modelización, interpretación, comprensión y análisis de los fenómenos de constantes cambios y es un contenido que presenta dificultades de aprendizaje para que el estudiante logre una conceptualización significativa para su formación.

En el trabajo realizado para la presente tesis de Maestría, se conciben distintas estrategias de enseñanza que apuntan a modificar el contrato didáctico en la clase. Se detallan el diseño, implementación y registros de situaciones de enseñanza-aprendizaje, poniendo como objeto de análisis contenidos de matemática, en este caso el concepto de derivada, en el que se propone su abordaje, no desde el enfoque tradicional sino a partir de la Ingeniería Didáctica, proponiendo elementos que les permitan a los alumnos pensar nuevas relaciones para llegar a los conceptos. Se aborda la metodología a través de un aprendizaje colaborativo entre pares y centrándose también en el proceso de evaluación formativa, estableciendo relaciones entre dicho proceso y las condiciones de enseñanza-aprendizaje.

El aprendizaje colaborativo entre los estudiantes, es considerado un trabajo que se apoya en los desarrollos teóricos acerca de los aspectos sociales -interacción entre pares- y su influencia en el desarrollo cognitivo ocupa un lugar prestigioso, lo que requiere repensar la modalidad de evaluación, articulando lo grupal con lo individual. El desarrollo del proyecto de investigación cualitativa prevé la realización de un conjunto de acciones donde la evaluación formativa pone la mirada en la revisión de la secuencia didáctica como un proceso retroalimentado por la identificación de aquellas cuestiones que serían pasibles de incluir -y de qué manera- para la acreditación y aquellas cuestiones que deberían enfatizarse en la propuesta de enseñanza. Dicha evaluación, es considerada como un proceso de indagación y comprensión de la realidad educativa, emitiendo un juicio de valor sobre la misma, orientando a la toma de decisión y la mejora.

El análisis de registros, apoyado en las cuestiones relevantes, permitirá inferir sobre los resultados y obtener conclusiones.

1.2 Definición del problema

Durante la mitad del último siglo, las universidades de diversos países del mundo incluyendo Argentina, atravesaron un proceso de cambio, que en los reportes de la Conferencia Mundial sobre Educación Superior 2009 (Altbach, Reisberg y Rumbley,

2009) realizada en Paris, ha sido calificado como "revolución académica". Un cambio de expansión, que se manifiesta a través del aumento de la matrícula, en forma masiva, continua y persistente.

Este cambio estructural que ha incluido un sector de la población antes excluido de la educación superior, conlleva a vincularlo con la mayor deserción que se observa en las universidades, compartiendo una desigualdad social intensa y creciente, que se da en especial durante el primer año de estudio.

Muchos son los fenómenos relacionados con la deserción en la educación superior. Uno de ellos es el status socioeconómico, mencionado por Tinto (2004), indicando que el abandono en los estratos de bajos recursos es mucho mayor y podría haber aumentado en la última década. Según Habley y McClanahan (2004), la mayoría de las organizaciones atribuye la deserción principalmente a las características estudiantiles y no a rasgos institucionales, y es por ello que las intervenciones se orientan hacia los estudiantes resguardando el papel decisivo de las organizaciones. Con respecto al rol del docente en el aula, considera que ningún esfuerzo entorno a la deserción, y a todo lo referente al alumno ingresante, puede conseguir impactos relevantes, y menos a largo plazo, sin el compromiso de los profesores.

Según Ezcurra (2011), los procesos de masificación y diversificación del alumnado universitario constituyen logros sociales altamente valorados -porque acercan la expectativa del acceso a sectores históricamente relegados de esa posibilidad- pero han puesto en evidencia la escasa capacidad de respuesta de la institución para generar estrategias efectivas de retención. El fracaso académico y el abandono de los estudios frecuentemente funcionan como refuerzos de los mecanismos de exclusión social, colaborando con el juego de reproducción de las desigualdades ya instaladas.

El ingreso a la universidad y las posibilidades de los estudiantes de formar parte de ella para realizar su proyecto formativo constituyen un proceso complejo, que se despliega tanto en el plano social como en el institucional y en el individual. Las universidades se han visto en la necesidad concreta y urgente de implementar acciones que revirtieran la situación de desgranamiento y abandono estudiantil, agudizada por la masificación y diversificación del alumnado. El ingreso a la vida universitaria implica para los jóvenes un cambio sustancial en muchos órdenes de la vida, y las acciones encaminadas a prevenir, acompañar, orientar y contener a los estudiantes en este período revisten una importancia fundamental. Las universidades en nuestro país han implementado programas de mejoramiento de la calidad desde los años 90, donde los sistemas de tutorías son propuestos -con una gran variedad de matices- como una estrategia de acompañamiento a la entrada a la universidad, que permitiría acrecentar las posibilidades de éxito en el aprendizaje de los estudiantes (en especial aquellos que se encuentran en situación de riesgo académico) y retenerlos hasta completar el ciclo de grado.

La experiencia desarrollada desde el año 2007 con tutores de la carrera de Ingeniería Agronómica, en la UNLu (que ha tenido como fin mejorar la calidad educativa de los estudiantes, evitar el fracaso y las dificultades de permanencia) y a partir del trabajo realizado en un grupo de investigación desde el año 2011[1], han situado a la autora de esta tesis en una perspectiva que entiende que la función del tutor dirigida a resolver problemas de adaptación no resulta suficiente para conseguir que los estudiantes puedan comprender qué significa estudiar en la universidad, apropiarse de los contenidos de las asignaturas y aprobar las evaluaciones que se requieren para seguir en carrera. También entiende que es necesario que los estudiantes reconozcan en qué sentido es diferente el estudio universitario a sus experiencias anteriores.

Como resultado de esa investigación se han observado algunos conflictos a considerar:

- *Las causas del fracaso académico se atribuyen a las características de los estudiantes.*

Muchos estudios diagnósticos presentan la idea según la cual el fracaso es, en su mayor parte, atribuible a las características personales de los estudiantes. Según García (2014), el bajo desempeño académico suele entenderse como producto de una variedad de factores (sociales, psicológicos, culturales, económicos, emocionales, intelectuales, etc.) que afectan la posibilidad individual de aprender. Entre los problemas más frecuentemente aludidos se mencionan deficiencias de atención, memoria o conceptualización; falta de hábitos o estrategias de estudio; dificultades para la comprensión y producción escritas y para acceder a niveles de abstracción medios y altos; dificultades para organizar el propio tiempo; desmotivación; desorientación vocacional; inseguridad e inmadurez; poca tolerancia al fracaso; escasa conciencia de las propias dificultades.

- *Los estudios en la universidad, en su primer año, están íntimamente ligados a aprender nuevos conocimientos y las dificultades no pueden sólo ser atribuidas a la mala formación alcanzada por los niveles de enseñanza anteriores, los alumnos*

[1] En el trabajo de investigación participó un grupo del equipo de pedagogía universitaria de la UNLu.

necesitarán comprender que estudiar y aprender en la universidad es muy distinto a los niveles anteriores.

Enfrentar los estudios superiores constituye una exigencia intelectual que requiere de conocimientos y herramientas que habitualmente no han adquirido con anterioridad. Es necesario que los docentes asistan a los alumnos para que puedan hacerse cargo progresivamente de su propio aprendizaje. En este sentido, la autora considera que no hay posibilidades de conseguirlo si no se realiza un trabajo conjunto en algunos contenidos que necesitan aprender y aprobar. La comprensión profunda de los conceptos y el desarrollo de la capacidad de aplicarlos en forma creativa, para plantear y resolver problemas, es lo que hoy en día necesita cualquier estudiante de las carreras para desarrollar adecuadamente su profesión.

- *Enseñar y aprender son procesos relacionados, pero no idénticos.*

¿Los tiempos de enseñanza y los tiempos de aprendizaje están disociados? ¿Dependerá de la forma de enseñar? El tiempo que habitualmente un docente destina a la enseñanza de los contenidos difícilmente coincide con el tiempo del aprendizaje. Por un lado, los docentes deben respetar un programa, en un determinado periodo de tiempo, y piensan en su mayoría, que producir cambios en las estrategias de enseñanza podría no permitirles cumplir con los contenidos propuestos. Por otro lado, la forma en la que se presentan los contenidos afecta de manera sustancial no sólo las posibilidades que se le ofrecen al alumno para aprenderlos sino también el sentido que puede otorgarle a ese conocimiento (su campo de aplicación, el tipo de problemas para los que se constituye en herramienta, etc.), es decir, lo que en realidad aprende. Esto es una responsabilidad de la enseñanza y estará dada por la presentación que se hace de los conceptos, la selección de ideas asociadas a los mismos, el vínculo que se establece con otros conceptos, la reiteración con la que son planteados, etc. lo que permita achicar la brecha entre la enseñanza y el aprendizaje.

- *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.*

El aprendizaje de la matemática supone, junto a la lectura y la escritura, uno de los aprendizajes fundamentales de la educación elemental, dado el carácter instrumental de estos contenidos. De ahí que entender las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se haya convertido en una preocupación manifiesta de buena parte de los profesionales dedicados al mundo de la educación. El cálculo es el área de las matemáticas de mayor importancia en los currículos de distintas carreras universitarias. Este hecho se debe, fundamentalmente a su funcionalidad al modelar y optimizar diferentes procesos físicos. El aprendizaje del cálculo y, en particular de la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual ya que trae consigo numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento numérico-abstracto. Artigue (1995) y Flores Peñafiel (2014) expresan que, si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos.

Para producir un cambio real en las posibilidades de aprender de los estudiantes, es necesario contar con algunas condiciones dentro del aula, en las clases habituales de las asignaturas, en especial las del primer año. Surge así la idea del diseño, implementación y análisis de situaciones de enseñanza concretas en la asignatura Matemática General de la Carrera Ingeniería Agronómica, que apunten a modificar el *contrato didáctico* en la clase (ver, por ejemplo, Brousseau, 1994, Chevallard, 1997 y Barreiro, 2012), utilizando la metodología basada en la *Ingeniería Didáctica*, desarrollada por numerosos investigadores (Brousseau,1986, Artigue, 1995, Perrin, 2009 y Carnelli, 2012) entre otros). Se trata de situaciones en las que se propone el abordaje de algunos contenidos de la asignatura, no desde el enfoque tradicional, sino a partir de proponer a los alumnos otros elementos que les permitan pensar nuevas relaciones para llegar a esos conceptos, problematizando los contenidos y modelizando el conocimiento a través de situaciones de enseñanza.

Se debe tratar de instituir y construir un sentido del conocimiento matemático logrando, a través de un trabajo satisfactorio, acortar las distancias entre las expectativas esperadas y las experiencias educativas de los estudiantes, en las que ellos puedan apropiarse del conocimiento. Se busca contribuir a que construyan una imagen valorizada de sí mismos, que recuperen el deseo de aprender y se involucren en este trabajo.

La derivada será el contenido en el que implementa la propuesta didáctica utilizando el proceso de enseñanza-aprendizaje que es la *modelización* (Segal, 2008), donde tomaremos situaciones sencillas de la realidad y la relacionaremos con sistemas teóricos-matemáticos para poder producir conocimientos nuevos, interpretar, estimar y predecir resultados y conclusiones.

La propuesta fue implementada en la Universidad Nacional de Luján, dentro de la signatura Matemática General de la Carrera Ingeniería Agronómica que se dicta en el segundo cuatrimestre del primer año de la misma. Esta universidad fue creada el 20 de diciembre de 1972 como parte de una política de creación de nuevas universidades con un perfil diferenciado por un proyecto de fuerte orientación regional y articulación con el sector productivo. La carrera de Ingeniería Agronómica brinda una formación científica integral que permite al profesional participar en los diferentes procesos productivos agropecuarios de diversos contextos socioeconómicos y culturales, respetando el ambiente. Creemos que con esta propuesta aportamos a los estudiantes un pequeño apoyo para que inicien el camino de su carrera.

1.3 Objetivos

Este proyecto de investigación se centra en una propuesta de enseñanza que permita modificar algunas de las dificultades visualizadas. Así la situación de enseñanza dentro del aula se constituye en objeto de estudio; se propone entonces.

Objetivo General: diseñar, implementar y analizar una propuesta didáctica, que incluye una secuencia didáctica y su relación con el proceso de evaluación formativa, que ayude a los estudiantes a aprender y a estudiar los contenidos más significativos, en este caso el concepto de derivada, mediante el trabajo grupal y colaborativo.

Entre los objetivos específicos podemos mencionar:

1) Analizar las intervenciones didácticas más adecuadas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, intentando lograr que piensen nuevas relaciones para llegar a nuevos conceptos, incluyendo situaciones problemáticas para que puedan aplicar el concepto de derivada.
2) Estudiar las características que deberían presentar los instrumentos de evaluación y las condiciones en las que sería conveniente proponerlas para que se constituyan en parte del proceso de aprendizaje y no sólo una forma de acreditación. Es decir, avanzar hacia la elaboración de una evaluación formativa.
3) Diseñar una secuencia didáctica para enseñar el concepto de derivada que será utilizada en las clases de Matemática General de la Carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Luján precisando los criterios que deberían intervenir en el diseño las situaciones de evaluación guardando consistencia con la propuesta de enseñanza y aprendizaje de la disciplina, centrada en sus aspectos conceptuales.

4) Fortalecer el trabajo grupal entre pares logrando la participación y el aprendizaje colaborativo para que los estudiantes puedan hacerse cargo progresivamente de sus propios aprendizajes.
5) Transmitir la importancia de la participación individual y grupal, y el valor del trabajo colaborativo como camino para la construcción del conocimiento.
6) Implementar la propuesta didáctica y estudiar cualitativamente los resultados obtenidos durante y al finalizar su implementación.
7) Analizar la propuesta didáctica utilizando los registros realizados (filmaciones), junto con las entrevistas realizadas a los estudiantes, para obtener conclusiones y, eventualmente rediseñar la misma.

1.4 Hipótesis

Se plantean las siguientes hipótesis de investigación:

- La elaboración de una propuesta didáctica, en este caso sobre el concepto de derivada, centrada en el aprendizaje colaborativo entre pares y que apunte a modificar el contrato didáctico en la clase, disminuye la deserción y mejora la aprobación de la asignatura Matemática General de la Carrera de Ingeniería Agronómica.
- La evaluación formativa como parte constitutiva de la propuesta, con la mirada puesta en la revisión de la secuencia, permite realizar modificaciones a la misma para obtener mejores logros.

1.5 Marco de trabajo

Esta tesis se enmarca en los trabajos realizados en los proyectos de investigación "La tutoría universitaria: un proceso de construcción" y "Repensar la evaluación y las condiciones en las que se propone, una deuda vigente en la Universidad".

El primero de los proyectos fue interdisciplinario orientado a tutorías para los estudiantes de agronomía que luego se reformuló para poder trabajar directamente en el aula, en las clases de Matemática General, con nuevas intervenciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El segundo proyecto, implementado en la misma asignatura, fue orientado a modificar la evaluación, para tener coherencia con la metodología de enseñanza.

1.6 Organización de la tesis

El estudio que presentamos a continuación se organiza en 6 capítulos.

En el Capítulo 1 se presenta el propósito de la investigación, se define el problema por el cual se inicia la misma y el marco de trabajo tomado como base para la investigación.

En el Capítulo 2 se referencia el marco teórico de la metodología utilizada: la ingeniería didáctica, el aprendizaje colaborativo, la secuencia y el contrato didáctico y evaluación formativa.

En el capítulo 3, correspondiente al diseño metodológico, se detallan las cuatro fases de la ingeniería didáctica: los análisis preliminares, detallando los análisis epistemológicos, didácticos y cognitivos; los análisis a priori donde se mostrará parte de la secuencia didáctica, los instrumentos de evaluación diseñados y las consideraciones tomadas con el propósito de anticipar el comportamiento de los estudiantes, la dinámica de la clase y las intervenciones del docente; la experimentación, con los detalles de lo ocurrido en las clases y el análisis a posteriori donde se incluyen la confrontación entre lo planificado y lo observado durante la implementación y las producciones de los estudiantes.

En el capítulo 4 se analizan las entrevistas realizadas a los estudiantes en forma grupal.

En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos en base a los objetivos planteados.

Finalmente en el capítulo 6 se mencionan las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 2
Marco teórico

2.1 Ingeniería didáctica

El término de ingeniería didáctica según Artigue (1995), se denomina a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo de un ingeniero, ya que realiza su proyecto basándose en los conocimientos científicos de su dominio y se somete a un control de tipo científico, trabajando a su vez con objetos más complejos que los depurados por la ciencia.

En los años ochenta esta visión se percibe como el medio para abordar dos cuestiones: la relación entre investigación y la acción en el sistema de enseñanza, y el papel que conviene hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en clase, dentro de la metodología de la investigación didáctica. Para definir el problema de la ingeniería didáctica hay que definir la relación con el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas, el problema de acción y los medios para la acción, sobre el sistema de enseñanza.

La noción de ingeniería didáctica llega a significar tanto producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigación que han utilizado metodologías externas a la clase (cuestionarios, entrevistas), como una metodología de investigación específica.

Como método de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por ser un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, en la concepción, realización, observación y análisis de una secuencia de enseñanza. Esta metodología se caracteriza también por el registro en la cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. En esta investigación, la ingeniería didáctica se ubica en el registro de los estudios de caso y su validación en esencia interna, está basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

La ingeniería didáctica es "singular", no tanto por los objetivos de la investigación que entran en sus límites sino por las características de su funcionamiento metodológico. Según Carnelli, G y Marino, T.(2012)

> *"la elaboración de un problema es un paso de la ingeniería didáctica. En este contexto, el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase, concebidas, organizadas y*

> *articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. (...) es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el proceso adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. (...) designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase".* (p. 40)

En esta metodología podemos distinguir cuatro fases en la descripción temporal del proceso experimental: la fase 1 de análisis preliminares, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la fase 3 de experimentación y la fase 4, y última, de análisis a posteriori y evaluación. (Perrín, 2019; Campos 2006).

Fase 1: Análisis preliminares

Esta fase no sólo se basa en un marco teórico didáctico general y en los adquiridos en el campo de estudio, sino también en un conjunto de análisis preliminares. Mencionamos los más frecuentes:

- Análisis epistémico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- Análisis de las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- Análisis del campo de restricciones donde se va a implementar la realización didáctica.

Todos estos análisis se deben realizar teniendo en cuenta los objetivos específicos de cada investigación.

Desde esta mirada sistémica, según Campos (2006) todos estos análisis se realizan atendiendo tres planos:

- la dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego, donde se analiza la evolución del saber y permite conocer la distancia que separa a ese saber del saber a enseñar,
- la dimensión cognitiva asociada a las características del público al que se dirige la enseñanza del concepto elegido, y
- la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del

sistema de enseñanza. En este plano se analiza cómo se va a enseñar, la situación didáctica, la bibliografía, el programa de la asignatura y todo lo vigente desde la enseñanza.

La teoría didáctica en esta fase constituye un apoyo para el investigador y, si existen profundizaciones teóricas generales, se encontrarán en las fases de análisis a posteriori y evaluación.

A menudo, uno de los puntos de apoyo esenciales de la concepción reside en el análisis preliminar de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y de los errores más frecuentes. Así, la ingeniería se diseña para provocar, de manera controlada, la evolución de las concepciones.

Los trabajos realizados por el investigador como pilares de su ingeniería que se realizan siempre teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, se retoman y profundizan en las diferentes fases y sólo mantienen su calidad de “preliminares” en un primer nivel de elaboración.

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

En esta etapa el investigador toma la decisión de elegir y determinar cómo actuar sobre las variables de comando -las no fijadas por las restricciones- que supone pertinentes con relación al problema estudiado. Éstas pueden ser globales (o macro-didácticas), que son las relacionadas con la organización de la situación, o específicas-locales (o micro-didácticas), que son las relacionadas con la organización de una secuencia.

El análisis a priori es concebido como un análisis de control de significado, es decir, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica, pretende, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. Esta fase tiene entonces como objetivo determinar cómo las secuencias preestablecidas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes, por lo que este análisis se basa en la formulación de hipótesis. El mecanismo de validación de estas hipótesis, en consecuencia, se pone en funcionamiento en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva. Se centra en las características de una situación a-didáctica que se quiere diseñar y que se va a tratar de proponer a los estudiantes. Se describen las selecciones a nivel local y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden; se analiza qué podría ser lo que está en juego para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puestas en práctica, en un trabajo casi aislado del profesor. Se prevén los campos de comportamiento posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar que los comportamientos esperados sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Fase 3: Experimentación

Es la fase de la ingeniería didáctica en la que se implementa la secuencia didáctica en una población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación, respetando las decisiones realizadas en los análisis a priori. Se explicitan los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación. Se establece el contrato didáctico. Se aplican los instrumentos de investigación. Se realizan registros de observaciones, tanto de las producciones de los estudiantes, del desarrollo de las clases y de las intervenciones del docente.

Cuando la experimentación es prolongada, favorece la realización de un análisis a posteriori local, confrontando con los análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias.

Fase 4: Análisis a posteriori

Luego de la fase de experimentación sigue la de análisis a posteriori de los datos recogidos a lo largo de la experimentación, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, y las producciones de los estudiantes, realizadas tanto en clase como fuera de ella. Los mismos se complementan con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza.

Esta fase funciona de contraste con el análisis a priori, desplegándose aquí en toda su dimensión el carácter interno de validación propio de la metodología. Esta validación tiene como condición previa que las situaciones relativas a contenidos, implementación, rol del profesor, etc. hayan sido controladas desde el análisis a priori.

2.2 Aprendizaje colaborativo

La mayoría de las investigaciones han centrado la atención en la importancia de las interacciones entre pares para la socialización del comportamiento y la personalidad.

Los desarrollos teóricos acerca de la construcción del conocimiento (en especial la psicología social genética) han mostrado cómo el aprendizaje no depende sólo de los procesos psicológicos individuales, o sea, de un desarrollo endógeno, sino además -y fundamentalmente- de las posibilidades de interactuar con otros (ver Perret-Clermont y Nicolet, 1992). Según estas posturas, el aprendizaje no se resuelve en la interacción del sujeto con el objeto de aprendizaje, sino en esta interacción, pero mediatizada por la interacción con los otros.

La importancia y relevancia de las relaciones entre compañeros como estrategias para generar mayores cotas de conocimiento, tanto cognitivo como social, dependen de una variable que es la posibilidad de intercambiar y confrontar puntos de vistas propios con los ajenos, sin importar tanto que las argumentaciones sean correctas, sino que generen discusión y diálogo. Esta interacción puede resultar más adecuada que la interacción con el adulto para fomentar la construcción del conocimiento en contraste con el aprendizaje mecánico.

Son necesarias para que se produzca este avance cognitivo, ciertas condiciones como la de poseer ciertos prerrequisitos cognitivos que le posibiliten al sujeto la construcción del conocimiento a partir de la diferenciación y coordinación con otros sujetos, los cuales deben ser capaces de comunicarse en forma adecuada y procesar correctamente la información de sus pares. Es necesario que haya oposición de respuestas entre los sujetos. La toma de conciencia, en cada sujeto, de que existe una respuesta diferente a la propia, en susceptible de producir un conflicto interno, buscando, en la confrontación cognitiva, una superación de las diferencias y contradicciones para llegar a una respuesta común.

Es en la dinámica del conflicto socio-cognitivo, es decir, en una dinámica interactiva caracterizada por una cooperación activa, que considera la respuesta o punto de vista de los otros y busca, en la confrontación cognitiva, una superación de las diferencias y contradicciones para llegar a una respuesta en común. Cuando ella se instala no hay duda de que tal dinámica puede ser eficaz.

Este tipo de funcionamiento socio-cognitivo utilizado en la interacción para resolver una situación problemática, y su eficiencia en términos de beneficio individual, dependen también del tipo de funcionamiento cognitivo inducido por la situación problemática, es decir, que para obtener progresos individuales por interacción en la resolución es necesario preguntarse, para cada tipo de progreso cognitivo buscado, cuál es la mejor manera de construir la situación problemática, de tal manera que favorezca dicho funcionamiento.

2.3 Secuencia didáctica y su relación con el contrato didáctico.

Se considera al aprendizaje como modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el docente sólo debe provocar (Brousseau, 1994). El docente debe buscar una situación apropiada, una situación de aprendizaje donde es necesario que la pregunta inicial que el estudiante piensa frente a la pregunta planteada, no sea la que queremos enseñar. La pregunta inicial sólo debe permitir al estudiante utilizar una estrategia de base con la ayuda de los saberes previos, pero pronto debe notar que dicha estrategia es ineficaz, y de esta manera, se vea obligado a realizar acomodaciones, es decir, modificaciones a su sistema de conocimiento para responder a la situación planteada.

El docente debe proponer al estudiante una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y a las exigencias del medio. Esta situación debe tener una construcción epistemológica y cognitiva intencional para que su resolución se vuelva responsabilidad del estudiante, quien se haga cargo de obtener un resultado. Es necesario que el estudiante tenga un proyecto y acepte su responsabilidad.

La didáctica no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza, sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación de enseñanza, y corregir y mejorar las que se han producido y formular interrogantes sobre lo que sucede.

El profesor debe imaginar y proponer a sus estudiantes situaciones que ellos puedan vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como solución óptima y posible de ser descubierta de los problemas planteados. También debe darle los instrumentos para reencontrar en esta vivencia lo que el saber cultural y comunicable les ha querido enseñar, pudiendo de este modo identificar su producción con el saber científico y cultural de su época.

En la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre las buenas preguntas y las buenas respuestas (Brousseau, 2015). Si se supone que el estudiante es capaz de producir su saber, se garantiza la comprensión del mismo. Obtiene su saber utilizando sus propias experiencias, de sus interacciones con el medio, que es un factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrio, adaptándose al dar respuestas nuevas, evidenciando el aprendizaje.

La enseñanza exige entonces al docente a que provoque en el estudiante las adaptaciones deseadas por una elección sensata de los problemas que él le propone. Estos problemas elegidos deben ser aceptados por el estudiante y deben hacerlos actuar, hablar, evolucionar por su propio movimiento. Entre el momento en el que el estudiante hace suyo el problema y da una respuesta, el docente no debe intervenir en calidad de oferente del conocimiento que desea introducir. El estudiante debe construir el conocimiento en forma independiente y lo habrá adquirido verdaderamente cuando él sea capaz de aplicarlo en situaciones fuera del contexto de enseñanza y sin indicaciones intencionales del docente, tal como mencionan Brousseau (2007), Gascón Pérez, J. (1997) y Sadovsky, (2005).

Para que esto se logre el docente comunica o no información, según lo crea conveniente, se encuentra implicado en un juego, observando y analizando las interacciones del estudiante con los problemas que él ha planteado.

Las reglas de este juego y estrategias que utiliza el docente para poner en escena las situaciones de enseñanza, conforman el contrato didáctico (Sadovsky, 2005). La evolución de estas estrategias requiere producciones de conocimientos que permitan a su vez nuevas concepciones de nuevas situaciones. Para la evolución de las situaciones se modifica el contrato didáctico que permite entonces obtener situaciones nuevas. Este contrato didáctico depende de los conocimientos en juego.

En la didáctica moderna, la enseñanza es la devolución de una situación, y el aprendizaje es la adaptación a esta situación.

El docente no debe efectuar la comunicación de un conocimiento, sino la devolución del problema adecuado para lograr el aprendizaje, si el estudiante resuelve el problema o situación. En caso que el estudiante evite el problema o no lo resuelva, el docente debe ayudarlo o plantear una situación más sencilla.

Se establece una relación que determina lo que cada participante, el docente y el enseñando, tiene la responsabilidad de gestionar y de la cual será de una forma u otra responsable ante el otro. Lo importante aquí es entonces, la parte del contrato didáctico que es específica del contenido.

El docente debe aceptar la responsabilidad de los resultados y de brindar al estudiante los instrumentos efectivos para la adquisición de los conocimientos. En caso que haya una ruptura de este contrato, se buscará un nuevo contrato que dependa del nuevo estado de saberes adquiridos y los deseados. El contrato didáctico es el instrumento del docente, para establecer las reglas y estrategias de base, adaptándolas después a los cambios de juegos del alumno.

La secuencia didáctica entendida como un sistema de elementos interrelacionados, que dotan de una dirección a los procesos de enseñanza-aprendizaje, pueden pensarse tomando como eje los contenidos, las actividades o los objetivos pero, cualquiera sea el caso, siempre han de estar imbricados estos elementos de modo tal que se sostengan unos sobre otros, y sean coherentes con las reales necesidades de los procesos de enseñanza – aprendizaje. En el marco de esta tesis, dicha secuencia estará centrada en que los alumnos pongan en juego su pensamiento matemático como herramienta para resolver las situaciones que se les proponen para introducir el concepto de derivada. El contrato didáctico rige en cada momento las obligaciones recíprocas entre el estudiante y el docente en relación a este concepto matemático.

Aquí también habrá que considerar cuál sería una proporción “saludable” entre lo algorítmico y lo conceptual para incluir en la evaluación.

2.4 Evaluación Formativa

El esfuerzo por medir con precisión los logros de los estudiantes considerando que los productos del aprendizaje pueden ser observados y deben ser verificados, llevó a establecer criterios y condiciones para la elaboración de las evaluaciones. Entre ellos, los más importantes se relacionan con la exigencia de objetividad, confiabilidad y validez. La primera se relaciona con la preocupación de que los métodos para clasificar los logros de los estudiantes sean lo suficientemente precisos y exhaustivos como para permitir que dos individuos diferentes con capacidad similar puedan obtener definiciones o puntajes similares ante la oportunidad de mostrar similares registros de conductas. La segunda exigencia -de confiabilidad- implica que la prueba ofrezca una muestra conveniente de la conducta del alumno; se relaciona con el grado en que un instrumento mide aquello que pretende medir y proporciona información adecuada de acuerdo con el uso que se hará de los resultados. La validez indica en qué medida un instrumento de evaluación proporciona una prueba real de la conducta buscada, reduciendo lo más posible el margen de error: para ello se debe procurar obtener más datos de los estrictamente necesarios, determinando con precisión cuáles son los indicadores que se tomarán. Malbergier (2009).

Para diversos autores tales como Guba y Lincoln (1989), Elliot (2000), Perrenoud (2011), Pérez Pino (2017), entre los que se incluye la autora de este trabajo, resulta central la consideración de otra perspectiva de análisis que complejiza y profundiza el proceso de evaluación, poniendo a la misma al servicio de conocer de mejor manera lo que acontece en una clase. Así, la evaluación supone la producción de información acerca de aquellos aspectos que se consideran relevantes -y que están presentes en los propósitos de la enseñanza- con el fin de emitir juicios de valor acerca de los logros alcanzados por los alumnos y acerca de la marcha de la enseñanza para tomar decisiones y reorientar las intervenciones.

Desde este punto de vista, la evaluación constituye una herramienta pedagógica que -bajo ciertas condiciones- permite poner en relación las propuestas de enseñanza con las posibilidades de aprender y los logros efectivos alcanzados por los estudiantes. En este trabajo de tesis consideramos el proceso de evaluación como un ejercicio de comprensión que colabora con la problematización de la situación de enseñanza en su conjunto -involucrando en ello también a los alumnos- buscando establecer relaciones entre las informaciones obtenidas. Encuadramos esta mirada en lo que Bertoni, Poggi y Teobaldo (1996) definen como *evaluación apreciativa sin modelo predeterminado*, que se interroga por el sentido y se fundamenta en la interpretación.

Según Bertoni, Poggi y Teobaldo, op. cit.

> *"Evaluar el funcionamiento de una clase implica construir -en el proceso mismo de investigación- el referente apropiado, es decir aquel que permita aprehender la singularidad del aula que se evalúa. Se apunta a comprender el objeto, no a juzgarlo. Se evalúa entonces para volver inteligible la realidad, para aprehender su significación".* (p. 26)

No se parte de un modelo predeterminado que nos permite acceder al aula y comprender el proceso de evaluación por mera aplicación de dicho modelo; sino que éste se construye en el conjunto de interacciones y relaciones -entre el conocimiento, las actividades, el contexto en el que se presentan, las interacciones entre los alumnos y los docentes, los instrumentos de evaluación, entre otras- que se pondrán en juego en la situación de clase, estableciéndose así los referentes de evaluación adecuados al proceso.

Vinculado a esta concepción de aprendizaje, Basabe, Cols y Feeney (2006) expresan:

> *"(...) si el aprendizaje es un proceso continuo de reorganizaciones sucesivas de las estructuras de conocimiento a partir de la interacción del sujeto con el medio, sus producciones constituyen evidencias parciales de un fenómeno dinámico que sólo puede apreciarse en acción. Por ello, la evaluación debe incorporar variables referidas al proceso mismo de construcción, que permitan interpretar las respuestas de cada alumno en el marco de su propio progreso*". (p. 8)

Se considera que las producciones del estudiante no constituyen "evidencias" de lo aprendido y siempre deben ser analizadas e interpretadas en función de las situaciones puntuales que atravesó, y los condicionamientos que pudieron haber intervenido. Por ejemplo, las maneras que encuentran los alumnos de resolver las situaciones planteadas pueden ser estudiadas, así sus *errores* se consideran como *información* que requiere ser interpretada.

La evaluación de los aprendizajes presenta según Torres(2013) básicamente dos funciones. En el ámbito educativo existe cierto acuerdo con respecto a dos representaciones de la evaluación ligadas al momento en el que se realiza y al sentido que adquiere: la evaluación *sumativa* y la evaluación *formativa.*

La primera, de carácter social de selección y de clasificación, orientadora del estudiante en cuanto si ha adquirido los conocimientos necesarios, al terminar una unidad de trabajo o al final del curso, para la acreditación.

Esta evaluación sumativa o certificativa se emplea para comprobar en qué medida los estudiantes han adquirido los conocimientos esperados y cumple, primordialmente, la función social, según Jorba y Sanmarti (1993) de

> *"informar de la progresión de los aprendizajes (...) y determinar qué alumnos han adquirido los conocimientos necesarios para poder acreditarles la certificación correspondiente que la sociedad requiere del sistema escolar*". (p. 3)

Constata o certifica la adquisición de conocimientos al final de un período de enseñanza y orienta las decisiones sobre la promoción de los alumnos en una asignatura, usualmente se refiere a una nota o una calificación y se asocia la misma con un examen.

La otra función, de carácter pedagógico o formativo, regula el proceso de enseñanza-aprendizaje donde se reconocen los cambios que se han de introducir progresivamente en este proceso para un aprendizaje significativo.

Esta evaluación formativa responde más directamente a una función pedagógica, en tanto las informaciones que provee sirven para tomar decisiones sobre la enseñanza.

Según Jorba y Sanmartí (2000)

> *"Aporta información útil para la adaptación de las actividades de enseñanza y aprendizaje a las necesidades del alumnado y de este modo mejorar la calidad de la enseñanza en general. Se inserta en el proceso de formación, ya sea en el inicio, durante él o al final pero siempre con la finalidad de mejorar el aprendizaje cuando aún se está a tiempo"*. (p. 3)

La evaluación con fines formativos sirve a la toma de conciencia que ayuda a reflexionar sobre la tarea de enseñar. Se asocia con una evaluación de carácter continuo realizada a través de diversos procedimientos además del examen.

Responde a una concepción de la enseñanza que considera que aprender es un proceso a través del cual el estudiante reestructura su conocimiento a través de las actividades que realiza. Subyace a esta postura una concepción de aprendizaje en el que se considera que aprender es, según Jorba y Sanmartí (1993)

> *"un largo proceso a través del cual el alumno va reestructurando su conocimiento a partir de las actividades que lleva a cabo. Si un estudiante no aprende, no es solamente debido a que no estudia o a que no tiene las capacidades mínimas sino que también puede ser motivado por las actividades que se le proponen*". (p. 6)

Esta dimensión formativa de la evaluación se considera que la participación activa de los estudiantes -su implicación en el aprendizaje y la realización de tareas genuinas- colabora en una suerte de "ida y vuelta" para que ellos asuman procesos participativos y colaborativos durante la evaluación. Esta conlleva a otorgar un mayor protagonismo a los estudiantes en la toma de decisiones y generan un cambio en sus roles pasivos a partir de las tareas asignadas en la propuesta de enseñanza.

Desde el punto de vista cognitivo, la evaluación formativa se centra en comprender este funcionamiento del estudiante frente a las tareas que se le proponen. La información que se busca se refiere a las representaciones mentales del alumno y a las estrategias que utiliza para llegar a un resultado determinado. Los errores son objeto de estudio en tanto que son reveladores de la naturaleza de las representaciones o de las estrategias elaboradas por el estudiante. A través de los errores, se puede diagnosticar qué tipo de dificultades tienen los estudiantes para realizar las tareas que se les proponen y, de esta manera, poder arbitrar los mecanismos necesarios para ayudarles a superarlos. Pero también interesa remarcar aquellos aspectos del aprendizaje en los que los estudiantes han tenido éxito, pues así se profundiza este aprendizaje.

Se puede decir, pues, que la evaluación formativa pone el acento en la regulación de las actuaciones pedagógicas y, por lo tanto, se interesa fundamentalmente más en los procedimientos de las tareas que en los resultados. En resumen, la evaluación formativa persigue los siguientes objetivos: la regulación pedagógica, la gestión de los errores y la consolidación de los éxitos.

