UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Especialidad Matemática

Tesis de Maestría

Estrategias heurísticas desplegadas durante la Resolución de Problemas en la clase de Seminario II del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Misiones.

Prof. Roxana Verónica Operuk

Directora de Tesis: Mgter. Margarita del Carmen Benítez

Co-directora de Tesis: Mgter. Ana Prieto

Año 2022

Resumen

En el presente trabajo de investigación se propone describir las estrategias heurísticas desplegadas por estudiantes universitarios durante la resolución de problemas desde el enfoque de la escuela anglosajona. Estas actividades se llevaron a cabo en las clases del Profesorado en Matemática, Universidad Nacional de Misiones en la asignatura Seminario II.

El estudio es de corte cualitativo e interpretativo mediante el mismo se pretende comprender y describir los rasgos más importantes de las heurísticas utilizadas por los estudiantes al resolver las distintas situaciones presentadas. Para ello, se realizaron distintos análisis de las presentaciones escritas de los grupos involucrados.

Los resultados a los que se arribó alientan a recomendar este enfoque de trabajo en la enseñanza universitaria para fomentar la resolución de problemas y, particularmente, entrenar en el uso de distintas heurísticas, sobre todo en una carrera de formación docente. Por otra parte, contribuir en la articulación con otros espacios de la carrera y aportar en el proceso de modificación del Plan de Estudios del Profesorado.

Palabras claves: Heurísticas, Funciones polinómicas, Resolución de problemas, Universidad

Summary

In the present research work it is intended to describe the heuristic strategies used by university students during the problem solving process using the problem solving school approach. Different activities were carried out and the students had to give them back in writing, in order to identify and classify the answers given by the different groups. These situations were carried out in the Mathematics Teacher’s National University of Misiones. training career in the subject Seminar II.

The study is qualitative and interpretative. The aim is to understand and describe the most important features of the heuristics used by the students when solving the different situations. Several analyses were made of the written presentations of the involved groups.

With the results that were arrived at, it is recommended to implement this work approach to promote problem solving and particularly to collaborate in training the use of the different heuristics since, as mentioned, we are part of a teacher training career. On the other hand, it contributes to the decision making process regarding the program of the subject, its articulation with other areas of the career and its contribution to the process of modification of the Teacher Training Syllabus.

Key words: Heuristics, Polynomial functions, Problem solving, University

A mis dos estrellas en el cielo Amanda y Graciela.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi directora Margarita que, desde un primer momento, cuando le consulté si quería embarcarse en este proyecto, no dudó.

A mi co-directora Ana, que colaboró en material, lecturas y el apoyo para finalizar este trabajo.

A mi familia por estar.

Y a una persona especial, que colaboró conmigo en toda mi carrera, Silvia.

Roxana

Índice General.

Índice de Tablas

Índice de figuras

1. Introducción

En el presente trabajo nos proponemos describir las estrategias heurísticas desplegadas por estudiantes universitarios, durante la Resolución de Problemas desde el enfoque de la escuela anglosajona, también conocida como Problem solving.

Este proyecto se llevó a cabo en la asignatura Seminario II, del Profesorado en Matemática (PM), de la Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales (FCEQyN), de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM). El relevamiento de los datos se realizó durante el desarrollo de las clases del primer cuatrimestre del año 2019.

El origen de la inquietud surge, de observar durante años, en los estudiantes, escaso despliegue de estrategias heurísticas al momento de resolver las actividades. Esto nos genera un interrogante ¿cómo habiendo cursado Análisis I, Álgebra I y Geometría I no recurren al uso de esos contenidos a la hora de resolver un problema?

Esta situación nos desafía a intentar cambios en el desarrollo de Seminario II. Se decide plantear actividades considerando el enfoque antes mencionado. Para ello se comienza el estudio de los conceptos centrales de la Resolución de Problemas. Los aportes teóricos de autores como Polya (1965), Schoenfeld (1985, 2013) y posteriores avances de Santos Trigos (2014), Koichú (2021), Rodríguez et al. (2019), entre otros.

Partimos del supuesto que, si presentamos a los estudiantes problemas que exijan de su parte la búsqueda de distintos caminos de solución, ensayar estrategias, recurrir a contenidos aprendidos utilizando distintos recursos; podrían aflorar variadas heurísticas y más complejas.

Los objetivos propuestos para el estudio fueron:

Objetivo general:

Analizar las estrategias heurísticas desplegadas por los estudiantes, durante la resolución de problemas en la asignatura Seminario II, del Profesorado en Matemática de la UNaM.

Objetivos específicos:

Identificar las estrategias heurísticas desplegadas por los estudiantes en la resolución de problemas que involucran funciones.

Analizar y clasificar las estrategias heurísticas desplegadas por los estudiantes de Seminario II durante la resolución de problemas.

Describir los procesos que los estudiantes reconocen estar desplegando durante la resolución de problemas.

En la sección I, denominada Referentes teóricos, se presentan algunos antecedentes de estudios sobre la resolución de problemas y se despliega el encuadre teórico de la escuela anglosajona. Se consideran los aportes de Polya (1965), Schoenfeld (1985, 2015) Santos Trigo (2014- 2015) Marino- Rodríguez (2009), Camacho y Santos Trigo (2015), Rodríguez et al. (2019), Koichú (2021), entre otros.

La Metodología (sección II) aplicada es de corte cualitativo e interpretativo. El trabajo de campo se desarrolló durante las clases de Seminario II. La estrategia para la obtención de datos fue la propuesta de tres (3) situaciones problema presentada a los estudiantes. Los datos para el análisis se recuperaron mediante los escritos de los estudiantes. Para la identificación y clasificación de las heurísticas se utilizó la herramienta teórico-metodológica (Tabla 1) denominada Descriptores, heurísticas y descripción de los mismos, siguiendo el criterio de clasificación de Rodríguez et al. (2019) y tres de elaboración propia, que refieren al uso de la herramienta informática GeoGebra (GG).

Los resultados del proceso de análisis, se presentan en la sección III, donde se comparte: el análisis previo de las posibles estrategias de resolución, la descripción y recortes de las respuestas de los estudiantes; la identificación y clasificación de las heurísticas mediante la tabla antes mencionada y la reflexión acerca de las heurísticas emergentes en relación con los problemas.

Para finalizar, en la sección IV: Conclusiones y perspectivas. Se describen las heurísticas desplegadas por los estudiantes del segundo año del profesorado, durante la resolución de problemas en la clase de Seminario II. Caracterizadas fundamentalmente por el trabajo hacia adelante, el uso de teoría relacionada y el trabajo aritmético. También se enuncian algunas líneas de interés para estudios futuros.

2. Referentes teóricos

1.1 Antecedentes de estudio del problema

Se presentan algunos estudios relacionados con investigaciones y/o experiencias sobre la resolución de problemas, algunos de los cuales se refieren al uso de las TIC en la resolución de problemas (GeoGebra). En particular, se buscaron aquellas desarrolladas en el nivel superior. Estos aportes colaboran en la profundización del tema y la construcción del marco teórico y metodológico para el estudio de resolución de problemas.

El trabajo de Marino y Rodríguez (2008), nos aporta un análisis interesante acerca de las estrategias heurísticas utilizadas en el proceso de la resolución de problemas, el mismo tiene como uno de sus objetivos "mostrar parte del análisis de la información obtenida a partir de la implementación de los instrumentos focalizando en identificar las estrategias heurísticas utilizadas por uno de los estudiantes del curso" (Marino y Rodríguez, 2008, p.214).

Las autoras definen problema desde la literatura existente y, considerando esos aportes, realizan su propia definición, Marino y Rodríguez (2008):

> Una situación en la que aparece una pregunta, implícita o explícita, será percibida por un sujeto como un problema en la medida en que, si bien el sujeto cuenta con los elementos cognitivos necesarios para comprenderla y abordarla, éstos no son suficientes para responder a dicha pregunta de manera inmediata. (p.216)

Referido a encontrar la respuesta a esa pregunta, expresan que se ponen en juego distintas estrategias, a las que denominan heurísticas. Estas conforman un conjunto de modos de proceder (Marino y Rodríguez, 2008) que ayudan a la resolución de los mismos.

Los autores de Dios Pita et al. (2011) en una presentación sobre aprendizaje basado en problemas, en el primer año de una carrera de ingeniería, plantean que los estudiantes realicen "ejercitación compleja y desafiante":

> Desde esta perspectiva didáctica (la resolución de problemas) los alumnos son situados sistemáticamente ante problemas cuya solución debe realizarse con su activa participación y en la que el objetivo no es sólo la obtención del resultado sino, además, su capacitación independiente para la resolución de problemas en general. (p. 3)

Para el estudio diseñaron problemas contextualizados que propusieron en clase. Para la resolución de los mismos exigían de los estudiantes un trabajo de búsqueda y elaboración de un plan de acción.

Estos autores manifiestan que, para la resolución de problemas, la participación del estudiante es clave, así como las relaciones entre los conocimientos para resolver distintas situaciones potenciando sus habilidades. También afirman que es fundamental que el docente acompañe el proceso, mediante el trabajo pedagógico, para que este enfoque sea provechoso.

En las conclusiones no se brindan resultados de la implementación pues al momento de la publicación, año 2011, aún no se contaba con ellos.

Por otra parte, Bejarano Franco (2011) señala la importancia de comenzar a trabajar la enseñanza de la resolución de problemas en el nivel universitario, "ello exige la puesta en el escenario didáctico, de estrategias docentes que impliquen prácticas basadas en el aprendizaje activo y en aprendizajes basados en problemas reales". (Bejarano Franco, 2011, p. 128)

El autor alude a que esta metodología se debería comenzar a profundizar en la vida universitaria. A partir de los aportes de distintos autores deja planteada, la necesidad de proponer problemas a los estudiantes, en los distintos niveles de enseñanza. Señala algunos de los interrogantes que surgen al respecto ¿cómo se diseñan estas actividades? ¿cómo hacer para que sea lo suficientemente compleja y desafiante, pero, que a la vez no produzca desaliento en los estudiantes? cuestiones necesarias a tener en cuenta a la hora de pensar el currículo desde la resolución de problemas.

Sombra del Rio (2012) propone un taller para trabajar en forma colaborativa el concepto de función utilizando el GeoGebra como herramienta en la resolución de problemas. En referencia al mismo, menciona:

> El objetivo será mostrar cómo estas estrategias didácticas cambian las formas de enseñar y aprender, de evaluar, de construir conocimiento matemático, de cambio de roles, donde el alumno es protagonista y no es un mero receptor. (p. 371)

Realiza comentarios respecto a la propuesta del uso del software en los dispositivos curriculares de Nación, como también, a la entrega de notebooks. Explica que en esta propuesta se dieron problemas para construir representaciones, hacer preguntas y conjeturas para poder arribar a una conclusión.

Benítez y Benítez (2013) de la Universidad de Tucumán, plantean que el objetivo de su trabajo es que los estudiantes adquieran, refuercen los conceptos y procedimientos matemáticos.