En este trabajo de investigación, se propone una metodología de trabajo grupal y colaborativo entre estudiantes que ocupará un lugar prestigioso, buscando promover la autonomía en la construcción del conocimiento centrada en la actividad intelectual del estudiante. Se pone la mirada en el comportamiento de los estudiantes frente a esta nueva propuesta y se observa la manera en que se involucran.

Estos cambios metodológicos requieren repensar la modalidad de evaluación. La evaluación de los aprendizajes debe estar en relación con las condiciones generadas en el desarrollo de las clases y se la debe ubicar como parte de un proceso complejo guardando consistencia con una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina, centrada en sus aspectos conceptuales. Consideramos entonces que adoptar la evaluación formativa, aportaría un mejor conocimiento de los aprendizajes realizados por los estudiantes para esta investigación.

Capítulo 3
Diseño metodológico

3.1 Características generales de la propuesta didáctica

La metodología de enseñanza e investigación utilizada en esta investigación como hemos mencionado es la ingeniería didáctica, ya que aporta conocimientos para los docentes en cuanto a la posibilidad de recrear las situaciones en forma experimental, adaptándolas a otros contextos y utilizando los datos de la investigación para mejorar la práctica docente.
La propuesta didáctica que se propone parte de situaciones problemáticas presentada en una secuencia didáctica con 27 consignas, de las cuales sólo se desarrollaron algunas de ellas en este trabajo, con el fin de permitirle al estudiante observar la necesidad de introducir un nuevo concepto para su resolución. El concepto de derivada resulta central para encarar contenidos de distintas asignaturas de su carrera.
Se considera también en esta propuesta, la evaluación en proceso, por lo que se muestran los instrumentos de evaluación utilizados, como los trabajos prácticos obligatorios, evaluación grupal e individual entre otros, estableciendo relaciones entre dicho proceso y las condiciones de enseñanza-aprendizaje.
La propuesta didáctica se implementa en la asignatura Matemática General correspondiente al segundo cuatrimestre del primer año de estudio, de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Luján. La misma se aplica en una de las dos comisiones donde se dicta dicha asignatura, en el turno de la mañana. En esta comisión los docentes que llevan adelante la propuesta que se presenta en las siguientes secciones son: un docente, responsable de la asignatura; un ayudante de trabajos prácticos; un ayudante de primera; y un ayudante alumno. Los inscriptos en esta oportunidad fueron 60 estudiantes.
Para el análisis de la propuesta, se utilizan videos de las clases orientados a mostrar las intervenciones del docente y cuatro entrevistas abiertas realizadas a grupos de entre tres o cuatro estudiantes. En el Anexo 2 se muestran las preguntas que se utilizaron para orientar las entrevistas buscando la opinión de los estudiantes respecto a la metodología del trabajo en clase, las evaluaciones grupal e individual, la relación de las mismas con

lo trabajado en clase y el trabajo práctico obligatorio. Se realizaron entre diez y veinte preguntas por grupo, se grabaron y en el Capítulo 4 fueron agrupadas algunas respuestas de acuerdo a los comentarios de los estudiantes respecto al trabajo grupal, evaluaciones y algunas consignas.

3.2 Análisis preliminares

En esta sección se realizaron los análisis preliminares de la ingeniería didáctica. En primer lugar, el análisis epistemológico del contenido. Se realizó un recorrido de la evolución histórica del concepto de derivada. En el análisis didáctico se investigaron las propuestas de enseñanza del concepto de derivada en distintos trabajos de investigación. En el análisis cognitivo se describen las características de los estudiantes del curso en que se implementa la secuencia, a partir de la información de evaluaciones y trabajos previos con los mismos y de la experiencia del docente a cargo.

Lo obtenido en estos análisis fue considerado en el diseño de la secuencia y en su implementación.

3.2.1.Análisis epistemológico

Cerca de doscientos años separan a Fermat de Weierstrass. Primero, Fermat utilizó la derivada de manera implícita. Después, Newton y Leibniz la descubrieron. Más tarde Taylor, Euler y MacLaurin, entre otros, la desarrollaron. Lagrange la nombró y la caracterizó. Solo hasta el final de este largo periodo de desarrollo, Cauchy y Weierstrass la definieron de manera sistemática.

El concepto de derivada es fundamental en el cálculo ya que se utiliza en múltiples aplicaciones, como por ejemplo para calcular velocidades y aceleraciones instantáneas de un cuerpo en movimiento; los valores máximos y mínimos de funciones; también para optimizar la producción y ganancias o minimizar costos de operación.

La historia y la epistemología de la función derivada como objeto del cálculo diferencial dan cuenta de la complejidad de este concepto. El trabajo realizado para su estudio, en distintas épocas y culturas, han permitido los cambios de las ideas matemáticas de la función derivada para convertirla en un objeto matemático (puro, aplicado y a enseñar) muy importante que permite resolver tanto problemas de las matemáticas y de las ciencias naturales, sociales o humanas. El concepto de derivada se estudia desde el nivel secundario hasta niveles avanzados de matemáticas.

La derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función según cambie el valor de su variable independiente, esta idea está basada esencialmente en la noción de límite.

Podemos describir cuatro etapas en el desarrollo del concepto actual de derivada. Primero, la derivada se aplicó para resolver problemas, después se descubrió, posteriormente se exploró y desarrolló y finalmente, se definió. Lugo de identificar el concepto de derivada, fueron explicadas y desarrolladas varias de sus propiedades en aplicaciones matemáticas y físicas y, por último, se determinó una definición precisa del concepto dentro de una teoría rigurosa.

Se plantearon cuatro problemas fundamentales que al ser resueltos en el siglo XVI-XVII, dieron vida a la función derivada: el de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo una curva y el de máximos y mínimos.

En el siglo XVI, los matemáticos retoman el trabajo de los griegos respecto a los procesos de variación para resolver problemas que se planteaban desde la mecánica. En ese sentido se retoman los trabajos de Eudoxio y de Arquímedes para hallar áreas bajo curvas.

Los griegos y musulmanes ya habían estudiado ciertas familias de curvas, enfocándose en el círculo, las secciones cónicas y algunas otras curvas definidas por medio de lugar geométrico. Muchos problemas se habían resuelto para este tipo de curvas, incluyendo el cálculo de tangentes y áreas.

Los griegos sabían cómo trazar tangentes para cierto tipo de curvas. Habían definido una tangente como la línea que toca una curva en un solo punto pero sin cortarla. Esta definición no es apropiada para otro tipo de curvas. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran dentro de un contexto geométrico. Para curvas como la espiral de Arquímedes estas técnicas no eran de gran utilidad. Arquímedes (287-212 a. C) sabía trazar las tangentes a su espiral y se cree que para ello consideró el problema desde un punto de vista cinemático, calculando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral. Surgieron también nuevos problemas relacionados con el estudio de áreas y de longitudes de arco, abordaron también problemas relacionados con el cálculo de máximos y mínimos (extremos) a los cuales llamaron problemas isoperimétricos.

El método de Fermat (1601-1665) para calcular máximos y mínimos data de la década de 1630. Fermat no explicó que usaba un caso especial de un concepto más general, el cual se convertiría más tarde en la derivada, la razón de cambio, o incluso la pendiente de la recta tangente.

El cálculo de tangentes fue también de gran interés durante el siglo XVII. En esta época la tangente se consideraba como una secante en la cual dos puntos distintos se acercaban hasta llegar a coincidir.

A menudo se menciona que la idea de la derivada se originó principalmente en la física. Newton, inventó el cálculo y estableció un método riguroso para el estudio del movimiento. Sin embargo, ya en la edad media, muchos físicos que seguían la tradición aristotélica se habían enfocado en el estudio del "cambio", un concepto central en la física de ese entonces. Estas clasificaciones medievales de la variación permitieron que Galileo Galilei (1564-1642) en 1638, sin utilizar cálculo, realizara un estudio con gran precisión acerca del movimiento uniformemente acelerado. Gracias a las contribuciones de Galileo el movimiento se comenzó a estudiar de manera científica y rigurosa.

Sin embargo, la principal motivación para el concepto general de derivada no se originó en la física. La idea principal de la derivada, así como sus aplicaciones, se originó para resolver problemas en un contexto geométrico.

Posteriormente al trabajo de Fermat, la derivada (todavía no definida rigurosamente) se desarrollaría gradualmente, relacionándose de manera inesperada al mismo tiempo junto con otras ideas tales como extremos, tangentes, áreas, límites, continuidad y función.

Newton y Leibniz retomaron los métodos existentes para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, incorporándolos dentro de dos conceptos más generales, conceptos que actualmente conocemos como integral y derivada.

Por su parte, Newton (1643-1727) llamó ¨fluxión¨ a su "derivada", la cual consideraba como la razón de un flujo o cambio. Mientras que Leibniz (1646-1716) consideró a la "derivada" como una razón de diferencias infinitesimales y le llamó cociente diferencial. Es así que la derivada se consideraba dentro de un contexto más general en el cálculo. Incluso se había comprendido mejor su relación con otro concepto básico el cual Leibniz llamó "integral".

Se comprendió que las derivadas están fundamentalmente vinculadas con las áreas y las tangentes, así que el concepto de derivada ayudó a ver que estos dos problemas son mutuamente inversos.

En este período el rigor matemático cambia respecto del usado por los griegos (geométrico), se hace necesario buscar nuevas formas de demostrar los procesos matemáticos distintos a los de la geometría y del álgebra, se estudian las relaciones del movimiento, áreas bajo curvas, recta tangente y máximos y mínimos como procesos de variación, en este período la intuición como razonamiento matemático también era muy importante. En general, los trabajos de estos matemáticos en el cálculo antecedieron al de Newton y al de Leibniz en la teoría infinitesimal, ambos por caminos distintos con lenguajes también diferentes lograron darle piso a lo que hoy se conoce como cálculo diferencial e integral. Tanto Newton como Leibniz, usaron los infinitésimos y los infinitos.

Las contribuciones de Newton y Leibniz fueron atacadas por el uso de los infinitesimales, pero se admitía el hecho de que sus descubrimientos y procedimientos conducían a resultados correctos. Los infinitesimales fueron una herramienta muy útil y exitosa, así que las cuestiones acerca de su validez fueron subsanadas debido a su eficacia.

En 1715, Brook Taylor (1685-1731), utilizando las propiedades de diferencias finitas, escribió una ecuación expresando lo que nosotros actualmente consideramos como $f(x + h)$ en términos de $f(x)$ y de sus cocientes de diferencias de varios órdenes. Considerando luego las diferencias más pequeñas, junto con un paso a límite, estableció la fórmula que todavía lleva su nombre: Series de Taylor. El estudio de las series de Taylor permitió comprender algunos elementos de la naturaleza de la derivada. Euler utilizó dichas series con gran habilidad para demostrar ciertas propiedades matemáticas de funciones.

A mediados del siglo XVIII las series de Taylor y las ecuaciones diferenciales se habían convertido en herramientas indispensables dentro de la historia las matemáticas y en la física. El análisis realizado en este periodo es un ejemplo de la exploración y desarrollo del concepto de cociente diferencial de primero, segundo y n-ésimo orden, un desarrollo que está vinculado con la solución de los problemas de extremos y con la caracterización de máximos y mínimos.

A pesar de que Euler realizó un trabajo excepcional en el análisis de máximos y mínimos de funciones, no fue capaz de dar una explicación precisa de la naturaleza del cociente diferencial. La primera persona preocupada por esclarecer este tema fue Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) quien identificó problemas lógicos en las justificaciones que se hacían dentro del cálculo. Lagrange escribió en 1797 que el concepto de límite Newtoniano no era suficientemente claro para fundamentar una rama de las matemáticas (en este caso el cálculo), pues consideraba que este concepto era muy restrictivo. Para él, el cálculo debería reducirse al álgebra ya que esta última estaba mejor fundamentada, o al menos eso se pensaba a finales del siglo XVIII.

En 1797, Lagrange estableció que toda función tenía una expansión en series de potencias $f(x+h)=f(x)+p(x)h+q(x)h^2+r(x)h^3+\cdots$, excepto, posiblemente, para un número finito de valores aislados de x. Lagrange entonces definió una nueva función, el coeficiente del término lineal en h, el cual es $p(x)$ en la expansión mostrada, y la denominó como "la primera función derivada de $f(x)$". El término "función derivada" (en francés: fontion dérivée) que Lagrange utilizó es el origen de nuestro término actual "derivada".

No podemos aceptar totalmente la definición de derivada de Lagrange dado que tendríamos que asumir que cada función derivable es una serie de Taylor y como consecuencia debería tener infinitas derivadas. Sin embargo, con esta definición Lagrange logró establecer propiedades importantes de la derivada.

En 1823, Cauchy (1789-1957) definió la derivada de $f(x)$ como un límite, cuando este existe, del cociente de diferencias $(f(x+h)-f(x))/h$ cuando h tiende a cero.

Cauchy enfatizó la naturaleza funcional de la derivada, adaptó y mejoró los métodos que Lagrange había utilizado para probar resultados relacionados con la derivada. Por otra parte, introdujo la definición de integral definida, enfatizando que era necesario establecer su existencia independientemente de la antidiferenciación, esto se debe al hecho de que, durante el siglo XVIII, el cálculo de áreas (integración) se consideraba como un proceso inverso de la derivación.

Después del trabajo de Cauchy el cálculo se vería de manera diferente pues comenzó a establecerse una base más sólida y rigurosa, con definiciones más precisas y con teoremas cuyas demostraciones estaban basadas en esas definiciones.

Cauchy no logró resolver todos los problemas relacionados con la fundamentación del cálculo. En particular, su definición de derivada sufría algunas deficiencias.

Fue hasta la década de 1840 que algunos matemáticos como G. G. Stokes, V. Siedel, K. Weierstrass (1815-1897), e incluso el mismo Cauchy, trabajaron en la distinción entre convergencia puntual y uniforme. Para esclarecer esta distinción, primero era necesario aclarar y comprender algebraicamente lo que se entendía por límite. Karl Weierstrass comenzó a dar clases en la Universidad de Berlín en la década de 1850. En sus lecciones, Weierstrass remplazó los argumentos verbales con desigualdades algebraicas para realizar demostraciones en análisis y además usó su propia distinción entre convergencia puntual y uniforme. Asimismo Weierstrass utilizó las técnicas delta-epsilon de Cauchy para presentar un tratamiento sistemático y riguroso del cálculo. El trabajo que Weierstras realizó en sus clases nunca se publicó, pero se difundió ampliamente en Europa gracias a sus estudiantes: A. Schwartz, G. 28 Mittag-Leffler, E. Heine, S. Pincherle, Sonya Kowalevsky, Georg Cantor, sólo por nombrar algunos. Del trabajo de Weierstrass proviene nuestra definición moderna de derivada usando epsilon y delta.

Tanto Newton como Leibniz, usaron los infinitésimos y los infinitos e intentaron dejarlos de lado por las críticas que algunos pensadores les hicieron. Este hecho marca otra etapa más en el avance del rigor matemático el cual tuvo que esperar hasta los trabajos de Cauchy (1789-1957) a quien se le atribuye el rigor actual de las matemáticas, la definición de función derivada entre otros, Dedekind (1831-1916) sobre cortaduras y Cantor (1845-1918) sobre conjuntos. Son los trabajos de estos tres matemáticos los que finalmente permiten a las matemáticas y, en particular, al cálculo, establecerse como un dominio matemático distinto al del álgebra, al de la geometría y al de la aritmética. La función derivada como objeto del cálculo infinitesimal logra su reconocimiento social, científico y matemático en el siglo XX. En el estudio hecho por Boyer, así como en otros, se ha evidenciado que en el desarrollo histórico del cálculo primero emergió el proceso de integración, luego lo hizo el proceso de la derivación, posterior a estos el del límite y por último en 1960 el de la función como objeto matemático y el del rigor del lenguaje matemático; mientras que en la Didáctica de la Matemática primero se enseña desde el rigor del lenguaje matemático la función como objeto, luego el límite, la derivada y por último la integral. En este sentido se presentan obstáculos (epistemológicos, psicológicos y didácticos) Radford (1997) o conflictos semióticos, Godino (2007) como se mensiona en el trabajo de investigación de Rincón (2009)

Desde la experiencia docente, se ha podido detectar que el concepto de derivada presenta dificultades en su comprensión. Se puede observar a estudiantes realizar cálculos con derivada y resolver algunos problemas estándar pero presentan dificultad en la comprensión de su significado. Esto se ve reflejado en un gran porcentaje de desaprobados que tienen los cursos de cálculo de los primeros años de la universidad. Los estudiantes son capaces de aplicar correctamente las reglas de derivación, sin embargo presentan dificultades cuando necesitan manejar el significado de la derivada en la resolución de problemas.

Al concepto de derivada se le puede dar una visión geométrico-gráfico-convergente, cuando la recta secante entre dos puntos y uno de ellos se desplaza a lo largo de la gráfica acercándose al otro punto, donde se llegará a una posición límite que será representada por la recta tangente y la pendiente de dicha recta se llamará derivada en dicho punto.

Se define el concepto de derivada con una visión analítica–operacional. Se considera la definición dinámica pensada por Cauchy, aproximando la recta tangente con múltiples rectas secantes que tienen distancias progresivamente más pequeñas entre dos puntos de la curva, tomando la recta tangente como la mejor aproximación lineal de la función alrededor de un punto, se toma el límite de las pendientes de las rectas secantes de la progresión. Se define entonces el concepto de derivada como el límite de las pendientes de las rectas secantes al aproximarlas a la recta tangente.

El mismo tipo de límite nace de la búsqueda de la pendiente de una recta tangente o la velocidad de un objeto y surgen cada vez que se calcula una tasa de cambio en cualquiera de las ciencias o de la ingeniería.

Para definir el concepto de derivada en su forma analítico-estructural es necesario mirar, desde el modo analítico-operacional, como se ha desarrollado el concepto de derivada de una función real de una sola variable, y desde esa perspectiva seguir los elementos estructurales que permiten la generalización de este concepto. Sin embargo, se debe considerar que el concepto de derivada presenta varias formas de generalización, a modo de ejemplo: para funciones de varias variables (derivadas parciales, derivadas direccionales), para el análisis complejo (funciones holomorfas), en el análisis funcional (derivada funcional, derivada fraccional, en el sentido de las distribuciones), etc. Estas múltiples formas de conocimiento del concepto de derivada muestran que su dimensión epistemológica no es suficiente para definir el modo analítico-estructural, se debe complementar con una dimensión didáctica del concepto. Se plantea entonces, el estudio en el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por tal razón se considera la función derivada, como el elemento matemático con el que articula el modo analítico-operacional y analítico-estructural y que a su vez, permite definir el operador derivada. Este concepto matemático permite junto con sus propiedades la representación de derivada en el modo analítico-estructural. Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. Las estructuras que se deben estudiar en este contexto serán: el espacio vectorial de las funciones diferenciables y el operador derivada como transformación lineal.

3.2.2. Análisis didáctico

Los materiales obligatorios que los estudiantes utilizan en la asignatura Matemática General para el contenido de derivada son:

- Thomas, ¨Cálculo, una variable¨. Decimosegunda edición, 2010. Pearson

Como optativos:

- Novelli, ¨Lecciones de análisis I¨. 1998. Universidad Nacional de Luján
- Larson- Edwards. ¨Cálculo 1 de una variable¨. 2010. McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES

Los contenidos mínimos que figuran en el programa de la asignatura, relacionados con este tema son los siguientes:

Tasa de cambio promedio e instantánea. Problemas de aplicación. Derivada de una función. Función derivada. Función creciente y decreciente. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Concavidad de curvas. Puntos de inflexión. Análisis de funciones. Funciones compuestas y su derivación. Derivadas sucesivas.

Los textos presentan directamente la definición de la derivada a través de la necesidad de conocer la pendiente de la recta tangente en un punto de una curva dando distintas interpretaciones para el límite del cociente incremental como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, tasa de cambio de la función con respecto a la variable independiente en un punto, derivada de la función en un punto. Luego presentan la derivada de una función, y la gráfica de la derivada de una función. Muestran las reglas de derivación y la regla de la cadena para funciones compuestas, y por último muestran distintas aplicaciones de las derivadas.

Se han analizado también para esta investigación, diferentes trabajos relacionados con la enseñanza de la derivada, detallados a continuación:

- Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA (objeto virtual de aprendizaje) como mediación pedagógica. Esta propuesta metodológica Gutiérrez Mendoza (2017), otorga potencialidad al estudio de casos a través del desarrollo de análisis preliminares, análisis a priori y análisis a posteriori, a fin de indagar y comprender mejor la problemática y plantear soluciones que posibiliten un mejor aprendizaje de la derivada.

  Caracterizan las dificultades para la conceptualización del concepto de la derivada desde la definición de límite y aplicar la derivada en funciones reales.
- Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: ejemplos de uso de tecnologías interactivas. En esta propuesta Flores (2014), considera que el uso de tecnología puede ser de gran ayuda para que los estudiantes desarrollen su pensamiento

intuitivo e inductivo en relación a situaciones de variación y acumulación. Utiliza tres niveles para el aprendizaje de la derivada: cociente incremental, límite para el concepto de la derivada en un punto y el tercer nivel corresponde a función derivada.

- Vrancken (2014) en su investigación ¨Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad´, implementa una secuencia de aprendizaje enfocada en promover la asimilación conceptual de la derivada, utilizando situaciones de variación en contextos de situaciones física, razones de cálculo y pendientes, utilizando diversos medios de representación como el verbal, gráfico, numérico y analítico. Los estudiantes presentas dificultades de tipo conceptual y algorítmico.
- Visualizando problemas de la derivada con aplicaciones en dispositivos móviles, es un trabajo realizado por Ledesma (2018) donde propone que el estudiante visualice situaciones en las que está inmerso el concepto de derivada, como es el caso de la razón de cambio instantánea, utilizando tecnologías disponibles como los dispositivos móviles.
- Formulación de una estrategia para la enseñanza de la derivada a partir de los conocimientos previos y su impacto en la disminución de la deserción escolar. Esta investigación promueve el aprendizaje por competencias a partir del análisis de los conocimientos previos de la derivada y considera que el estudiante debe convertirse en parte activa del proceso de su aprendizaje. (Castañeda, 2019)
- El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemática. El caso de las aplicaciones de la derivada. En este caso se propone dentro de un trabajo grupal, la introducción del concepto de derivada a través de aplicaciones como razones de cambio, velocidades, máximos y mínimos, utilizando la metodología del aula invertida. (Fúneme, 2019).
- Evaluación del aprendizaje de la matemática universitaria: una experiencia desde las carreras de ingeniería. En el presente trabajo se muestran, desde una concepción práctica, algunos elementos del abordaje de la evaluación del aprendizaje de la disciplina Matemática en las carreras de Ingeniería Agrónoma. En el mismo se muestra cómo mediante la interrelación estudiante - profesor, y las técnicas para el aprendizaje, enfatizado en la pregunta de entrada, se logra que los estudiantes alcancen el éxito después de un recorrido por el contenido y la sistematización con prioridad a la repetición, como vía eficiente para la fijación de los contenidos. La evaluación es considerada como un proceso de indagación y comprensión de la realidad educativa, orientada a la toma de decisiones y mejora. (Carrazana, 2019).

Debido a estos análisis realizados decidimos que el diseño de la secuencia para introducir el concepto de derivada, se realice a través de razones de cambio en situaciones de movimiento por considerarlas más intuitivas para los estudiantes y que de esta forma, se vea la necesidad de introducir un concepto nuevo para resolver situaciones problemáticas concretas.

3.2.3. Análisis cognitivo

Los estudiantes, como se mencionó anteriormente, cursaron en el primer cuatrimestre del primer año de la carrera la asignatura Elementos de Matemática donde los contenidos vistos son: números reales; porcentaje; función lineal; función de segundo grado; ecuaciones de primer y segundo grado; función valor absoluto, polinómica, homográficas, exponencial, logarítmica, potencia, trigonométricas; resolución de triángulos rectángulos.

En dicha asignatura la metodología de trabajo es muy distinta a la aplicada en esta investigación.

Cuentan con una guía de actividades con teoría que van resolviendo en forma individual, por lo que no están acostumbrados a trabajar en forma grupal y en forma colaborativa.

En las evaluaciones parciales mayoritariamente se exige el resultado final de los ejercicios presentados pero no el proceso realizado por lo que están limitados para expresar justificaciones tanto de las elecciones tomadas al resolver los ejercicios, correctas o no, como de la validación de los resultados.

A lo largo de la cursada de Matemática General como hemos mencionado, se ha implementado una evaluación de proceso, por lo que se han realizado algunos cambios respecto a otras cursadas, detallados a continuación.

Uno de estos cambios es la división de los parciales, de dos parciales se tomaron cuatro, para descomprimir la cantidad de contenidos a evaluar y para que las fechas, en su mayoría, no coincidieran con las de los parciales de otras asignaturas.

También, al inicio de cada parcial, se realizó una lectura de los ejercicios, compartiendo la interpretación de los enunciados.

Otros de los cambios realizados en toda la cursada, como afirmación de un modelo de evaluación como proceso, fue la implementación de trabajos prácticos obligatorios.

Con el objeto de tener una coherencia entre el modelo de enseñanza y la evaluación, consideramos la elaboración de una instancia de evaluación grupal, con los contenidos a tratar en la secuencia, con el objetivo de que el trabajo grupal se vivencie como herramienta de producción colectiva.

En cursadas anteriores previas a aplicar la secuencia didáctica diseñada para esta investigación hemos notado que algunos conceptos básicos debían ser reforzados como, por ejemplo, las nociones de proporcionalidad, concepto de función, función definida por partes, resolución de ecuaciones e inecuaciones en forma analítica, estas últimas las resuelven sólo gráficamente en la cursada, función inversa y compuesta. Para modificar esta situación, elaboramos una guía optativa, con estos contenidos que consideramos necesarios para introducir los de este curso con teoría, ejemplos y ejercitación para que pudieran consultar en caso que necesitaran repasar los mismos y realizar consultas.

Previamente a introducir el concepto de derivada en el curso donde se implementó la secuencia didáctica se ha estudiado los temas: límite de una función en un punto; propiedades relativas a los límites; continuidad; algunas propiedades de las funciones continuas; límites tendiendo a infinito; asíntotas; problemas de aplicación.

Estos contenidos son evaluados con un primer parcial habiendo transcurrido muy poco tiempo del inicio de la cursada, aproximadamente veinte días.

Los estudiantes en estos primeros días de la cursada manifestaron una buena predisposición en el aula, aunque el ritmo de producción fue lento y el trabajo grupal todavía puede mejorar ya que, si bien las agrupaciones las realizan como ellos desean, recién se estaban conociendo e integrando para lograr un trabajo colaborativo.

Los contenidos desarrollados en esta secuencia a través de distintas aplicaciones son: tasa de cambio promedio, interpretación gráfica de esta tasa para hallar rectas secantes, derivada de la función en un punto, interpretación gráfica de la derivada para hallar rectas tangentes, función derivada, aplicaciones.

3.3 Análisis a priori: El diseño de la propuesta

En esta sección se mostrará parte de la secuencia didáctica, el trabajo práctico obligatorio y las evaluaciones tanto grupal como individual diseñadas, y las consideraciones tomadas con el propósito de anticipar el comportamiento de los estudiantes, la dinámica de la clase y las intervenciones del docente.

3.3.1 Consideraciones generales de la propuesta

En el diseño de la propuesta se tuvieron en cuenta distintas consideraciones:

Se intentó que en la propuesta los estudiantes perciban que el abordaje respecto a los contenidos sobre derivada, sea fuertemente conceptual y no centrado en la operatoria, como tal vez hayan visto en otras oportunidades. Tomando como base el proceso de modelización, en la propuesta didáctica se tomaron situaciones sencillas de la realidad y se las relacionó con sistemas teóricos-matemáticos para poder producir conocimientos nuevos, interpretar, estimar y predecir resultados y conclusiones.

La misma valoró la escritura como una modalidad que puede favorecer el proceso de aprendizaje por lo que se les pidió siempre una justificación de los procesos realizados o una explicación de lo razonado y en varias oportunidades se les solicitó que entreguen sus producciones para sus correcciones y para que esto favorezca al cumplimiento efectivo de la consigna.

La propuesta didáctica fue centrada en la preocupación por lograr la participación de los estudiantes, individual pero sobre todo en forma grupal. Todas las actividades propuestas se realizaron en grupos de 3 o 4 estudiantes. Se puso el enfoque sobre los procesos de aprendizaje que otorgan un valor central a la confrontación de las ideas como motor esencial de la construcción del conocimiento; por eso se propuso un aprendizaje colaborativo, para que los estudiantes puedan progresivamente apropiarse, utilizar y transmitir los conceptos matemáticos. Por lo mencionado en los capítulos previos, se considera que esto tiene posibilidades de ocurrir en interacción con el otro.

Buscamos en cada propuesta provocar la discusión entre los estudiantes como insumo para el desarrollo de la clase, lo cual nos obligó a pensar para cada actividad las distintas posibilidades de resolución que pudieran aparecer, y así anticiparnos y no desviarnos de los objetivos. Preanunciamos qué dificultades podrían aparecer en el aula para prever posibles intervenciones. Compartimos el posicionamiento docente que lleva a no quedarse con la respuesta correcta de un estudiante y de concebir, en general, modos de intervenir que den lugar a la aparición de distintas posturas, interpretaciones o resultados para ser sometido al debate, a la argumentación. El objetivo fue lograr rescatar de cada grupo los mecanismos y las ideas que pusieron en juego en el proceso de resolución de las consignas.

En la tarea de diseño tomamos en cuenta permanentemente las características de los estudiantes a los que fue dirigida, lo cual podría llevar a intentar reformulaciones de acuerdo a los contenidos que los estudiantes no poseían o no recordaran, y que muchas veces se supone que cuentan con ellos.

Tuvimos en cuenta los tiempos asignados para la propuesta y no perder de vista el cumplimiento del programa, que siempre es un conflicto que el docente universitario enfrenta. La carga horaria semanal de la asignatura es de 8 horas. Estimamos implementar las consignas 1 a las 7, donde se introduce la definición de derivada, durante una semana, es decir 3 clases, para el resto de las consignas de esta unidad y las evaluaciones 3 semanas más. En esta tesis se presenta, a modo de ejemplo de la implementación de la metodología propuesta, la secuencia didáctica relacionada con la introducción del concepto de derivada. La metodología de trabajo se siguió utilizando en el resto de los contenidos pero, por razones de longitud del presente trabajo sólo se mencionan las consignas e intervenciones del docente relacionadas con la introducción de este concepto y con su interpretación geométrica.

Las intervenciones del docente fueron pautadas tanto en los momentos del trabajo grupal, como en las puestas en común e institucionalizaciones.

Siempre la heterogeneidad en la disposición de los estudiantes complejiza la propuesta de lograr un trabajo autónomo y de que la mayoría encuentre posibilidades de aprender. Para contemplar esta situación propusimos que los enunciados ofrezcan una cierta dificultad, que promueva un cierto desafío intelectual para su resolución. Se pensaron posibles respuestas o dificultades de los estudiantes para así anticipar modos de intervenir del docente que los ayuden o reorienten, mientras se les brindaba tiempo para que trabajen en los pequeños grupos.

Al inicio de cada consigna, el docente comienza leyendo las mismas, se interroga a los estudiantes si comprenden las mismas y comienzan a trabajar en cada uno de sus grupos. Los docentes recorren los grupos para guiar a los estudiantes, sin dar una respuesta directa de los resultados, cuestionándolos sobre lo que ellos pensaron para dar las respuestas, tratando en todo momento de lograr un aprendizaje autónomo y observando el compromiso en el trabajo grupal tratando de generar un debate interno. Desde el pizarrón el docente trató de recoger la información y conclusiones obtenidas en cada grupo de trabajo tratando de generar discusiones y nuevos interrogantes. En algunas oportunidades se les propuso a los estudiantes que deseen, pasar al pizarrón para brindar las conclusiones del trabajo grupal y sus compañeros de clase aportan sus observaciones y presentan sus

dudas, mientras que el docente interviene si surge algún error o realizando preguntas para que se relacionen los conceptos que no se deslumbran.
Consideramos una propuesta de evaluación a partir de reconocer la relación entre el modelo de enseñanza y las posibilidades de conocer los efectos en el aprendizaje, diseñando un trabajo práctico obligatorio, una evaluación grupal y una individual y algunas consignas donde los estudiantes entregaban sus producciones. En todos los instrumentos se realizó una detallada devolución grupal e individual.
Se realizaron videos durante las primeras clases de la secuencia para analizar posteriormente las intervenciones del docente y aportar elementos sustantivos a los análisis a posteriori y entrevistas a los estudiantes finalizada la misma para indagar sus interpretaciones sobre el desarrollo de la secuencia implementada, incluida la evaluación.

3.3.2 Ejercicio inicial de la cursada

Elaborar una nueva propuesta de enseñanza basada en una perspectiva constructivista, en la que el trabajo colaborativo entre los estudiantes ocupa un lugar prestigioso, lleva al docente interrogarse sobre qué relaciones se pueden establecer entre esta perspectiva y las maneras con las que los estudiantes encaran el trabajo grupal. Para promover el intercambio grupal a lo largo de la cursada y sabiendo que no habían trabajado grupalmente en Elementos de Matemática, se realizó un planteo fuerte al inicio de la cursada de Matemática General para poner en claro la importancia que se le da a esta metodología de estudio en la asignatura. Planteamos una situación problemática con el objetivo de desafiarlos intelectualmente, que fuera resoluble a partir de poner en juego ideas que ya traían y que les permitiría visualizar la metodología del trabajo grupal colaborativo y apostamos a que los estudiantes encontraran ventajas en esta manera de trabajar. Como este ejercicio se presenta al inicio de la cursada, no involucra el objeto de estudio de la presente tesis que es la derivada sino contenidos relacionados con función lineal.
Se les indica que formen grupos de trabajo de 3 o 4 integrantes, que se van a mantener en toda la cursada, sin cambios, salvo algún inconveniente puntual.
Se estima una hora y media para resolver este ejercicio ya que en cada grupo se tienen que presentar en caso de no conocerse. Se les entrega en papel las consignas a cada grupo. Las mismas son las siguientes.

Consignas del ejercicio inicial

Se quiere crear un servicio de internet y se propone a los futuros clientes elegir entre tres formas de pago:

Tarifa A: Pago 0,47 por minuto de conexión.

Tarifa B: Pago de la suma global de $531.

Tarifa C: Pago de $147 más $0,20 por minuto de conexión.

a. Analicen cuál es la tarifa más conveniente para el consumidor, según el tiempo de conexión. Escriban qué procedimiento utilizaron para averiguarlo.
b. Grafiquen (si aún no lo hicieron) cada función. ¿Cuál es la variable independiente? (Recuerden que esta variable la graficamos en el eje de las abscisas).
c. Encuentren (si aún no lo hicieron) la expresión matemática (fórmula) que represente, en cada caso, la tarifa en función del tiempo de conexión.

3.3.3 Secuencia didáctica

Los estudiantes al entrar al aula ya se organizaron en los grupos de trabajo ya que vienen trabajando con esta modalidad desde el inicio de la cursada, aproximadamente 20 días.

Se realizó, al iniciar la clase el siguiente comentario:

¨se comenzará el estudio del concepto de derivada de una función. Dicho concepto se utiliza para describir fenómenos de física, química, biología, etc. ya que nos permite estudiar la forma y la rapidez con que se producen los cambios en ellos, por lo cual es un concepto central de esta asignatura y que se utilizará en varias asignaturas de la carrera. Se van a utilizar situaciones sencillas de la realidad y las vamos a relacionar con un sistema teórico-matemático para poder producir nuevos conocimientos, interpretar, estimar y predecir resultados y conclusiones.¨

Se los interroga con respecto a si ellos ya vieron este contenido, que se acuerdan y se resalta que el objetivo es lograr acercarse al concepto de derivada y poder interpretar que es lo que se está calculando.

Se los invita a comenzar a trabajar. Las consignas ya las traen impresas o las pueden visualizar en el aula virtual que se utiliza en la asignatura.

Como ya comentamos las primeras 7 consignas en las cuales se introduce en concepto de derivada, se desarrollaron en 3 clases. Las restantes (que no son todas las presentadas en este trabajo de tesis) junto con las evaluaciones se van presentando en las clases siguientes durante aproximadamente 3 semanas más.

Consigna 1

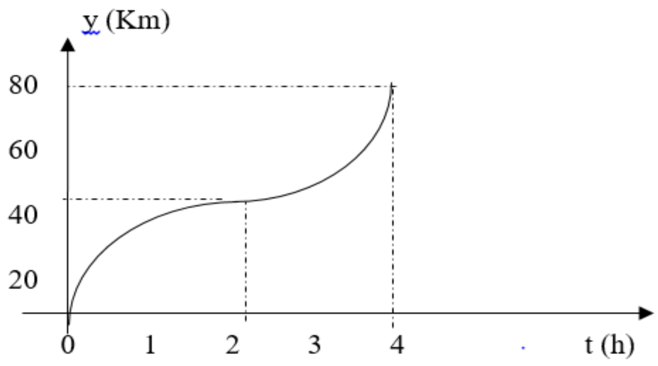
Se presenta una consigna donde deben considerar que el automóvil llevaba una velocidad constante para poder responder las consignas siguientes. Se formalizará luego el concepto de velocidad promedio.