Las autoras señalan que realizaron las actividades de resolución de problemas con un grupo de pocos estudiantes. Remarcan que lo esencial es la contextualización y la orientación para la enseñanza de la matemática. En las conclusiones realizadas destacan que la mayoría de los estudiantes no estaban acostumbrados a trabajar con la metodología planteada, pero, según sus palabras, les resultó interesante. Comentan también que notaron un cambio en los mismos, respecto de la confianza en sus posibilidades para resolver problemas durante el proceso de aprendizaje.

En Schoenfeld (2013) se menciona que el desafío planteado es la construcción de una teoría. Esta es “la estructura de la toma de decisiones” esta “arquitectura” es lo que se necesita para poder fundamentar las decisiones teóricas al momento de trabajar con la resolución de problemas. Uno de los ítems que se considera como puntual, en la misma, es “el conocimiento del individuo (y más ampliamente, los recursos a su alcance)” Schoenfeld (2013)

Respecto a este ítem, el autor profundiza indicando que:

> En mi visión teórica actual doblo el acceso y la implementación de estrategias heurísticas en la categoría de conocimiento. Siempre vi la resolución de problemas como una forma de conocimiento, por supuesto, pero, en el trabajo de resolución de problemas yo estaba tratando de validar su importancia y utilidad, por lo que se separaron para especial atención. Además, agrego "recursos" a la categoría de "lo que el individuo tiene para trabajar con": el enfoque que uno toma para un problema puede variar sustancialmente dependiendo de, por ejemplo, si uno tiene acceso a herramientas computacionales en una computadora. (p. 18)

En acuerdo con esta línea de pensamiento, consideramos que si los estudiantes, tienen la posibilidad del uso de alguna herramienta computacional al enfrentarse a una situación, es posible que modifiquen y amplíen sus estrategias al pensar posibles soluciones.

El autor deja planteadas algunas preguntas como "¿qué necesitamos saber sobre ambientes de pensamiento, enseñanza y aprendizaje para ayudar a los estudiantes a ser más efectivos, pensadores matemáticos y solucionadores de problemas?" (Schoenfeld, 2013, p. 19). Otros aportes de este autor, es la consideración a los ambientes de aprendizaje y la idea que las personas trabajan mejor cuando pueden interactuar con otros para pensar el problema, en palabras de Schoenfeld (2013) "caracterizar los entornos productivos de aprendizaje es un esfuerzo esencial, si queremos mejorar la instrucción, pero aprendiendo, …, las ideas que los individuos construyen son a menudo construidos y refinados en colaboración con otros" (p.20)

Respecto de repensar la tecnología computacional y poder recabar datos. El autor comenta una anécdota sobre las lluvias en su lugar de residencia, se suponía que era la época seca del año y parecía que había llovido más de lo habitual, a partir de esa intriga comienza a recabar información y realizar algunos análisis con los datos obtenidos y pudo concluir que se trató de un año con más lluvias de las habituales. Entonces reflexiona "desde mi perspectiva, claramente estaba haciendo matemáticas. Mi pregunta es, ¿dónde aprenden los estudiantes de hoy a recopilar esa información y operarla?, hacer preguntas, buscar datos, construir modelos y dibujar. Las inferencias deben ser experiencias cotidianas para nuestros estudiantes" (Schoenfeld, 2013, p. 31). Menciona, además, la utilidad de varias herramientas computacionales, fomenta su uso y que sea realizado con "fluidez".

Caronía et al. (2014) de la UNaM, analiza los alcances pedagógicos de herramientas computacionales, como GeoGebra, Aula Virtual y CmapTool, disponibles para llevar a cabo el proceso de evaluación de los contenidos desarrollados en la asignatura geometría proyectiva. En particular, se plantearon actividades grupales de estudio de temas inéditos para los estudiantes. El objetivo era que los mismos logren la construcción de ese contenido, y utilicen el programa GeoGebra para realizar la defensa oral durante entrevistas clínicas grupales. Según los autores Caronía, et al. (2014):

> Ya desde el primer análisis comenzamos a vislumbrar resultados satisfactorios en beneficio de sus actores: los alumnos reconocieron a estas instancias como adecuadas para concretar aprendizajes complementarios y realizar auto evaluaciones; y los docentes como medio satisfactorio para continuar con este método de evaluación. (p.7)

Las diferentes acciones realizadas en el desarrollo del trabajo de investigación, enriquecieron la propuesta de enseñanza de las cátedras en las cuales se implementó esta metodología. La satisfacción radicaba en que, dadas determinadas actividades, los estudiantes investigaban y posteriormente realizaban una exposición oral de defensa en grupo, utilizando el programa.

Otro trabajo que refiere al uso de las TIC en el estudio de funciones con estudiantes, es una investigación entre Argentina y Francia en 2015: Se trabaja en el desarrollo de las producciones de los estudiantes. Los profesores retomaron un recurso pre existente, el concepto de función, incorporándolo para determinadas construcciones utilizando el GeoGebra. Se menciona que en algunas producciones se evidencia la dificultad, por parte de estudiantes, en dotar de sentido a lo construido. Ferragina y Lupinacci (2015) señalan “Esto produjo que, en algunos casos, se detuviera el trabajo grupal y los docentes tuvieran que guiar la construcción del punto, centrando el análisis en las técnicas matemáticas e informáticas para su elaboración” (p. 4).

Se considera como aporte el comentario de los autores que aconsejan realizar determinadas construcciones con el programa, antes de la actividad de resolución de problemas, ya que esto favorece al proceso de la resolución.

Por otra parte, en su estudio realizado en instituciones educativas utilizando el shifts and choices model (SCM), Modelos de turnos y elecciones, (Koichú, 2018), trabaja la resolución de problemas, menciona las elecciones conscientes e inconscientes del que resuelve y la importancia de la interacción grupal, comenta que si bien en los inicios de la resolución de problemas trabajaban de manera individual esto fue cambiando y comenzaron a trabajar en interacción entre compañeros. Señala que, en general, al trabajar en grupo se evidencia el predominio de un estudiante que es el que comienza con una idea y los otros interactúan. Puede darse que los roles se intercambien, como también, que se estanquen en el proceso, en ese momento aumenta la posibilidad de relacionarse con otros grupos o intentar buscar otras herramientas. (Koichú, 2018).

Otra contribución de esta lectura es la libertad con la que los estudiantes se involucran en interacciones (Koichú, 2018). Es decir, intercambiaron recursos con otros compañeros cuando ellos lo necesitaron no cuando el docente creyó que lo necesitaban.

Por medio de determinadas situaciones brindadas a docentes en Costa Rica, Poveda Fernández (2020) plantea la ventaja de la utilización de GeoGebra como herramienta para generar oportunidades en las formas de razonar distintas situaciones:

> La resolución de un problema matemático va más allá de aplicar un procedimiento mecánico o algorítmico. Por lo contrario, es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento, mediante el cual pueda resolver problemas. Por ejemplo, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra, puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas, ya que son entornos de software diseñados para incorporar la geometría euclidiana de una manera dinámica e interactiva, es decir, genera representaciones dinámicas del problema que se pueden convertir en una fuente para explorar en la búsqueda de soluciones. (p.27).

Se les dio a los participantes determinadas situaciones donde debían poner en juego los caminos posibles, utilizando el programa para determinar una solución. Pasado un tiempo realizaba un plenario para compartir las producciones, Poveda Fernández (2020) menciona:

> La finalidad de la investigación fue analizar y documentar la manera en que el uso de GeoGebra permite que los participantes se involucren en los procesos de plantear y responder preguntas, buscar información, formular conjeturas y justificarlas al explorar una representación del problema, mediante argumentos visuales o empíricos, tales como la medición y el rastro de un punto. (p.30).

Pudieron concluir que el uso de GeoGebra colaboró al pensar las distintas situaciones presentadas. Teniendo en cuenta estos aportes, se podría considerar que el uso del programa contribuye en la resolución de problemas al poder realizar distintas construcciones, como así también realizar variaciones en las respuestas halladas.

En otra investigación, Pinargote Carreño (2021) se centró en analizar el uso de herramientas tecnológicas para la resolución de problemas matemáticos en una institución educativa.

Desde la mirada de este autor, el uso de las herramientas informáticas favorecería el aprendizaje “La resolución de problemas matemáticos con el uso de la tecnología conlleva que los docentes y estudiantes adopten herramientas como un medio para la construcción de sus conocimientos y formación integral.” (Pinargote Carreño, 2021, p. 2)

Desde este estudio y con los resultados obtenidos se “invita a los docentes a reforzar las competencias digitales y a utilizar herramientas tecnológicas que aporten en la consolidación de la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes”. (Pinargote Carreño, 2021, p.4). Esto refuerza la idea de estimular el uso de herramientas digitales para posibilitar a los estudiantes a explorar y trabajar de manera colaborativa entre los mismos y con docentes, en palabras del autor “la utilización de herramientas tecnológicas son un medio empleado en el proceso educativo que fortalece el aprendizaje gracias a las diferentes funciones que prestan estos medios”. (Pinargote Carreño, 2021, p.8).

Los docentes, al incorporar el uso de TIC a la resolución de problemas, brindan a los estudiantes la posibilidad de pensar en distintas estrategias, respecto Pinargote Carreño (2021) menciona:

> Se evidencia que el uso adecuado de herramientas tecnológicas, en el proceso educativo, posibilita crear estrategias innovadoras y motivadoras para fomentar en los educandos la construcción de nuevos conocimientos y aprendizajes que aporten al pensamiento lógico-matemático; por consiguiente, es un beneficio para fortalecer el grado de consolidación de la capacidad para resolver problemas matemáticos. (p.19)

Otros autores comparten aspectos del proceso de resolución de problemas, muestran como los estudiantes realizan las actividades de manera colaborativa y en un entorno rico en opciones (tecnología, internet, conexiones sociales, libros de texto) y cómo frente al problema deciden usar o no los recursos disponibles (Pruner y Liljedahl, 2021).

Como se describe en el artículo, el trabajo en el aula raramente es individual, Pruner y Liljedahl (2021) mencionan:

> La resolución de problemas fuera de la educación o entre matemáticos rara vez es una actividad solitaria. Nuestro objetivo en este documento fue describir cómo se ve la resolución de problemas cuando no es ni solitaria ni aislada, cuando es colaborativa y está situada dentro de un entorno rico en opciones. (p. 768)

El desafío, entonces, es plantear situaciones que propicien discutir, conjeturar y manifestar lo obtenido, consideramos que esto colabora a la resolución de los problemas para poder arribar a una respuesta.