1) Un automóvil que se mueve con trayectoria recta, a las 14 h. se encontraba a 48 km de su punto de partida, entre las 14 h y las 16hs, recorrió 192 km más.
   a) Calculen si es posible, los kilómetros que recorrió entre las 14 h y las 15 h.
   b) Con los datos obtenidos ¿podemos realizar una representación gráfica de la posición del automóvil en función del tiempo? ¿Cómo sería?
   c) Representen en el mismo sistema de ejes coordenados, la posición de otro automóvil en función del tiempo que tenga una velocidad constante distinta al automóvil anterior.
   d) Comparando las dos gráficas, ¿qué automóvil realiza el recorrido a mayor velocidad? Justifiquen la respuesta escribiendo con tus palabras y con tus compañeros de grupo el razonamiento seguido y marquen sobre los gráficos los valores utilizados al calcular la velocidad.
   e) Formalicemos el concepto de velocidad media. Cuando hablamos de velocidad ¿que entendemos por esto? ¿En qué unidades se expresa? ¿Cómo escribiríamos su concepto simbólicamente?
   f) Utilizando la fórmula: ¿Es posible siempre calcular la velocidad media de los recorridos entre dos tiempos cualesquiera? ¿Qué sucede si tomamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños? ¿Es posible conocer la velocidad que llevaban los automóviles a las 17 h exactas? Justifiquen.

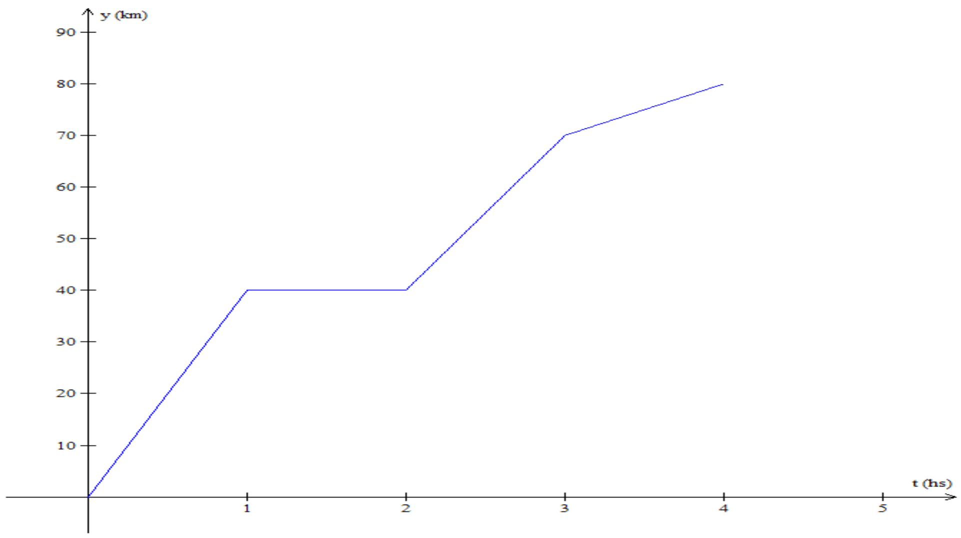
Consigna 2

En esta consigna se muestran dos representaciones gráficas en las que un mismo individuo recorre una misma trayectoria de dos formas diferentes: en una de ellas su velocidad es constante, tal como ocurre en la primera consigna, mientras que en la otra no lo es por lo que, con la información adquirida al momento, no pueden determinar la velocidad en un punto dado. Con este ejercicio se buscar mostrar más fuertemente la necesidad de introducir un concepto nuevo: el de derivada.

2) Los gráficos indican la posición de Daniel al salir de su casa en función del tiempo (figuras 3.1 y 3.2), siguiendo una trayectoria recta, en dos ocasiones en que visitó a sus amigos que se encuentran a 80 Km de distancia de su casa.



3. 1 Primer trayectoria



3. 2 Segunda trayectoria

a) Enuncien por escrito algunas afirmaciones que sean verdaderas para los dos gráficos a la vez y algunas que sean verdaderas sólo para uno de ellos (con respecto a espacios recorridos, tiempos empleados, velocidades, etc.).
b) Calculen la velocidad media del recorrido total para cada uno de los gráficos.
c) Esta velocidad media, ¿nos sirve para calcular los km recorridos cuando transcurrió una hora en ambos casos? Justifiquen.
d) ¿En cuántos intervalos sería posible calcular la velocidad media con exactitud en ambos casos? Justifiquen.
e) Calculen la pendiente de la recta que pasa por los extremos de algunos de los intervalos elegidos en el punto anterior para cada gráfico.

f) ¿En algún intervalo, el automóvil se desplazó a una velocidad de 35 km/h? Justifiquen la respuesta. ¿Y en algún instante?

g) ¿Pueden calcular la velocidad exacta a las 3,5 h en los dos trayectos? Justifiquen.

Consigna 3

La idea de esta consigna fue plantear situaciones que no involucren la velocidad de un móvil para poder calcular tasas de cambio promedio, como se venía estudiando y que empiecen a visualizar la modelización en los distintos planteos.

3) La velocidad media mide la variación del espacio recorrido en función del tiempo. También podemos calcular la variación media teniendo en cuenta otras magnitudes. En general esta variación media se denomina TASA DE CAMBIO PROMEDIO o TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Por ejemplo:

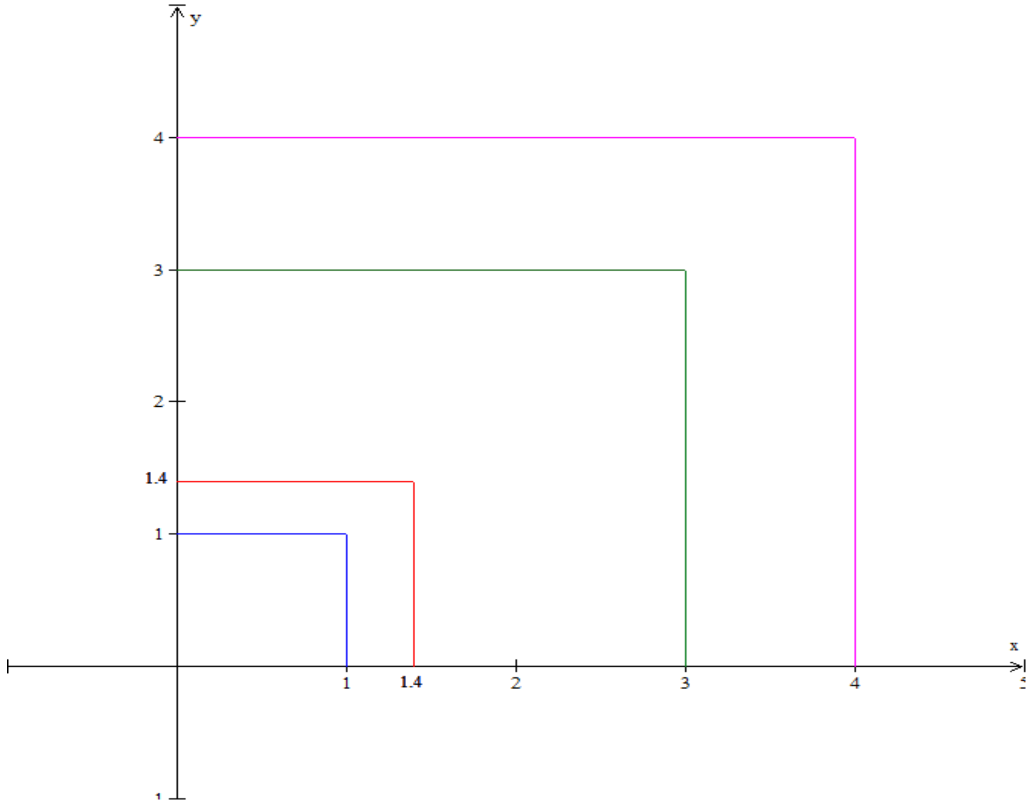
- Si quieren medir la variación de temperatura de un líquido a lo largo del tiempo, ¿Cómo lo harían? ¿Cómo se denomina habitualmente (o en física) este cambio? ¿Qué unidades podría tener?
- Si se registra el número de nacimientos que se producen en un país durante 10 años, ¿cómo calcularían con esta información la tasa de cambio promedio de los nacimientos en función del tiempo? ¿Cómo se denomina habitualmente esta tasa de cambio? ¿Qué unidades podría tener?
- Si conocemos el consumo de electricidad en una población durante un día completo, ¿cómo calcularían la variación del consumo en función del tiempo? ¿Qué unidades tendría?
- La presión atmosférica (P) disminuye a medida que aumenta distancia a la tierra (h). ¿Cómo calcularían la tasa de variación de la presión con respecto a la altura? ¿Qué signo tendría dicha tasa a medida que aumenta la altitud? ¿Cuáles serían las unidades?

Consigna 4

En esta consigna continuamos trabajando con expresiones matemáticas de las funciones, estableciendo relación entre la situación analizada y la modelización matemática.

4) Veamos otro ejemplo de tasa de cambio promedio.

En el siguiente gráfico se han dibujado 4 cuadrados (figura 3.3).



3. 3 Representación de cuadrados

a) Indicar la longitud de los lados de cada uno de los cuadrados y calcular el área de cada uno de ellos.

b) ¿Cuántos cuadrados pueden dibujar en el gráfico dado?

c) Calculen la tasa de cambio de las áreas en función de las longitudes de los lados de los cuadrados que se encuentran en forma consecutiva.

d) Representen en un sistema de ejes coordenados las áreas de los cuadrados que aparecen en el gráfico, en función de la longitud de sus lados.

e) ¿Tiene sentido unir con líneas rectas los puntos marcados en este gráfico? Justifiquen la respuesta.

f) Encuentren la ecuación de la gráfica representada. ¿Cuál es su dominio?

g) Marquen en el gráfico realizado los valores que se utilizaron para calcular las tasas de cambio.

Consigna 5

Se consideró en este caso una ampliación de lo trabajado de la consigna 4 al tomar la función $f(x) = x^2$ en todo su dominio.

5) Consideremos ahora la función $f(x) = x^2$ en todo su dominio.

a) Grafiquen la función dada
b) Calculen la variación promedio o tasa de cambio promedio entre los puntos $x = 1$ y $x = 3$ (o intervalo $[1;\ 3]$)
c) Dibujen la recta que pasa por los puntos utilizados en b). Calculen la pendiente de dicha recta.
d) Realicen los mismos pasos de b) y c) para calcular la tasa de cambio promedio en los intervalos $[1;\ 2{,}5]$; $[1;\ 1{,}5]$; $[1;\ 1{,}2]$. Realicen varios gráficos si lo consideran necesario.
e) En el ítem d) tomaron intervalos con el extremo inferior $x = 1$ y cada vez más chicos, ¿pueden tomar intervalos aún más chicos?, ¿Hasta cuánto pueden achicar estos intervalos? Justifiquen su respuesta.
f) ¿Qué relación se encuentra entre la tasa de cambio promedio y las pendientes de las rectas secantes?
g) ¿La tasa de cambio podrá dar negativa? Si les parece que sí, nombren un intervalo donde suceda esto. ¿Cómo resulta la pendiente de la recta que une los puntos del extremo del intervalo en estos casos?
h) ¿Puede dar cero? Si consideran que sí, indiquen un intervalo. ¿Cómo resulta la pendiente de la recta en este caso?

Consigna 6

Esta consigna se pensó para que repasaran los contenidos vistos hasta este momento, para que perciban la limitación que existía con los cálculos de las tasa promedios y para que a través de la escritura se favorezca el proceso de aprendizaje. Se propone la entrega de las producciones para sus correcciones y para que esto favorezca al cumplimiento efectivo de la consigna.

6) Revisen con sus compañeros los ejercicios vistos hasta el momento y escriban las ideas trabajadas en cada paso (tipo de problemas trabajados, conceptos ya conocidos y conceptos nuevos, relaciones entre ellos, qué tipo de respuesta quedó sin responder, etc.).

Consigna 7

Para esta consigna se consideró la función $f(t) = \frac{1}{16}t^2$ con el objetivo de que no pudieran estimar de manera sencilla la velocidad del vehículo y se modificaron las unidades también por ese motivo. A través de una situación sencilla se pretende la visualización de introducir un concepto nuevo para poder resolverla.

7) Una camioneta parte de un pueblo y se desplaza con una trayectoria descripta por la función $f(t) = \frac{1}{16}t^2$ (en este caso vamos a considerar como unidad de tiempo el minuto y como unidad de espacio recorrido el kilómetro). A $4\ km$ de la salida del pueblo se ha colocado un dispositivo que controla la velocidad que no debe superar los $40\ km/h$. ¿Le corresponde una multa a la camioneta? ¿Por qué?

   Para poder responder estas preguntas realicen las siguientes actividades.

   a) Grafiquen la función dada.
   b) ¿En qué momento se encontraba a $4\ km$ del pueblo?
   c) Como necesitamos conocer la velocidad que marcaba el velocímetro en ese instante exacto, calculemos velocidades promedios en intervalos de tiempo que contengan a $t = 8$. ¿Cómo tendrían que ser estos intervalos? ¿Cuáles convendría tomar?
   d) Dibujen las rectas secantes que unen los extremos de los intervalos que consideraron.
   e) Como el incremento de tiempo tiene que ser cada vez más chico, ¿a qué valor se debe acercar? ¿Cómo se escribiría esto simbólicamente?
   f) A medida que el incremento de tiempo se acerca a cero, esta recta secante se transforma en la recta ……………… a la curva en el tiempo $t = 8$ y en forma similar al caso de las rectas secantes, la velocidad instantánea coincide con la pendiente de la recta …………………...
   g) Hallen la ecuación de la recta tangente a la curva en el tiempo $t = 8$. Graficarla en el mismo sistema de coordenadas que la función.

h) Hemos calculado la velocidad instantánea en un tiempo $t = 8$, calculemos ahora la velocidad instantánea para un tiempo cualquiera t.

Al terminar la consigna 7 aparece el siguiente recuadro con la definición de derivada y su nomenclatura (cuadro 3.1).

La **derivada** de una función en un punto x, que denominaremos $f'(x)$ es

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, siempre que el límite exista y sea finito.

Observar que cada punto de la función donde es derivable se le puede asociar el valor de la derivada definida anteriormente, quedando definida así una nueva función llamada *función derivada* o simplemente *derivada* de la función.

La derivada se la puede simbolizar de otras maneras $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ = D($f(x)$)

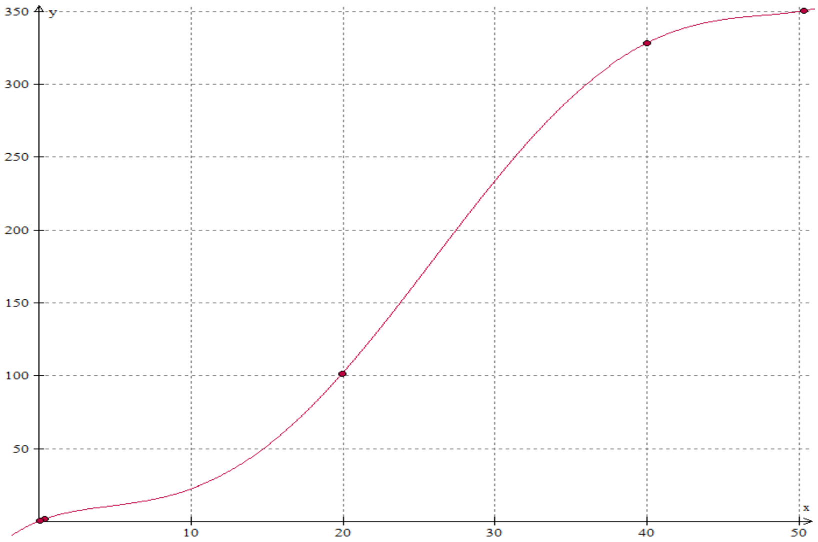
3. 1 Definición de derivada

Consigna 8

Antes de este ejercicio se plantearon el cálculo de la derivada para funciones de segundo y tercer grado utilizando la definición. También hallaron ecuaciones de rectas tangentes en distintos puntos y se analizó la relación del signo de la derivada con el crecimiento y decrecimiento de la función.

Se utiliza una gráfica aproximada de un contexto no matemático, vinculado al campo profesional futuro de los estudiantes. Se considera repasar el concepto de continuidad preguntando que consideraciones se harían para que habilite unir los puntos con una curva aproximada. Se repasa también el concepto de derivada utilizando su interpretación geométrica.

8) La figura 3.4 muestra cómo se desarrolla una población *p* de moscas de la fruta (Drosophila) en un experimento de 50 días en un ambiente cerrado. El número de moscas se contó en intervalos regulares y se graficaron con respecto al tiempo *t* y los puntos se unieron con una curva suave.



3. 4 Desarrollo de la población de la mosca de fruta

a) ¿En qué intervalos aproximadamente, la población se incrementa de manera más rápida? ¿Y de manera más lenta?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento (instantánea) aproximada en el día 20? ¿y en el día 40?

c) Grafiquen aproximadamente la función derivada. Pueden ayudarse con los cálculos del ítem anterior ¿Qué información me brinda este gráfico?

d) ¿A partir de que día habría que aplicar insecticida?

Consigna 9

En la resolución de algunas consignas previas a esta y con la corrección del trabajo práctico obligatorio se observó que los estudiantes tenían dificultad en encontrar las rectas tangentes a una curva si el dato era la pendiente de la misma pero no presentaban dicha dificultad si el dato era el valor de la abscisa del punto de tangencia. Se presentó entonces en el pizarrón la siguiente consigna, que se fue realizando en el pizarrón con la guía del docente.

9) a) Encuentren la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

Esbocen la gráfica de la curva y de su tangente.

$$y = x^3 \quad en \quad x = -2$$

b) Encontrar las ecuaciones de la/s recta/s tangente/s a la curva $y = x^3$ con pendiente 12

3.3.4 Trabajo Práctico Obligatorio

El trabajo práctico se les presentó después de la cuarta semana de iniciar esta unidad y se les proporcionó un tiempo de entrega de una semana. Si las tareas se presentaban a los estudiantes de modo optativo (lo cual supone una apuesta a su autonomía e interés por aprender) muchos de ellos optan por no cumplirlas. Por esta razón se consideró la obligatoriedad de los trabajos prácticos. Para que los estudiantes no se sintieran sobre presionados por la carga de actividades de la asignatura y, para que no sea percibido como un instrumento de control, sino como fue pensado didácticamente, como una instancia para el trabajo intelectual y teniendo en cuenta la evaluación en proceso, se les ofreció la posibilidad de rehacerlo en función de lo señalado en las correcciones realizadas detalladamente, con el objetivo de guiarlos para esta reentrega. Se les asignaron espacios importantes a cada estudiante para la devolución detallada de cada trabajo.

Trabajo Práctico Obligatorio

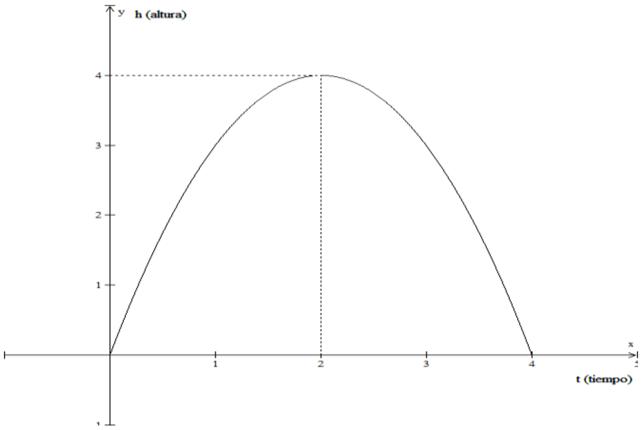
Resolver y entregar los siguientes ejercicios en la fecha determinada. Para el ejercicio 4 tienen que enviar un video donde explican la resolución del mismo.

1) Encontrar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = \frac{1}{x+1} + 3$ en el punto de abscisas $x = 2$. Esboza la gráfica de la función y las dos rectas. (Recuerden que para el esbozo debes indicar: dominio, cortes, asíntotas, máximos y mínimos, intervalos donde es creciente y decreciente, punto de inflexión e intervalos de concavidad)
2) a) Derivar la siguiente función **utilizando la definición** $f(x) = \frac{2}{5-x}$

   b) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función cuyas pendientes sean $1/2$
3) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función en el punto de abscisa $x = 2$. Justificar tus respuestas

   $f(x) = \{(x-1)^2 - 3 \; si \; x \leq 2 \; 3x - 8 \qquad si \; x > 2$ Graficar.
4) La siguiente foto (figura 3.5), representa la trayectoria de un chorro de agua que es lanzado hacia arriba. En la gráfica se ha representado la altura que va alcanzando en metros en función del tiempo, medido en segundos (figura 3.6).

3. 5 Foto de la trayectoria del chorro de agua



3. 6 Trayectoria del chorro de agua

Realizar este ejercicio utilizando sólo la gráfica dada

a) Indiquen el dominio de la función.

b) Describan la trayectoria del chorro de agua al transcurrir el tiempo.

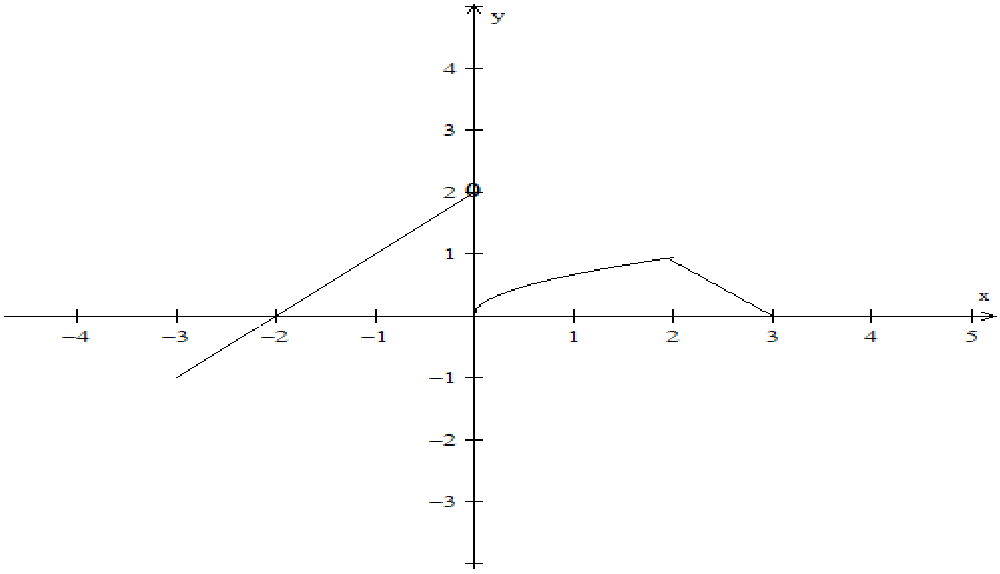
c) Indiquen en qué instantes toca el suelo.

d) Indiquen qué velocidad de crecimiento instantánea tiene la función en $x = 2$.
Qué interpretación le dan a ese valor?
Escriban la ecuación de la recta tangente en ese punto.

e) Marquen un punto en el gráfico donde la velocidad de crecimiento instantánea sea 2 y otro donde sea -2 e indiquen el valor de x que le corresponde en forma aproximada. Escriban el procedimiento seguido.
Hay más puntos donde la derivada toma esos valores? Por qué?

f) Realicen el gráfico aproximado de la función derivada, indicando el procedimiento seguido. (Pueden ayudarse con los datos encontrados en el ítem d) y e)).

5) La función $f(x)$ tiene la siguiente gráfica (figura 3.7).



3. 7 Gráfica de una función por parte

a) Mostrar los puntos donde la función no es continua indicando la condición que no verifica.
b) Indicar los puntos de la función donde no es derivable. Justificar tu respuesta.
c) Indicar el valor aproximado de la derivada en $x = -1$ y en $x = 1$. Justificar tu respuesta.
d) Hallar, si existen, puntos donde la derivada sea -1, 1 y 0. Justificar el procedimiento seguido. e) Esbozar en forma aproximada la gráfica de la derivada de la función.

3.3.6 Evaluación grupal

El estudio de la relación entre la enseñanza y el aprendizaje se tradujo en la preocupación por mantener una correspondencia lo más estricta posible entre el tipo de problemas trabajados en la clase y los solicitados en el examen.

Buscando coherencia entre el modelo de enseñanza y la evaluación, elaboramos una instancia grupal como parte de la evaluación. Los conceptos centrales de esta evaluación se retomarían luego en el parcial individual.

Los resultados de esta evaluación nos brindarían una situación del proceso enseñanza – aprendizaje para revisar antes de la evaluación individual.

Las situaciones que se incluyen en la evaluación grupal son conceptuales. Se proponen problemas ligadas a lo cotidiano, incluidos un extenso enunciado vinculado al mundo de la agronomía como contexto. Se pide calcular valores de velocidad media e instantánea que tienen mucha presencia en los problemas que se resuelven en clase, así como la interpretación de esos valores. Se propone una pregunta que mostrara la utilidad de la derivada.

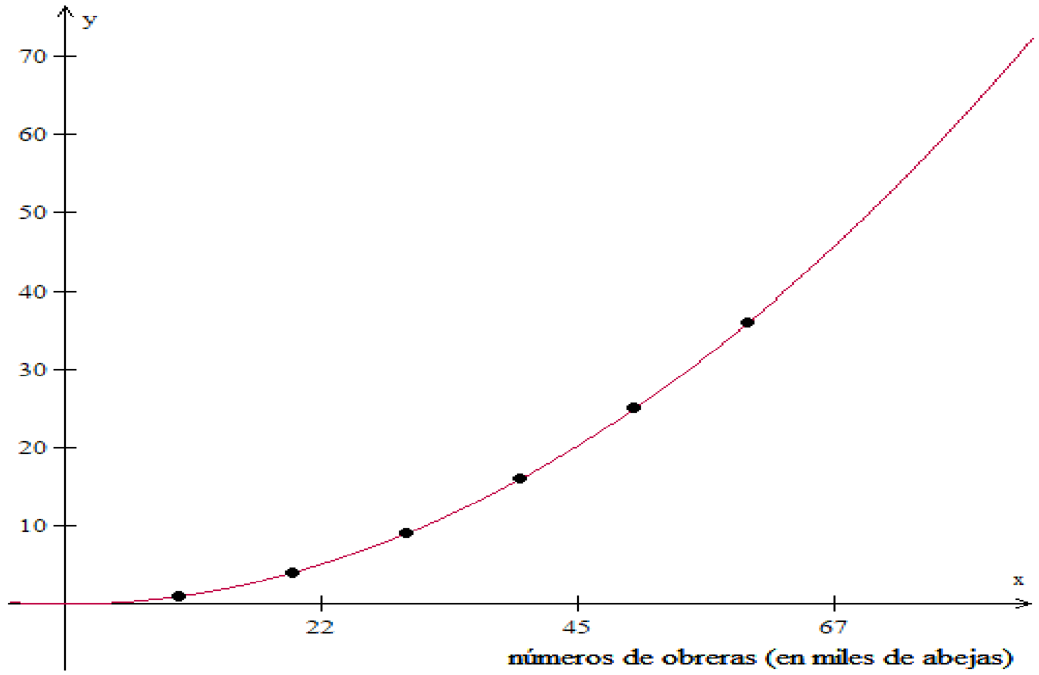
Producción de miel en una colmena

La potencia productiva de una colmena depende en gran medida (sin que este sea el único factor interviniente) de la capacidad de la reina. Al disminuir la cantidad de huevos que pone diariamente, la reina conlleva a una disminución del número de abejas de la colonia y, por lo tanto, del rendimiento de miel que se espera de la colmena. El número de abejas que tiene una colonia es decisivo para el rendimiento de miel que se espera de la colmena. La tabla indica el número total de obreras de una colmena en miles y el rendimiento de miel en kilogramos (cuadro 3.2).

Total de obreras	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000
Rendimiento miel	1 kg	4 kg	9 kg	16 kg	25 kg	36 kg

3. 2 Rendimiento de miel por número de obreras

La gráfica representa el rendimiento de miel en kilogramos de una colmena y el número de obreras en miles (figura 3.8).



3. 8 Rendimiento de miel en función del número de obreras

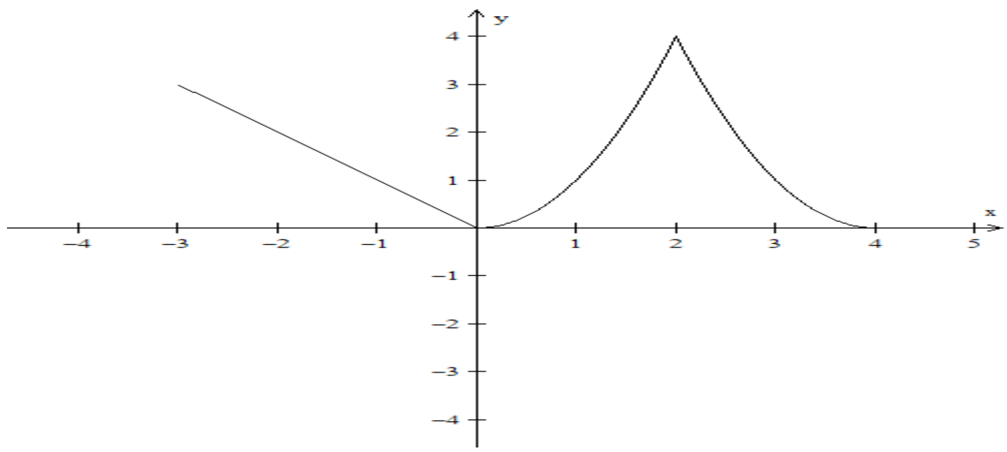
a) Describan con sus palabras como varía el rendimiento de la miel en función del número de obreras.
b) Calculen la velocidad media o promedio del rendimiento de la miel en función del número de obreras entre los valores $x = 20$ y $x = 50$.
¿Qué interpretación le dan al valor encontrado?
c) Indiquen la velocidad instantánea del rendimiento de la miel en función del número de obreras en $x = 30$ y luego en $x = 60$.
¿Qué interpretación le dan a los valores encontrados?
Escriban la ecuación de la recta tangente en esos puntos.
d) Encuentren en forma aproximada un punto donde la velocidad instantánea del rendimiento de la miel en función del número de obreras sea 0.8.
e) Realicen el gráfico aproximado de la función derivada, indicando el procedimiento seguido. Puedes utilizar los datos encontrados en c) y d).

3.3.7 Evaluación individual

Se muestran a continuación los ejercicios incluidos en el examen individual que se encuentran relacionados con los contenidos presentados en esta tesis.

Uno de los ejercicios fue pensado con consignas similares a una presentada en el trabajo prácticco obligatorio y a una de la evaluación grupal con el objeto de poder comparar luego, el avance de los aprendizajes de los estudiantes.

1) a) Hallar la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 1$ por definición.
b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto de abscisa $x = -2$.
c) Esbozar la gráfica de la función y la recta tangente.
d) Dar una interpretación que conozcas, al valor de la pendiente de la recta encontrada.
2) Dada la función $f(x)$ cuya representación gráfica se muestra a continuación en la figura 3.9



3. 9 Gráfico de una función por parte

a) Indicar los puntos donde no es derivable justificando tu respuesta.
b) Indicar sobre la gráfica si existe un punto donde la velocidad de crecimiento instantánea de la función sea -1, otro donde sea cero y otro que sea 3.
c) Describir la velocidad de crecimiento instantánea de la función graficada en todo su Dominio.
d) Realizar el esbozo de la gráfica de la función derivada.

3) Un objeto se deja caer desde lo alto de un edificio de 130 metros de altura. Su altura, que depende del tiempo, está dada por la función $h(t) = 130 - 4{,}9\, t^2$ metros.
 a) Realiza el gráfico de la función en su dominio.
 b) ¿En qué tiempo toca el suelo?
 c) ¿Cuál es su velocidad instantánea 2 segundos después de que se deja caer?
 d) Encontrar en que instante el objeto lleva una velocidad instantánea de -30.

3.4 Experimentación

Aquí se describe la implementación de la secuencia de enseñanza.

3.4.1 Consignas del ejercicio inicial

El ejercicio presentado era de linealidad, concepto ya enseñado en una asignatura previa, dentro de una situación problemática. Los estudiantes se encontraban divididos en grupo. Se comparte la lectura del enunciado con los estudiantes, se realizan algunas preguntas para orientarlos en el trabajo inicial, qué entienden, cuáles son los datos, y qué se pregunta, con respecto a la conveniencia de las tres alternativas presentes en el enunciado del problema se indaga en la estimación de la respuesta. La idea es que reconozcan la posibilidad del aprendizaje que se abre cuando los estudiantes comienzan a discutir entre ellos y a pensar en maneras de resolver las situaciones sin estar esperando a que se les

den las respuestas en el pizarrón pero que, al mismo tiempo, no se los deja solos ya que mientras intentan resolverlos pueden consultar con el docente que recorre los grupos. También se les indicó que vayan anotando las ideas, discusiones, resoluciones, porque después de resolver el ítem a) se va a discutir entre todos cómo lo resolvieron.
Los docentes circulan por los grupos para visualizar los modos de resolución que van surgiendo en los mismos para hacer puestas en común en el pizarrón.

3.4.2 Secuencia didáctica

Consigna 1

Al iniciar el ejercicio se les pregunta a los alumnos si se entiende el punto a), se les da un tiempo para la discusión y para que justifiquen la respuesta. Interviene el docente en cada grupo preguntando cómo lo resolvieron, se les guía para que concluyan que el cálculo es posible sólo si la velocidad es constante, en una situación ideal. Se insiste en que escriban lo que han pensado para justificar la respuesta.
En el punto b) se les recuerda que al graficar la posición en función del tiempo, se grafica en el eje de las abscisas el tiempo y en el eje de las ordenadas la posición.
En el punto c) se intenta que grafiquen otra trayectoria con velocidad constante, que deduzcan cómo debe ser la forma de la misma. Se muestran en el pizarrón los distintos gráficos y se analizan los mismos (distintos puntos de partida, puntos de encuentro, etc.).
En el punto d) se insiste en la importancia de que escriban el razonamiento seguido, como herramienta para aprender y que necesitan ejercitar ya que, además de las ventajas que de por sí tiene el poder expresarse correctamente y poder plasmar sus razonamientos en una hoja, va a ser parte de futuras evaluaciones.
Los estudiantes pueden responder mirando el gráfico, por lo que se les indica que si bien es un argumento matemático válido, se los indagará sobre el razonamiento seguido y cuál es la velocidad exacta en cada caso.
Se interviene en el pizarrón para observar las distintas respuestas y se les hace observar que con cualquier intervalo que hayan tomado para calcular la velocidad en la primera trayectoria, llegan al mismo valor. Se comparte el cálculo de la pendiente de la recta que muchos grupos realizaron y se los va introduciendo en la interpretación gráfica de la velocidad media que coincide con la pendiente de la recta que une los puntos considerados.

Se los orienta para que puedan visualizar en el gráfico los intervalos que han utilizado para calcular la velocidad media o, en este caso, la pendiente y marquen los segmentos $(y_2 - y_1)$ y $(x_2 - x_1)$ donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en distintos intervalos para luego calcular la pendiente.

En el punto e) el objetivo es que formalicen, con lo observado en el punto anterior, la fórmula de velocidad media. Se les brinda un tiempo para que logren la expresión general y el docente la muestra en el pizarrón o las escriben ellos si lo desean y puedan comparar con lo que ellos había pensado o propuesto como posible fórmula. Este paso representa un salto al pasar de una resolución aritmética a proponer la expresión algebraica.

En el punto f) se apunta a la idea de que si utilizamos la expresión algebraica y tomamos intervalos cada vez más chicos, el denominador se acerca a cero. En la última pregunta donde tienen que calcular la velocidad media en un punto, el denominador daría cero y, por lo tanto, no es posible utilizar la fórmula de manera directa para calcular la velocidad en un instante. Se los guía para que visualicen que en este caso particular, en el que la trayectoria de un móvil puede describirse con una función lineal, no hay dificultad en conocer la velocidad en cualquier intervalo o punto, pues la velocidad es siempre la misma.

Consigna 2

Al terminar la primera consigna se propone pasar a la segunda en la misma clase.

En el punto a) se propone una actividad cualitativa, para modificar la idea de que en matemática sólo se realizan cálculos y para favorecer un abordaje más global, que contextualice el problema y ayude a ubicarse conceptualmente en la respuesta.

Luego de los cálculos realizados en el ítem b), en el punto c) se los guía para que noten que en el Gráfico 2, si bien se conoce la velocidad media al transcurrir una hora, y en cada tramo de su recorrido, pues son constantes, ésta no coincide con la velocidad promedio o media en el recorrido total. En el Gráfico 1 esto ya no es posible.

En el punto d) se los orientó a que distingan que en el Gráfico 1, sólo hay tres intervalos donde puedan calcular la velocidad media con exactitud, por los datos brindados, mientras que en el segundo son infinitos. Se les mostró algún intervalo que ellos no hayan considerado y se les propuso que sigan ese razonamiento.

En el ítem e) se vuelve sobre la idea que la velocidad media en un intervalo, coincide con la pendiente de la recta secante que pasa por los extremos del mismo. Se les pidió, aunque

no está en la consigna, que escriban las ecuaciones de las rectas secantes y que la grafiquen.
En el punto f) no pueden saber con exactitud cuáles son los intervalos donde la velocidad media es de 35 km/h. La mayoría de los grupos va tomando intervalos y calculando las velocidades medias para aproximarse a ese valor. Se considera lo trabajado en los grupos para realizar una intervención en el pizarrón. Se les pide la pendiente de la recta secante que pasaría por los extremos del intervalo buscado. Se les indica que dibujen una recta con dicha pendiente que pase por el origen y que trasladen dicha recta hasta que corte a la curva en dos puntos, logrando de esta manera encontrar el intervalo buscado en forma aproximada. Se les pregunta en cuántos intervalos ocurre esto, para que recorran toda la gráfica para comprobar si hay más intervalos con la misma velocidad media.
Ante la pregunta de buscar algún punto donde la velocidad (instantánea) sea también de 35 km/h, visualizan que no tienen herramientas para poder responder aunque buscan achicar los intervalos para encontrarlo, pero se encuentran nuevamente con que el denominador del cociente se acerca a cero. Se les remarca que esta secuencia apunta a encontrar la herramienta para poder responder a estas situaciones.
En el ítem g) además de que observan que en el primer gráfico no pueden calcular la velocidad exacta a las 3,5 h, se les hace notar que el planteo está formulado en sentido contrario al ítem anterior, ya que aquí se da como dato un tiempo para poder calcular la velocidad y anteriormente se dio la velocidad y como incógnita el tiempo.

Consigna 3

En este ejercicio se les indicó que lo realizarían de tarea, y las producciones de cada uno las compartirían al inicio de la siguiente clase. Se les hizo notar que el compromiso y participación en ese espacio de tiempo destinado al intercambio era muy importante para el trabajo grupal en forma colaborativa.
Se leyeron las consignas dando un ejemplo particular y se les hizo notar que la fórmula para calcular velocidades promedios la podíamos utilizar para calcular tasas de cambio promedio con otras magnitudes distintas a las de espacios en función de tiempos.
Se les solicitó que entreguen por escrito la producción realizada por grupo.
En el anexo 1 se muestran algunas de las producciones realizadas por dos grupos de estudiantes.

Consigna 4

Esta consigna se la trabajó en la segunda clase destinada a la secuencia.

En el ítem a) se les pidió los datos de las longitudes de los cuadrados para ayudarlos a interpretar el gráfico que no es habitual ya que no se representa una función como están acostumbrados a ver.

Al incorporar en el gráfico un cuadrado con una longitud no entera, se tuvo como objetivo que visualicen el hecho que pueden inscribir infinitos cuadrados en la representación cartesiana para resolver el ítem b).

El los ítems c) y d) se los guía para que contextualicen la situación y para que surja la idea de continuidad que ellos ya trabajaron en la unidad anterior, reconociendo la densidad de la recta numérica y, con esta consideración, puedan adoptar la idea de unir los puntos.

Los estudiantes ya trabajaron la función cuadrática en una asignatura anterior por lo cual no les cuesta identificar la gráfica encontrada con $f(x) = x^2$ en el ítem e). Surgieron discusiones respecto de considerar el cero dentro del dominio o no, se les dio la libertad en esta decisión justificando la misma.

Al calcular la tasa de cambio en el punto f) se hizo resaltar que dicha variación ya no era constante.

En el ítem g) además de marcar los intervalos que utilizaron para calcular las tasas de cambio se les indicó que esas diferencias de áreas también las podían visualizar en el gráfico dado, sombreando las mismas (al área de un cuadrado se le quita el área del cuadrado inmediato inferior).

Consigna 5

Los estudiantes se sintieron más cómodos al tener una función específica para trabajar.

Los ítems a) al d) no presentaron mayores inconvenientes para su resolución.

En los ítems e) y f) se volvió a remarcar la representación gráfica de la tasa de cambio promedio con la pendiente de la recta secante y la imposibilidad de poder calcularla en un punto utilizando dicha fórmula.

En los últimos dos ítems se visualizó que esta tasa de cambio podía ser positiva, negativa o nula como un primer acercamiento al crecimiento y decrecimiento de funciones que luego se relacionaría con la pendiente de la recta tangente o con la derivada.

Consigna 6

Para que visualicen lo que se les estaba pidiendo la propuesta comenzó revisando lo realizado en la consigna 1. “Algunas preguntas que se les hicieron fueron: “¿Qué tuvieron que hacer?, “¿Qué calcularon?”, ¿Cuáles fueron las consideraciones tenidas en cuenta?, ¿Qué relación puede establecerse entre la resolución matemática del problema y lo que ocurre realmente cuando un móvil se desplaza? ¿Hubo algunas consignas que no se pudieron responder, por qué? ”. Se fueron anotando en el pizarrón sus respuestas y se realizó un pequeño cuadro con los contenidos tratados más relevantes. De esta manera se intentó que perciban qué era lo importante, aquello a lo que el docente le otorga valor, y que pudieran a través de la escritura repasar y reelaborar lo que fueron entendiendo en las consignas anteriores ya que esta reorganización obliga a revisar lo que aprendieron y a pensar cómo lo plasman en el papel.

A continuación se los invita a proseguir analizando las demás consignas y que posteriormente entreguen en una hoja lo trabajado para realizarle una devolución.

En el anexo 1 se muestran algunas de las producciones.

Consigna 7

Se inició leyendo la consigna y observando que la tasa de cambio promedio mide la variación de la función relativa a un intervalo pero no nos informa cómo fue variando a lo largo de ese intervalo. Muchas veces es necesario conocer la variación de cambio no en un intervalo sino en un instante determinado.

En el ítem a) se les aconseja tomar una escala más grande de la que utilizan normalmente ya que luego tienen que dibujar varias rectas secantes.

Para el ítem b) necesitan interpretar la función en el contexto presentado para poder reemplazar el valor 4 km en lugar de $f(t)$, en algunos grupos se los guía para que analicen las unidades que intervienen de cada una de las variables.

En el ítem c) la elección de los intervalos en la mayoría de los grupos es adecuada pero para unificar el trabajo de la corrección en el pizarrón se les indicó que consideraran intervalos con el extremo inferior 8 y que utilicen todos los decimales que aparecen en las calculadoras para los cálculos. Luego de que calcularon varias velocidades promedio y dibujaros las rectas secantes de intervalos cada vez más pequeños, se les preguntó si ya pueden estimar la velocidad con que iba la camioneta y la respuesta fue 1 km/min.

Para el ítem d) se utiliza Geogebra para mostrar la gráfica de la función y las rectas secantes.

Se realizó una primera generalización para calcular dichas velocidades, al tomar un intervalo de la forma $[8,8+h]$ donde surgió la expresión

$$v=\frac{f(8+h)-f(8)}{(8+h)-8}$$

$$v=\frac{f(8+h)-f(8)}{h} \qquad (1)$$

Para realizar el cálculo de esta velocidad, se les fue dando tiempo y luego se realizaron en el pizarrón. Esto les llevó tiempo ya que no están habituados a realizar los cálculos utilizando variables.

En el ítem e) surge la idea de límite por lo cual se obtiene la expresión

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{f(8+h)-f(8)}{h} \qquad (2)$$

Al calcular este límite encuentran la velocidad del móvil, ya no promedio sino instantánea, que coincide con la que ellos habían estimado. Luego la expresan en km/h para poder responder a la pregunta del problema. Calculan la ecuación de la recta con esa velocidad, se muestra en Geogebra dicha recta y se remarca que la pendiente utilizada ya no es la de una recta secante, sino la pendiente de la recta tangente en $t=8$.

Finalmente para poder expresar la fórmula de la derivada, se pregunta cómo calcularíamos la velocidad del móvil en cualquier otro instante, de esta manera se propone calcular la velocidad instantánea, ya no en $t=8$, sino en un tiempo t cualquiera llegando de esta manera a la ecuación

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (3)$$

que representa la derivada de la función en un punto.

En el pizarrón quedaron remarcadas las ecuaciones (1), (2) y (3). Se les pide que busquen un trozo de papel que luego deben entregar, y que cierren sus cuadernos por un instante. La nueva consigna, la tenían que realizar ahora en forma individual. Se les indicó que escriban en la hoja los números (1), (2) y (3) (correspondientes a cada una de las tres fórmulas), dejando unos renglones entre medio. Una vez que se realizó eso se les pidió que escriban qué estaban calculando en cada una de esas expresiones, y se les dio un tiempo corto para entregar. No era necesario poner el nombre a la hoja. Se leen rápidamente las respuestas, remarcando nuevamente el significado de cada ecuación y su interpretación geométrica.

En el anexo 1 se muestran algunas producciones.

A continuación se lee la definición de derivada que está en el cuadro 1 y se presenta la nomenclatura que se va a utilizar.
Finalizada la clase se asigna como tarea volver a repasar lo visto en esta consigna, realizar los cálculos nuevamente que tanto les costó y anotar las dudas que surjan en el hogar para analizarlas la clase siguiente.

Consigna 8

Luego de realizar una interpretación de la gráfica presentada en el ítem a), y al no tener una ecuación que represente la curva dada les cuesta hallar las pendientes de las rectas tangentes en los puntos dados en el ítem b). El hecho que tienen que encontrar dichas pendientes en forma aproximada y al tener que tomar otro punto de la recta tangente, una vez dibujada, les trae dudas si lo que están haciendo es lo correcto. Algunos grupos toman otro punto de la curva cercano al punto de tangencia. Se les hizo ver que de esa manera calculan velocidades promedios aunque el valor va a estar aproximado.
Se les sugiere para graficar la función derivada en el ítem c), que si lo necesitan pueden calcular le velocidad instantánea en algunos puntos más de la curva. También se les indica que consideren las respuestas del ítem a) para analizar los signos de la derivada.

Consigna 9

Luego de la devolución del trabajo práctico obligatorio se presentó la consigna 9 para reforzar algunos conceptos antes de las evaluaciones.
Se copió el ítem a) en el pizarrón. Se les indicó que anotaran los datos del problema en un margen de la hoja y en el otro extremo lo que hay que encontrar para responder el problema, en este caso el punto de tangencia y su pendiente. Entre medio de los datos e incógnitas, fueron escribiendo los pasos necesarios para encontrar la solución.
Se contaba con la abscisa del punto de tangencia, por lo que podían calcular el punto, luego tenían que derivar la función y evaluarla en $x = -2$ para calcular la pendiente de la recta tangente y, finalmente, encontrar la ecuación de la recta. Se les dio un tiempo para trabajar y luego se corrigió en el pizarrón. Cada grupo lo resolvió en forma adecuada

y la mayoría sin presentar demasiadas dificultades. La gráfica de la función y de la recta les ayudó a autocorregirse.
A continuación se copió el ítem b) y nuevamente se copiaron los datos, incógnitas y los pasos a seguir para responder la consigna, que coincidían con el ítem a), la ecuación de la recta tangente, para lo cual necesitaban el punto de tangencia y su pendiente. Se hizo notar que la pendiente dada coincidía con la hallada en el ítem a) por lo cual la recta encontrada también tenía que aparecer en la respuesta de este ítem.
Se marcó la diferencia de que ahora el dato dado era la pendiente y teníamos que encontrar el o los puntos de tangencia.
Sobre la gráfica realizada anteriormente se les preguntó si podría existir otra recta tangente a la curva con la misma pendiente y trasladaron la recta dibujada para observar si habría otro punto de tangencia.
Se remarcó la interpretación geométrica de la derivada para que observaran la manera de utilizar ese dato y así calcular el o los puntos de tangencia. Se les dio tiempo para trabajar y nuevamente se corrigió en el pizarrón.
Al finalizar, se volvió a revisar los pasos realizados en cada situación para reforzar el razonamiento seguido.
Se les pidió que completaran el cuadro 3.3 para que pudieran visualizaron que la respuesta final de los dos problemas era la misma y los conceptos necesarios para resolverlos también.

Función	Punto/s de tangencia	Pendiente	Ordenada al origen de la recta tangente	Ecuación de la recta tangente
$f(x) = x^3$	P =(-2, f(-2))	m = ?	b=?	y = mx +b
$f(x) = x^3$	P_1=? P_2=?	m = 12	b_1=? b_2=?	$y_1 = mx_1 + b_1$ $y_2 = mx_2 + b_2$

3. 3 Datos e incógnitas de las dos consignas presentadas

3.4.3 Evaluación grupal

La evaluación grupal es complementaria a la individual y se tomó una hora antes que terminara la clase.

La clase anterior a la evaluación grupal, se les transmitió la importancia de la participación en la misma y el compromiso que cada integrante de los grupos debería tener ya que el aporte de cada uno era fundamental.
El problema presentado en esta evaluación fue considerado como uno de los siete ejercicios de la evaluación individual, es decir, uno de los ejercicios de la evaluación individual tuvo la corrección (bien, regular o mal) de esta evaluación, por lo que en la individual resolverían seis ejercicios más para completar la nota del parcial.
Aquellos que faltaran a la evaluación grupal resolverían en la individual siete ejercicios.
Se les entregó 2 hojas con el enunciado de la evaluación a cada grupo. Se los observó entusiasmados y con una muy buena participación de todos los integrantes.
En el anexo 1 se muestran unas fotos del momento de la evaluación y algunas producciones.

3.4.4 Evaluación individual

Se distribuyen los parciales y luego se realizó una lectura de los enunciados, llamando la atención sobre cuestiones puntuales para evitar posibles errores. Se remarcaron palabras como justificar, derivar por definición, indicar verdadero o falso etc. para que presten atención en la forma de proceder y en la forma de responder. Este instrumento se debe al reconocimiento de que los alumnos leen las consignas de modo distinto a como fueron pensadas por el docente o reproducen mecánicamente lo hecho en clase, sin focalizar lo que específicamente se pide en la evaluación y sin que necesariamente esto signifique que no han estudiado o que disponen de un insuficiente conocimiento.
La evaluación escrita constó de 7 ejercicios de los cuales resolvieron 6 ya que en el séptimo se colocó la nota obtenida en la evaluación grupal. Si alguno de los estudiantes faltó a la evaluación grupal, resolvió los 7 ejercicios.
En el anexo 1 se muestran algunos ejercicios de las evaluaciones de dos estudiantes

3.5 Análisis a posteriori

En esta sección se incluyen la confrontación entre lo planificado y lo observado durante la implementación y las producciones de los estudiantes.

La posición como docente llevó a no quedarnos con las respuestas concretas de los estudiantes y se concibió, en general, modos de intervenir que dieron lugar a la aparición de distintas posturas, interpretaciones o resultados que fueron sometidos al debate y a las argumentaciones.
Se trató de rescatar en los grupos de trabajo no sólo las preguntas de los estudiantes, el decir si está bien o mal lo planteado, o darles una ayuda para que puedan encarar el problema, sino también rescatar el proceso, preguntando cómo lo pensaron, que me muestren lo que estuvieron haciendo.
La instalación de esta modalidad, permitió al docente recorrer los grupos, escuchar y entender mejor los alcances y las dificultades que la secuencia ofreció, para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje.

3.5.1 Análisis sobre la consigna del ejercicio inicial

Si bien se les presenta en el enunciado distintos ítems, al leerlo en su totalidad, van resolviendo la situación. Primeramente, realizan algunos cálculos, intentando comparar las opciones y sobre todo pensando en el mes completo que es lo que habitualmente se utiliza hoy en día. Les cuesta también encontrar una escala adecuada para graficar las tres rectas en el mismo sistema de ejes coordenados.
Se realizan intervenciones en el pizarrón en la medida que el trabajo de los estudiantes avanza, para marcar los errores comunes cometidos en varios grupos, para orientarlos cuando las dificultades son comunes a toda la clase y, finalmente, para realizar la corrección de la consigna.

Al finalizar el ejercicio se indica que la metodología de trabajo en clase va a ser el trabajo grupal en la manera que se realizó con este ejercicio inicial, que la participación y aporte de cada uno de ellos es muy importante para el aprendizaje propio y para el de sus compañeros, y que al inicio de la clase siguiente ya deben sentarse de esta manera, manteniendo los mismos grupos, para que se vayan conociendo y sea más productivo el trabajo a medida que pase el tiempo. Se remarca también la importancia de su participación en la actividad áulica pero también en las actividades asignadas como tarea ya que al inicio de la siguiente clase se asignará un tiempo para que compartan las respuestas alcanzadas y lograr un intercambio y discusión entre ellos.

3.5.2 Análisis de la secuencia

Análisis de la consigna 1

Al resolver el primer ítem, muy pocos se cuestionan que no pueden calcular los kilómetros entre las 14 h y las 15 h sin suponer un recorrido con velocidad constante.
Les cuesta también poder escribir los razonamientos y procedimientos que realizan para resolver los distintos ítems. Esta modalidad, de poder escribir sus razonamientos, si bien se continúan pidiendo en las demás consignas, debe ser reforzada en toda la cursada ya que se considera una herramienta valiosa para el proceso de aprendizaje.
Tampoco pueden interpretar sin una guía el hecho que tienen que marcar sobre la gráfica los valores utilizados en los cálculos realizados, es decir los segmentos $(y_2 - y_1)$ y $(x_2 - x_1)$ con lo cual es necesario reformular la consigna para lograr una favorable interpretación.

Análisis de la consigna 2

Las producciones de los estudiantes fueron similares a las esperadas al diseñar esta consigna. En el ítem f), al buscar la velocidad de 35 km/h en un instante, alguno de los grupos lo podría haber asociado con la recta tangente y se los habría invitado a pasar al pizarrón para que puedan compartir sus afirmaciones con sus compañeros pero esto no ocurrió.

Análisis de la consigna 3

La mayoría de las producciones fueron acertadas, aunque algunos presentaron solo los cocientes sin aportar ninguna búsqueda de información. Utilizaron poco vocabulario específico pero es razonable ya que la mayoría no había cursado física en el último año de la secundaria y en la carrera la cursan en el cuatrimestre siguiente.

Análisis de la consigna 4

El trabajo realizado de los estudiantes coincidió, en su mayoría, con el esperado. El hecho de que tenían que calcular tasas de cambio de áreas respecto a longitudes les resultó difícil de interpretar para algunos de los grupos, pero en general, esto no ocurrió. Creemos que el haber realizado la puesta en común de la Consigna 3 por grupo y luego algún ejemplo en toda la clase les ayudó a esta interpretación.

Análisis de la consigna 5

Los estudiantes trabajaron en forma participativa, se encontraron más cómodos y seguros al trabajar con una ecuación de una función ya conocida. De esta manera pudieron realizar los cálculos necesarios sin dificultad.

Análisis de la consigna 6

Las entregas de los distintos grupos fueron en su mayoría adecuadas. Creemos que el hecho de revisar entre todos lo trabajado en la consigna 1 los ayudó a interpretar adecuadamente la consigna y lo que para el docente era lo más importante.
Algunos comentarios de los estudiantes de la consigna 6 que surgieron de las entrevistas se encuentran en el Capítulo 4 - Análisis de las entrevistas.

Análisis de la consigna 7

Consideramos que las consignas previas favorecieron el seguimiento del razonamiento necesario para introducir el concepto de derivada.
Les costó realizar los cálculos necesarios por lo que será necesario reforzar la operatoria desde el inicio de la cursada.
La actividad de pedirles la interpretación de las tres ecuaciones, marcó nuevamente la importancia de la evaluación formativa implementada en el desarrollo de la secuencia, ya que nos permitió en tiempo real, conocer si habían logrado dicha interpretación y observas la necesidad de seguir reforzando los conceptos vistos, en las clases posteriores.
Propusimos para la próxima implementación no presentar inmediatamente después de la Consigna 7 el recuadro con la definición de derivada de una función sino pedirles a los estudiantes que ensayen una definición posible para luego formalizar la misma y darles la simbología a utilizar.

Análisis de la consigna 8

Por el hecho de no contar con una ecuación para poder realizar los cálculos les resultó más difícil resolver la consigna. Necesitaron una guía inicial para continuar su resolución.
Se consideró incorporar en el trabajo práctico y en el resto de las clases ejercicios similares para que puedan seguir practicando.

Análisis de la consigna 9

Consideramos que la evaluación en proceso y las observaciones realizadas en cada grupo de trabajo, aquí cumplieron nuevamente un rol importante ya que se pudo visualizar las dificultades de los estudiantes y tratar de revertir esta situación antes de las evaluaciones. Consideramos que esta actividad resultó productiva para el proceso de enseñanza – aprendizaje.

3.5.3 Análisis del Trabajo Práctico Obligatorio

La realización del trabajo práctico obligatorio jugó un papel muy importante en el aprendizaje y en la afirmación de un modelo de evaluación como proceso, en tanto permitió a los docentes contar con mayor información para componer una idea más completa del rendimiento de los alumnos. Desde la perspectiva de los alumnos tanto la obligatoriedad como la doble devolución son vistas favorablemente ya que les permite otorgar a estos trabajos prácticos un sentido vinculado al aprendizaje y comprender que no procuran ejercer una función de control.

Con las correcciones de estos trabajos se observaron las dificultades de los estudiantes para la resolución de algunos ejercicios y, de esta manera, se incorporaron en la secuencia algunas consignas para reforzar los conceptos que aún no estaban fijados antes de la evaluación.

3.5.4 Análisis de la Evaluación grupal

Se realizó una devolución a cada grupo, detallando los errores cometidos y las dificultades encontradas; la intención fue constituir esta situación en una instancia de aprendizaje para los alumnos y un indicador para el docente del estado de conocimiento del curso.

A partir de las dificultades encontradas, se presentaron en la clase algunas consignas para reforzar los conceptos antes de la evaluación individual.

Se consideró realizar una comparación, posterior a la evaluación individual con los resultados de la consigna de la evaluación grupal con la consigna similar de la evaluación individual que todavía está pendiente. A partir de esta intensión surge la pregunta para comenzar a investigar, respecto de condiciones que tendrían que tener las consignas para ser semejantes o similares, y analizar dichas consignas en el trabajo práctico obligatorio, en la evaluación grupal y en la evaluación individual para visualizar la evolución de los estudiantes.

Analizamos también para una próxima cursada, la conveniencia y viabilidad de realizar esta devolución al conjunto de la clase –algunos comentarios de los alumnos también sugieren esto- con la intención de favorecer un intercambio acerca de los diversos modos de resolución del ejercicio planteado.

3.5.5 Análisis de la Evaluación individual

Consideramos que la modificación de la lectura inicial con algunas aclaraciones, constituye un avance significativo en el sentido formativo de la evaluación, aunque el alcance de estas aclaraciones todavía se sigue analizando. Los momentos iniciales del examen, se destinaron fundamentalmente a llamar la atención de los alumnos sobre cuestiones puntuales que podían anticiparse como posibles fuentes de errores, al reconocer que la lectura de las consignas por parte de los estudiantes se realiza de modo muy distinto a como fue pensado por el docente o reproducen mecánicamente lo realizado en clase, sin poder focalizar lo que se les pide específicamente en la evaluación.

Capítulo 4
Análisis de entrevistas

Se realizaron entrevistas a los estudiantes con el objeto de conocer sus puntos de vista sobre la propuesta, cómo vivieron la experiencia, si les sirvió para aprender, si les permitió mejorar el rendimiento de los parciales, si el trabajo grupal les resultó útil, qué aportó esta experiencia a la asignatura, entre otros aspectos, con el fin de analizarlas, y rediseñar la propuesta para una futura y mejorada implementación.

Las mismas no fueron realizadas por la autora de este trabajo para que los estudiantes no se sintieran condicionados al dar sus respuestas.

A continuación se transcriben fragmentos de las entrevistas realizadas a los grupos de trabajo respecto de los diferentes aspectos del desarrollo de clases tratados durante el cuatrimestre mostrados en los cuadros 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5.

4.1 Comentarios respecto al trabajo grupal

E: Habrán visto que el trabajo en grupos se fue instalando en la clase a lo largo de todo el cuatrimestre. ¿Qué piensan del trabajo grupal en clase?
A1: Al principio no me gustaba mucho. Al estar acostumbrada a que primero me expliquen y después hacerlo… antes de hacerlo, a ver cómo me sale sin tener idea, con mi conocimiento… pero después como que te acostumbras, o sea, a plantear cosas…
A1: Claro, que después te digan cómo es y entonces vos decís, ah, claro, estaba bien, estaba mal…
E: Algunos compañeros de ustedes creen que de esa manera les explican menos, y se quejan de que falta explicación. ¿Ustedes comparten esa mirada o les parece que no?
A3: Yo al principio pensaba que era así. Con el primer tema pensé que era así, que nos largaban así nomás, y que… “aprendételo vos”. Después me di cuenta que haciéndolo en grupo las cosas y poniendo a funcionar la cabeza es mejor. Ahí te das cuenta como dice ella. Estás bien o estás mal o… no estás.

A1: Igual nos explican dos o tres ejercicios. Entonces después vos te das cuenta, al terminar la clase, si todos están en la misma duda entonces dicen bueno, hagamos este ejercicio… equis…
E: O sea que el trabajo en grupos las docentes lo retoman y dicen bueno, acá estuvo pasando esto, esto, esto…
A1: Trabajar en grupos está bueno, pero, por ejemplo, yo me disperso muchísimo en grupo. Por ejemplo, en Elementos trabajábamos solos y yo entendía más porque yo me dedicaba a lo mío y consultaba yo mi duda a la profesora. Y en grupo con las chicas hacemos todo pero como que uno hace cualquier cosa para dispersarse.
A2: Sirve que por ahí cada uno tiene una opinión diferente y después se va sacando una conclusión y así podemos resolver el problema…
A3: A mí me sirve también. Uno puede estar medio trabado con un ejercicio y los demás lo pueden ayudar. Si te dan una mano más o menos…
A4: Sí, porque dos personas están haciendo un ejercicio y capaz que uno está trabado y una le dice a la otra yo lo haría de esta manera, y yo lo sé hacer de la otra y capaz que entre los dos… sí, no, tenés razón, se hace así y no como yo pensaba hacerlo…
A2: Empezás a relacionarte con los compañeros tuyos, y en futuro tenés que dedicarte a eso también, intercambiando opiniones, supongo que se plantea para eso.
A3: Para integrarte también, nosotros empezamos siendo 4 y a veces somos como 10 los que nos juntamos, en clase de Matemática somos 4 pero a veces nos juntamos a estudiar, nos llevamos bien y somos más.
A5: A mí me complica eso de que presentan la situación antes que la explicación, después la modalidad en grupo, el hecho del equipo docente cómo está en cada grupo... porque la verdad es que labura 10 veces más hay que reconocerlo... eso está genial, pero el tema de la resolución y después la explicación no...

4. 1 Entrevistas. Comentarios respecto al trabajo grupal

Si bien la mayoría de los estudiantes valoraron el trabajo grupal, como metodología de trabajo, nos seguimos encontrando con los obstáculos que habría que sortear entre aquellos alumnos que ofrecen resistencia porque les resulta costoso modificar prácticas muy instaladas en el sistema educativo, sobre todo en el hecho de que no se les explica antes de cada consigna. Si bien reconocen que los docentes realizan un mayor esfuerzo para aplicar esta metodología, se siguen sintiendo "solos" al momento de iniciar la resolución de cada consigna.

4.2 Comentarios respecto a la consigna 6

E: ¿Cómo les resulta esto de escribir en matemática y relacionar los ejercicios?.
A1: Sirve porque entendés más.
A2: Está bueno, me ayuda al razonamiento…
A3: Sí, pero es un repaso. Es como para anotar todo lo que vas aprendiendo, lo que vas pensando.
A2: Por ahí te ayuda a entender un poco más, que no son ejercicios aislados, sino que pensándolo lo podés resolver de otra forma, por ahí lo que vos estás haciendo en un ejercicio anterior, lo relacionas con el otro, por ahí de la otra forma se hace más mecánico.

4. 2 Entrevistas Comentarios respecto a la consigna 6

La escritura, tanto de las justificaciones de los pasos o razonamientos realizados al resolver las consignas, resulta una actividad que a los estudiantes les resulta difícil por lo que es necesario orientarlos para que vayan progresando a lo largo de la cursada.

4.3 Comentarios de las evaluaciones

E: A ustedes les tomaron un parcial grupal y otro individual. ¿Eso qué les parece, les sirve para aprender?
Los tres: Sí, eso resulta…
A1: Claro. Además nos esforzamos para llegar a una respuesta mejor, más completa. Tenés que profundizar la respuesta. A veces llegamos a un pensamiento y después la respuesta la dejamos más o menos, en grupo nos concentramos más.
A1: Trabajamos mejor en el grupo, en sí, en la evaluación, trabajamos mejor. Porque todos opinamos, probamos de todo y sacamos conclusiones.
A2: Teníamos que contar más o menos el procedimiento, cómo hicimos todo.
E: ¿Les sirvió para aprender?
A1: Sí, sí…A mí me sirvió porque yo no lo sabía y ahí lo aprendí.

A2: Y sirve para pensar… A mí se me complicaba un poco porque es Matemática y te tienen que dar números primero…
A1: Si lo sacaste en grupo, lo aprendiste, ya está.
E: En la evaluación individual ¿había un ejercicio similar?
A1: Igual creo que no nos tomaron ejercicios iguales.
A2: Sí, similar, la misma forma de pensamiento. Si además lo bueno que tiene es que como sabés que es por un punto ya están todos callados están todos enfocados en eso, todos hacen un esfuerzo mental mayor para ver cómo podemos llegar al resultado.

4. 3 Entrevistas Comentarios respecto a las evaluaciones

En las entrevistas y conversaciones sostenidas con los alumnos resulta clara la ponderación positiva que ellos hacen respecto a la evaluación grupal. Por un lado, el parcial grupal ayuda a “sumar puntos” para la acreditación, por otro lado al insertarse en una instancia crucial para los alumnos, el trabajo grupal comienza a ser vivenciado como herramienta de producción colectiva.

4.4 Comentarios de los trabajos prácticos obligatorios

E: ¿Qué piensan sobre los trabajos prácticos? ¿Sirven para aprender?
A1: Y por ahí si tenés dudas te ayuda, te ayuda para ver cómo estas, si estás bien o estás mal, está bueno que sea antes del parcial y te lo entreguen antes, te sirve para ver si estás bien preparado o estás mal, tenés que estudiar más, menos.
A2: Te ayuda porque capaz que vos no te das cuenta, crees que ese tema lo sabes y al momento de resolverlo te das cuenta que está mal.
A2: Aparte al resolverlo hay ciertos detalles que no los escribís o te olvidás de hacerlo, y al resolverlo te queda mal.
A3: Ellas nos piden que tenés que escribir las respuestas, hago esto porque… la derivada es así… y por ahí nosotros no lo hacemos en un parcial, ponemos los números, las cuentas, el resultado y yo no estoy acostumbrado a eso.
A1: Claro porque involucrás teoría en las respuestas, claro tenés idea de lo que estás haciendo, sino es muy mecánico.

A2: Te guiaban también de las correcciones que te hacían. Cuando uno lo está haciendo solo en casa y no tiene a quién preguntarle lo mira del trabajo práctico corregido y eso también te ayuda.
A2: Yo me daba cuenta que, ponele los trabajos prácticos a veces los hacía mal y después en los parciales me iba bien por el tema de ver las correcciones y empezar a hacer bien los ejercicios.
A3: Yo creo que al rehacer el trabajo que ellos te dan es como que empezás a releer de vuelta y te das cuenta vos misma los errores que tuviste, pavadas que te equivocaste.
A4: Yo los hice y cuando los hacía me daba cuenta que no sabía nada para el parcial, para eso me servía. Creo que tuve que rehacer todos porque son obligatorios y los tenés que rehacer si te fue mal. Los tuve que rehacer todos, pero estaba bueno, estaba bueno para entender.
A 1: No… sí que ayudó. Porque ponele: hacías el TP de derivada. Hay cosas que hacías mal. El trabajo volvía y lo tenías que hacer de nuevo. O sea, para que vos sepas el concepto y lo aprendas. Entonces ahí sí aprobabas. Y eso está bien porque vos aprobabas si está bien hecho. Para mí sí está bien. Porque te obligan…
A4: A mí en lo personal sí me sirvió porque al ser obligatorios me tenía que sentar a hacerlos, porque si es por mí yo no me siento a hacer nada y con eso practicaba.

4. 4 Entrevistas Comentarios respecto al trabajo práctico obligatorio

Consideramos que la decisión de poner los trabajos prácticos como obligatorios, fue acertada para el proceso de enseñanza – aprendizaje. Por un lado los estudiantes revisaban los contenidos y corregían sus errores en la segunda entrega y por otro nos permite visualizar los contenidos que los estudiantes necesitan reforzar para presentarles nuevas consignas para tal fin.

4.5 Desdoblamiento de parciales

E: Otra cosa que ocurrió es que se subdividieron los parciales. Hay cuatro en vez de dos. ¿Eso cómo lo ven?.
A1: Te ayuda porque yo, por ejemplo, la primera parte la aprobé, la segunda me fue mal y en el segundo parcial me parece que también me fue mal. Pero al haber aprobado la primera tengo la chance de recuperar y dejar regular la materia.
A2: Te permite entusiasmarte.

A3: Te da más oportunidades de regularizar.
A1: Es como que yo, de mi parte, si me dan dos parciales y muchos temas, los estudio para ese parcial y me los olvido. En cambio si lo estudio de a poco sé que me van a queda
E: Ah, ¿sí? ¿Ustedes piensan igual? ¿O sea que estudiar de a cachitos permite recordar mejor todo?
A2: Yo creo que sí, más que nada porque en mi caso me confundo bastante, incluso los temas. Entonces si me das dos o varios temas, ya me mezclo y me resulta más difícil.

4. 5 Entrevistas Comentarios respecto al desdoblamiento de parciales

El desdoblamiento de los parciales les resultó favorable a los estudiantes ya que fueron menos contenidos para estudiar por cada parcial, no tuvieron tanta superposición con los parciales de otras asignaturas y les permitió una mayor permanencia en la cursada ya que podían acceder al recuperatorio habiendo aprobado un solo parcial.

Capítulo 5
Resultados

Se diseñó la secuencia didáctica para introducir el concepto de derivada. Las consignas se centraron en lo conceptual y se buscaron situaciones problemáticas sencillas.

Secuencia didáctica

UNIDAD N°5: "FUNCIÓN DERIVADA"

TRABAJO PRÁCTICO N°2

Contenidos: Tasa de cambio promedio e instantánea. Problemas de aplicación. Derivada de una función. Función derivada. Función creciente y decreciente. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Concavidad de curvas. Puntos de inflexión. Análisis de funciones. Funciones compuestas y su derivación. Derivadas sucesivas.

Contenidos previos: Propiedades de los números reales. Ecuaciones e inecuaciones. Factorización de expresiones algebraicas. Proporcionalidad directa e inversa. Concepto de función. Función por parte. Gráficas de funciones. Composición de funciones. Límite y continuidad.

Objetivos:

Aplicar el concepto de derivada en la resolución de situaciones problemáticas sencillas.

Analizar funciones utilizando la interpretación geométrica de la derivada.

Fomentar el trabajo grupal y estimular la responsabilidad hacia sus compañeros y el trabajo individual.

Instrumentos de evaluación: Trabajo práctico obligatorio. Evaluación grupal e individual. Devoluciones detalladas de las correcciones de las producciones realizadas.

Estrategias de enseñanza: Trabajo colaborativa con la guía de los docentes. Puestas en común en el pizarrón para las correcciones e institucionalizaciones. Correcciones detalladas de las producciones de los estudiantes.

Actividades:

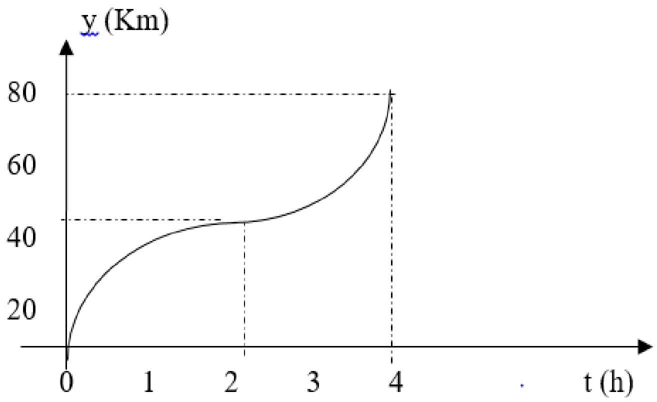
El conocer el concepto de derivada nos permitirá por un lado avanzar con el análisis de funciones que veníamos trabajando, y podremos encontrar donde la función tiene un valor máximo o mínimo y donde cambia su concavidad. Esto nos permitirá resolver problemas como por ejemplo determinar cuántos naranjos deben plantarse por hectárea de modo que se obtenga el mayor número de naranjas.

Por otro lado, nos permitirá describir el movimiento de cuerpos conociendo, no solo las velocidades promedios sino en cada instante, y podremos resolver problemas como por ejemplo, saber si a una camioneta le corresponde una multa por exceso de velocidad.