Los autores manifiestan además que los estudiantes al resolver un problema se relacionan, de ser necesario, con otros grupos, buscando la afirmación de sus procedimientos o refutarlos. La conclusión a la que arribaron:

> Como resultado de este estudio, podemos brindar una idea de cómo se ve la resolución de problemas en el aula en entornos de elección de recursos. Hemos visto que cuando los estudiantes se involucran en la resolución de problemas dentro de espacios, que se acercan a los entornos de resolución de problemas del mundo real (espacios ricos en opciones), …, vimos que los solucionadores de problemas cambian su atención entre una variedad de recursos (otros estudiantes, otros tableros, tecnología, medios, etc.) mientras recorren su camino hacia una solución. Proporcionar entornos para los estudiantes, que contengan una gran cantidad de opciones, no solo mejorará el desempeño en la resolución de problemas, sino también, ayudará a los estudiantes a desarrollar su repertorio personal de recursos. (Pruner y Liljedahl, 2021, p. 768)

El recorrido por los distintos autores nos enriquece al profundizar sobre los distintos aspectos a estudiar: las estrategias heurísticas, las resoluciones de problemas y el reparo de incorporación en el ámbito de la educación superior. Además, el beneficio de la incorporación de las herramientas computacionales, como por ejemplo el GeoGebra, sin ser la única. Esto nos brinda una mirada amplia e interesante este estudio.

Encuadre Teórico

En este apartado se desarrollan los conceptos centrales que sustentan este trabajo, enmarcado en la línea teórica de Educación Matemática denominada Resolución de Problemas y, en particular, las conceptualizaciones sobre estrategias heurísticas.

1.1.1 Concepción de problema

En nuestro estudio sobre la Resolución de Problemas realizamos un recorrido sobre diferentes autores. Quienes presentan distintas posturas y definiciones de lo que se entiende por *problema* con las cuales acordamos, Campistrous Pérez y Rizo Cabrera (2014) definen:

> Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación.
>
> Desde el punto de vista didáctico, la anterior definición es muy importante, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de alumnos hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que la persona requiere para su solución y las motivaciones para realizarla. En ambos casos, lo antes planteado significa que lo que puede ser un problema para una persona puede no serlo para otra, o bien porque ya conozca la vía de solución o porque no esté interesado en resolverlo. (p.397).

Por su parte, Santos Trigos (2014) nos aporta:

> La dificultad de definir el termino problema está ligada con la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando este intenta resolver “un problema”. Es decir, mientras que para

> algunos estudiantes puede representar un gran esfuerzo intentar resolver un problema, para otros puede ser un simple ejercicio rutinario. (p. 58)

Es decir, un problema no siempre lo será para todos los estudiantes, se deben considerar los conocimientos que suponemos poseen. Además, del interés que puedan tener en resolverlos. Como expresa Prieto Navarro (2008):

> Para que resulte eficaz, el problema debe despertar el interés de los alumnos y motivarles a lograr una comprensión profunda de los conceptos que allí aparecen. Debe relacionar en el mayor grado posible los contenidos de la asignatura con situaciones problemáticas del ámbito profesional de interés. (p.97)

Para ello debemos tener presentes los contenidos a desarrollar, como relacionarlos e incluso pensar en otras disciplinas. "El problema debe ser suficientemente complejo, de tal forma que los estudiantes sientan que es necesario cooperar para alcanzar la solución. Necesitarán buscar una estrategia conjunta, sintetizar entre todos lo que han aprendido, dialogar sobre los contenidos de aprendizaje, etc." (Prieto Navarro, 2008, p. 98).

1.1.2 Resolución de problemas

Siguiendo con esta línea de pensamiento observamos que el concepto de problema está relacionado con una actividad para la cual no se tiene una respuesta inmediata, se deberá indagar para abordar una posible respuesta, verificarla y compartirla. En palabras de Camacho y Santos Trigo (2015):

> La resolución de problemas debe basarse en el desarrollo de empleo de un método de búsqueda y cuestionamiento donde el estudiante pregunta, cuestiona, indaga, representa y explora el comportamiento de objetos matemáticos a partir del uso de recursos, estrategias y formas de razonar que son consistentes con el quehacer y la evolución de la disciplina. (p. 116)

La resolución de un problema se podría lograr en discusión con compañeros al estudiar las distintas situaciones. En palabras de Polya “no son problemas de meras aplicaciones de fórmulas, ni son muy fáciles; algunos de ellos requieren cierta originalidad e ingenio” (Polya, p. 201, 1965)

Un problema en el aula puede utilizarse para introducir un contenido matemático nuevo, fortalecer un procedimiento enseñado, generar oportunidades para aplicar un concepto o procedimiento en una situación nueva, valorar la comprensión de un concepto, etc. Esto dependerá del objetivo de la tarea que proponga el docente.

Se señala una diferencia entre los conceptos de ejercicio, actividad y tarea. La presente tesis no profundiza sobre los mismos, solo se mencionan esas interpretaciones según lo determinado por el Ministerio de Educación de España. El ejercicio se describe como una acción descontextualizada que el alumno ejercita de forma mecánica, consiste por lo tanto en repetir, memorizar, reproducir. Mientras que la actividad requiere aplicar un proceso mental para su resolución, implica comprensión y toma de decisiones. Sin embargo, la tarea exige necesariamente una puesta en práctica.

A los efectos del trabajo de esta tesis nos referenciamos en las ideas de Santos Trigos (2014) que al referirse a la resolución de problema sostiene que, para llevar a cabo la resolución de un problema, desde el punto de vista del estudiante, se requiere poder exteriorizar en forma consciente un método de búsqueda para poder afrontar y utilizar los contenidos matemáticos, en sus palabras:

> En los procesos de comprensión y resolución de los problemas se destacan las diversas maneras de identificar y representar objetos matemáticos con la intención de buscar, formular y sustentar relaciones matemáticas. La resolución de problemas se basa en el desarrollo y empleo de un método de búsqueda y cuestionamiento donde el estudiante pregunta, cuestiona, indaga, representa y explora el comportamiento de los objetos

matemáticos a partir de uso de recursos, estrategias y formas de razonar con que son consistentes con el quehacer y desarrollo de la disciplina. (p. 19)

Además, en el proceso de la resolución de problemas los estudiantes tienen la oportunidad de expresar, revisar, interpretar y refinar sus ideas y métodos de solución.

1.1.3 La presencia de los problemas en la enseñanza superior

Los aportes de los distintos autores advierten sobre la necesidad de considerar e instalar la resolución de problemas en el nivel superior. Convendría incorporar, de a poco, esta línea de trabajo como una propuesta superadora a la forma tradicional de desarrollo de contenidos, como lo mencionan Pozo y Monereo (2009):

> Si bien la propuesta educativa que subyace al nuevo modelo de Educación Superior, como el resto de los aspectos de ese modelo, es polémica y discutible, creemos que, al menos en este caso, se trata de una propuesta congruente con lo que hoy sabemos sobre el aprendizaje y la enseñanza al defender un modelo educativo centrado en el aprendizaje y en definitiva en la actividad cognitiva de los alumnos con el fin de construir el conocimiento en vez de meramente recibirlo ya empaquetado y cerrado (p.11)

Pozo y Monereo (2009) expresan "va a estar de hecho centrado en desarrollar un componente, en nuestra opinión esencial de estos nuevos vientos de cambio, como es la necesidad de promover nuevas formas de enseñar y aprender en nuestras universidades" (p. 9).

En la universidad y especialmente en las carreras de formación docente se debería fomentar el trabajo en la resolución de problemas, y no solo la cantidad de contenidos a desarrollar. Esto requiere adoptar otros enfoques que llevan a la necesaria revisión de la curricula, como lo expresan Pozo y Monereo (2009).

> Esta necesidad de organizar la curricula y planes de estudio en función del aprendizaje de los alumnos, en vez de como ha sido habitual en nuestras universidades, en torno a las disciplinas o áreas de especialidad de los profesores, requerirá no sólo una nueva forma de computar los créditos académicos —en términos de actividades de aprendizaje y no de actividades de enseñanza— sino sobre todo una nueva filosofía educativa en la que la meta de la enseñanza no sea transmitir conocimientos a los alumnos sino hacerles competentes en el uso de los ya adquiridos. (p.11)

Coincidimos con los autores que un buen aprendizaje requiere del estudiante mayores aptitudes del trabajo autónomo, pero también demanda del profesor otra mirada, que favorezca la construcción de esa autonomía: “Comprender y resolver problemas son de esta forma no sólo objetivos que debe buscar la enseñanza sino sobre todo nuevas formas de aprender sobre las que deben cimentarse esos nuevos enfoques de enseñanza universitaria”. (Pozo y Echeverría, 2009, p. 31) sabemos que no es sencillo modificar las estructuras, pero confiamos que es posible.

1.1.4 Componentes en la resolución de problemas.

Anteriormente se mencionaron los elementos teóricos centrales en este estudio, al profundizar en la definición de problema se deben considerar los componentes de la resolución de los mismos, estos son:

La **existencia de un interés**, por una persona o un equipo, que quiere o necesita encontrar una solución. Esto radica en que las actividades presentadas por el docente proponen cuestiones que los incentivan a encontrar la respuesta, lo importante es que se pongan en juego los contenidos que ya poseen, para poder avanzar en lo matemático en base a una estrategia de resolución. Algunas de las características que deberían presentar las situaciones, para que las nociones matemáticas surjan, como mencionan Chacón et al. (2009) son: a) Aceptación de que debe existir una motivación interna o externa, b) Bloqueo, tiene que existir un instante inicial donde el resolutor se sienta obstaculizado, c) Exploración, con el compromiso asumido y la falta de una solución evidente, conduce a la exploración de nuevos métodos.

El docente al plantear una situación, debe tener presente los saberes matemáticos de los estudiantes para que puedan abordarla, pero considerando que **la solución no sea inmediata**. Ya que esto colabora a que se formulen conjeturas y se piense en una posible respuesta.

La presencia de **diversos caminos o métodos de solución** (algebraicos, geométricos, numéricos). La actividad debe brindar la posibilidad de abordarse de distintas formas, se pretende generar que los estudiantes se involucren en la resolución y por esto debe existir más de una forma de enfrentarse a la situación para que surja una variedad de heurísticas. No todos los estudiantes recuerdan o tienen presente los mismos saberes, se fomenta de esta manera el trabajo en equipo.

La **atención por parte de un grupo de personas**. Se pretende generar en el salón de clase una especie de comunidad matemática, expresa Santos Trigos (2014) "considerar al estudiante como un sujeto activo que necesita una comunidad para discutir sus ideas y poder comunicarse de manera eficiente" (p.105). La idea es que se enfrente a una variedad de problemas donde se deba analizar, conjeturar y discutir para poder defender o modificar sus opiniones. Trabajando en parejas o en pequeños grupos, los estudiantes tienen oportunidad de validar sus razonamientos y sus conjeturas. Pueden discutir sus puntos de desacuerdo y argumentar el sentido de sus soluciones. "Los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas" (Santos Trigos 2014, p. 106).

Retomando los elementos teóricos centrales, se profundiza a continuación las estrategias que puedan surgir por parte de los estudiantes, en la resolución de problemas.

1.1.5 Concepción de heurística. Estrategias heurísticas

Como primer acercamiento a este concepto, se considera la definición según el diccionario de la real academia española: “del griego hallar, inventar. Técnica de la indagación y del descubrimiento. En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos como por tanteo, reglas empíricas, etc.”