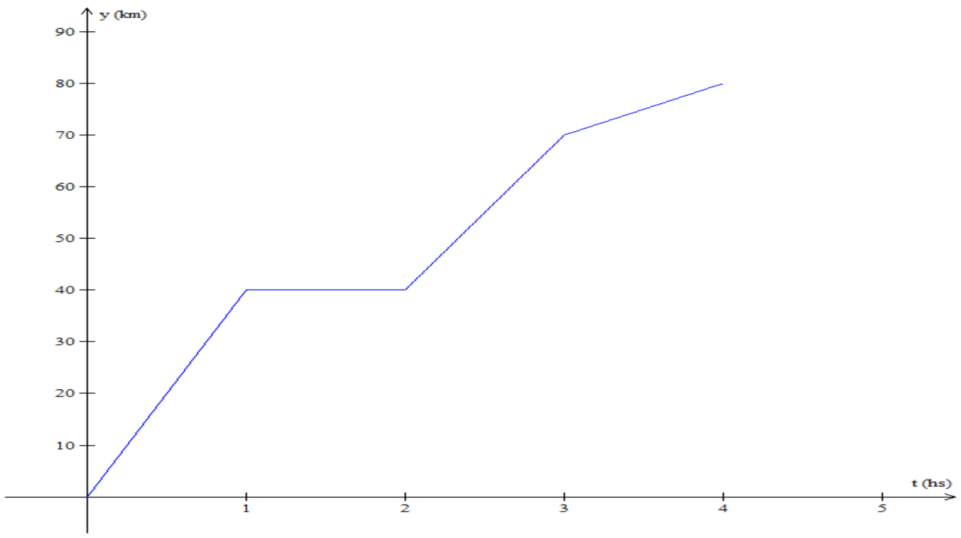
Empezaremos a trabajar con algunos problemas e iremos observando la necesidad de tener que introducir el concepto de derivada.

1) Un automóvil que se mueve con trayectoria recta, a las 14 h. se encontraba a 48 km de su punto de partida, entre las 14 h y las 16hs, recorrió 192 km más.
   a) Calculen si es posible, los kilómetros que recorrió entre las 14 h y las 15 h.
   b) Con los datos obtenidos ¿podemos realizar una representación gráfica de la posición del automóvil en función del tiempo? ¿Cómo sería?
   c) Formalicemos el concepto de velocidad media. Cuando hablamos de velocidad ¿que entendemos por esto? ¿En qué unidades se expresa? ¿Cómo escribiríamos su concepto simbólicamente?
   d) Utilizando la fórmula: ¿Es posible siempre calcular la velocidad media de los recorridos entre dos tiempos cualesquiera? ¿Qué sucede si tomamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños? ¿Es posible conocer la velocidad que llevaban los automóviles a las 17 h exactas? Justifiquen.

2) Los gráficos indican la posición de Daniel al salir de su casa en función del tiempo (figuras 5.1 y 5.2), siguiendo una trayectoria recta, en dos ocasiones en que visitó a sus amigos que se encuentran a 80 Km de distancia de su casa.



5. 1 Primer trayectoria



5. 2 Segunda trayectoria

a) Enuncien por escrito algunas afirmaciones que sean verdaderas para los dos gráficos a la vez y algunas que sean verdaderas sólo para uno de ellos (con respecto a espacios recorridos, tiempos empleados, velocidades, etc.).

b) Calculen la velocidad media del recorrido total para cada uno de los gráficos.

c) Esta velocidad media, ¿nos sirve para calcular los km recorridos cuando transcurrió una hora en ambos casos? Justifiquen.

d) ¿En cuántos intervalos sería posible calcular la velocidad media con exactitud en ambos casos? Justifiquen.

e) Calculen la pendiente de la recta que pasa por los extremos de algunos de los intervalos elegidos en el punto anterior para cada gráfico.

f) ¿En algún intervalo, el automóvil se desplazó a una velocidad de 35 km/h? Justifiquen la respuesta. ¿Y en algún instante?

g) ¿Pueden calcular la velocidad exacta a las 3,5 h en los dos trayectos? Justifiquen.

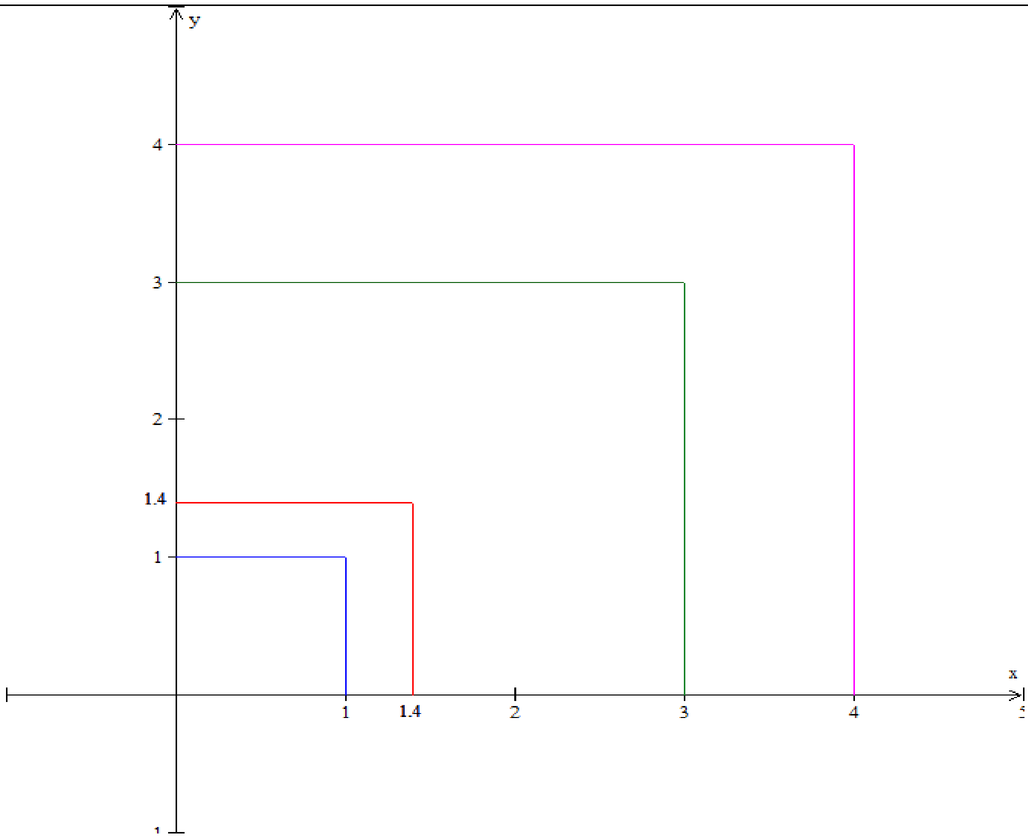
3) La velocidad media mide la variación del espacio recorrido en función del tiempo. También podemos calcular la variación media teniendo en cuenta otras magnitudes. En general esta variación media se denomina TASA DE CAMBIO PROMEDIO o TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Por ejemplo:

- Si quieren medir la variación de temperatura de un líquido a lo largo del tiempo, ¿Cómo lo harían? ¿Cómo se denomina habitualmente (o en física) este cambio? ¿Qué unidades podría tener?
- Si se registra el número de nacimientos que se producen en un país durante 10 años, ¿cómo calcularían con esta información la tasa de cambio promedio de los nacimientos en función del tiempo? ¿Cómo se denomina habitualmente esta tasa de cambio? ¿Qué unidades podría tener?
- Si conocemos el consumo de electricidad en una población durante un día completo, ¿cómo calcularían la variación del consumo en función del tiempo? ¿Qué unidades tendría?
- La presión atmosférica (P) disminuye a medida que aumenta distancia a la tierra (h). ¿Cómo calcularían la tasa de variación de la presión con respecto a la altura? ¿Qué signo tendría dicha tasa a medida que aumenta la altitud? ¿Cuáles serían las unidades?

4) Veamos otro ejemplo de tasa de cambio promedio.

En el siguiente gráfico se han dibujado 4 cuadrados. (figura 5.3)



5. 3 Representación de cuadrados

a) Indicar la longitud de los lados de cada uno de los cuadrados y calcular el área de cada uno de ellos.

b) ¿Cuántos cuadrados pueden dibujar en el gráfico dado?

c) Calculen la tasa de cambio de las áreas en función de las longitudes de los lados de los cuadrados que se encuentran en forma consecutiva.

d) Representen en un sistema de ejes coordenados las áreas de los cuadrados que aparecen en el gráfico, en función de la longitud de sus lados.

e) ¿Tiene sentido unir con líneas rectas los puntos marcados en este gráfico? Justifiquen la respuesta.

f) Encuentren la ecuación de la gráfica representada. ¿Cuál es su dominio?

g) Marquen en el gráfico realizado los valores que se utilizaron para calcular las tasas de cambio.

5) Consideremos ahora la función $f(x) = x^2$ en todo su dominio.

a) Grafiquen la función dada

b) Calculen la variación promedio o tasa de cambio promedio entre los puntos $x = 1$ y $x = 3$ (o intervalo $[1;\ 3]$)

c) Dibujen la recta que pasa por los puntos utilizados en b). Calculen la pendiente de dicha recta.

d) Realicen los mismos pasos de b) y c) para calcular la tasa de cambio promedio en los intervalos $[1;\ 2{,}5]$; $[1;\ 1{,}5]$; $[1;\ 1{,}2]$. Realicen varios gráficos si lo consideran necesario.

e) En el ítem d) tomaron intervalos con el extremo inferior $x = 1$ y cada vez más chicos, ¿pueden tomar intervalos aún más chicos?, ¿Hasta cuánto pueden achicar estos intervalos? Justifiquen su respuesta.

f) ¿Qué relación se encuentra entre la tasa de cambio promedio y las pendientes de las rectas secantes?

g) ¿La tasa de cambio podrá dar negativa? Si les parece que sí, nombren un intervalo donde suceda esto. ¿Cómo resulta la pendiente de la recta que une los puntos del extremo del intervalo en estos casos?

h) ¿Puede dar cero? Si consideran que sí, indiquen un intervalo. ¿Cómo resulta la pendiente de la recta en este caso?

6) Revisen con sus compañeros los ejercicios vistos hasta el momento y escriban las ideas trabajadas en cada paso (tipo de problemas trabajados, conceptos ya conocidos y conceptos nuevos, relaciones entre ellos, qué tipo de respuesta quedó sin responder, etc.).

7) Una camioneta parte de un pueblo y se desplaza con una trayectoria descripta por la función $f(t) = \frac{1}{16}t^2$ (en este caso vamos a considerar como unidad de tiempo el minuto y como unidad de espacio recorrido el kilómetro). A $4\ km$ de la salida del pueblo se ha colocado un dispositivo que controla la velocidad que no debe superar los $40\ km/h$. ¿Le corresponde una multa a la camioneta? ¿Por qué?

Para poder responder estas preguntas realicen las siguientes actividades.

a) Grafiquen la función dada.

b) ¿En qué momento se encontraba a $4\ km$ del pueblo?

c) Como necesitamos conocer la velocidad que marcaba el velocímetro en ese instante exacto, calculemos velocidades promedios en intervalos de tiempo que contengan a $t = 8$. ¿Cómo tendrían que ser estos intervalos? ¿Cuáles convendría tomar?

d) Dibujen las rectas secantes que unen los extremos de los intervalos que consideraron.

e) Como el incremento de tiempo tiene que ser cada vez más chico, ¿a qué valor se debe acercar? ¿Cómo se escribiría esto simbólicamente?

f) A medida que el incremento de tiempo se acerca a cero, esta recta secante se transforma en la recta ……………… a la curva en el tiempo $t = 8$ y en forma similar al caso de las rectas secantes, la velocidad instantánea coincide con la pendiente de la recta …………………...

g) Hallen la ecuación de la recta tangente a la curva en el tiempo $t = 8$. Graficarla en el mismo sistema de coordenadas que la función.

h) Hemos calculado la velocidad instantánea en un tiempo $t = 8$, calculemos ahora la velocidad instantánea para un tiempo cualquiera t.

La **derivada** de una función en un punto x, que denominaremos $f´(x)$ es

$f´(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, siempre que el límite exista y sea finito.

Observar que cada punto de la función donde es derivable se le puede asociar el valor de la derivada definida anteriormente, quedando definida así una nueva función llamada *función derivada* o simplemente *derivada* de la función.

La derivada se la puede simbolizar de otras maneras $f´(x) = \frac{dy}{dx}$ = D($f(x)$)

5. 1 Definición de derivada

8) Dada la función $f(x) = x^2 + 2$,

a) Realicen el esbozo de la función.

b) Hallen la derivada de la función. Escriban qué interpretación le das a la expresión encontrada.

c) Grafiquen la nueva función f´(x).

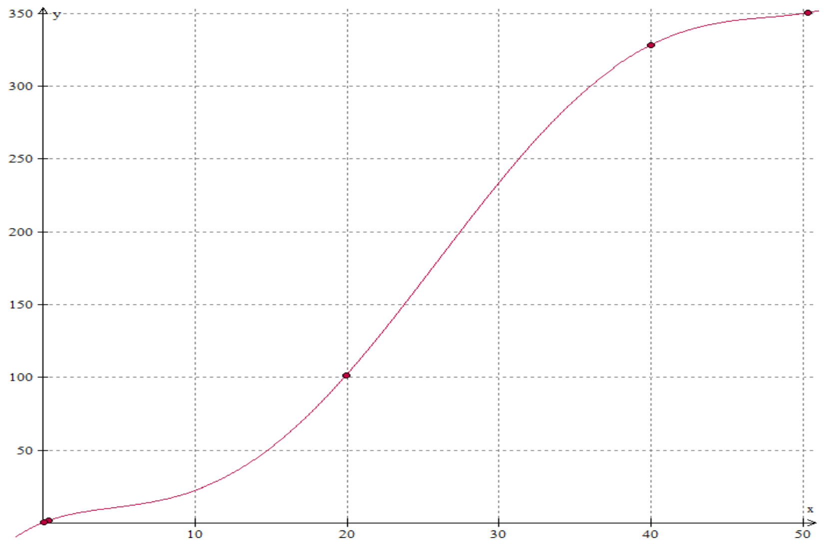
d) Calculen la derivada en x = 2. Escribe qué interpretación le dan al valor hallado.

e) Hallen y grafiquen la recta tangente a la curva en dicho punto.

f) Analizar en qué intervalos la función derivada es positiva, negativa y nula ¿Qué información me da el signo de la deriva?

9) Dada la función $f(x) = x^3$, hallen la ecuación de la tangente a la curva en el punto (-2,-8). Realicen el gráfico de la función y de la recta en el mismo sistema de ejes cartesianos.

10) La figura 5.4 muestra cómo se desarrolla una población *p* de moscas de la fruta (Drosophila) en un experimento de 50 días en un ambiente cerrado. El número de moscas se contó en intervalos regulares y se graficaron con respecto al tiempo *t* y los puntos se unieron con una curva suave.



5. 4 Desarrollo de la población de la mosca de fruta

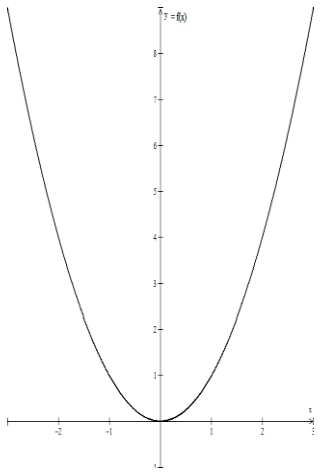
a) ¿En qué intervalos aproximadamente, la población se incrementa de manera más rápida? ¿Y de manera más lenta?
b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento (instantánea) aproximada en el día 20? ¿y en el día 40?
c) Grafiquen aproximadamente la función derivada. Pueden ayudarse con los cálculos del ítem anterior ¿Qué información me brinda este gráfico?
d) ¿A partir de que día habría que aplicar insecticida?

11) Un objeto se deja caer desde lo alto de un edificio de 150 metros de altura. A medida que el objeto cae, su altura, que depende del tiempo, está dada por la función $h(t) = 150 – 4{,}9t^2$ metros.

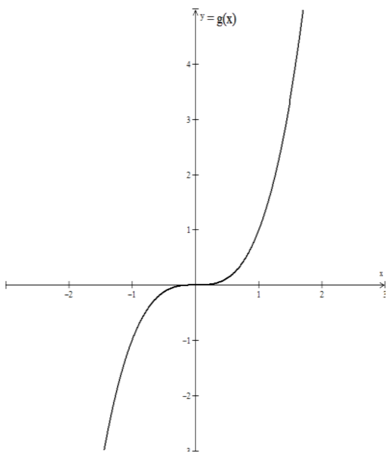
a) Realiza el gráfico de la función en su dominio.
b) ¿En qué tiempo toca el suelo?
c) ¿Cuál es su velocidad 2 segundos después de que se deja caer?
d) Realiza el gráfico de la función que representa la velocidad de crecimiento de la función h(t).

12) El área de un circulo se calcula de la siguiente manera $A = \pi r^2$, donde r es el radio del circulo. ¿Cómo calcularían la velocidad de crecimiento del área en función de la medida del radio? ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea del área con respecto al radio cuando r = 2?

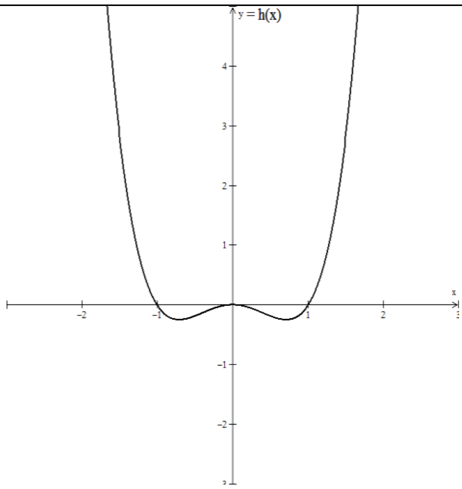
13) Relaciona las funciones que se grafican en los tres primeros gráficos, f(x), g(x) y h(x) (figuras 5.5, 5.6 y 5.7), con sus correspondientes derivadas graficadas en los puntos a), b) y c) (figuras 5.8, 5.9 y 5.10). Escriban el procedimiento que utilizaron para responder.



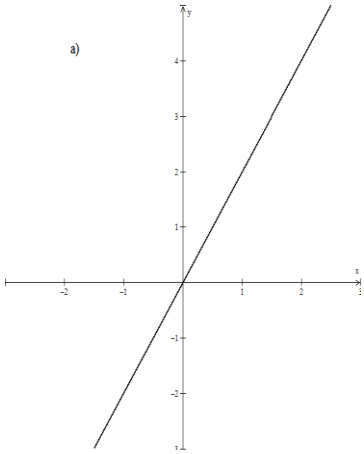
5. 5 Gráfico de f(x)



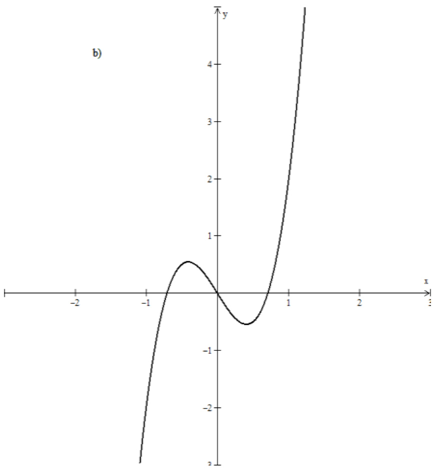
5. 6 Gráfico de g(x)



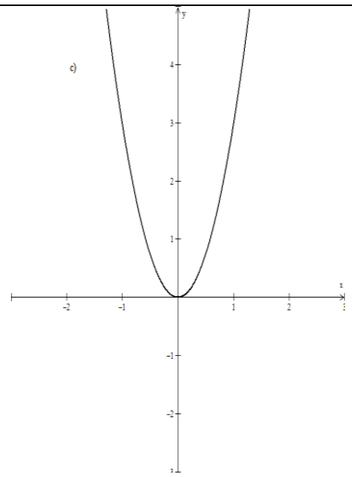
5. 7 Gráfico de h(x)



5. 8 Gráfico de la derivada a)

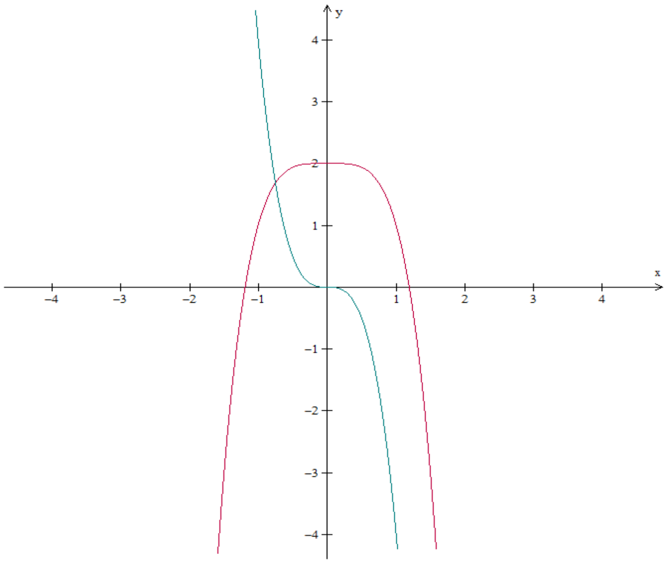


5. 9 Gráfico de la derivada b)



5. 10 Gráfico de la derivada c)

14) La figura 5.11 incluye dos gráficas, la de la función f(x) y la de su derivada f´(x). ¿Qué gráfica corresponde a cada una? Escriban el procedimiento utilizado.



5. 11 gráfica de la función f(x) y su derivada

15) Dada la función $f(x) = |x|$

a) Esbozar la gráfica de la función indicando su dominio.
b) Esbozar la gráfica de la derivada aproximadamente.
c) Calculemos ahora la derivada de la función utilizando la definición, y controlen si lo graficado en b) es correcto.
d) ¿Por qué obtenemos valores constantes? ¿Qué interpretación le podemos dar a estos valores?
e) Escribe la ecuación de la función derivada.

f) Podemos calcular las derivadas laterales cuando x se acerca a cero, es decir las pendientes de las rectas tangentes a la curva al acercarse a cero. En este caso la derivada por la derecha de $|x|$ en x = 0 da 1, y la derivada por la izquierda de $|x|$ en x = 0 da -1, los valores de estas derivadas laterales son distintos, por lo que no hay derivada en cero. Observar que la función es continua pero no derivable ya que la gráfica tiene una “esquina”.

16) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Determinar su dominio y realiza el esbozo de la gráfica.
b) Determinar la velocidad de crecimiento de la función en cualquier punto del dominio. ¿Qué signo tiene dicha velocidad?
c) ¿Cuál es la pendiente de la tangente en x = -1?
d) Marcar un punto donde la pendiente de la recta tangente es -1/4. ¿Habrá uno solo?
e) Cuando tomamos un punto cada vez más cercano al origen, ¿qué valores va tomando la pendiente de la recta tangente? La recta tangente, ¿en qué tipo de recta de transforma? ¿Las rectas verticales qué pendiente tienen?
f) ¿Podemos calcular la derivada en x = 0?
g) Grafica la función derivada.

17) Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$

a) Esbozar la gráfica de la función indicando su dominio.
b) Calcular la derivada de la función para x > 0.
c) Calcular la derivada en x = 4 y encuentra la ecuación de la tangente en el punto de abscisa 4. Dibuja dicha tangente en el mismo sistema de ejes cartesianos donde dibujaste la función.
d) Dibujar en el gráfico la tangente a la curva en x = 0. Cuál es la pendiente de dicha recta? Calcular si es posible la derivada por derecha en x = 0.

18) Observar el gráfico del punto 16) del TP1 y analiza si en los puntos de discontinuidad la función es derivable.

19) Analizar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones y graficar en cada caso una función que justifique tu respuesta.

a) Si una función es discontinua en un punto, es derivable en dicho punto

b) Si una función en un punto tiene una tangente vertical, no es derivable en dicho punto.

c) Si la gráfica de una función tiene un "pico" en un punto (por ejemplo $f(x) = y^{2/3}$), es derivable en dicho punto porque es continua en él.

d) Si una función es continua entonces es derivable.

e) Si una función es derivable, entonces es continua.

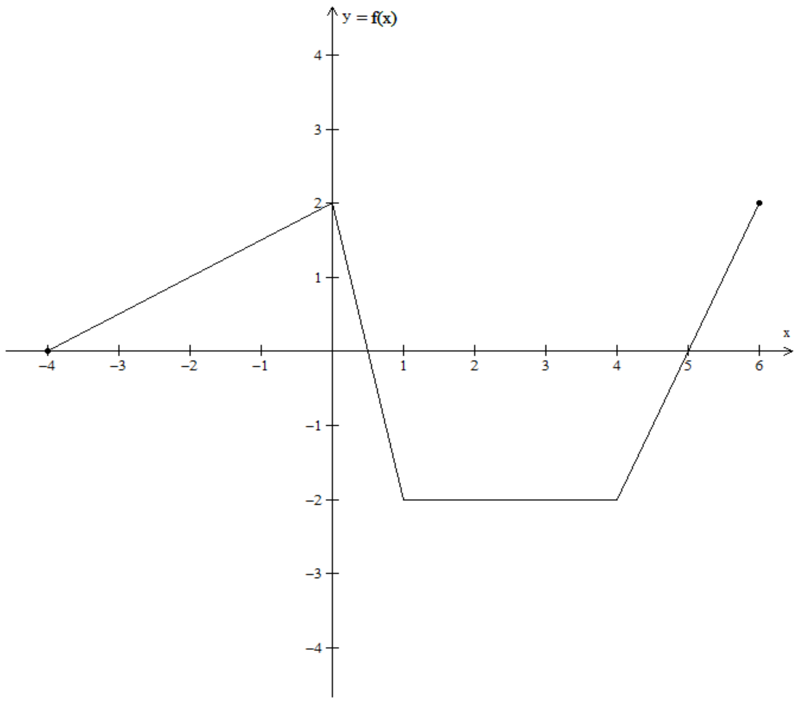
20) Encuentren la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Esboza la gráfica de la curva y de su tangente.

$a)\ y = 4 - x^2 \quad (-3,-5)$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 2\sqrt{x} \quad (4,4)$

21) Determinen la pendiente de la curva en el valor de la abscisa dado.

$a)\ f(x) = \frac{x}{x-2} \ \ en \ \ x = 3$ $\qquad$ $b)\ g(x) = \frac{1}{x-1} \ \ en \ \ x = 4$

22) a) La gráfica siguiente está formado por segmentos de rectas unidos (figura 5.12). ¿En qué puntos de su dominio no está definida la derivada? Justifiquen sus respuestas.



5. 12 Gráfica de una función por parte

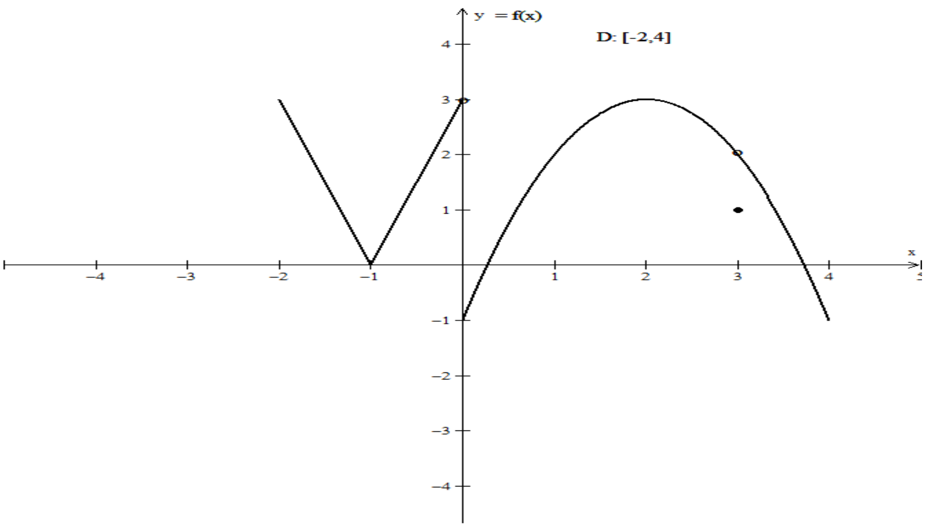
b) Grafiquen la derivada de la función

23) Dada la siguiente gráfica de una función, definida en un intervalo cerrado I (figura 5.13). ¿En qué puntos de su dominio la función es

a) derivable?

b) continua pero no derivable?

c) ni continua ni derivable?



5. 13 Gráfica de una función por parte

24) Grafica una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones simultáneamente

a) Dom: x e R

b) f´(x) = 0 en x = 0, x = 3, x e (5,8)

c) f´(x) < 0 en (0,3) U (9,∞)

d) f´(x) > 0 en (-∞,0) U (3,5) U (8,9)

e) AH y = 0

f) AV x = 9

25) Hallen el valor de a para que la función sea derivable en todo su dominio. Justificar tu respuesta. $f(x) = \begin{cases} ax, & si\ x < 0 \\ x^2 - 3x & si\ x\ \geq 0 \end{cases}$

26) Hallen los valores de "a" y "b" para que las funciones sean derivable y continua en todo su dominio. Justifica tu respuesta

a) en x = 2. $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}^2 + 3, & \mathrm{x} \leq 2 \\ \mathrm{ax} - \mathrm{b}, & \mathrm{x} > 2 \end{cases}$

b) en x = -1 $g(x) = \begin{cases} ax + b, & x > -1 \\ bx^2 - 1, & x \leq -1 \end{cases}$

27) Encuentren las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = \frac{-x^2}{x+2}$ que tengan pendiente 3

Las intervenciones más adecuadas de algunas consignas presentadas en este trabajo, se muestran en el análisis preliminar, Sección 3.3

La implementación se muestra en la experimentación en la Sección 3.4.

Los análisis de lo experimentado se muestran en el análisis a posteriori en la Sección 3.5.

Los instrumentos de evaluación utilizados para favorecer el proceso de aprendizaje y avanzar hacia la elaboración de una evaluación formativa fueron:

- Los trabajos prácticos obligatorios y su posibilidad de una segunda entrega con las correcciones sugeridas. (presentado en el Capítulo 3)
- La evaluación grupal y su devolución antes de la individual (presentado en el Capítulo 3)
- El desdoblamiento de los dos parciales en cuatro en toda la cursada.
- La generación de espacios complementarios de evaluación oral individual en la devolución de las evaluaciones individuales, orientados a brindar al alumno la oportunidad de ampliar o aclarar las respuestas escritas en los casos en los que esta resolución se ubicaba en los límites de lo requerido para su aprobación.
- Las aclaraciones de las consignas de las evaluaciones individuales destinando algunos minutos a la interpretación compartida -entre docentes y alumnos- de los enunciados en el inicio del examen.

Esto permitió realizar algunas intervenciones reforzando algunos conceptos que surgían de los errores cometidos en las correcciones previas a la evaluación individual.

- La evaluación individual considerando un ejercicio similar al del trabajo obligatorio y uno de la evaluación grupal que se muestra en su totalidad a continuación.

Universidad Nacional de Luján **TEMA 1**

Departamento de Ciencias Básicas – División matemática

Evaluación: 2do Parcial de Matemática General (10018) – 2019

Apellido y Nombre: ________________________________ Legajo: ____________

Horario de cursada_____________

1	2	3	4	5	6	7 GRUPAL	NOTA

1. a) Hallar el valor de k para que la función dada sea continua y verificar si es derivable para dicho valor, en todo su dominio

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 + k & si\ x \le 2 \\ kx + 12 & si\ x > 2 \end{cases}$$

   b) Esbozar la gráfica de la función para verificar tu respuesta.

2. a) Hallar la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 1$ por definición

   b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto de abscisa $x = -2$.

   c) Esbozar la gráfica de la función y la recta tangente.

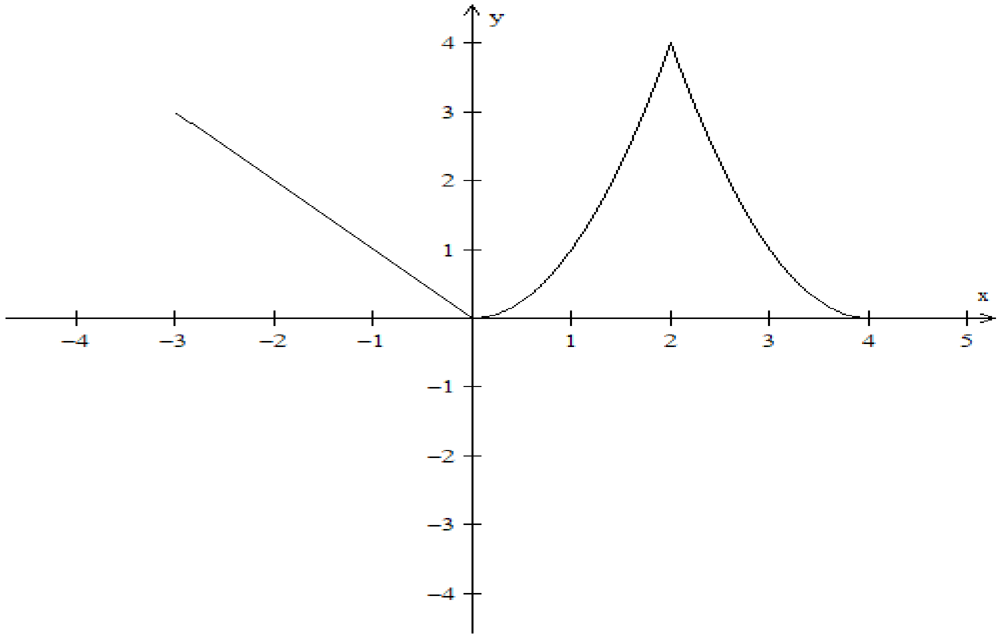
   d) Dar una interpretación que conozcas, al valor de la pendiente de la recta encont

3. Esbozar la gráfica de la siguiente función $f(x) = \frac{-x+3}{x^2-4}$ indicando: dominio, corte ejes, asíntotas (utiliza límites para encontrarlas), máximos y mínimos e indicar int de crecimiento y decrecimiento.

4. Dada la siguiente función $f(x) = x^3 - 3x^2$

a) Hallar los puntos críticos e indicar máximos y mínimos
b) Hallar si existen puntos de inflexión e indicar intervalos de concavidad
c) Graficar.

5. Dada la función f(x) cuya representación gráfica se muestra a continuación (figur
5.14)



5. 14 Gráfica de f(x)

a) Indicar los puntos donde no es derivable justificando tu respuesta
b) Indicar sobre la gráfica si existe, un punto donde la velocidad de crecimiento inst de la función sea -1, otro donde sea cero y otro que sea 3
c) Describir la velocidad de crecimiento instantánea de la función graficada en todo dominio
d) Realizar el esbozo de la gráfica de la función derivada.

6. Un objeto se deja caer desde lo alto de un edificio de 130 metros de altura. Su alt depende del tiempo, está dada por la función $h(t) = 130 - 4{,}9\,t^2$ metros.

a) Realiza el gráfico de la función en su dominio.
b) ¿En qué tiempo toca el suelo?
c) ¿Cuál es su velocidad instantánea 2 segundos después de que se deja caer?
d) Encontrar en que instante el objeto lleva una velocidad instantánea de -30

El ejercicio inicial presentado en el Capítulo 3 permitió mostrar la metodología del trabajo grupal e ir marcando la importancia del trabajo colaborativo para apropiarse de los conocimientos.

También los tiempos asignados al iniciar la clase para que en cada grupo pudieran intercambiar y discutir las tareas realizadas, llevo a que la participación y compromiso individual, fortalezca el grupal.

El análisis de las entrevistas se muestran en al capítulo 4 y las mismas en forma completa en el anexo 2. Dichas entrevistas abiertas y en pequeños grupos, están orientadas a reflejar las opiniones de los estudiantes respecto al trabajo en clase, evaluaciones, trabajos prácticos obligatorios y algunas consignas.

Además de las consignas presentadas en la secuencia se diseñaron ejercicios complementarios, no obligatorios, con sus respuestas para aquellos estudiantes que desearan seguir practicando ya que algunos estudiantes en las clases nos solicitaron agregar más consignas similares a las dadas. Se muestran en el anexo 3.

Se comenzó a realizar un trabajo práctico inicial TP 0, con contenidos, ejemplos y algunas consignas de los contenidos previos necesarios, para que puedan repasar en caso que lo necesiten a lo largo de la cursada. Se incluyeron los siguientes contenidos: Propiedades de los números reales. Ecuaciones e inecuaciones. Factorización de expresiones algebraicas. Proporcionalidad directa e inversa. Concepto de función. Función por parte. Gráficas de funciones. Composición de funciones.

Capítulo 6
Conclusiones

En el primer capítulo se han presentado el objetivo general, los objetivos específicos y las hipótesis de este trabajo de investigación.

El diseño, implementación y análisis de parte de la propuesta didáctica, incluyendo la secuencia y una evaluación formativa se fue desarrollando en el Capítulo 3 siguiendo las fases de la ingeniería didáctica. La secuencia didáctica completa se muestra en el Capítulo 5 dentro de los resultados.

El primer objetivo específico perseguía el análisis de las intervenciones didácticas más adecuadas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, intentando lograr que piensen nuevas relaciones para llegar a nuevos conceptos, incluyendo situaciones problemáticas para que puedan aplicar el concepto de derivada. El cumplimiento del mismo se muestra en el análisis a priori y en la experimentación, que se pueden encontrar en las secciones 3.3 y 3.4 respectivamente. Las intervenciones docentes se fueron concibiendo y precisando a lo largo del recorrido de la propuesta y permitieron conocer mejor de qué modo estaban pensando los estudiantes y así colaborar con ellos para que avancen en el conocimiento.

Queremos destacar ¨como resultado de esta investigación¨ el valor que adquiere una modalidad de trabajo colaborativo en la Universidad propuestos en el cuarto y quinto objetivos específicos. No sólo por el sentido democrático presente en los intercambios sino sobre todo por considerar que la palabra del otro aporta una mirada particular, imprescindible para componer una comprensión profunda y compleja de la situación que se está analizando. Esta horizontalidad que se construye lentamente a través del reconocimiento recíproco del saber y de la experiencia de unos y otros, es una condición central para la producción didáctica. El trabajo colaborativo ha permitido abrir el debate y explicitar posturas e interpretaciones disímiles. Interpretamos que permite también problematizar aspectos de gran valor para la tarea reflexiva sobre la enseñanza y el aprendizaje, ya que se ponen en juego razones de distinta índole que atraviesan la vida del aula y condicionan las decisiones didácticas.

Concebimos, entonces, que la modalidad colaborativa es una práctica posible para entender los alcances y las resistencias que ofrecen los docentes y los alumnos para consensuar diversas propuestas en las aulas universitarias.

Las resistencias visualizadas en la implementación no fueron interpretadas como ajenas o externas sino que se consideraron elementos para seguir realizando ajustes a la propuesta didáctica diseñada. El trabajo grupal fue resistido fuertemente por algunos de los estudiantes debido al cambio de formato habitual de la clase y al desafío intelectual que conlleva. A medida que se avanzó en el recorrido esto fue modificándose y se pudo ir instalando un nuevo contrato didáctico. La resolución de los problemas a través de una construcción cooperativa, en una sucesión de intercambios, análisis y discusiones, fue progresivamente valorada por la mayoría de los estudiantes, como refieren en entrevistas respectivas. Si bien la implementación genuina de un trabajo colaborativo conlleva varias dificultades, la concebimos como una modalidad valiosa para generar cambios sustantivos en las trayectorias de los estudiantes.

Las modificaciones realizadas en la propuesta evaluativa, propuesta en el segundo y tercer objetivo específico, dan muestras de progresos hacia la identificación de condiciones que permiten reconocerle un sentido formativo. Al avanzar hacia una idea de evaluación como proceso complejo, se fue tornando evidente la insuficiencia de la información aportada por los instrumentos clásicos establecidos y la necesidad de encontrar fuentes complementarias, con la finalidad de componer una imagen valorativa más completa del rendimiento de los estudiantes. Tanto el diseño de las situaciones de evaluación como el análisis de su implementación y de los resultados obtenidos por los estudiantes, son claramente tomados como punto de partida para el análisis crítico de diversos aspectos de la tarea de enseñanza.

Evaluamos, también, que las situaciones de devolución de las producciones de los alumnos en instancias de intercambio con el docente constituyen oportunidades reales de nuevos aprendizajes.

Al mismo tiempo señalamos, de acuerdo al sexo objetivo, que la propuesta evaluativa en la que estamos trabajando parece arrojar resultados satisfactorios en las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados. Aunque no le otorgamos un valor concluyente a los resultados cuantitativos, se observa que los porcentajes de regularidad y promoción han aumentado casi el doble y que los estudiantes no abandonan la asignatura luego de desaprobar los primeros parciales ya que cuentan con mejores condiciones para lograr la regularidad y consiguen sostener la cursada. La posibilidad de problematizar lo producido por los estudiantes en situación de evaluación generó nuevo conocimiento relevante en cuanto a ciertas dificultades que se asocian a la resolución de problemas. Existe una clara distancia entre la mirada del docente -quien dispone del modelo matemático que subyace- y la mirada que tiene un alumno que está aprendiendo. Esto lleva a la necesidad de instrumentar momentos en la clase que hagan explícitos los aspectos conceptuales en juego y las relaciones que se establecen ante cada clase o tipo de problemas. La revisión de lo que acontece en las aulas universitarias no suele ser fácil ni habitual y entendemos que se pudo concretar gracias a las diversas miradas de los docentes, que permiten poner en duda lo que se encuentra naturalizado. Así, la evaluación como práctica compleja y muchas veces monolítica, en este caso, pudo ser desentrañada y desagregada, y es esto lo que nos permitió acceder a nuevas interpretaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de matemática.

Referimos a que todo cambio en la propuesta de enseñanza que tienda a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes y no sólo a su rendimiento académico proviene, en primer lugar, de un análisis profundo de las prácticas de evaluación que se implementan en cada caso. En segundo, lugar dicho cambio requiere también del desafío de arriesgar y desplegar una dosis de creatividad para tomar las decisiones acordes según los resquicios que abre la institución, sin entrar en disputa con las pautas que emanan de ella. Esperamos que este trabajo colabore en una reflexión conjunta cada vez más ampliada, para seguir visualizando e implementando nuevas y fértiles propuestas de enseñanza. De acuerdo con lo antedicho, la evaluación que acompaña el proceso de enseñanza programado considera una diversidad de situaciones e instrumentos (exámenes parciales grupales, parciales individuales, trabajos prácticos, devoluciones personales y grupales) que en conjunto procuran realizar un seguimiento de la evolución de los aprendizajes.

Para esta propuesta didáctica se registraron además videos centrados en las puestas en común y en las intervenciones pertinentes del docente que luego serán analizadas y junto con el análisis de las entrevistas ya realizado en el cuarto capítulo, se podrá reformular la propuesta de enseñanza – aprendizaje y cumplimentar el séptimo objetivo.

Por lo expuesto, creemos que, tanto la primer hipótesis como la segunda planteadas en esta investigación, que consideran la elaboración de una propuesta didáctica, en este caso sobre el concepto de derivada, centrada en el aprendizaje colaborativo entre pares y que apunte a modificar el contrato didáctico en la clase, y considerando además, la evaluación formativa como parte constitutiva de la propuesta, con la mirada puesta en la revisión de la secuencia permitieron realizar modificaciones a la misma obteniendo mejores logros, son ambas confirmadas y crean un camino a seguir construyendo para disminuir la deserción y mejorar la aprobación de la asignatura Matemática General de la Carrera de Ingeniería Agronómica.

Líneas de trabajo futuras

Nos hemos planteado, para el futuro, la inquietud por establecer relaciones sistemáticas entre las instancias de evaluación, a modo de comprender mejor el proceso de aprendizaje de los alumnos y de encontrar indicadores que nos permitan avanzar en el reconocimiento de los aprendizajes que son efectivamente evaluables en el marco de la enseñanza de los conceptos seleccionados.

En el trabajo de investigación se presentaron ejercicios similares en el trabajo práctico obligatorio, en la evaluación grupal y en la individual con el fin de poder analizar el avance progresivo de los estudiantes en sus aprendizajes. Surgieron entonces al iniciar este análisis aún no terminado, nuevos interrogantes.

Repensar el instrumento evaluativo en el marco del trabajo reflexivo llevó a la necesidad de entender las razones que intervienen para que algunos alumnos planteen -cuestión frecuente, más allá de esta asignatura- que los ejercicios del parcial no se corresponden con los propuestos en clase mientras que los docentes no suscriben dicha interpretación. En otras palabras, entender las razones que intervienen para que algunos problemas considerados "de la misma clase" desde la perspectiva docente acerca del conocimiento matemático en juego no sean así reconocidos por los alumnos ¿Por qué los estudiantes tienen dificultades para encontrar los procedimientos que los llevarían a su resolución?

Si bien desde el sentido común es razonable pensar que en algunos casos la mirada del estudiante está afectada por un estudio insuficiente del tema (no ha realizado todos los problemas que se han ofrecido, mantiene una irregular asistencia a clase) nos proponemos alcanzar una interpretación más rigurosa sobre las cuestiones que intervienen en este desencuentro entre docentes y estudiantes. Se inició para esto, una búsqueda bibliográfica de producciones teóricas que aportara herramientas para la comprensión del problema y un análisis de las resoluciones de los problemas que los alumnos realizan en distintos contextos.

Consideramos que la búsqueda de respuestas a estos interrogantes mejorará la propuesta de investigación considerablemente.

Bibliografía

ALTBACH, P. G., REISBERG, L., Y RUMPLEY, L. E. (2009). *Tras la pista de una revolución académica: Informe sobre las tendencias actuales*. Conferencia Mundial sobre la Educación Superior, UNESCO.
Link: unesdoc.unesco.org/images/0018/001831/183168s.pdf

ARTIGUE, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. Grupo Editor Iberoamérica. Bogotá.

BARREIRO, P Y CASETTA, I (2012) 1. *Teoría de Situaciones Didácticas. Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Puchulu. Rodriguez. Compilados. Editorial Universitaria Villa María.

BASABE L. COLS E Y FEENEY S (2006). *La evaluación escolar: de los lemas a los problemas.* Revista 12(ntes) Nro. 8 Bs As.

BERTONI A, POGGI M Y TEOBALDO M. (1996). *Los significados de la evaluación educativa: alternativas teóricas.* En *Evaluación: Nuevos significados para una práctica compleja*. Ed. Kapelusz.

BROUSSEAU, G. (1994). Los diferentes roles del maestro en: *Didáctica de la Matemática*. Cap IV . Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.) Buenos Aires, Paidós.

BROUSSEAU, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal. Bs. As.

BROUSSEAU, G. (2015). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad de Córdoba. Serie "B" Trabajo de enseñanza Nº 5/2015 Traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona con la colaboración de Mabel Aguilar.

CAMPOS EDISON DE FARIA. (2006). *Ingeniería didáctica cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1,
Número 2. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas
Universidad de Costa Rica Asociación de Matemática Educativa

CARNELLI, G Y MARINO, T. (2012). *Ingeniería Didáctica. Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Puchulu. Rodriguez. Compilados. Editorial Universitaria Villa María. Cap 2

CARRAZANA AGUILAR, A., MARTÍ ZAMORA, J., & CUTIÑO REYNALDO, A. (2019). *Evaluación del aprendizaje de la matemática universitaria: una experiencia desde las carreras de ingeniería* (Revisión). Redel. Revista Granmense De Desarrollo Local, 3(4), 213-224.Recuperado a partir de https://revistas.udg.co.cu/index.php/redel/article/view/1138

CASTAÑEDA-B., R. D. (2019). *Formulación de una estrategia para la enseñanza del concepto de la derivada a partir de los conocimientos previos y su impacto en la disminución de la deserción escolar*. Encuentro de Ciencias Básicas, 2, 66-73 Bogotá.

CHEVALLARD, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado, Psicología Cognitiva y Educación*. Editorial Aique, Argentina.

CHEVALLARD, I. Y OTROS. (1997). *Estudiar matemáticas.* ICE- Horsori, Barcelona.

ELLIOT JHON (2000) La investigación-acción en educación. Ediciones Morata, S. L. Cuarta edición.

EZCURRA, ANA MARÍA. (2011). *Igualdad en educación superior: un desafío mundial*. - 1a ed. - Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento; Buenos Aires: IEC - CONADU.

FLORES PEÑAFIEL, A. (2014). *Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva*. Revista El Cálculo y su Enseñanza. Año 5. Vol.5 Septiembre 2013- Septiembre 2014, Cinvestav-IPN, México, D.F., p.1-26

FÚNEME MATEUS. (2019). *El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemática. El caso de las aplicaciones de la derivada*. Revista pedagógica. https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/9840

GARCÍA DE FANELLI. (2014). *Rendimiento académico y abandono universitario: Modelos, resultados y alcances de la producción académica en la Argentina 1*. Centro de Estudios de Estados y Sociedad (CEDES). RAES ISSN 1852-8171 / Año 6/ Número 8 / junio 2014

GUBA E, LINCOLN YVONNA S. (1989). *Evaluación de cuarta generación*
Habley, W.R. y McClanahan, R. (2004). "¿What Works in Student Retention? Appendix 1." Disponible en: http://www.act.org/path/postsec/droptables/pdf/Appendix1.pdf

JORBA, J. Y SANMARTÍ, N. (1993-2000). *La función pedagógica de la evaluación*. Evaluación como ayuda al aprendizaje. Pag. 21-44.

GARCIA, LEDESMA, JIMÉNES. (2018). *Visualizando problemas de la derivada con aplicaciones en dispositivos móviles*. Revista Innovación educativa. México. Vol 18. Nro 76.

GASCÓN PÉREZ, J. (1997). *Cambios en el contrato didáctico, el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad*. Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Nº 26, 1997

GUTIERREZ MENDOZA, L;BUITRAGO ALEMÁN, M; ARIZA NIEVES, L. (2017). *Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica.* Revista Científica General José María Córdova. Vol 15. Núm. 20 P 137-153

LARSON- EDWARDS.(2010). *Cálculo 1 de una variable*. McGRAW- HILL NTERAMERICANA EDITORES

MALBERGIER (2009). *La evaluación formativa*. Ministerio de Educación, Ciudad de Bs. As.

NOVELLI, A. (1998). *Lecciones de Análisis I*. Universidad Nacional de Luján.

PÉREZ PINO, M, JOSÉ OSVALDO ENRIQUE CLAVERO, JOSÉ EUGENIO CARBÓ AYALA, MARISOL GONZÁLEZ FALCÓN. (2017). La evaluación formativa en el proceso enseñanza aprendizaje. EDUMECENTRO vol.9 no.3 Santa Clara jul.-set. 2017

PERRET-CLERMONT, A. N. Y NICOLET, M. (1992). *Interactuar y conocer*. Buenos Aires y Madrid. Miño y Davida Editores.

PERRIN G. (2009). *L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants en en amont et en aval des ingénieries didactiques.* 15ième. Ecole de didactique des mathématiques. Clermont Ferrand.

PERRIN-GLORIAN MARIE-JEANNE. (2019). *Ingeniería didáctica entre investigación y recursos para maestros de enseñanza y formación*. Caminos de la Educación Matemática en Revista/Online, v. 9, núm. 1, 2019 – ISSN 2358-4750

PHILIPPE PERRENOUD. (2011). D*esarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar profesiorialización y razón pedagógica*. 1.a edición: febrero 2004 8.a reimpresión: marzo 2011 ISBN: 978-84-7827-323-2 Editorial Grao ISBN: 978-968-867-218-1 Colofón

PUCHULU, M Y RODRIGUEZ, M. comp (2012) *Educación Matemática Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Bs. As. Córdoba. Duvim.

SADOVSKY, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Libros del Zorzal. Bs. As.

SADOCSKY, P. (2005). *La Teoría de Situación Didáctica : un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires, Libros del Zorzal.

SEGAL, S Y GIULLANI,D. (2008). *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades*. Libros del Zorzal. Bs. Aa. Argentina.

THOMAS. (2010). *Cálculo Una variable*. Pearson Educación. México.

TINTO, V. (2004). Access without Support is not Opportunity: Rethinking the first year of college for low-income students. Conferencia presentada en la Asociación Americana de Registradores Colegiados y Oficiales de Admisiones, Las Vegas, Nevada.

TORRES ARIAS ROCÍO. (2013). *La evaluación formativa*. Ministerio de Educación Pública. Guía para la elaboración y presentación de proyectos de investigación e informe anual. Universidad Nacional Autónoma de México. En: http://www.igeograf.unam.mx/sigg/utilidades/docs/pdfs/posgrados/ingreso/guiainvestigacion.pdf

RINCÓN, E RAMÍREZ TECNÉ, EPISTEME Y DIDAXIS. (2009). *Historia y epistemología de la función derivada* TEΔ No. Extraordinario, 2009 4° Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias Ponencias History and epistemology of the derivative function.

PONCE CAMPUZANO, JUAN CARLOS. (2015). *Breve historia del concepto de derivada*. UQ

PINTO, IRMA; PARRAGUEZ, MARCELA. (2015). *El concepto de derivada desde la teoría los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy*. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 337-344). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

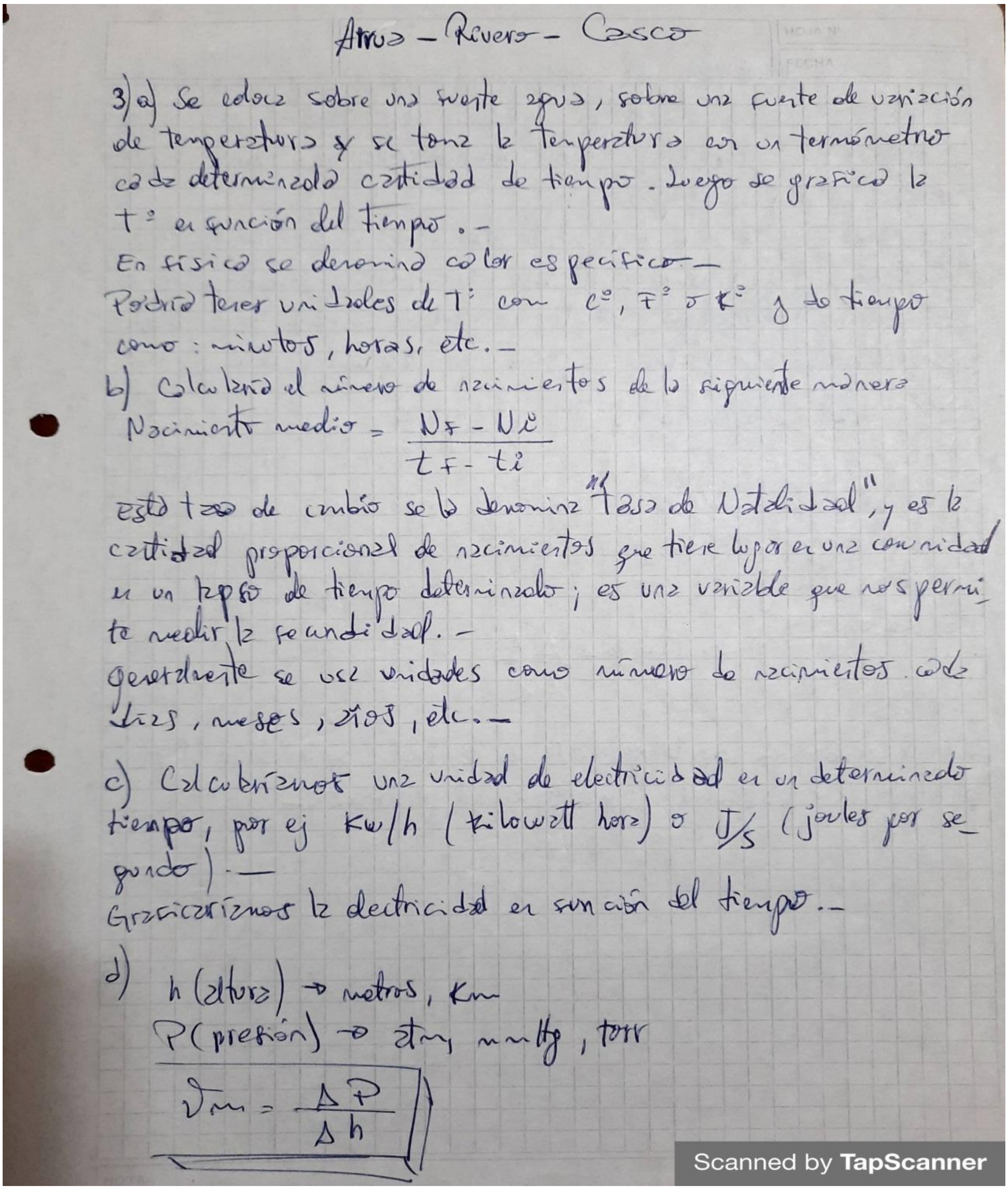
VRANCKEN, S. & ENGLER, A. (2014). *Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad*. Boletim de Educação Matemática, 28(48), 449-468.

Anexos

Anexo 1 – Producción de los estudiantes

Producciones de los estudiantes de la consigna 3 de dos grupos de trabajo.

Grupo 1


Arrua – Rivero – Casco

3) a) Se coloca sobre una fuente agua, sobre una fuente de variación de temperatura y se toma la temperatura con un termómetro cada determinada cantidad de tiempo. Luego se grafica la t° en función del tiempo.-

En física se denomina calor específico.—

Podría tener unidades de T° como C°, F° o K° y de tiempo como: minutos, horas, etc.-

b) Calcularía el número de nacimientos de la siguiente manera

$$\text{Nacimiento medio} = \frac{N_f - N_i}{t_f - t_i}$$

esta tasa de cambio se la denomina "Tasa de Natalidad", y es la cantidad proporcional de nacimientos que tiene lugar en una comunidad en un lapso de tiempo determinado; es una variable que nos permite medir la fecundidad.-

generalmente se usa unidades como número de nacimientos cada días, meses, años, etc.-

c) Calcularíamos una unidad de electricidad en un determinado tiempo, por ej Kw/h (kilowatt hora) o J/s (joules por segundo).—

Graficaríamos la electricidad en función del tiempo.-

d) h (altura) → metros, Km

P(presión) → atm, mmHg, torr

$$V_m = \frac{\Delta P}{\Delta h}$$

Producción de la consigna 3 Grupo 1

Grupo 2

Samma Luciana

Trabajo Práctico N° 2
"Función Derivada"

3).

a). Si se quiere medir la temperatura de un líquido a lo largo del tiempo, haría:

$\Delta T = Ti - Tf$

Ti = temperatura inicial

Tf = temperatura final.

En Física este cambio se denomina Delta de Temperatura.

- las unidades podrían ser, la de los líquidos:
- . Litro, dm^3, cm^3, mm^3, etc.
- las unidades podrían ser, las de temperatura =
- . Kelvin, Celsius, Fahrenheit.

b). Primero haría una gráfica, donde el valor de "x" sería el tiempo, y el valor de "y" serían los nacimientos.

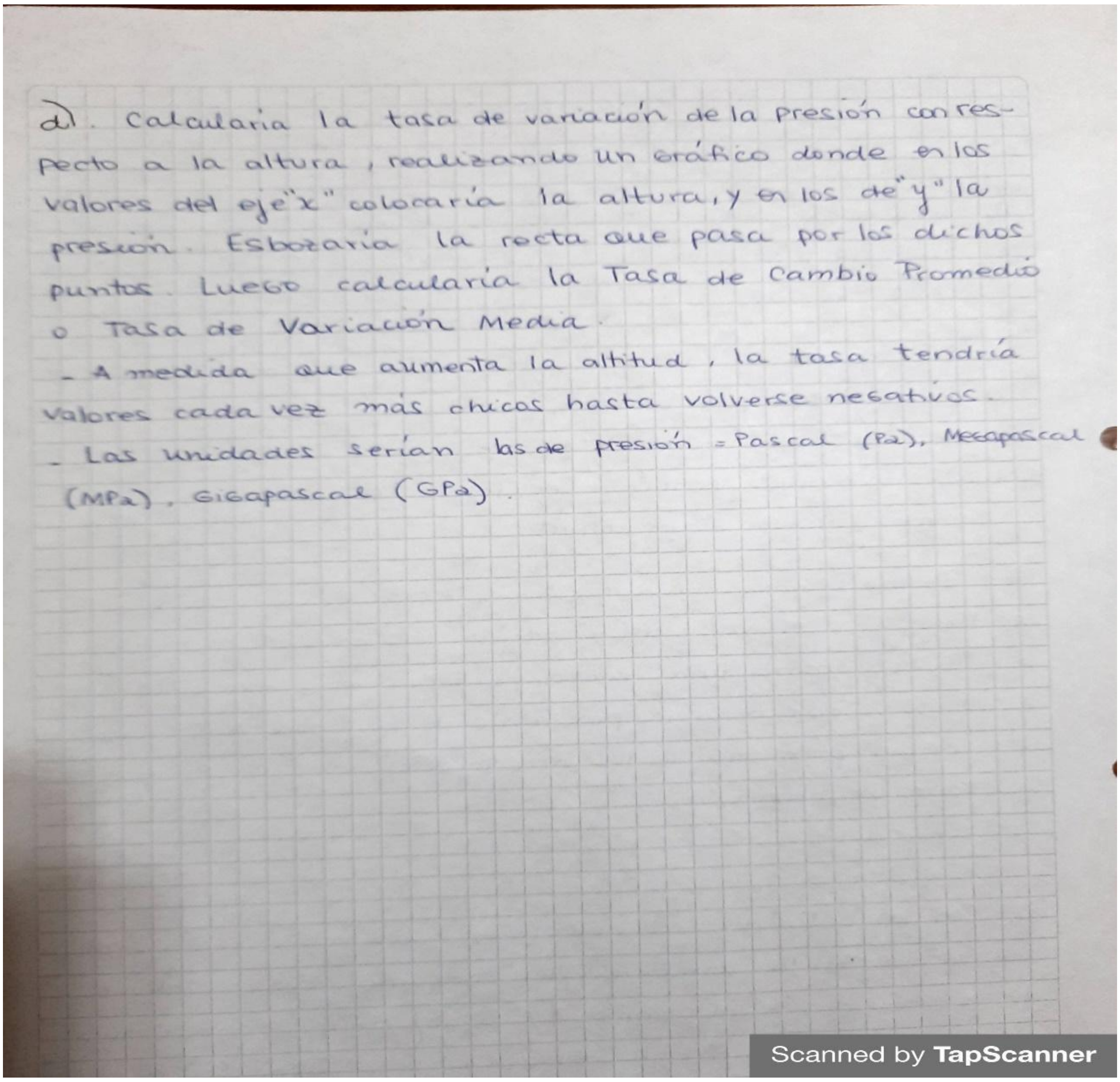
Luego haría una recta uniendo el primer año con el último. Sacando la pendiente de la recta hallo la tasa de cambio promedio de los nacimientos.

- Tasa de cambio =
- Unidades =

c). Con los datos del gasto eléctrico construiría una gráfica que represente la variación del consumo. En los valores de "x" colocaría el tiempo y en los de "y" el consumo, para así poder sacar la derivada de la función que se crea en ambos puntos, ya que esa va a ser la Tasa de Variación.

- La unidad en la que se calcularía sería Kilobyte por

Producción de la consigna 3 grupo 2



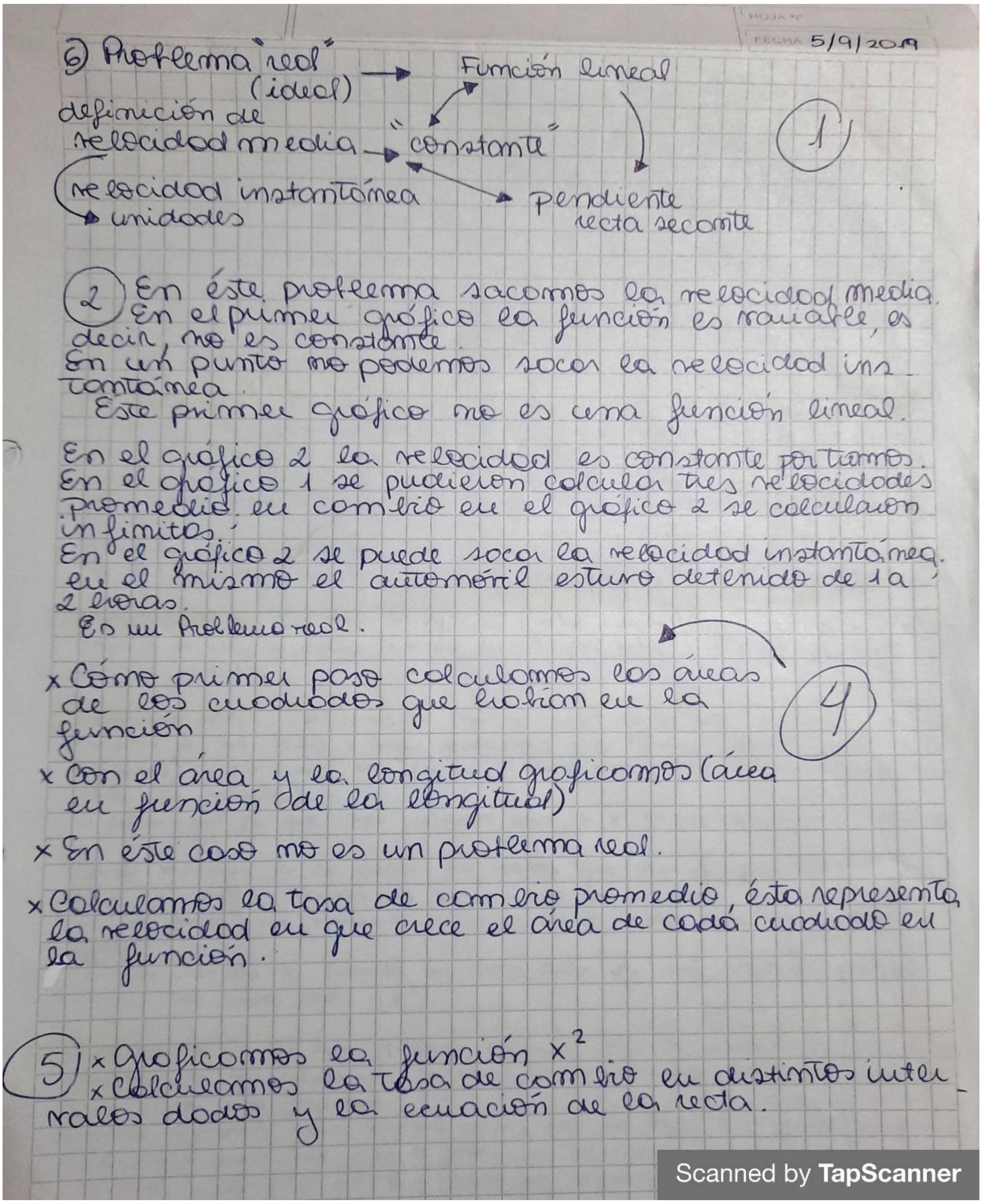
d). Calcularia la tasa de variación de la presión con respecto a la altura, realizando un gráfico donde en los valores del eje "x" colocaría la altura, y en los de "y" la presión. Esbozaría la recta que pasa por los dichos puntos. Luego calcularía la Tasa de Cambio Promedio o Tasa de Variación Media.

- A medida que aumenta la altitud, la tasa tendría valores cada vez más chicos hasta volverse negativos.

- Las unidades serían las de presión = Pascal (Pa), Megapascal (MPa), Gigapascal (GPa).

Producción de la consigna 3 grupo 2

Producciones de los estudiantes de la consigna 6 en dos grupos de trabajo



5/9/2019

6) Problema "real" (ideal) → Función lineal

definición de velocidad media → "constante"

velocidad instantánea

unidades

pendiente recta secante

1

2) En éste problema sacamos la velocidad media.
En el primer gráfico la función es variable, es decir, no es constante.
En un punto no podemos sacar la velocidad instantánea.
Este primer gráfico no es una función lineal.
En el gráfico 2 la velocidad es constante por tramos.
En el gráfico 1 se pudieron calcular tres velocidades promedio en cambio en el gráfico 2 se calcularon infinitas.
En el gráfico 2 se puede sacar la velocidad instantánea. en el mismo el automóvil estuvo detenido de 1 a 2 horas.
Es un problema real.

4

x Cómo primer paso calculamos las áreas de los cuadrados que habían en la función
x Con el área y la longitud graficamos (área en función de la longitud)
x En éste caso no es un problema real.
x Calculamos la tasa de cambio promedio, ésta representa la velocidad en que crece el área de cada cuadrado en la función.

5) x Graficamos la función x^2
x Calculamos la tasa de cambio en distintos intervalos dados y la ecuación de la recta.

Scanned by TapScanner

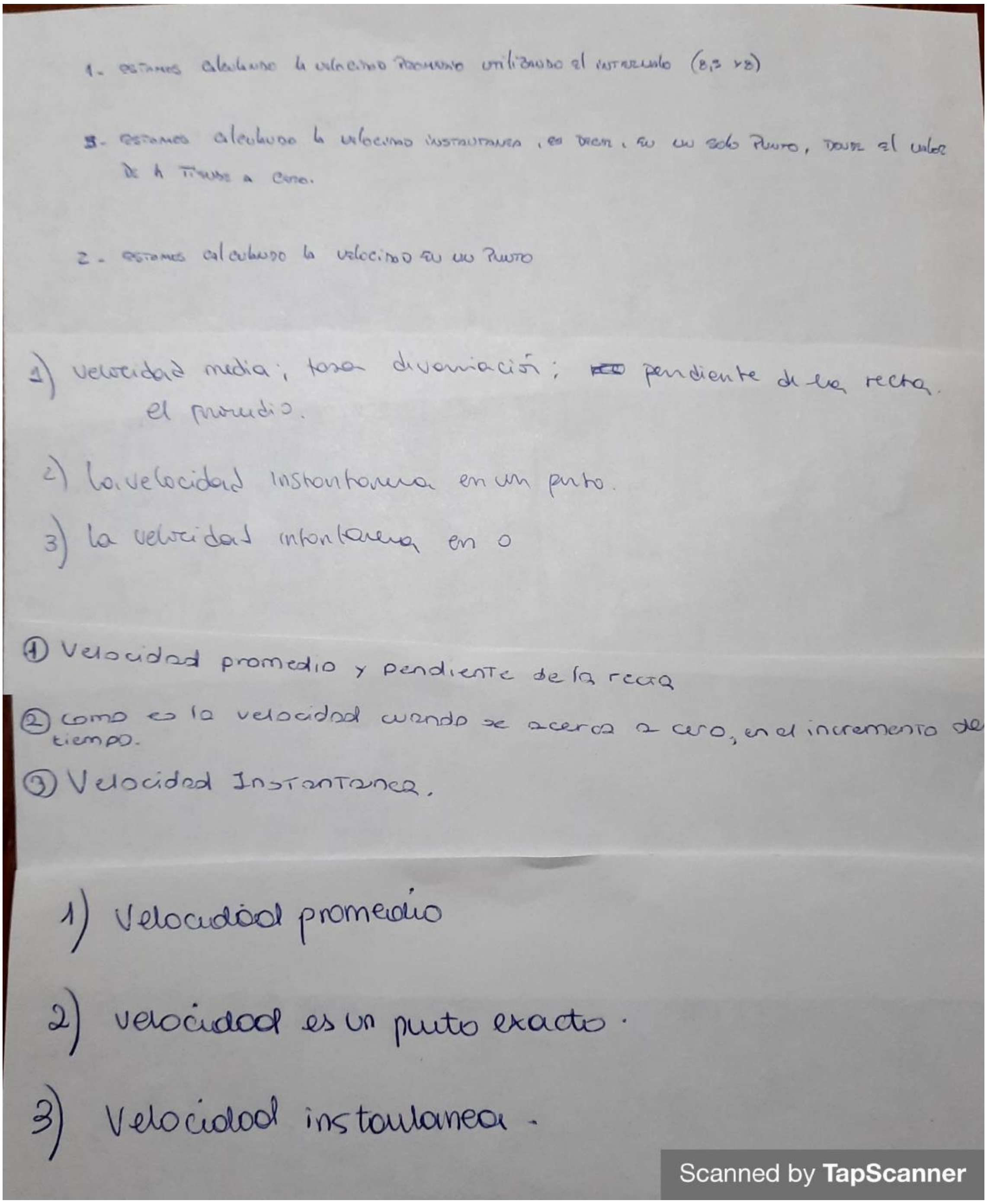
Producción de la consigna 6 grupo 1

6) Primero sacamos la velocidad promedio de la posición de un auto tomando en función de tiempo y llegamos a la conclusión de que si la velocidad no es constante no se puede saber. Conocimos la fórmula de velocidad, la cual es $v = \frac{df - di}{tf - ti}$, cuyas unidades pueden ser $\frac{km}{h}$.
Supimos que siempre se puede calcular la velocidad media de los recorridos entre dos tiempos cualquiera, ya que, es independiente de que tipo de velocidad sea. Sólo se puede conocer la velocidad si está es constante, si tengo un intervalo en un solo número no se puede.
Vimos distintos gráficos que muestran el mismo recorrido y la misma distancia, pero representan una situación distinta y las velocidades son distintas. Vimos que en una la velocidad es constante y en el otro no, que los dos tienen la misma velocidad promedio. Que en uno hay reposo y en el otro no, entre otras diferencias.
Estudiamos que la velocidad media mide la variación del espacio recorrido en función del tiempo y que también se puede denominar tasa de cambio promedio o tasa de variación media
Vimos otro ejemplo de tasa de cambio a través de un gráfico en el cual se grafican 4 cuadrados. Calculamos la tasa de cam

bio de las áreas en función de las longitudes de los lados de los cuadros consecutivos. Calculamos las variaciones de las áreas en función de las longitudes de sus lados. Llegamos a la conclusión de que se pueden dibujar infinitos cuadrados y que tiene sentido marcar los puntos y unirlos porque cualquier valor de longitud se relaciona con su área.
Por último graficamos una función, calculamos la tasa promedio en un intervalo, dibujamos la recta que pasa por el mismo y calculamos su pendiente. Repetimos lo mismo para otros intervalos. Llegamos a la conclusión de que la tasa de cambio promedio da lo mismo que la pendiente de la recta secante y que podemos tomar valores que se acerquen a un número pero sin que sea un solo número. Las tasa de cambio promedio y las pendientes de la recta secante tienen que ser iguales. La tasa de cambio puede dar negativo y también puede dar cero.