La heurística es una ciencia aplicable en todas las ciencias e incluye la elaboración de estrategias y reglas que facilitan la búsqueda de solución para los problemas. Ciertamente, la utilización de heurísticas tiene una parte de intuición. Estos sondeos intuitivos y procedimientos pueden incluir dibujos, recurrir a teoría relacionada, probar una solución, reducir a un problema más sencillo.

Hoy, gracias a aportes de diversos autores como Koichú (2018), Pruner y Liljedahl (2021), Pozo y Monereo (2009), Santos Trigo (2014) se sabe que, si los estudiantes se apropian de procedimientos que apoyen la realización consciente de actividades exigentes, pueden llegar a mejores resultados en la resolución independiente. Así como a mejores interpretaciones de los problemas a resolver y de los resultados a los que se arriban.

Los términos estrategias cognitivas o métodos heurísticos (Santos Trigo, 2014) y heurísticas o estrategias heurísticas (Rodríguez, 2012) serán considerados indistintamente. Estas estrategias “pueden ayudar a avanzar o resolver un problema” (Santos Trigo, 2014, p. 63). Se ponen en funcionamiento ante una situación desconocida, en este caso frente a un problema a resolver. Dependiendo de los conocimientos ya disponibles podemos organizar la información mediante una figura, un esquema, mediante la analogía con otros problemas similares, etc., estos permiten bosquejar el mismo.

Las estrategias cognitivas se ponen en juego cuando se comienza a pensar en el cómo resolver la situación, ante la exploración y la formulación de posibles caminos de solución.

Polya (1965) desarrolla las heurísticas con ejemplos e incorpora un breve diccionario de heurística. Estas estrategias conforman un conjunto de modos de proceder que ayudan a la resolución de las situaciones.

Se pretende que los estudiantes desarrollen un gran número de estrategias con un determinado grado de especificidad y relacionen estas situaciones en los problemas, que puedan identificar cuándo pueden utilizar unas u otras. Como también fortalecer las creencias sobre las matemáticas y la resolución de problemas. Considerar que el estudiante pueda establecer estrategias heurísticas en un determinado contexto, no asegura que las utilice en otra situación de resolución.

En el presente trabajo, adoptamos la concepción de heurística, como lo enuncian los autores Rodríguez et al. (2019) "Asumimos las heurísticas como estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y la transformación de un problema que le ayudan significativamente al resolutor, aunque no se lo garantizan, a aproximarse a hallar una solución apropiada". (p.19). para favorecer el surgimiento de estas destrezas el docente es el encargado de pensar en las situaciones que permitan utilizar distintas estrategias.

El estudiante para poder aprender sobre la resolución de problemas debe ser entrenado para, en este sentido, se adhiere a lo planteado por Santos Trigos (2014) "dar a los estudiantes un grado apropiado de entrenamiento para el uso de las estrategias" (p. 69) es decir proponerles variadas actividades donde pongan de manifiesto distintas posibles heurísticas que se deban utilizar.

Cuando los estudiantes se involucran con la situación e intentan resolverla, las heurísticas que utilizan pasan por distintas fases, Carrillo (como se citó en Romero, 2011), propone:

Heurísticos para la fase de comprensión.

• Imaginar mentalmente la situación. Releer el enunciado. Seleccionar el material adecuado. Disponer de un modelo manipulativo. Utilizar algún tipo de esquema gráfico (dibujar un diagrama).

• Ejemplificar. Imponer a un ejemplo las condiciones del enunciado. Examinar casos especiales.

• Expresar, en otros términos. Formular con otras palabras la situación descrita en el enunciado. Introducir notación adecuada.

Heurísticos para la fase de planificación y exploración

• Simplificar. Usando simetría o sin perder generalidad. Descartando casos. Eliminando una condición. Explotando el papel de una sola variable o condición. Imponiendo condiciones a las variables.

• Estimar. Buscar regularidades con intención de generalizar. Tantear aleatoria o sistemáticamente. Considerar problemas equivalentes. Reformulando el problema cambiando de notación o de perspectiva. Reemplazando condiciones por equivalentes. Combinado los elementos de diferentes formas. Introduciendo elementos auxiliares. Argüir por contradicción. Búsqueda de contraejemplos. Asumir la solución. Partir de lo que se sabe. Planificar de forma jerárquica la solución. Descomponer el problema. Explorar problemas similares. Conjeturar.

Heurísticos para la fase de ejecución

Registrar todos los cálculos. Resaltar los logros intermedios. Actuar con orden y precisión. Explicar el estado de la ejecución

Heurísticos para la fase de verificación

Analizar la consistencia de la solución. Comprobar si se usan todos los datos pertinentes. Ver si la solución es razonable. Ver si la solución resiste ensayos de simetría, análisis dimensional, condiciones de equivalencia o cambio de escala. Concretar en casos particulares. Analizar la posibilidad de reducir la solución a resultados conocidos. Expresar de otra forma la solución. Analizar la consistencia del proceso Evaluar la adecuación de la representación del problema. Describir esquemáticamente el trabajo. Analizar la corrección de cada paso. Evaluar la conveniencia de cada estrategia. Analizar la consistencia de los resultados intermedios con los planes existentes y las condiciones del problema. Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera. Generalizar. Ver si se puede utilizar la solución para genera algo conocido. Proponer generalización (método o resultado) de manera informal o formalmente. (p. 44)

Estas estrategias no son absolutas, ni exhaustivas, lo que se pretende es poder comprender todas las fases por las que puede atravesar el resolutor cuando está en situación de resolver un problema.

Para el presente estudio se decide utilizar la tabla compartida por Rodríguez et al. (2019), para identificar las heurísticas, organizarlas y luego describirlas, sin dejar de lado lo anteriormente mencionado. Rodríguez et al. (2019) avanzan en la forma de organización y presentación de las heurísticas, desde lo exhibido en Marino y Rodríguez (2008). Esta presentación consta de tres grandes grupos, en el primero se mencionan los descriptores generales: Planificar, activar las experiencias previas, seleccionar una representación adecuada para el problema, modificar el problema, examinar casos particulares y examinar la solución obtenida. En el segundo grupo en el cual se enumeran las heurísticas que pueden surgir al resolver una situación, Trabajar hacia adelante: Abordar el problema partiendo de las condiciones y los datos dados. Trabajar empezando por el final: Suponer que se tiene una solución y analizar sus características. Recurrir a teoría relacionada: Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución. Razonar por analogía:

Recordar problemas anteriores, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema. Realizar un dibujo: Realizar una descripción grafica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico. Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente: Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje: del simbólico al coloquial o al numérico etc. Reducir a problemas ya resueltos: Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido. Reducir a un problema más sencillo: Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original. Dividir el problema en subproblemas: Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general. Introducir un elemento auxiliar: Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.). Análisis sistemático de casos (inducción): Asignarles valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución. Analizar casos limites o especiales: Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades. Analizar ejemplos: Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema. Verificar utilizando distintos registros de representación: Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta. Verificar usando casos particulares: Verificar la respuesta en casos particulares y en el tercero una descripción de las mismas.

1.1.6 Etapas para la resolución

Polya (1965) establece cuatro etapas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar la solución. Otros autores como Campistruous Pérez y Rizo Cabrera (2014), las utilizan de manera análoga. Para caracterizar estas etapas plantea preguntas orientadoras que se relacionan con cada una de ellas. Estas preguntas se las podría plantear a la persona que está resolviendo un problema, como así también serviría al docente que quiere ayudar a los estudiantes a progresar en la resolución. Estas etapas presentadas por Polya (1965) son:

Etapa 1. Comprender el problema.

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Etapa 2. Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

- ¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

-He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?

- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

-Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?

- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Etapa 3. Ejecución del plan

-Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.

- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Etapa 4. Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? (p. 19)

Estas etapas, guían la posible solución de la situación planteada, no significa que se deban seguir todas ni en ese orden. Las mismas dan una posible ayuda para abordar una respuesta.

Además de considerar estas etapas Santos Trigos hace mención a fases, “Un aspecto importante en la instrucción matemática es la identificación de diversas fases que describen acciones importantes en el proceso de aprendizaje” (Santos Trigos, 2014, p. 101).

En forma sintética se mencionan cada una de ellas. La primera fase, donde el estudiante se familiariza con la situación, es decir, aspectos generales y vocabulario. La segunda fase, la exploración de la situación, para la cual el docente deberá presentar distintas actividades diseñadas para que el estudiante utilice las teorías relacionadas. Una tercera fase, en la cual el estudiante tiene que intentar verbalizar la situación y apropiarse del lenguaje. Una cuarta fase, cuando el estudiante identifica que se utilizan varios pasos para la resolución. Y una última, denominada de integración, donde se pone en evidencia lo que se aprendió. Los aprendizajes incorporados en esta última fase, permitirán al estudiante tomar decisiones frente a otras situaciones o aplicarlas a nuevos dominios.

1.1.7 Metacognición y sistema de creencias

Continuando con el estudio de los elementos teóricos, no podemos dejar de mencionar los aportes de Schoenfeld (1985). En su trabajo incorpora otros aspectos aparte del cognitivo, a los cuales se los considera centrales y propios de la tarea de resolución de problemas. Dichos aspectos son el metacognitivo y el sistema de creencias. En estudios realizados por Chrobak (2000) en la resolución de problemas, se hace mención al aspecto metacognitivo, según este autor:

> La metacognición se refiere al conocimiento, concientización, control y naturaleza de los procesos de aprendizaje. El aprendizaje metacognitivo puede ser desarrollado mediante experiencias de aprendizaje adecuadas. Cada persona tiene de alguna manera, puntos de vista metacognitivo, algunas veces en forma inconsciente.
> De acuerdo con los métodos utilizados por los profesores durante la enseñanza, pueden alentarse o desalentarse las tendencias metacognitivas de los alumnos. (párr. 20)

Otro autor, González (1998, como se citó en Rodríguez, 2012) define, la metacognición como:

> Un constructo de naturaleza teórica que alude a los conocimientos que una persona tiene acerca de su propia actividad cognitiva, así que su ámbito está vinculado con la toma de conciencia en cuanto a las acciones cognitivas interiorizadas que una persona lleva a cabo cuando realiza algún esfuerzo intelectual; en el caso específico de la resolución de un problema, implica el reconocimiento, por parte del resolvedor, de los procesos internos de pensamiento que él activa cuando intenta resolverlo. (p.160)

Se considera que la importancia de la metacognición radica en que, si los estudiantes reconocen cómo resuelven problemas y con qué conocimientos, estos aportarán en su aprendizaje matemático, es decir, en palabras de Camacho y Santos Trigos (2015)

> Aprender matemáticas va más allá del dominio de un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Aprender matemáticas requiere problematizar o cuestionar tareas o situaciones, pensar distintas maneras de comprender o resolver un problema, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados. (p 116)

Para la resolución de problemas debemos tener claro entonces qué pide el problema, pensar en las distintas formas de resolverlo, monitorear y revisar el proceso para ir evaluando los avances. Al abordar un problema, en primer lugar, se pone en juego qué significa para las partes resolver un problema, es decir cuál es el sistema de creencias que se tiene de la matemática.

Respecto de esto se menciona “Las creencias sobre la matemática inciden notablemente en la forma en que los estudiantes, e incluso los profesores, abordan la resolución de algún problema” (Barrantes, 2006, p. 4).

Estas creencias tanto en los profesores como en los estudiantes afectan al comportamiento de ambos, del docente respecto a cómo va a presentar el tema, y en los estudiantes respecto a la postura de cuánto esfuerzo le dedicarán, menciona Barrantes (2006):

> Las creencias condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, determinan en el estudiante cuándo considera que debe enfocarse en conocimientos formales y cuándo no. También determina la forma en que tratan de aprender Matemática, memorizando o no. Es decir: los estudiantes pueden creer que la matemática es solamente una serie de reglas que simplemente van a memorizar. O pueden creer que la matemática es elaboración de conceptos,

establecimiento de relaciones, patrones; en este caso, entonces, probablemente van a tratar de comprenderla pues creen que tal comprensión les va a ser útil. (p. 5)

Se piensa que el abordar la resolución de problemas y considerando todos los componentes, se colabora en la comprensión, autonomía de los estudiantes y un mejor desarrollo en la formación de futuros docentes.

1.2 Resolución de problemas mediados con GeoGebra

En educación matemática, particularmente en la resolución de problemas, la mirada está puesta en lo que puede realizar el estudiante frente a una situación determinada. En particular en este estudio, se propuso utilizar el software libre GeoGebra, por considerarla una aplicación que brinda una amplia variedad de herramientas a la hora de resolver una situación planteada. Además de la gratuidad y la facilidad de aprendizaje, la característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos, ya que tiene dos representaciones, una en la vista gráfica y otra en la vista algebraica. La recomendación del uso de GeoGebra, no excluía la posibilidad de uso de otras aplicaciones si los estudiantes lo planteaban.

Una de las actividades del docente es la de favorecer el trabajo del estudiante, se pretende que los mismos se involucren con el problema, construyan un espacio donde se sientan cómodos, estén incentivados a resolver las situaciones, y que se genere de esta manera un espacio de colaboración y discusión.

Si bien se pretende que el estudiante se familiarice con la resolución de problemas, no es cierto que resulte natural su incorporación. Comúnmente lleva un tiempo para que se adapten a esta forma de trabajo, es el docente el que tiene que estar convencido de que estas ideas dan una perspectiva diferente respecto del aprendizaje, y fomentar de a poco la resolución de problemas en las clases. En palabras de Santo Trigos (2014) “un cambio en la forma de trabajar dentro del salón de clases toma su tiempo, y no se debe esperar un resultado radical favorable inmediatamente.” (Santos Trigos 2014, p. 103)

Para poder llevar cabo este cambio, el primer compromiso corresponde al docente, es él quien tiene que pensar la actividad, analizar la mayor cantidad de soluciones posibles y fomentar el trabajo en grupo. Una cuestión que inquieta a los mismos, en el momento de la puesta en práctica, es el cómo diseñarlos y que contengan todos los componentes antes mencionados. No es cierto que, cualquier situación, se puedan formular conjeturas y distintos caminos de solución, según Segal y Giuliani (2008) “La tarea de inventar problemas no nos resultó sencilla. Para que un problema genere actividad matemática debe presentar cierta complejidad, admitir distintos procedimientos y dar lugar a toma de decisiones. No cualquier enunciado con una pregunta reúne estas condiciones”. (p. 9). Es por esto que el trabajo para el docente es arduo, deberá pensar en forma gradual las actividades presentadas, promover discusiones en el salón de clases, e ir profundizándolas a medida que se realicen distintas resoluciones y se pongan en juego varias heurísticas propuestas por los estudiantes.

Consideraciones para la realización de actividades

Considerando los temas que presentan mayor dificultad para resolver problemas Chacón, et al. (2009) proponen abordar la realización de actividades que sean potencialmente problemas para los estudiantes, como: “1. Presentar enunciados en lengua natural, 2. Presentar gráficos conteniendo información que debe extraerse de ellos para poder resolver la actividad. 3.Incluir contenidos matemáticos que utilicen elementos numéricos o algebraicos complejos, inclusive parámetros” (p. 9)

Para comenzar a pensar una actividad el docente debe tener presente el intentar conectar contenidos y significados, no solo con la matemática sino también con otras áreas de conocimiento. Algunas consideraciones realizadas por el docente deberían permitir a los estudiantes exhibir y refinar sus propios modelos, Santos Trigos (2014) plantea que las situaciones propuestas presenten un reto, pero que a la vez puedan resolverse con lo que el estudiante sabe, que logren formular un plan, de ser posible que propongan distintos caminos de solución, permita el uso de diversos procesos matemáticos y que sean capaces de identificar lo realizado. El diseño de la actividad debe perseguir fundamentalmente, que los estudiantes generen construcciones, descripciones, explicaciones y justificaciones, generalicen procedimientos o planes. Que el salón de clases se convierta en un espacio de construcción del conocimiento con distintas actividades.

Cuando la actividad resulta atractiva e interesante para los estudiantes, entonces es común que exhiban distintos caminos de solución, y que la compartan con otros grupos, ya que surge la necesidad de comparar su estrategia de solución. Todo este proceso, requiere no solo de un plan de acción, sino también decisiones, conjeturas y finalmente cómo expresarlas matemáticamente, que es el fin de la actividad. Santos Trigos (2014) plantea una propuesta de estructura para generarla: formular una introducción, la misma puede ser una situación, como la compra de algún producto, o una situación en contexto matemático. Que se pueda recurrir a conceptos matemáticos, asociados con el problema, para comenzar a pensar. Que el problema tenga la posibilidad de formular conjeturas y, además, el hacer uso de las distintas herramientas tecnológicas, como ser la calculadora, GeoGebra, sin dejar de lado el lápiz y el papel.

1.2.1 Pensar con GeoGebra

Esta combinación propuesta para generar la actividad, colabora a pensar en la organización de la misma, lo principal es que, los estudiantes queden inmersos en un ambiente de actividad matemática esencial para el aprendizaje. Se pretende que puedan generar respuestas válidas utilizando el software GeoGebra y poder hallar otras relaciones con el contenido matemático. Como lo expresan Segal y Giuliani. (2008): “Pensamos que los alumnos aprenden matemática haciendo matemática. Poner el foco en el hacer nos lleva a formularnos preguntas como las siguientes: ¿Qué diferencia hay en trabajar con lápiz y papel, calculadora, regla y compás o con las herramientas informáticas?" (p.120).

Consideramos que las diferencias están en cómo comenzar a pensar la actividad, en particular con GeoGebra. Este permite visualizar la expresión algebraica como gráfica si le corresponde, y explorar sus relaciones. Lo interesante del programa es que permite realizar determinadas variaciones en las construcciones, sin variar las propiedades de las mismas. Según Santos Trigos (2014) "el software dinámico resulta una herramienta poderosa que favorece el ejercicio de actividades propias de la disciplina, como investigar, explorar y visualizar conjeturas o relaciones a partir de las construcciones geométricas simples". (p 149).

El uso de esta herramienta permite considerar estructuras novedosas de construcción de conocimiento matemático. Al presentar situaciones con GeoGebra se ofrece una oportunidad a los estudiantes para desarrollar actividades del pensamiento matemático entre las que se encuentran explorar, identificar, hallar regularidades, realizar validaciones y fundamentar su respuesta. Al explorar el software este permite visualizar los cambios que se pueden producir en la actividad, se piensa un esquema de análisis y esto habilita el efectuar conjeturas para hallar una posible respuesta, según Reyes-Rodríguez et al. (2015).

> Existe evidencia que el resolver problemas con un Sistema Gráfico Dinámico propició cambios en las formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en relación con un ambiente de lápiz y papel, estos cambios radican esencialmente en que la tecnología digital ofrece mayores recursos a los estudiantes para abordar los problemas, ya que no es necesario el uso explícito de un modelo algebraico para aproximar la solución de un problema. Así mismo, como lo reconocieron los propios estudiantes, las facilidades para explorar y visualizar relaciones entre medidas de los atributos de objetos geométricos fue un elemento que apoyó que los estudiantes lograran abordar y resolver

> con éxito más problemas, que cuando resolvieron las tareas únicamente con lápiz y papel. (p.22).

El uso del programa no determina la comprensión de problema, este colabora a su visualización. Para comprender una actividad matemática se necesita además de una lectura general de la situación, pensar qué se puede hacer matemáticamente. Los distintos autores, Schoenfeld (2013), Reyes-Rodríguez et al. (2015), Santos Trigos (2014), Caronía et al. (2014) mencionan que la introducción de las tecnologías digitales en la educación matemática favorece a la construcción de relaciones o conexiones nuevas entre conceptos e ideas, pero este aspecto no deja de lado que el trabajo, tanto del docente en la formulación de las distintas actividades, y el compromiso del estudiante es lo primordial, ya que el uso de la tecnología no significa la solución a lo planteado, lo que se muestra es que esta favorece al razonamiento matemático.

Existe evidencia que cuando el docente utiliza la resolución de problemas junto al uso de GeoGebra, se obtiene un mejor desempeño en los estudiantes respecto a los temas abordados. Esto no implica o no se puede asegurar, que los contenidos puedan ser utilizados en otra situación, se estima que dan una mirada más amplia, más general para la aplicación de contenido matemático. Adherimos a las palabras de las autoras Segal y Giuliani (2008)

> El trabajo que proponemos supone un recorrido no lineal, requiere de constantes "idas y venidas", de la aceptación de conocimientos provisorios y forma parte de un proyecto de enseñanza que ofrece a los alumnos la experiencia de producir y reinventar conocimiento matemático. Desde una concepción de la matemática que la cuestiona como saber acabado e inamovible, esperamos contribuir al debate sobre el sentido de la enseñanza de la matemática. (p. 121)

Con este estudio esperamos poder contribuir como se menciona, en particular, al Profesorado en Matemática y a todos los futuros docentes que se forman en esta casa de estudio, para poder acercarlos de manera dinámica y comprometida a la Resolución de Problemas.

2 Metodología

A partir de los objetivos, como también de los recursos teóricos estudiados y el paradigma de investigación asumido, se toman decisiones metodológicas. En esta sección se describe el contexto de trabajo, se fundamenta la opción metodológica asumida. Se presentan definiciones, se detallan instrumentos y técnicas empleados para recabar datos y para el análisis de los mismos.

2.1 Contexto de trabajo

El estudio se desarrolló en un contexto educativo, particularmente, el espacio curricular Seminario II del Profesorado en Matemática de la UNaM. La asignatura se desarrolla en el primer cuatrimestre, del segundo año correspondiente al Plan de Estudios vigente desde 1997. Seminario II tiene una carga horaria de sesenta (60) horas. La cantidad de horas semanales se distribuyen en un encuentro de tres (3) horas, destinadas al trabajo en el aula y una hora (1) de trabajo domiciliario. Las actividades se desarrollan en el salón de clase de la facultad y se continúa fuera de ella. La asignatura es correlativa de Seminario I, que se lleva a cabo en el cuatrimestre anterior. En ambos Seminarios se pretende capitalizar los contenidos abordados en las asignaturas básicas como álgebra, análisis I y geometría métrica, mediante el abordaje de situaciones problemáticas, generalmente, de característica intra matemática.