Producción de la consigna 6 grupo 2

Producciones de los estudiantes de la consigna 7



1. ESTAMOS CALCULANDO LA VELOCIDAD PROMEDIO UTILIZANDO EL INTERVALO (8,5 Y 8)

3. ESTAMOS CALCULANDO LA VELOCIDAD INSTANTANEA, ES DECIR, EN UN SOLO PUNTO, DONDE EL VALOR DE h TIENDE A CERO.

2. ESTAMOS CALCULANDO LA VELOCIDAD EN UN PUNTO

1) velocidad media; tasa de variación; pendiente de la recta. el promedio.

2) la velocidad instantanea en un punto.

3) la velocidad instantanea en 0

1) Velocidad promedio y pendiente de la recta

2) como es la velocidad cuando se acerca a cero, en el incremento de tiempo.

3) Velocidad Instantanea.

1) Velocidad promedio

2) velocidad es un punto exacto.

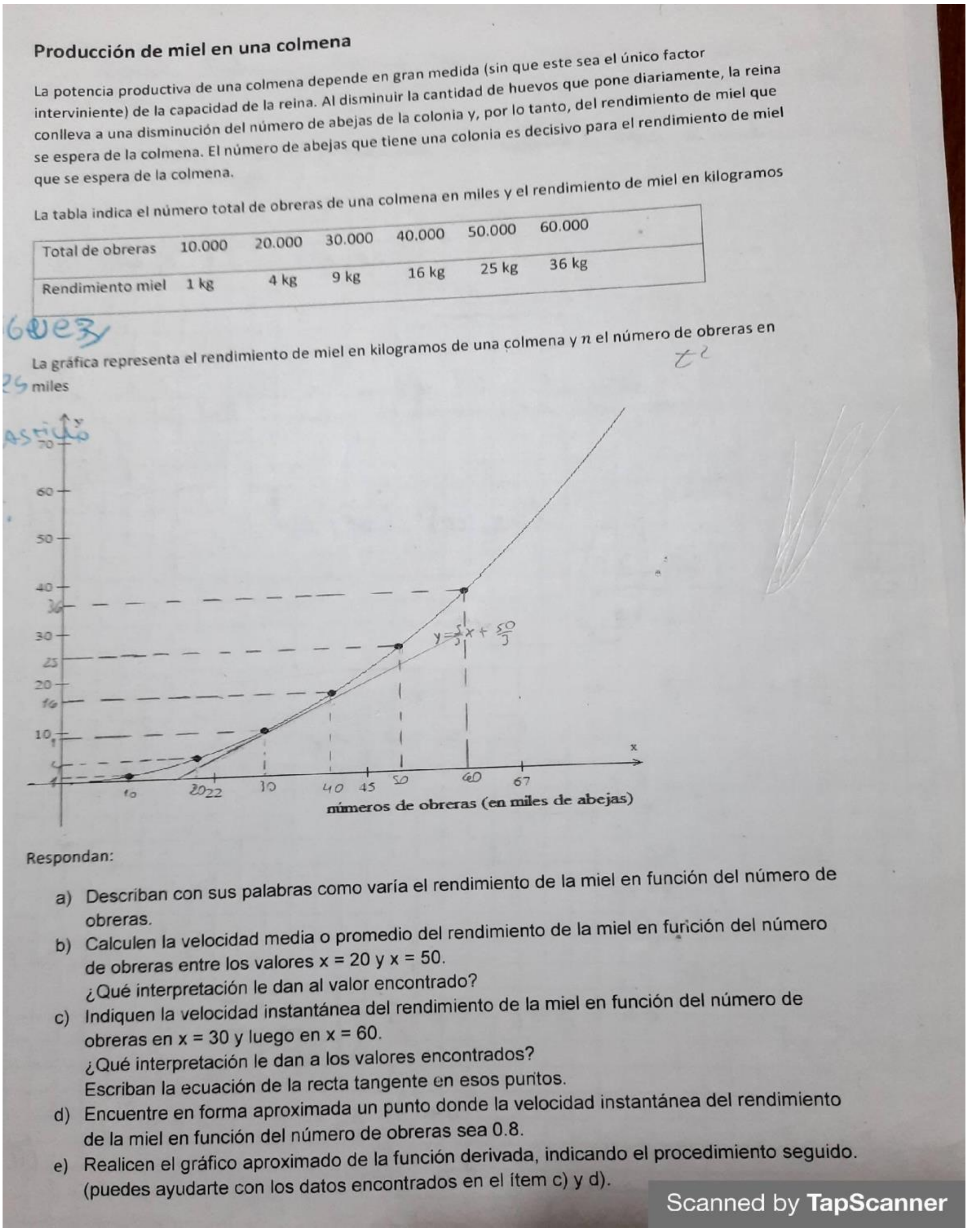
3) Velocidad instantanea.

Scanned by TapScanner

Producción de varios estudiantes de la consigna 7

Producciones de dos grupos de trabajo de la evaluación grupal y fotos de dicho momento

Grupo 1



Producción de miel en una colmena

La potencia productiva de una colmena depende en gran medida (sin que este sea el único factor interviniente) de la capacidad de la reina. Al disminuir la cantidad de huevos que pone diariamente, la reina conlleva a una disminución del número de abejas de la colonia y, por lo tanto, del rendimiento de miel que se espera de la colmena. El número de abejas que tiene una colonia es decisivo para el rendimiento de miel que se espera de la colmena.

La tabla indica el número total de obreras de una colmena en miles y el rendimiento de miel en kilogramos

Total de obreras	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000
Rendimiento miel	1 kg	4 kg	9 kg	16 kg	25 kg	36 kg

La gráfica representa el rendimiento de miel en kilogramos de una colmena y n el número de obreras en miles

Respondan:

a) Describan con sus palabras como varía el rendimiento de la miel en función del número de obreras.

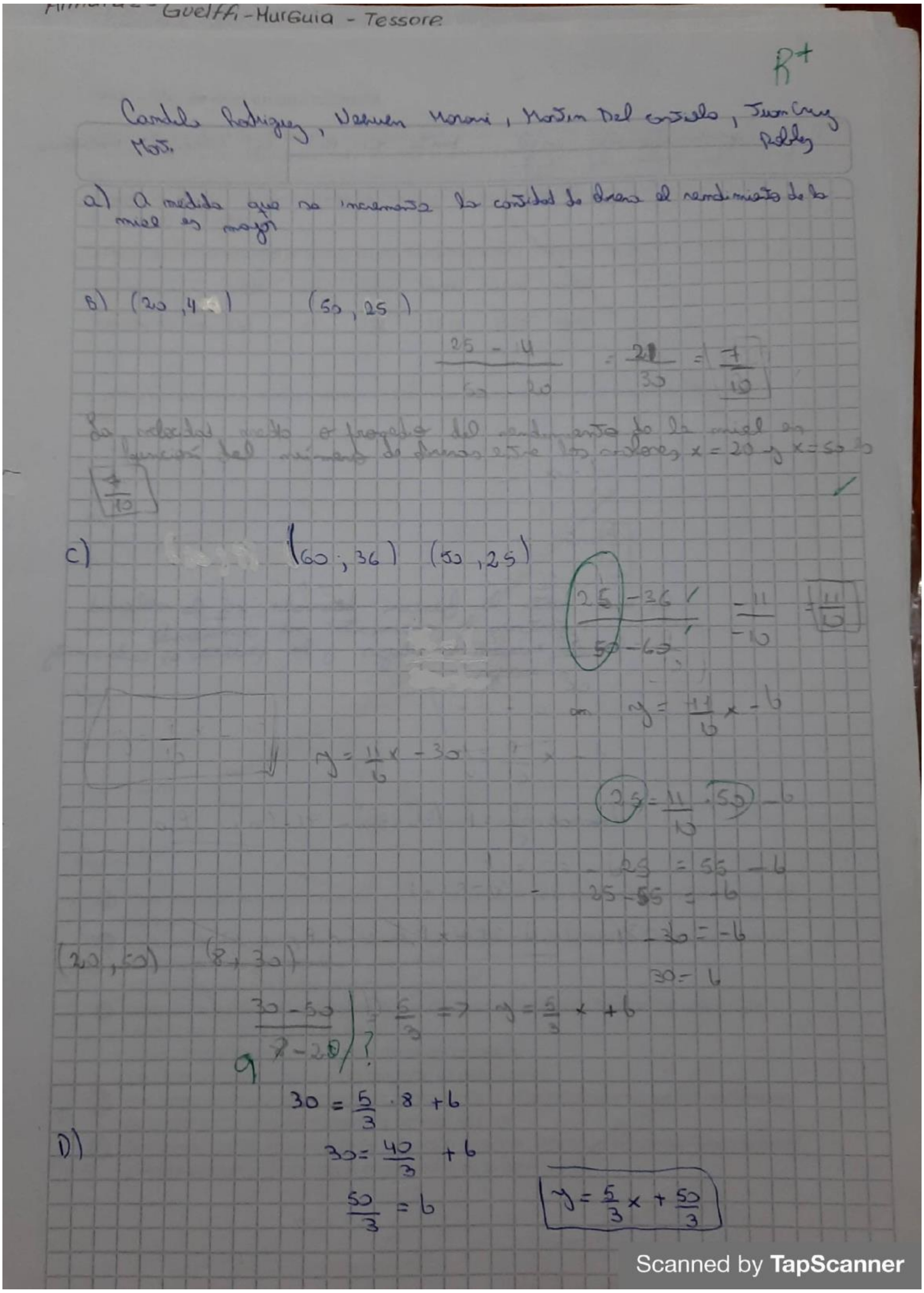
b) Calculen la velocidad media o promedio del rendimiento de la miel en función del número de obreras entre los valores x = 20 y x = 50.
¿Qué interpretación le dan al valor encontrado?

c) Indiquen la velocidad instantánea del rendimiento de la miel en función del número de obreras en x = 30 y luego en x = 60.
¿Qué interpretación le dan a los valores encontrados?
Escriban la ecuación de la recta tangente en esos puntos.

d) Encuentre en forma aproximada un punto donde la velocidad instantánea del rendimiento de la miel en función del número de obreras sea 0.8.

e) Realicen el gráfico aproximado de la función derivada, indicando el procedimiento seguido. (puedes ayudarte con los datos encontrados en el ítem c) y d).

Evaluación grupal grupo 1


Guelffi - Murguia - Tessore

R+

Candela Rodriguez, Yasmin Moroni, Martin Del Castillo, Juan Cruz Robles, Mati.

a) A medida que se incrementa la cantidad de días el rendimiento de la miel es mayor

b) (20, 4) (50, 25)

$\frac{25-4}{50-20} = \frac{21}{30} = \boxed{\frac{7}{10}}$

La velocidad media o promedio del rendimiento de la miel en función del número de días entre los valores x = 20 y x = 50 es $\boxed{\frac{7}{10}}$ ✓

c) (60 ; 36) (50 , 25)

$\frac{25-36}{50-60} = \frac{-11}{-10} = \boxed{\frac{11}{10}}$

$y = \frac{11}{6}x - 30$

$y = \frac{11}{10}x - b$

$25 = \frac{11}{10} \cdot 50 - b$

$25 = 55 - b$

$25 - 55 = -b$

$-30 = -b$

$30 = b$

(20 , 50) (8 , 30)

$\frac{30-50}{8-20} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + b$

?

$30 = \frac{5}{3} \cdot 8 + b$

$30 = \frac{40}{3} + b$

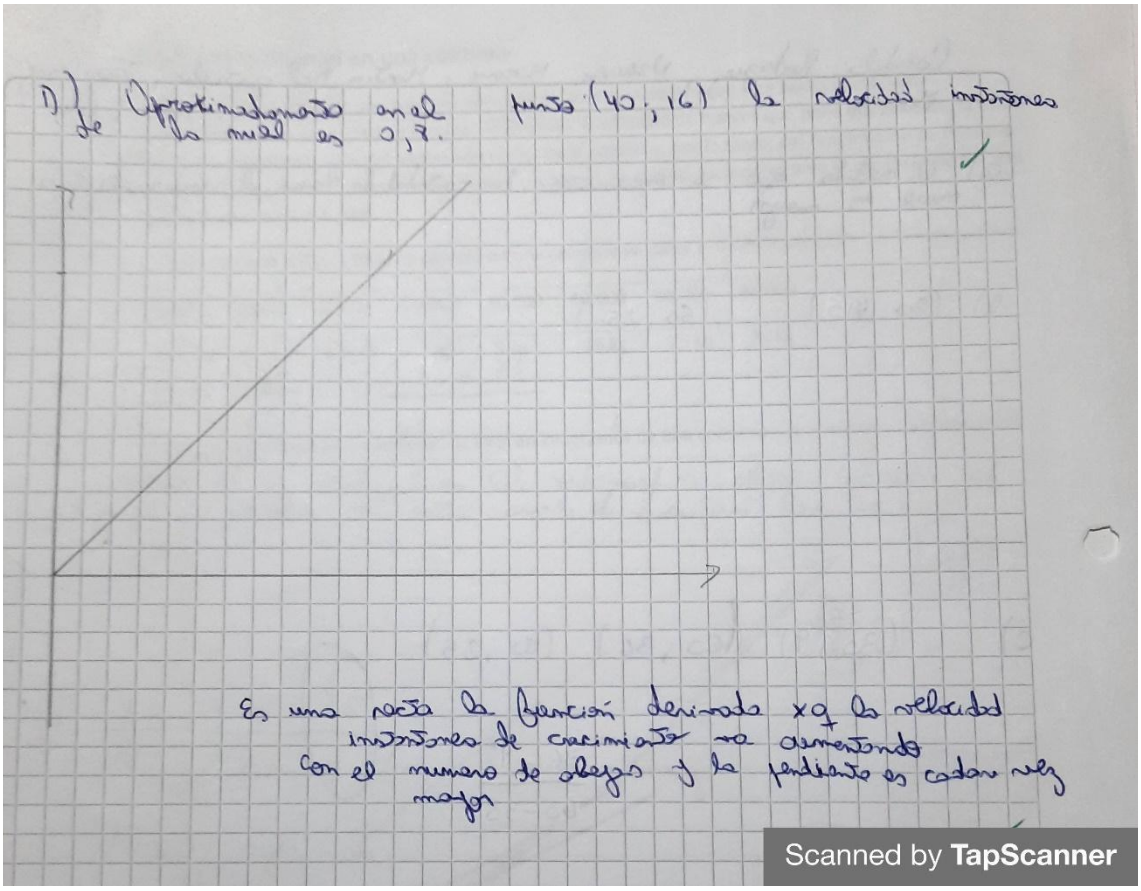
$\frac{50}{3} = b$

D)

$\boxed{y = \frac{5}{3}x + \frac{50}{3}}$

Scanned by TapScanner

Evaluación grupal grupo 1



1) Aproximadamente en el punto (40 ; 16) la velocidad instantanea de la miel es 0,7.

Es una recta la función derivada xq la velocidad instantanea de crecimiento va aumentando con el numero de abejas y la pendiente es cada vez mayor

Evaluación grupal grupo 1

Grupo 2

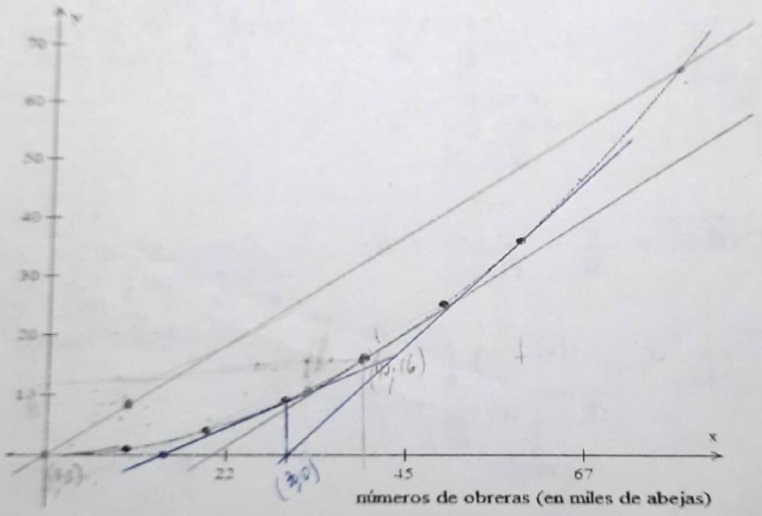
Producción de miel en una colmena

La potencia productiva de una colmena depende en gran medida (sin que este sea el único factor interviniente) de la capacidad de la reina. Al disminuir la cantidad de huevos que pone diariamente, la reina conlleva a una disminución del número de abejas de la colonia y, por lo tanto, del rendimiento de miel que se espera de la colmena. El número de abejas que tiene una colonia es decisivo para el rendimiento de miel que se espera de la colmena.

La tabla indica el número total de obreras de una colmena en miles y el rendimiento de miel en kilogramos

Total de obreras	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000
Rendimiento miel	1 kg	4 kg	9 kg	16 kg	25 kg	36 kg

La gráfica representa el rendimiento de miel en kilogramos de una colmena y *n* el número de obreras en miles



Respondan:

a) Describan con sus palabras como varía el rendimiento de la miel en función del número de obreras.

b) Calculen la velocidad media o promedio del rendimiento de la miel en función del número de obreras entre los valores x = 20 y x = 50.
¿Qué interpretación le dan al valor encontrado?

c) Indiquen la velocidad instantánea del rendimiento de la miel en función del número de obreras en x = 30 y luego en x = 60.
¿Qué interpretación le dan a los valores encontrados?
Escriban la ecuación de la recta tangente en esos puntos.

d) Encuentre en forma aproximada un punto donde la velocidad instantánea del rendimiento de la miel en función del número de obreras sea 0.8.

e) Realicen el gráfico aproximado de la función derivada, indicando el procedimiento seguido. (puedes ayudarte con los datos encontrados en el ítem c) y d)

Evaluación grupal grupo 2

Adam Fridman
Lucía Weber
Matías Rizzio
Francisco Lamas
Agustina Rojas.

a) A medida que aumenta el número de obreras, aumenta el rendimiento de la miel, sin embargo, el aumento no es proporcional. La velocidad media aumenta con el número de obejas.

b) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{25-4}{50-20} = \frac{21}{30} = \boxed{\frac{7}{10}}$

(50, 25)
(20; 4)

La velocidad media del rendimiento de la miel en función del número de obreras entre $x = 20$ y $x = 50$ es $\frac{7}{10}$

El valor encontrado es positivo, lo que indica que la función crece de manera positiva al aumentar el número de obreras.

c) $x = 60$.
La recta tangente en ese punto pasa por (60; 36) y (30, 0) aproximadamente.

$m = \frac{36-0}{60-30} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5} = \boxed{1,2}$ → velocidad instantánea en $x = 60$.

$y = mx + b$.
$36 = \frac{6}{5}(60) + b$.
$36 = 72 + b$
$36 - 72 = b$.
$-36 = b$.

$\boxed{y = \frac{6}{5}x - 36.}$
↳ La ecuación de la recta tangente en $x = 60$.

$x = 30$.
La recta tangente en ese punto pasa por (30; 9) y (14; 0) aproximadamente.

$m = \frac{9-0}{30-14} = \frac{9}{16} = \boxed{0,6}$ → velocidad instantánea en $x = 30$.

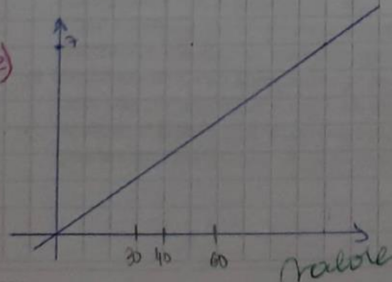
$y = mx + b$.
$9 = \frac{9}{16}(30) + b$.
$9 - \left(\frac{9}{16}(30)\right) = b$
$-7,87 = b$.

$\boxed{y = \frac{9}{13}x - 7,87}$
↳ La ecuación de la recta tangente en $x = 30$.

Con los valores encontrados podemos interpretar que la velocidad instantánea en cada punto aumenta con el número de obreras. La pendiente de la recta tangente en cada punto va aumentando.

d) Aproximadamente en el punto (40; 16) la velocidad instantánea del rendimiento de la miel es 0,8.

e)



Valores?

es una recta, la función derivada porque la velocidad instantánea de crecimiento va aumentando, con el número de abejas, y la pendiente es cada vez mayor.

indica que la velocidad crece

Que vaya aumentando no implica que sea recta.

Evaluación grupal grupo 2

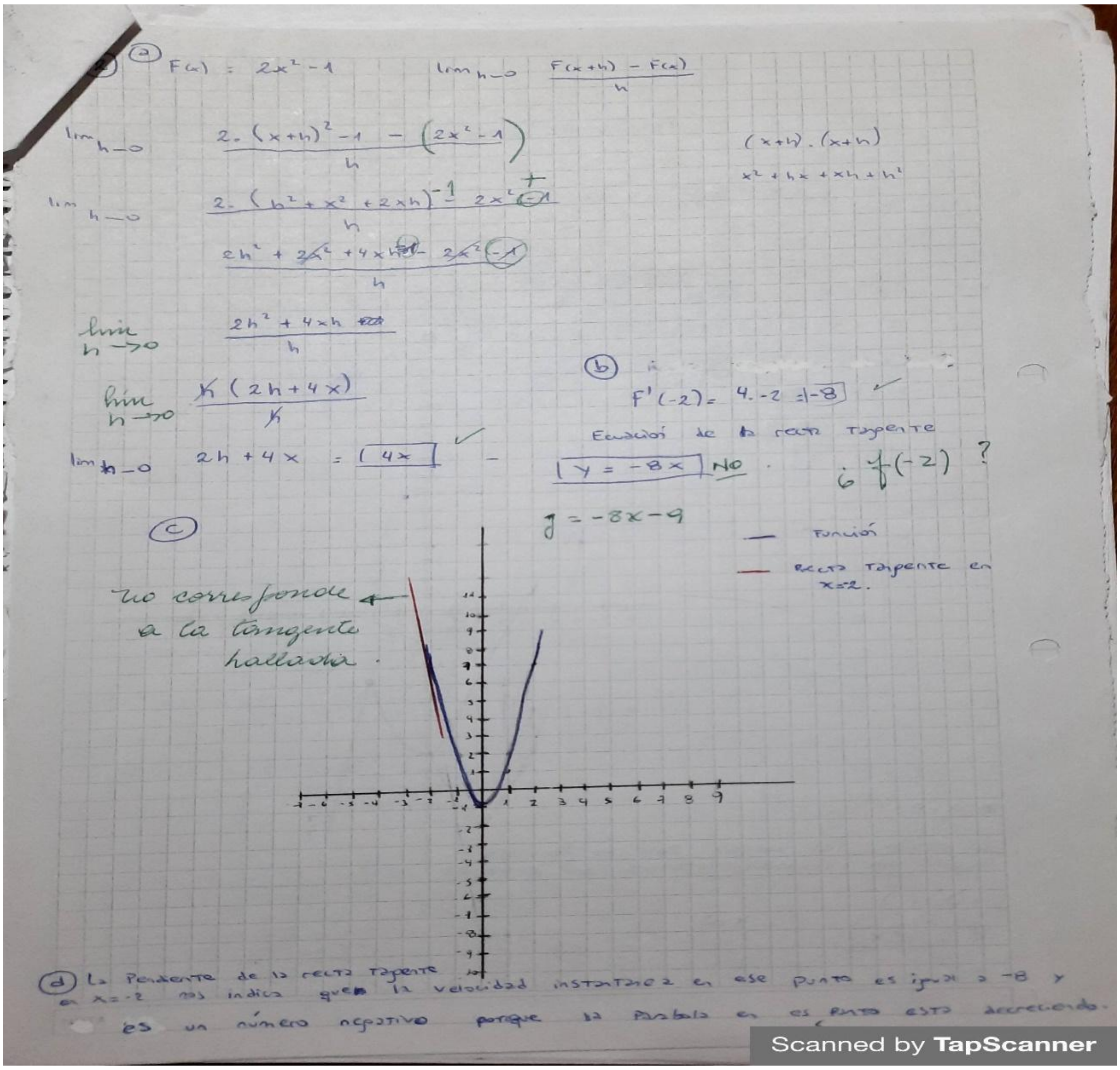
Fotografía de un grupo durante la evaluación grupal

Fotografía de los grupos durante la evaluación grupal

Producciones de dos estudiantes de algunos de los ejercicios de la evaluación individual

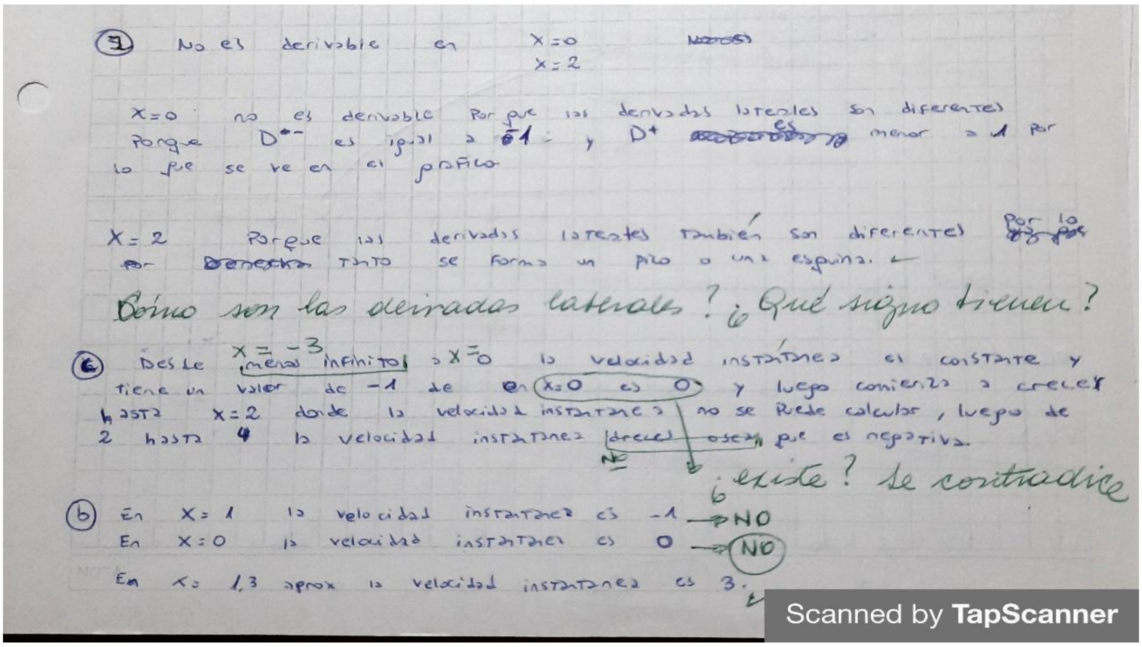
Estudiante 1

Ejercicio 1



Evaluación individual, ejercicio 1. Estudiante 1

Ejercicio 2


a) No es derivable en $x=0$
$x=2$

$x=0$ no es derivable porque las derivadas laterales son diferentes porque D^- es igual a 1 y D^+ es menor a 1 por lo que se ve en el gráfico.

$x=2$ Porque las derivadas laterales también son diferentes por lo tanto se forma un pico o una espina.

¿Cómo son las derivadas laterales? ¿Qué signo tienen?

b) Desde $x=-3$ (menos infinito) a $x=0$ la velocidad instantánea es constante y tiene un valor de -1 de en $x=0$ es 0 y luego comienza a crecer hasta $x=2$ donde la velocidad instantánea no se puede calcular, luego de 2 hasta 4 la velocidad instantánea decrece osea que es negativa.

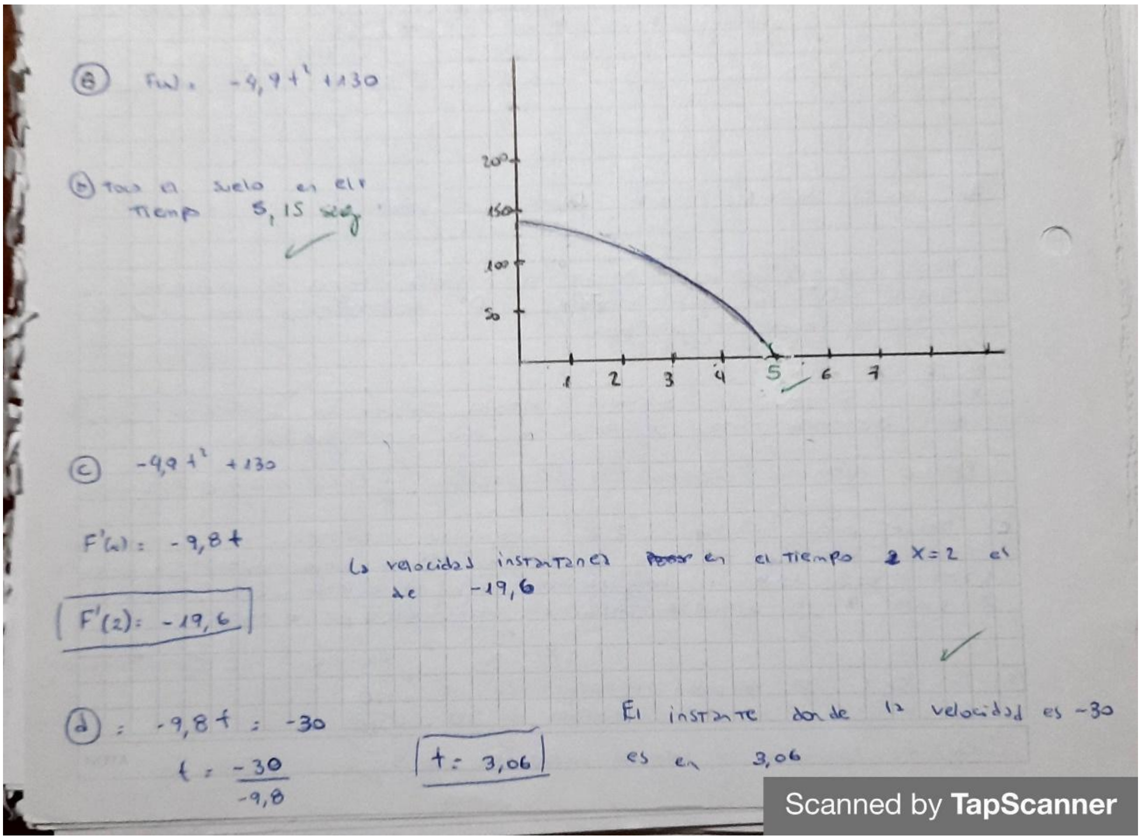
NO ¿existe? se contradice

b) En $x=1$ la velocidad instantánea es -1 → NO
En $x=0$ la velocidad instantánea es 0 → NO
En $x=1,3$ aprox la velocidad instantánea es 3.

Scanned by TapScanner

Evaluación individual, ejercicio 2. Estudiante 1

Ejercicio 3)



a) $F(t) = -4,9t^2 + 130$

b) Toca el suelo en el tiempo 5,15 seg

c) $-4,9t^2 + 130$

$F'(t) = -9,8t$

$\boxed{F'(2) = -19,6}$

La velocidad instantánea en el tiempo $x=2$ es de $-19,6$

d) $-9,8t = -30$

$t = \frac{-30}{-9,8}$

$\boxed{t = 3,06}$

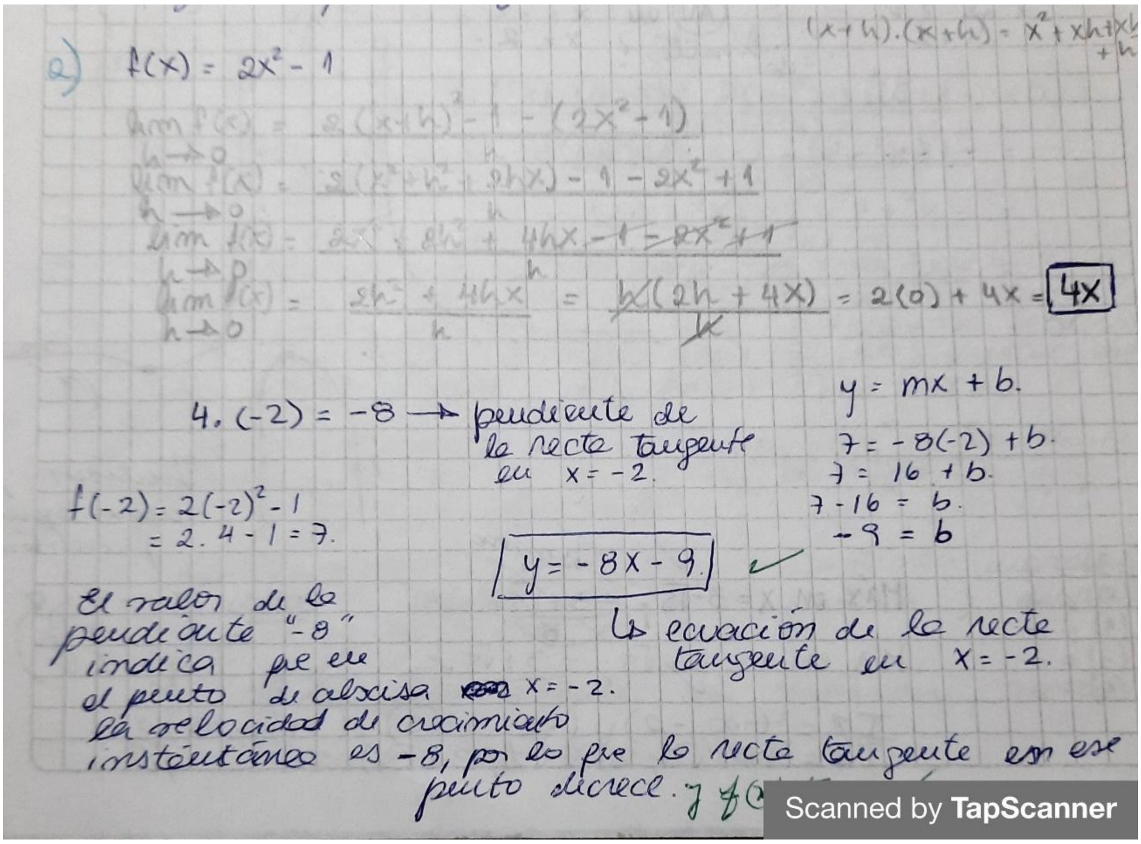
El instante donde la velocidad es -30 es en 3,06

Scanned by TapScanner

Evaluación grupal, ejercicio 3. Estudiante 1

Estudiante 2

Ejercicio 1)


$(x+h).(x+h) = x^2 + xh + xh + h^2$

a) $f(x) = 2x^2 - 1$

$\lim_{h\to 0} f(x) = \frac{2(x+h)^2 - 1 - (2x^2 - 1)}{h}$

$\lim_{h\to 0} f(x) = \frac{2(x^2+h^2+2hx) - 1 - 2x^2 + 1}{h}$

$\lim_{h\to 0} f(x) = \frac{\cancel{2x^2} + 2h^2 + 4hx \cancel{-1} \cancel{-2x^2} \cancel{+1}}{h}$

$\lim_{h\to 0} f(x) = \frac{2h^2 + 4hx}{h} = \frac{\cancel{h}(2h + 4x)}{\cancel{h}} = 2(0) + 4x = \boxed{4x}$

$4.(-2) = -8 \rightarrow$ pendiente de la recta tangente en $x = -2$.

$y = mx + b$.

$7 = -8(-2) + b$.

$7 = 16 + b$.

$7 - 16 = b$.

$-9 = b$

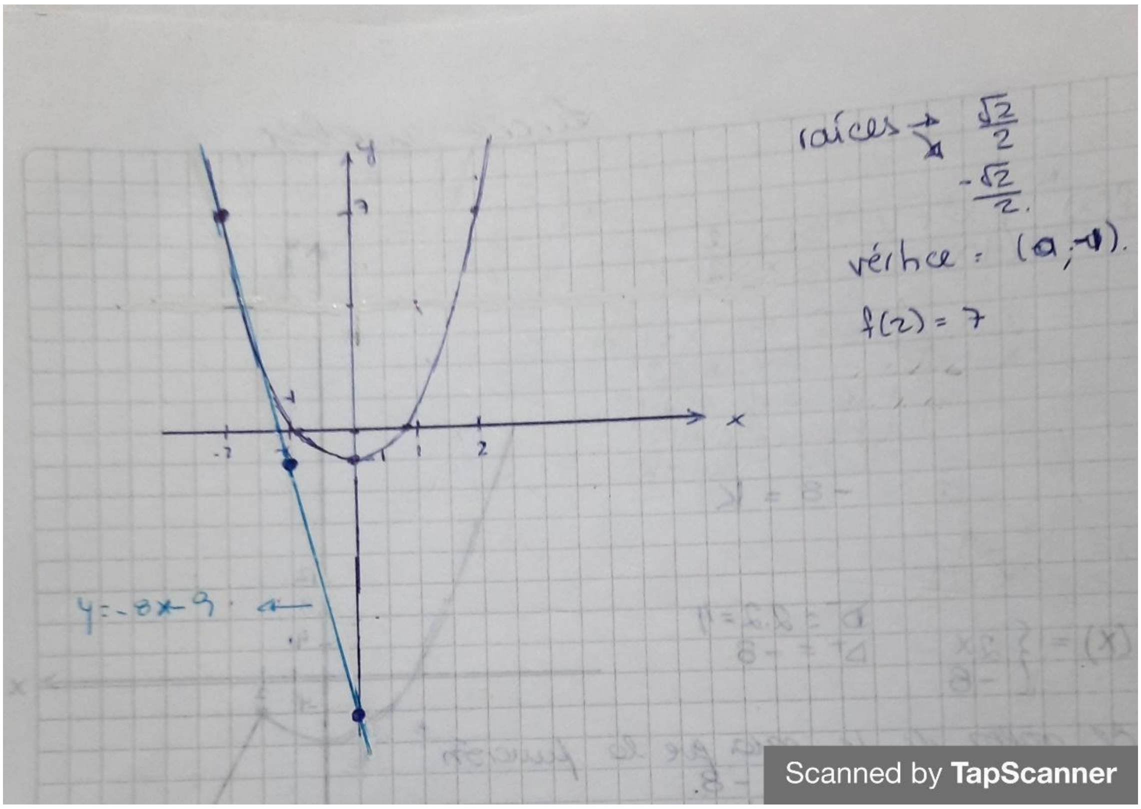
$f(-2) = 2(-2)^2 - 1$
$= 2.4 - 1 = 7$.