Por otra parte, los objetivos de la asignatura enunciados en el programa vigente, hacen mención sobre profundizar el estudio de funciones. Por este motivo se enfatiza el interés de que las actividades guarden relación con lo funcional.

A los efectos de la presente tesis, se decidió trabajar en el contexto de las clases del año 2019, tomando como eje resolución de problemas que considera al estudiante como actor principal del proceso, Camacho y Santos Trigo, (2015) señalan:

> En el desarrollo de empleo de un método de búsqueda y cuestionamiento donde el estudiante pregunta, cuestiona, indaga, representa y explora el comportamiento de objetos matemáticos a partir del uso de recursos, estrategias y formas de razonar que son consistentes con el quehacer y la evolución de la disciplina. (p. 116)

La etapa de implementación de los problemas seleccionados y el proceso de las resoluciones constituyó el trabajo de campo, en el cual se recabaron los datos a ser analizados.

Estos datos lo conforman las producciones escritas de los estudiantes, donde plasmaban bosquejos, procedimientos de resolución, las conjeturas, verificaciones. Esos registros en papel eran entregados a los docentes al concluir la actividad.

Es importante mencionar que, el trabajo de campo se llevó a cabo en el aula de clase, durante el desarrollo normal y cotidiano de la asignatura Seminario II. Como se mencionó, la autora de este trabajo, se desempeña como profesora adjunta en la misma. Esta cercanía posibilitó la viabilidad del trabajo, ofreció sustentabilidad y datos para orientar el desarrollo del trabajo de campo.

2.2 Aspectos metodológicos

Siendo la educación una práctica social, su estudio requiere de estrategias que respeten su naturaleza, en concordancia con esto adherimos a un paradigma cualitativo y nos posicionamos en un enfoque interpretativo. Nos orientamos a comprender una realidad, no buscamos explicarla, ni encontrar datos explicativos a teorías, ni comprobar hipótesis, más bien intentamos comprender los datos y hacerlos comprensibles Sirvent (2003) Es por ello que no se plantean hipótesis previas. Adoptamos el criterio de la pregunta o interrogante como orientador del trabajo de investigación: ¿Cuáles son las estrategias heurísticas desplegadas por los estudiantes de la asignatura Seminario II, del Profesorado en Matemática de la UNaM, durante la resolución de problemas de modelización con funciones polinómicas?

Recurrimos a la perspectiva interpretativa “centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los seres humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)” (Hernández Sampieri et al., 2010, p. 9)

En la investigación educativa se hace necesario estudiar la esencia de la misma atendiendo a las complejidades y dinámicas que le son propias, en este sentido elegimos la aplicación de metodologías flexibles reconociendo que la realidad social, es un contexto caracterizado tanto por regularidades como por excepciones. Como resalta Hernández Sampieri et al. (2010) “los planteamientos cualitativos se orientan a aprender de experiencias y puntos de vista de los individuos, valorar procesos y generar teorías fundamentadas en las perspectivas de los participantes” (p. 365).

En cuanto al tratamiento o valor de los datos destacamos que, mediante este proceso, no se pretende la generalización sino más bien particularizar, dicho de otra manera, conocer más sobre una cuestión particular. En relación con esto, considerando que el trabajo se centró en una asignatura particular, Seminario II del Profesorado en Matemática, durante un tiempo (un cuatrimestre) y de manera intensa, tomando para el análisis todas las producciones de los estudiantes. Otra característica de esta investigación fue el carácter exploratorio, en palabras de Erikson (1989):

> No debemos perder de vista que éste busca desarrollar la experiencia necesaria para seleccionar categorías de análisis más relevantes a los fines de abordar el estudio del problema. No se pretende generalizar los resultados, se apunta a lograr una comprensión del tema. (p. 214)

Considerando nuestro interés de interpretar las heurísticas que los estudiantes plasman en sus escritos, que provienen de la resolución de distintas situaciones presentadas. Las actividades se desarrollaron, en este estudio particular, en un ambiente “naturalista (porque estudia a los objetos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y cotidianidad)" (Hernández Sampieri et al., 2010, p.10) como lo es el salón de clases.

Atendiendo al objetivo de identificar las heurísticas utilizadas en la resolución de problemas, se procede a la recopilación de las producciones escritas, desarrolladas en los diferentes trabajos. Para lo cual se consideran instrumentos de recogida de datos, tres actividades desarrolladas a lo largo del cuatrimestre. Además del diseño de las mismas, se realiza un análisis previo de posibles heurísticas que podrían dar los estudiantes.

2.3 Definiciones previas

2.3.1 Universo

Se trata de estudiantes universitarios de la asignatura Seminario II, de la carrera Profesorado en Matemática, de la Universidad Nacional de Misiones.

2.3.2 Muestra

La selección de la muestra es una selección intencional o discrecional, ya que está orientada por criterios que derivan de los propósitos de estudio y de los conocimientos previos y no por criterios formales como en el muestreo aleatorio. Maxwell (1992) (como se citó en Benítez 2004).

En este estudio, todos los estudiantes que cursan Seminario II en el ciclo lectivo 2019 acceden a participar en todas las instancias de investigación. En tal sentido, la muestra es justamente la población.

Por tratarse de miembros de la población a los que el investigador accede por reconocimiento de sus características, no al azar, sino intencional, se trata de una muestra no probabilística. (Sampieri, et al., 2004).

2.3.3 Unidad de observación

Se propone como objeto de estudio las heurísticas desplegadas por los estudiantes en el proceso de resolución de problemas en contexto de la asignatura Seminario II.

2.3.4 Control metodológico

Respecto a la relación sujeto-objeto, en este trabajo se produce una interacción intensa, teniendo en cuenta que la investigadora se desempeña como profesora en la asignatura donde se llevó a cabo el estudio. Esto demandó un esfuerzo importante para lograr y sostener un alejamiento óptimo al abordar el objeto de estudio. En relación con esto, Hammersly y Atkinson (1994), enuncian que "una de las características de la investigación social es que los objetos que estudiamos son en realidad sujetos que por sí mismos producen relatos del mundo." (p.121). Esta situación requiere sostener la difícil tarea de ir al campo con teoría y sostener cierta vigilancia metodológica para evitar caer en supuestos personales.

La inserción del proyecto en el ámbito institucional (cod:16H1202-PI) posibilitó contar con la colaboración de dos investigadores iniciales, profesores de matemática. También se contó con la asistencia de la JTP de la cátedra que se ofreció voluntariamente, desde su rol aportó interesantes reflexiones.

Fases del proceso de investigación.

La investigación realizada en el contexto del plan de tesis aprobado, tuvo una duración de aproximadamente tres años. El trabajo de campo se llevó a cabo durante todo el segundo cuatrimestre del 2019. En una primera etapa se realizó la fase de implementación de las actividades-problemas, en cada una se realizaron tareas de relevamiento de datos y de análisis. La etapa correspondiente al análisis de los registros escritos de los estudiantes, la escritura de las conclusiones y la presentación de la tesis, se vio interrumpida y demorada debido a la situación pandémica que atravesamos durante el 2020. Esta fase se cumplimentó durante el año

2021. A continuación, se describen brevemente las características de los instrumentos aplicados en cada una de las fases.

2.4 Instrumentos

Para la selección-diseño de las actividades y considerando la definición dada por los autores Campistrous Pérez y Rizo Cabrera (2014), consideramos que las actividades que se presentan a continuación, expresan una *exigencia* al ser resultas en el contexto de la asignatura Seminario II. Para el diseño de las mismas se tuvo en cuenta los objetivos del presente trabajo como también los objetivos de la asignatura.

Esta "exigencia" (Campistrous Pérez y Rizo Cabrera, 2014, p.397), estuvo relacionada "con la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando este intenta resolver un problema" (Santos Trigos, 2014, p.58). Cada una de las actividades se pensó considerando que los estudiantes pudieran trabajar en grupo, formular conjeturas, pensar distintos caminos de solución y también validaran lo hallado.

Se desarrollan en este apartado, los instrumentos utilizados para la recolección de datos en la etapa del trabajo de campo. Los instrumentos para recabar estos datos fueron los problemas o "potenciales problemas" para los estudiantes (Rodríguez et al, 2019, p.31). Se tomó la decisión, teniendo en cuenta el tiempo del cuatrimestre y el análisis previo llevado a cabo, de presentar tres situaciones.

Por otra parte, mediante las actividades planteadas esperábamos que surgieran heurísticas relacionadas al concepto de función y de manera incipiente la modelización. Esta intencionalidad en el trabajo de tesis surge por el involucramiento en la asignatura Seminario II, como ya se mencionó.

2.4.1 Primera actividad. El cuidado del agua

La presentación de la actividad, se realizó en marzo, mes en que se celebra el Día Mundial del Agua (declarado el 22 de marzo por Resolución A/RES/47/193 de la Asamblea de General de las Naciones Unidas, año 1992). Para la misma, se usó como disparador una charla en relación con el cuidado del medio ambiente y en especial del agua. Se les propuso investigar, informarse sobre la celebración antes mencionada. Para esto se les compartió enlaces disponibles en internet, solicitándoles que los vean en horario extra clase. En el encuentro de la semana siguiente, se retomó la charla y luego se presentó la actividad.

Se mencionó de manera verbal, que luego de la realización de la experiencia pudiéramos reflexionar sobre el uso responsable del agua y las matemáticas que se hicieron presente para dar respuesta a la pregunta.

La actividad se presentó de manera coloquial. Se propuso una modalidad de trabajo grupal. La consigna perseguía que lleven a cabo la experimentación y que la misma sea trabajada en el grupo, con la intención de propiciar la discusión y la formulación de conjeturas. Sobre el supuesto, que, al intentar validarlas, recurrirán a distintas heurísticas y así poder determinar, posiblemente, una expresión matemática.

La conformación de los grupos fue voluntaria, atendiendo a la posibilidad de encuentros extra clase para realizar la experimentación e intentar de responder a la pregunta. El número de integrantes de los grupos estaba restringido hasta cuatro, para fomentar la participación de todos, la discusión y propiciar la mayor cantidad de heurísticas posibles.

El tiempo estipulado para realizar la experiencia empírica fue de una semana, de manera tal, que trajeran insumos para continuar el trabajo en el aula. Esta decisión está relacionada con la cantidad de clases de Seminario II, como se mencionó, se tiene un encuentro semanal de tres horas.

2.4.1.1 Descripción de la actividad presentada a los estudiantes

El cuidado del planeta y principalmente del agua es uno de los temas más importantes de la agenda a nivel mundial. ¿Cuál es el día del cuidado de agua?

En el siguiente enlace se puede leer al respecto al día del agua.

https://www.infobae.com/2016/03/22/1798826-cuidar-el-agua-un-compromiso-que-gana-adeptos-la-argentina/

Hay distintas campañas de concientización del cuidado del medio ambiente una de ellas es la empresa Corona y también Stella Artois. Desde internet se puede ver:

https://www.expoknews.com/campana-de-corona-por-los-oceanos/

http://www.vinomanos.com/2019/04/stella-artois-y-waterorg/

Comencemos a investigar

En relación con todo esto, ¿cuál es nuestra postura? ¿hacemos algo respecto del cuidado del agua? ¿Tenemos un consumo responsable? ¿Qué significa tener un consumo responsable? Veamos ¿cuánta agua utilizan ustedes para bañarse?

Consigna del trabajo

¿Cuánta agua utilizan para bañarse?

Analizar el desafío planteado. Reflexionar/discutir sobre la forma de responder al desafío. Registrar ideas, propuestas…

Observación y experimentación: utilizar los elementos que crean necesarios, en lo posible caseros y sencillos (por ejemplo: baldes o tacho, vasos medidores, reglas o lo que consideren necesario).

Documentar fotográficamente el proceso realizado con no más de tres imágenes.

Recopilar y registrar todos los datos que consideren necesarios para responder al interrogante.

Establecer la expresión matemática más apropiada para representar la solución del desafío utilizando sus propios datos. (Fuente propia).

2.4.2 Segunda Actividad. El cuidado de la tierra

Se presenta una actividad relacionada al cuidado de la tierra. En la consigna se solicita la formulación de conjeturas para su posterior verificación. Se continúa trabajando en grupos. De manera verbal se alienta a que registren todas las ideas, posibles caminos, las discrepancias, los acuerdos y que intenten justificar cada uno de ellos. También las ideas que se fueron desechando. Buscábamos que pongan en evidencia, las distintas heurísticas que utilizaron para poder resolver la situación. Respecto de GeoGebra su uso era opcional, se propone como desafío pensar el problema con el mismo.

2.4.2.1 Descripción de la actividad presentada a los estudiantes

Para continuar con el cuidado de nuestro planeta les proponemos reciclar, pero no cualquier reciclaje. Les presentamos uno que no demanda mucho tiempo, es sencillo y ayudaremos al medio ambiente.

En nuestras casas generamos mucha basura, algunas de ellas pueden ser recicladas en tu mismo hogar. A modo de ejemplo los invitamos a ver estos enlaces:

Fabricación de compost en una casa

https://www.facebook.com/178526669473929/videos/596929557825308/

Como hacer compost

https://www.youtube.com/watch?v=y3AHXOkM-Vc

Situación a pensar:

Foto propia

Para poder unirse a la idea, un estudiante piensa en las posibilidades de utilizar un terreno vecino. Le prestaron para esta práctica un espacio de 11 metros hacia cada lado desde de encuentro de dos paredes perpendiculares (GO=GE= 11 m, el ángulo EGO=90°)

Se quiere dejar en esta zona triangular de tierra, la mayor parte para realizar compost y el resto para poner unas flores.

¿Qué forma se tendría que considerar dentro del espacio triangular dado para que ese lugar tome la mayor área posible?

Consignas del trabajo.

Registrar aspectos centrales de la discusión en torno al análisis de la situación. (También los razonamientos que descartan luego de la misma).

Formular al menos dos conjeturas acordadas en el grupo. Escribirlas.

¿Cómo podrían validar las conjeturas realizadas? Escribir todos los procedimientos.

Pueden utilizar GeoGebra como herramienta para pensar la posible solución. (Fuente propia).

2.4.3 Tercera Actividad. Cuidado del medio ambiente

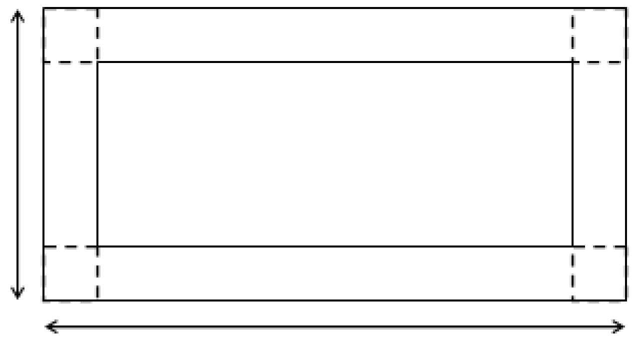
Se continuó con la modalidad de trabajo en grupos. La consigna apelaba a la formulación de conjeturas para su posterior verificación. Los registros del proceso y todas las estrategias y caminos ensayados se presentaban por escrito. En esta actividad, a diferencia de las otras, se propuso que utilicen el programa GeoGebra desde el inicio del proceso de resolución.

2.4.3.1 Descripción de la actividad presentada los estudiantes

Somos una nueva empresa misionera que quiere fabricar distintos envases para cuidar el medio ambiente. Para el diseño de los mismos se pretende utilizar materiales biodegradables, pensado en la siguiente idea:

https://www.clarin.com/ciudades/solo-18-anos-creo-maquina-fabrica-vasos-ecologicos_0_HJ-RWCPDg.html

Situación planteada: Se necesita construir una caja, con dimensiones aproximadas al del cajón de naranjas, de material biodegradable para trasladar el compost. Las planchas del material son rectangulares (y de distintas medidas) Se establece cortar un cuadrado en cada esquina (ver figura) para armar la caja sin tapa.



¿Qué medida tendría que tener el lado del cuadrado que se recorta para que sea óptimo el volumen de la caja armada? ¿Qué cantidad de compost cargaría?

Antes de comenzar a resolver, formular una conjetura acordada con el grupo. ¿Cuáles serían las posibles dimensiones de las cajas?

Consigna del trabajo:

-Registrar aspectos centrales de la discusión en torno al análisis de la situación. (También los razonamientos que descartan luego de la misma).

-Escribir la/las conjetura/s acordada con el grupo. Para posterior verificación.

- ¿Cómo podrían validar las conjeturas realizadas? Escriban todos los procedimientos.

-Utilizar GeoGebra como herramienta para pensar la posible solución. (Fuente propia).

2.5 Herramienta teórico-metodológica empleada para análisis de los problemas

La herramienta utilizada para el análisis de las heurísticas a partir de las producciones escritas de los estudiantes, en cada una de las distintas actividades-problema, fue la Tabla: Descriptores, Heurísticas y descripción de las mismas, trabajado por autores Rodríguez et al. (2019), con la incorporación de un apartado con descriptores sobre el uso de GeoGebra de construcción propia.

Tabla 1

Descriptores, Heurísticas y descripción de las mismas con incorporación del GG.

Descriptores generales	Heurísticas	Descripción
Planificar	Trabajar hacia adelante (H1)	Abordar el problema partiendo de las condiciones y los datos dados.
	Trabajar empezando por el final (H2)	Suponer que se tiene una solución y analizar sus características.
Activar experiencia previa	Recurrir a teoría relacionada (H3)	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución.
	Razonar por analogía (H4)	Recordar problemas anteriores, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema.
Seleccionar una representación adecuada para el problema	Realizar un dibujo (H5)	Realizar una descripción gráfica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico.
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente (H6)	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje: del simbólico al coloquial o al numérico etc.

Modificar el problema	Reducir a problemas ya resueltos. (H7)	Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido.
	Reducir a un problema más sencillo. (H8)	Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original.
	Dividir el problema en subproblemas (H9)	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general.
	Introducir un elemento auxiliar (H10)	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.).
Examinar casos particulares	Análisis sistemático de casos (inducción) (H11)	Asignarles valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución.
	Analizar casos limites o especiales (H12)	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades.
	Analizar ejemplos (H13)	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema.
Examinar la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación (H14)	Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta.
	Verificar usando casos particulares (H15)	Verificar la respuesta en casos particulares.

Nota. Rodríguez et al. (2019)

Uso de GeoGebra	Para graficar (H5 con GG)	Utilizar el programa para graficar lo pensado.
	Para pensar la actividad (H1 con GG)	Utilizar el programa desde el inicio para resolverla.
	Para verificar datos (H14 con GG)	Utilizar el programa para mostrar los datos obtenidos.

Nota. confección propia.

3 Análisis de las heurísticas en las distintas actividades

En esta sección, se presentan las siguientes cuestiones:

-El análisis previo de las posibles respuestas de los estudiantes sobre las actividades propuestas.

-La descripción a partir de la interpretación de cada trabajo grupal, acompañado de una reducción de captura de pantalla del recorte de las producciones escritas y la tabla de síntesis de las heurísticas observadas en dichas producciones.

-La reflexión acerca de las heurísticas emergentes en cada actividad.

3.1 Primera actividad. El cuidado del Agua

¿Cuánta agua utilizamos para bañarnos?

3.1.1 Análisis previo

Antes de presentar las actividades a los estudiantes, los integrantes del equipo de cátedra (la profesora adjunta y la JTP), realizan una experiencia que consiste en recolectar agua de una ducha de una vivienda convencional. Como instrumento de recolección se utiliza un recipiente suficientemente amplio intentando perder la menor cantidad de agua caída. El procedimiento es el siguiente: se junta el agua de la ducha durante 30 segundos. Posteriormente se lleva a cabo la medición de la cantidad de agua, utilizando como recipiente un vaso medidor que presenta distintas graduaciones como ser volumen en centímetro cúbicos, capacidad en litros, etc. La experimentación, lectura y medición, se repite cuatro veces. Se registran los valores obtenidos en una tabla:

Tabla 2

Valores obtenidos en la experiencia.

Tiempo	Cantidad de agua	Cantidad total de agua

0.5 min	1.4 litros	1.4 litros
1 min	1.4 litros	2.8 litros
1.5 min	1.4 litros	4.2 litros
2 min	1.4 litros	5.6 litros

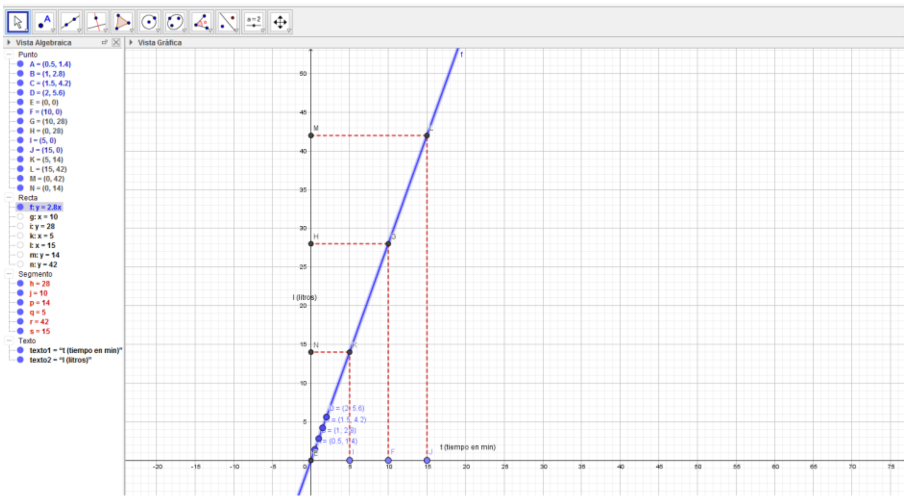
Nota. Datos propios.