$\boxed{y = -8x - 9}$

La ecuación de la recta tangente en $x = -2$.

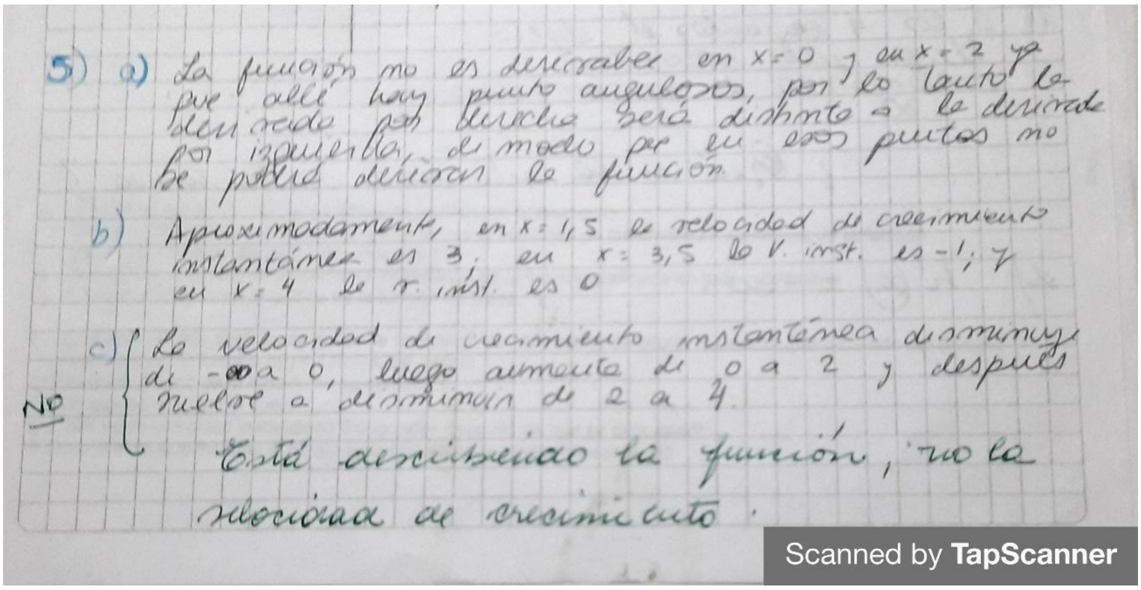
El valor de la pendiente "-8" indica que en el punto de abscisa $x = -2$. la velocidad de crecimiento instantánea es -8, por lo que la recta tangente en ese punto decrece. y f(

Evaluación individual, ejercicio 1. Estudiante 2



Evaluación individual, ejercicio 1. Estudiante 2

Ejercicio 2)


5) a) La función no es derivable en x=0 y en x=2 ya que allí hay punto angulosos, por lo tanto la derivada por derecha será distinta a la derivada por izquierda, de modo que en esos puntos no se podrá derivar la función.

b) Aproximadamente, en x=1,5 la velocidad de crecimiento instantánea es 3, en x=3,5 la V. inst. es -1, y en x=4 la v. inst. es 0

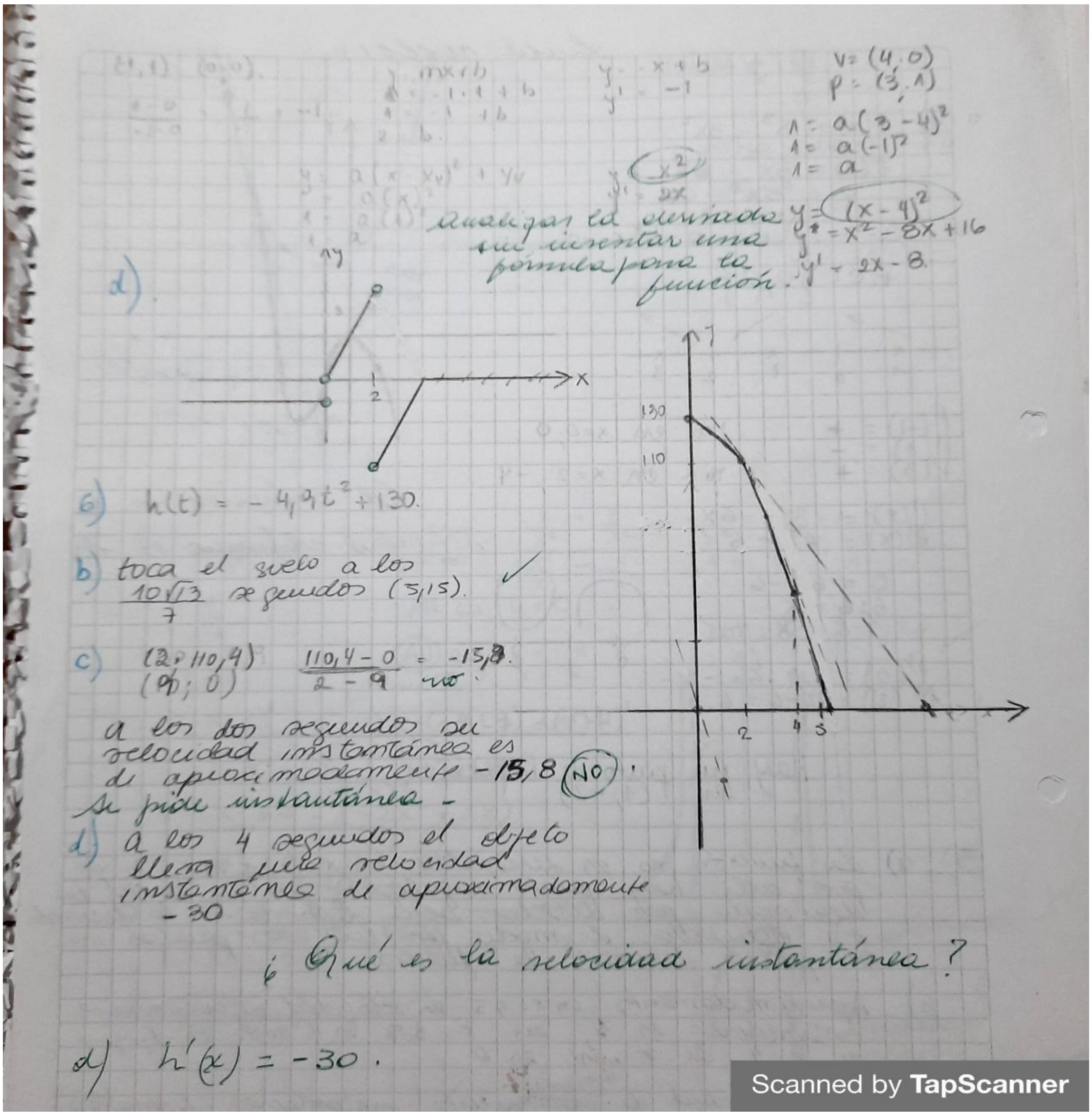
c) La velocidad de crecimiento instantánea disminuye de -∞ a 0, luego aumenta de 0 a 2 y después vuelve a disminuir de 2 a 4.

NO

Está describiendo la función, no la velocidad de crecimiento.

Evaluación individual, ejercicio 2. Estudiante 2

Ejercicio 3)



Evaluación individual, ejercicio 3. Estudiante 2

Anexo 2 – Entrevistas

Se adjuntan las entrevistas completas realizada a los estudiantes.

Entrevista 1

E:- Hola chicos, me llamo Betina, soy parte del equipo de Pedagogía Universitaria y estamos haciendo esta entrevista para ver cómo vienen trabajando en matemática. Nos interesa saber si Uds. aprenden más, si aprenden mejor, si ubican lo que viene pasando en la materia en relación a los Trabajos prácticos, al trabajo grupal y a los parciales. Les vamos a pedir que digan su nombre y nos cuenten un poquito.

A1- Hola mi nombre es …., soy alumno de la carrera de agronomía. Si, se aprende bastante lo que es trabajo en grupo. Entre todos si alguien no sabe algo comparte ese saber, entonces en un grupo el otro sabe y arrastra al otro al grupo y ahí nos concentramos siempre.
E:- Uds. ¿vienen trabajando juntos como grupo?
TODOS:- Sí, desde que arrancamos la cursada.
A1: -A mí me sirvió mucho el trabajar en grupo porque me obliga a ir en ritmo, en cambio si trabajo solo es como que me dejo estar y pierdo el hilo de la materia.
A3: - Hola, mi nombre es …… y me sirve más en estas materias el trabajo en grupo que el trabajo individual, porque si me trabo en algo es más fácil preguntarle a mis compañeros que a los docentes que por ahí están ocupados en otros compañeros. Y los Trabajos Prácticos grupales también están buenos porque nos ayudamos entre todos y después te sirve cuando lo haces individualmente.
A2: Mi Nombre es ……. Sí, está bueno trabajar en grupo porque el que no sabe pregunta a los compañeros, a los profesores, el que sabe comparte también su conocimiento y al compartir su conocimiento también está aprendiendo porque es como una forma de practicar lo que uno ya sabe, como para integrar más los conocimientos.
E:- ¿Cómo les resultó en el trabajo grupal la cuestión que vengan primero las situaciones a resolver y después la explicación? Que Uds. tengan que enfrentarse al ejercicio.
A3:- ¡Re difícil! Sin explicación primero... nosotros zafamos porque…… sabe un montón y nos explicaba él, pero si él no sabía no sé cómo iba a ser...
A1: La parte esa es la que no me gusta y se la comparto a todos, que te den el ejercicio antes de ser explicado es como un problema mayor todavía, porque hay ejercicios después similares a los que siguen. Yo prefiero que me expliquen el ejercicio y después los ejercicios similares seguir resolviéndolos yo.
A2: - Matemática es algo automático, siempre son todos los ejercicios iguales, hacés el primero y después te salen todos los demás. Entonces prefiero que me los expliquen y después hacer todos los demás ejercicios.
A3: - Claro, como una guía.
E: - ¡Así que en los parciales les fue a todos bárbaro porque eran los mismos ejercicios!

TODOS: - (risas) A él si!
A3: - Aunque sea teniendo uno resuelto después te vas guiando en ciertas cuestiones que son similares.
A1:- Cuesta mucho más agarrar el hilo y empezar con los temas cuando te tiran así los problemas de entrada sin la explicación, estás como dos horas pensando y no sabés por dónde arrancar.
A3:- Vas probando y por ahí en una lo enganchás, pero no sabes si está bien hasta que haces la corrección con los profesores.
E:- Recién nos decía Ana que pudiéramos pensar si Uds. reconocen el tipo de ejercicios en el trabajo práctico y en el parcial, en el trabajo en grupo. ¿Son similares?
A1:- Sí, lo que tenemos que hacer lo reconocemos, muchas veces nos trabamos en el procedimiento.
A3:- Un ejercicio lleva varios procedimientos y por ahí no te acordás uno, o te confundís en uno del medio y te cambia todo el resultado, pero sí, los reconocemos cuando los vemos.
A1:- Sí, pienso igual que los chicos, justo hoy estamos viendo un tema que justo da en la tecla en lo que vos decís...entre todos nos pusimos a resolver y preguntándole uno lo que no sabía le explicaba otro, refuerza el conocimiento y a la vez te volvés a tu casa y ya sabes cuál es el inconveniente y te ponés a practicar y después venís a la otra clase ya lo tenés hecho y ya venís con ritmo, entonces la práctica no se te hace tan tediosa.
A2:- Hay relación entre los ejercicios de la guía y los parciales, son similares, no voy a decir iguales o los mismos... son similares pero por ahí, como te dije recién, un poco más rebuscados... te encontrás con una problemática que tenés que resolver pero un poco distinta a la que te venían dando en la guía, pero los temas son los mismos. No son ejercicios que ellos dieron por sabidos que por ahí te los toman (en el parcial) y no te habían tomado nunca...
E:- ¿Nunca se sorprendieron con algo desconocido?
TODOS:- No, nunca.
A3:- Por ahí había que hacer un paso previo parar llegar al problema y de ahí empezar a resolver, pero era eso la complicación mayor, porque cuando hacías eso se llegaba.
E:- ¿Y esta cuestión del parcial grupal cómo les resultó?

A1:- Muy positivo porque ahí todos los que estamos al día, cuando toca algo que es el mismo tema que venimos practicando, ahí fijamos más el conocimiento, nos ayuda más, entonces la duda que tenemos ya la resolvemos y llega el momento del parcial y decís "ah, bueno, mira este ejercicio ya lo practiqué... ¿y qué cambia? Bueno, cambia esto y ya lo resolvés"
A2:- Te ayuda mucho aprender a escuchar a la otra persona y a ponerse de acuerdo... porque nos ha pasado que para un mismo ejercicio teníamos dos formas de verlo o modos de intentar hacerlo y hasta que llegábamos a una puesta en común te obliga a todo un trabajo tratar de comprender al otro y de buscar la mejor forma de resolverlo.
A3: - A mí lo que más me ayudó en los trabajos grupales esos fue en entender las consignas. Como lo pensábamos todos juntos a la consigna, ahí entendía mejor qué era lo que me pedían... Por ahí si me la encontraba sola en un parcial no sabía ni qué tenía que hacer.
E:- Es decir que de algún modo el parcial grupal los preparaba para después poder hacer el individual.
A2:- No te ayuda solamente en los parciales trabajar en grupo y hacer las cosas en grupo, te ayuda también en distintas problemáticas en el ámbito agropecuario y hasta en la vida... si tenés un problema le preguntás a alguien, si tenés un problema lo resolvés con otro... no te hace solamente hacer contacto con otro en el parcial, sino más que nada sirve para la carrera, para todo lo que estamos estudiando, no sólo para resolver un ejercicio de matemática.
E:- ¿Y qué es lo que más les costó?
TODOS:- Matemática! (risas) Matemática en sí..
A1:- Como tema específico principalmente el tema de los signos y los métodos que tenés que explicar. O no entender el enunciado, qué te está diciendo... Si el enunciado te pide una cosa y vos interpretas otra ahí hay una falla de uno, ahí estamos nosotros un poco automatizados… si vos prácticas y ves ese inconveniente que tenés, leés el enunciado, un signo o saber aplicar las propiedades... , si vos sabés aplicar las propiedades y el problema está un poco más rebuscado, leés el enunciado y lo vas a resolver... En matemática vos podés tomar varios caminos para llegar al mismo resultado, lo importante es que sepas ese camino, que esas propiedades que vos aplicás para llegar al resultado, te dé lo que te están pidiendo.
E:- ¿Uds. creen que aprendieron más de este modo?
TODOS:- Sí.

A3:- Por ahí, a diferencia de elementos que uno trabajaba más solo, individualmente, a esta materia, es mejor así... nos vaya como nos vaya, es mejor así, aprendimos mejor así.
A1:- Sí, totalmente, yo creo que es una materia complicada, porque es muy amplia en cuanto a contenidos, y si la hubiera tenido que hacer individualmente me hubiera costado mucho más de lo que ya me cuesta de por sí.
A3:- ¡Sí! Ya me hubiera ido.
A1:- Es una muy buena forma de trabajar en grupo y compartiendo con los compañeros distintos puntos de vista.
E: ¿Algo más para agregar? (nada) Les agradecemos mucho y cualquier otra cosa que quieran agregar pueden acercarse al Equipo de Pedagogía en el Departamento de Educación.

Entrevista 1

ENTREVISTA 2

E:- Soy Betina, soy parte del Equipo de Pedagogía Universitaria, la idea de esta entrevista es poder conversar con Uds. sobre el trabajo en la materia, los parciales, los trabajos prácticos y la modalidad de trabajo en grupo, en función de una investigación que se viene haciendo en trabajo articulado con los docentes y el equipo de Pedagogía
En ese contexto, para nosotros la voz de los estudiantes es muy importante. Les pedimos que digan su nombre.
A1:- Yo soy ….., y esta cuestión de grupo me parece nueva, me costó adaptarme a esta metodología de trabajo. Al principio me costaron los parciales, pero tuve que practicar mucho, juntarme... un poco más que en Elementos de Matemática que no fue así en grupo. Bueno, desaprobé los primeros dos parciales y eso me quitó la posibilidad de promocionar, pero bueno, no importa.... Pero está bueno porque vos entendés un poco más, te integrás un poco más en los temas que tenés que aprenderte. Porque vos leyendo sacás conclusiones o te surgen preguntas y ahí preguntás y en base a eso aprendés y está bueno, está bueno pero cuesta...
E: - ¿A quién le preguntas? ¿A los profes, a tus compañeros, a los ayudantes?
A1:- Y le pregunto a los profesores o a mis compañeros que entienden un poco más, algunos que recursaron y saben cómo viene la mano, a los ayudantes...
E: - ¿Y qué es lo que cuesta?

A1:- Y...a mí siempre me costó matemática...
E:- ¿Cuesta matemática o cuesta trabajar en grupo?
A1:- Y sí, trabajar en grupo también cuesta.
E:- ¿Por qué?
A1:- Por las diferencias que hay, por los diferentes pensamientos, pero depende también la materia... Si es una materia que tenés que hacer trabajos prácticos, hay teórico, y tenés que integrar diferentes pensamientos, es más complejo... en este caso vos tenés que aprender herramientas para calcular ciertos problemas que tenés de matemática... igualmente si practicás todo sale, pero me cuesta entender un poco el sistema nuevo de matemática, que por ahí no lo ví en secundaria porque tuve mala base.
E:- ¿Los demás cómo lo ven?
A2: - Mi nombre es ….., y en el trabajo en grupo bastante bien, siempre me fue bien en cuanto al grupo, nunca tuve problema para adaptarme con mis compañeros. Y en cuanto a la materia, este cuatrimestre estamos los tres iguales, arranqué mal con los primeros dos parciales, pero no porque me costase la matemática... Sino que arranqué cursando muchas materias, y le terminé dedicando más importancia a otras y confiándome en matemática, y me pasó lo que me pasó.
E: ¿Esta es la primera que cursan la materia?
A3:- Particularmente a mí, desde lo personal, me parece que el laburo en grupo es mucho mejor, por todas las individualidades que traemos, que el hecho que desde la formación académica nos quieran inculcar el trabajo grupal nos rompe con todas nuestras individualidades y nos hace fortalecer en cuestiones de vínculos con los compañeros, eso está genial en cuestiones de vínculo, de conocimiento y de aprendizaje colectivo... eso está bárbaro...
A2:- Hay que aprender a trabajar en grupo y está bueno eso.
E: - ¿Y Uds. sienten que pudieron aprender a trabajar en grupo, que ahora que ya avanzó el cuatrimestre es distinto a cómo trabajaban antes?
A3:- Sí, a raíz de la modalidad sí. El problema que encontramos nosotros es como que de Elementos a Matemática General, hay un abismo de diferencia.
E: ¿En qué?

A3:- En cuanto a la base que nosotros traemos, por ende a veces sentimos que los profes tienen que cuadruplicar el esfuerzo para que nosotros podamos salir más o menos parejos.
E: - ¿Uds en el parcial reconocen situaciones que ya vienen practicado o les resulta una sorpresa?
A3:- Sí, los parciales son los mismos.
A1:- O sea, los ejercicios que hacemos día a día son los mismos.
E:- ¿No hay algo que los sorprenda en el parcial o que los descoloque?
TODOS:- No, no. los ejercicios son los mismos.
E:- ¿Y entonces por qué el resultado bajo, si les resulta familiar?
A3:- Es como que demanda mucho estudio Matemática General y no venimos acostumbrados a eso porque generalmente Elementos es más básico.
A1:- En Elementos con sólo practicar un rato ya estaba, o con sólo asistir a la clase también, y esto exige un poco más.
A3:- En una analogía es como que el Elementos nos enseñaron a armar la rueda de un tractor, ponerle la rueda, la llanta, todo... y acá nos hubieran pedido que armáramos el tractor entero... hay un 80% que no tenemos ni idea…(risas) pero bueno, con mucho esfuerzo y dedicación...
E:- ¿Qué les pasa con esta metodología nueva de que les presentan primero la situación a resolver en grupo y después la explicación?
A3:- Eso me parece que habría que modificarlo rotundamente...
E: ¿A ver?
A3:- Tomar de la modalidad vieja eso, la explicación y después el ejercicio, porque a la inversa es como que nos dan un montón de contenidos que jamás vimos, jamás recibimos, los resolvemos como podemos y después lo explican.
E: - Sí, ¿y qué pasa con eso?
A3:- Entonces se choca lo que uno pensó o dedujo con lo que en realidad es.
E:- Les complica eso de que presenten la situación antes que la explicación.
A3:- Claro, totalmente... después la modalidad en grupo, el hecho del equipo docente cómo está en cada grupo... porque la verdad es que labura 10 veces más hay que reconocerlo... eso está genial, pero el tema de la resolución y después la explicación no...
A1:- Como que no entra bien en contexto...

A3:- Como que ya arrancás con el pie izquierdo.
E:- ¿Y no les parece que eso los ayuda a pensar, que los ayuda a razonar, que los ayuda a recuperar lo que ya vinieron trabajando?
A3:- Y si vos das un puntapié inicial es como que nos marcas un poco el camino.
A2:- A mí por ejemplo llego a casa y cuando hago ejercicios miro videos y tengo un profesor particular que me explica, esa fue una de las causas del anterior parcial a este que aprobé, fui a particular y había entendido todo, pero tuve pocos días de práctica y me costó, llegue al parcial y no...
A3:- A mí me parece que si con eso de que nos dan primero la situación y después la explicación, si buscan ver cuál es nuestra percepción, nuestro razonamiento con equis tema, me parece que lo ideal sería que nos den el contenido bibliográfico, por ejemplo de Novelli, que lo leamos y después que nos pongan equis situación y después nos digan, por ejemplo, "qué interpretan según el contenido que leyeron, con esto". Me parece que tendría que ser así.
TODOS:- (afirman)
E:- Esta cuestión del parcial grupal y después retomarlo en el parcial individual, ¿cómo les resultó esa experiencia?
A3:- ¡Está muy bueno! A mí, por ejemplo, el primer punto no me sirvió porque me saqué un 2, pero el otro punto me sirvió porque me saqué un 4... da un 3… en realidad nos habían dado medio punto.
E:- ¿A vos cómo te resultó?
A2:- Hasta ahora lo mismo.
E:- Igual que los compañeros.
A3:- Tenemos las mismas notas los 3.
A3:- A mí por ejemplo me pasó que yo dejé un punto sin completar y un punto inconcluso, eran 6 puntos y así y todo la aprobé, eso quiere decir que dentro de todo lo que hice estaba más o menos bien, pero sí… igual costó una pila...
E:- Bueno, en síntesis, es decir que esta cuestión de un punto del parcial grupal a Uds. les sirvió para poder después retomarlo desde lo individual. Les cuesta esto de tener que primero tener que resolver como Uds. pueden, y después la teoría porque sienten que les faltan elementos de la matemática anterior que cursaron.
E:- Si Uds. tuvieran que pensar en qué se equivocan más, ¿cuál es el error más común, dónde reconocen qué es lo que más les cuesta?

TODOS:- Falta de práctica.
A2:- Sentarse a hacer los ejercicios.
E:- Y eso corre por cuenta de Uds., no por el tipo de ejercicios.
A3:- Totalmente... nos recontra hacemos cargo.
A1:- Yo tengo problemas en los signos, y eso es falta de práctica, así que eso es responsabilidad mía.
A2:- Si tenés algún problema es porque no estás practicando lo suficiente.
E:- Bueno, igual Uds. fueron diciendo algunas otras cosas también, no sólo practicar. Esto que significa traer contenidos de la otra matemática ahora.
A3:- Sí, hay muchos factores, pero los más determinantes serían esos, pero haciendo un “mea culpa” sería la falta de práctica y por ahí eso de la situación y después la resolución... E:- Y a pesar que hayan desaprobado algunos parciales, ¿sienten que están aprendiendo más?
TODOS:- ¡Sí! A full.
A1:- Algo se aprende... Y...desaprobando estás aprendiendo que estás haciendo mal las cosas.
E:- Y esta es la pregunta que Uds. un poco se hacen, que les serviría ver con qué se relaciona el contenido.
A1:- Sí, viendo en qué se relaciona, así podemos aprender más.
A3:- Como llevarlo a eso, a la realidad...
A1:- Porque no es lo mismo algo teórico que un práctico, vos si haces algo teórico y después práctico te queda todo.
E:- Bueno chicos, ¿algo más que quieran que tengamos en cuenta?
TODOS:- ¡Nada más!

Entrevista 2

Anexo 3 – Ejercicios complementarios

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DEL TRABAJO PRÁCTICO N°2

1) Desde una montaña de 300 metros de altura se deja caer una piedra, a medida que el tiempo transcurre la altura de la piedra está dada por la siguiente función

$$f(x) = 300 - 4{,}9t^2$$

El tiempo se mide en segundos y la altura en metros.

a) Realizar el gráfico en su dominio

b) ¿En qué momento toca el suelo?

c) ¿Cuál será la velocidad 5 segundos después de que se dejó caer?

d) Realizar el gráfico que representa la velocidad de crecimiento de la función h(t)

e) ¿Cómo varía la velocidad (en valor absoluto) a medida que transcurre el tiempo? (es cada vez más grande/chica, aumenta/disminuye indefinidamente)

f) ¿Por qué la velocidad es negativa?

2) El área de la esfera $A = 4\pi r^2$ está expresada en función del radio de la misma(r)

a) ¿Cómo calcularían el crecimiento del área de la esfera en función del radio?

b) ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea con respecto al radio, r = 5 cm?

3) Un termo cilíndrico de radio interno r cm y altura h cm contiene 1000 centímetros cúbicos de agua. Éste termo es más eficiente cuando el área total interna es mínima

a) Hallar una fórmula para expresar el área total del termo en función del radio

b) Hallar el valor de r para que sea mínima dicha área

4) Dada la siguiente función $f(x) = -x^2 - 6x - 8$

a) Graficar la función

b) Hallar su derivada

c) Hallar posibles máximos y/o mínimos

d) Hallar la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto $x = 2$ y graficarla

e) Graficar la función derivada

5) Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$

a) Realizar el gráfico de la misma

b) Hallar, si existen máximos y mínimos

c) Graficar aproximadamente su derivada

d) Hallar los puntos para los cuales la recta tangente a f(x) es paralela a $y = \frac{7}{3}x + 4$

6) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

a) Hallar su dominio

b) Hallar sus asíntotas

c) Hallar máximos y mínimos

d) Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento

e) Hallar los intervalos de concavidad

7) Halla las coordenadas de los puntos críticos de las siguientes curvas. Clasifique los mismos.

a. $y = x^3 - 6x^2 + 11$

b. $y = \dfrac{x^2 - 27}{x - 6}$

c. $y = x^4 - 4x^3$

d. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

8) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal de cada una de las siguientes curvas en los puntos que se indican.

a. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ en $x = 2$

b. $y = \sqrt{x^2 - 9}$ en $x = 5$

9)Dadas las siguientes funciones: Esbozar una gráfica de las mismas utilizando dominio, cortes con los ejes, asíntotas, puntos críticos, máximos y mínimos, intervalos de crecimiento/decrecimiento, puntos de inflexión y intervalos de concavidad positiva y/o negativa

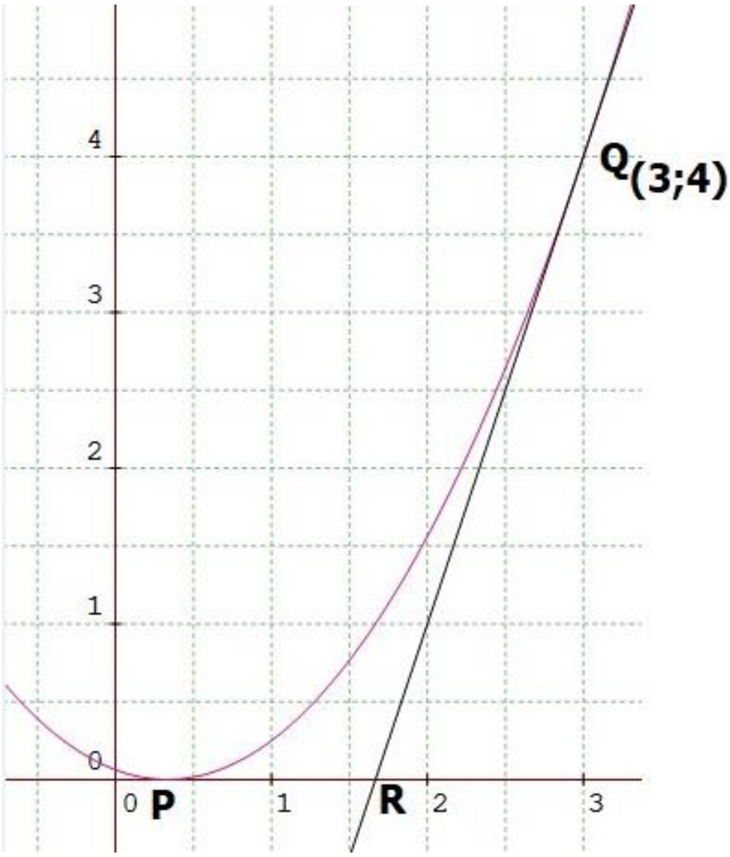
$$f(X) = x^3 - 2x$$

$$f(x) = \frac{x^{2-4}}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{-3}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

10)



Gráfica de f(x) y su tangente en (3,4)

El diagrama muestra parte de la curva $f(x) = \frac{1}{16}(3x-1)^2$, la cual toca al eje x en el punto P. El punto $Q = (3; 4)$ pertenece a la curva y a la recta tangente a la curva en que corta al eje x en R

a) Hallar las coordenadas de P

b) Hallar la coordenadas de punto R

11) Hallar los valores a **a** y **b** para que la función se continua y derivable

En el punto $x = 2$

a)$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax \; si \; x \leq 2 \\ 2ax + 2 \;\; si \; x > 2 \end{cases}$

b)$f(x)\begin{cases} 3x^3 + 2ax \;\; si \; x \geq 1 \\ \quad \frac{b}{x} \;\; si \; x < 1 \end{cases}$

12) Dados los siguientes gráficos, esbozar la función derivada en cada caso

a)

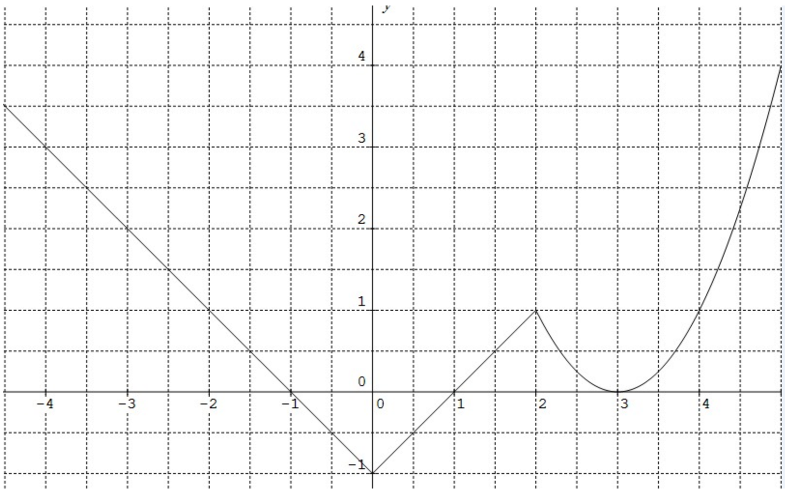
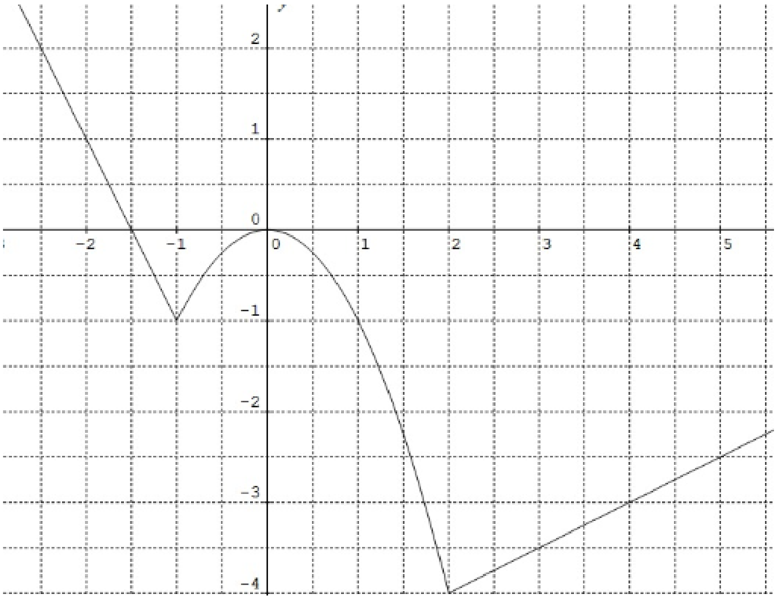


Gráfico de una función por parte



Gráfica de una función por parte

13) El punto A = (2;2) pertenece a la curva $y = x^2 - 2x + 2$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto A

b) La normal a la curva en A intersecta nuevamente a la curva en B. Hallar las coordenadas de B

c) Las tangentes en A y B se intersectan en C. Hallar las coordenadas de C

14) La Ley de Boyle para los gases perfectos establece que a temperatura constante P.V = K, donde P es la presión, V es el volumen y K una constante. Si la presión está dada por P=30 +2t con P en cm de Hg, t en seg; y el volumen inicial es de 60 cm cúbicos, determinar la razón de cambio del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 segundos

15) a) Derivar la siguiente función **utilizando la definición** $f(x) = \frac{-2}{x-3}$

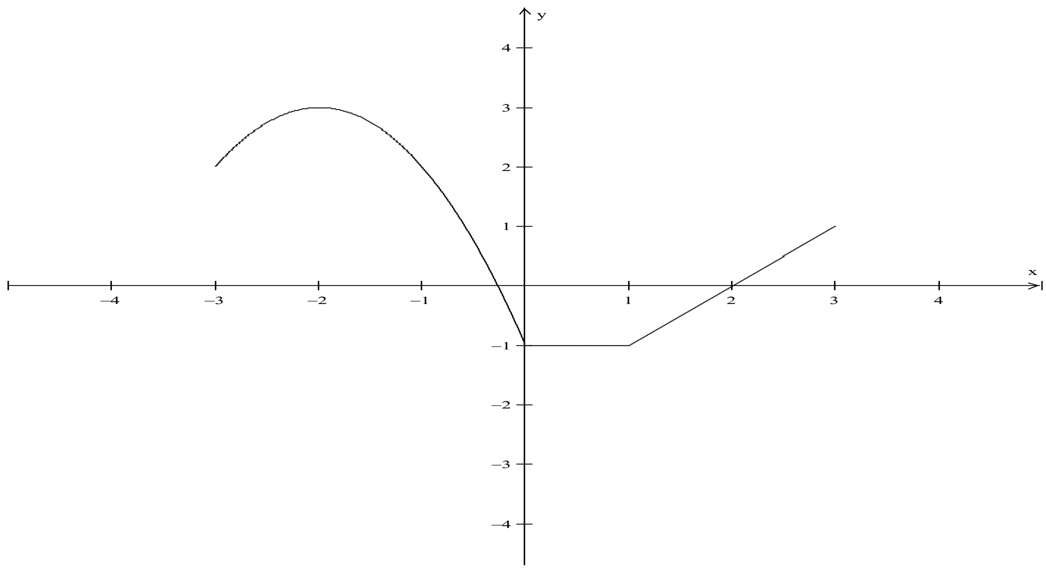
b) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función cuyas pendientes sea 2

16) a) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ en $x = -2$

b) Dar 2 interpretación que conozcas, al valor de la pendiente encontrada

c) Graficar las rectas en el gráfico del ejercicio anterior.

17) Dada la función f(x) cuya representación gráfica se muestra a continuación



Gráfica de f(x)

a) Indicar los puntos donde no es derivable en el intervalo (-3, 3). Justificar tu respuesta.
b) Indicar sobre la gráfica un punto donde la velocidad de crecimiento instantánea de la función sea 1 y todos los puntos donde sea cero. Justificar.
c) Realizar el esbozo de la gráfica de la función dereivada. Justificar los pasos realizados.