A partir de los datos obtenidos, por el equipo de cátedra, se observa que la cantidad de agua que se recoge en iguales intervalos de tiempos es aproximadamente la misma. Esto indica una relación de proporcionalidad. Se puede establecer la regla y=2,8x, si consideramos el tiempo transcurrido (x) y la cantidad de agua (y).

Al ingresar los valores obtenidos en la experimentación a GeoGebra, se aprecia que existe una regularidad. Esta regularidad permite anticipar que, en iguales condiciones de experimentación, a partir de conocer el tiempo que se emplea en darse una ducha, se puede conocer/obtener la cantidad de agua que se empleada al ducharse. Las magnitudes se relacionan, mediante una relación lineal, con bastante aproximación. A partir del gráfico realizado en GG, al introducir los datos del tiempo (x) y la cantidad de agua f(x), se obtiene también una regla de definición: $f(x) = 2{,}8\,x$.

Figura 1

Función lineal obtenida de la experiencia.



Nota. Gráfico propio.

Para determinar la cantidad de agua que se utiliza al ducharse podría considerarse el tiempo en que permanece abierta la ducha (durante el baño), por ejemplo: para 5 min serán 14 litros de agua, etc.

3.1.2 Reflexión acerca de las heurísticas, a partir de las producciones escritas por cada uno de los grupos

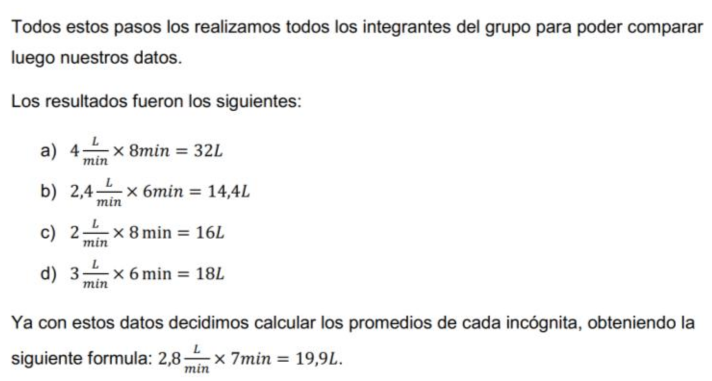
Se presenta una breve descripción de las producciones escritas de todos los grupos conformados, una imagen y un análisis de las heurísticas identificadas. Luego del mismo se muestra una tabla donde se condensa la producción de cada grupo indicando las heurísticas utilizadas.

Grupo 1

El grupo describe la experiencia. Expresan la cantidad de litros por minuto consumidos y lo multiplican por la cantidad de tiempo que tarda en bañarse, cada uno de los integrantes. Con esos datos calcularon el promedio del consumo de agua, así como, el promedio de tiempo que les demandaría darse un baño.

Figura 2

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Todos estos pasos los realizamos todos los integrantes del grupo para poder comparar luego nuestros datos.

Los resultados fueron los siguientes:

a) $4\frac{L}{min} \times 8min = 32L$

b) $2{,}4\frac{L}{min} \times 6min = 14{,}4L$

c) $2\frac{L}{min} \times 8\,\text{min} = 16L$

d) $3\frac{L}{min} \times 6\,\text{min} = 18L$

Ya con estos datos decidimos calcular los promedios de cada incógnita, obteniendo la siguiente formula: $2{,}8\frac{L}{min} \times 7min = 19{,}9L$.

Nota. Fuente propia.

En relación con las heurísticas utilizadas el grupo trabaja hacia adelante, recurre a un concepto matemático conocido por ellos, el cálculo del promedio.

Grupo 2

Para recabar datos, los integrantes resuelven “Averiguar cuanto tiempo tardaría en llenarse una jarra de 1 litro para después, sabiendo previamente cuánto tiempo tardamos en bañarnos, mediante regla de tres simples averiguar la cantidad de litros que habíamos ocupado”

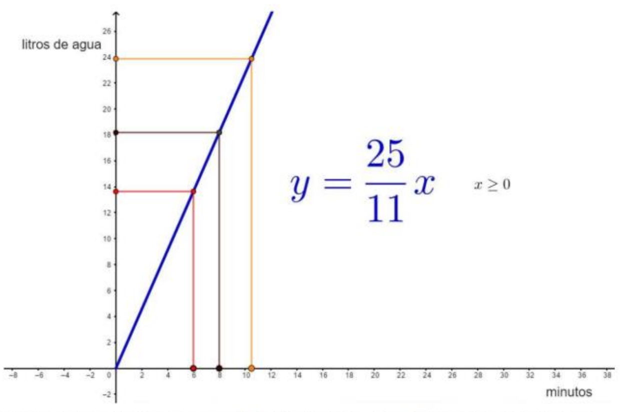
Luego de este cálculo y en sus palabras “optamos por armar una función lineal”, utilizan la ecuación “punto pendiente” obteniendo para ello las coordenadas de dos puntos, por medio del cálculo del promedio antes mencionado.

Figura 3

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

3. Con estos datos usamos la ecuación punto-pendiente de la recta: $y - y_0 = (x - x_0)$, reemplazando por los datos obtenidos $y - \frac{25}{11} = \frac{25}{11}(x-1)$ y realizando propiedad distributiva obtenemos: $y = \frac{25}{11}x$ donde “x” es igual al tiempo en minutos e “y” igual a la cantidad de litros gastados.

cantidad de litros gastados:



(En rojo, marrón y anaranjado los datos de baño de Aldana, Marisol y Daniel respectivamente)

Nota. Fuente propia.

Las heurísticas a las que el grupo recurrió fueron: trabajar hacia adelante, el manejo de conceptos como el cálculo de promedios, la ecuación punto pendiente para determinar la expresión particular y asociarla a una función lineal. Se evidencia una reinterpretación en un lenguaje diferente: el algebraico y la utilización de gráficos. El grupo utiliza GeoGebra para verificar datos y obtener la expresión asociada al gráfico.

Grupo 3

Este grupo realiza una variación de la situación, ya que calcula la cantidad de agua que se consume al cepillarse los dientes, para esto toman el tiempo que tarda en llenarse un vaso de 250 cm^3. Mencionan que el tiempo recomendado por los dentistas es dos minutos y expresan lo que obtuvieron.

Figura 4

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

El tiempo en que tardó aproximadamente el vaso en llenar 250cc utilizando la canilla fue 3,4s.

Tiempo que recomiendan los dentistas que deben de cepillarse los dientes: 2 minutos

2m=120s

3,4s → 250cc

120s → x

$= \frac{250cc*120s}{3,4s} = 8.823,5cc$

Pasando el resultado a una unidad conveniente:

$\frac{1L}{1000CC}$ *8.823,5cc=8,8L

En dos minutos, si la canilla queda abierta, se irían 8,8L de agua limpia, durante un cepillado de dientes, lo cual es recomendable que sean mínimamente, cuatro minutos por día, es decir, dos veces como mínimo, si fuese así, dejando fluir el agua de la canilla estaríamos gastando aproximadamente 17,6L de agua por día.

Nota. Fuente propia.

Las heurísticas consideradas son el trabajo hacia adelante, recurrieron a teoría relacionada: la proporcionalidad. Modifican el problema, lo reducen a un problema más sencillo, pero no responden a la pregunta del problema.

Grupo 4

Consideran tres medidas particulares, que surgen de los datos tomados de la experiencia realizada por el grupo, determinan un valor promedio y formulan según sus términos "una ecuación $y = 3x$", grafican la misma utilizando el programa GeoGebra.

Figura 5

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Como podemos ver, el consumo es cada vez mayor. Nosotros pensamos que el mejor método para ver cómo crece el consumo a partir de nuestra media, es con un gráfico, tomamos a los minutos como variable independiente, dado que los minutos avanzarán sin importar qué podemos predecir un avance lineal de los litros, (obviamente no estamos tomando en cuenta la fluctuación en la presión del agua).

La ecuación graficada es: y=3x Ahora analizando una media de los tiempos de baños (35min+11min+2min)=48min, 48min/3=16min, en este punto podemos llegar a la conclusión de que una persona en

Nota. Fuente propia.

Las heurísticas utilizadas por este grupo coindicen con un trabajo hacia adelante, realizan el gráfico de la ecuación determinada utilizando el programa GeoGebra, indican en el eje x, la variable independiente tiempo (en minutos), sobre el eje y la variable dependiente (litros). Reinterpretan el problema en un lenguaje diferente: el algebraico. Concluyen realizando casos particulares de tiempo de baño y cantidad de agua consumida, como verificación.

Grupo 5

Este equipo para la actividad, utiliza una bañera considerándola como un prisma rectangular. Toman como datos la cantidad de agua consumida durante el baño de dos días consecutivos y determinan un promedio, generalizan esta expresión para calcular el agua utilizada.

Figura 6

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Por último, calculé los volúmenes de agua por día y calculé el promedio para poder determinar cuántos litros de agua utilizo por día al bañarme.

Formula general para determinar el volumen de agua: $V = b * l * h$

Día 1	Día 2
$V_1 = b * l * h_1$ $V_1 = 55cm * 120cm * 10cm$ $V_1 = 66.000cm^3$	$V_2 = b * l * h_2$ $V_2 = 55cm * 120cm * 8cm$ $V_2 = 52.800cm^3$

Promedio: $\frac{V_1+V_2}{2} = \frac{66.000cm^3+52.800cm^3}{2} = 59.400cm^3 = 59{,}4L$

donde:
- V_1 es el volumen de agua en el día uno
- V_2 es el volumen de agua en el día dos
- b es la medida de la base de la bañera
- l es la medida del largo de la bañera
- h_1 es la altura alcanzada por el agua el día uno
- h_2 es la altura alcanzada por el agua el día dos

Se pudo establecer así un modelo matemático donde el volumen de agua utilizado al bañarse se calcula mediante la fórmula:

$$Volumen\ de\ agua = superficie\ de\ la\ bañera * altura\ del\ agua\ acumulada$$

En este caso en particular:

$$Volumen\ de\ agua = (55cm * 120cm) * 9cm$$

$$Volumen\ de\ agua = 59.400cm^3 = 59{,}4L$$

Nota. Datos propios.

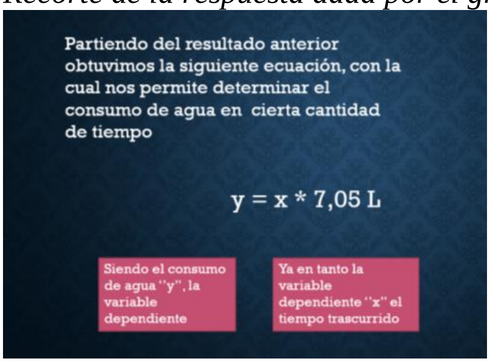
El grupo evidencia haber trabajado hacia adelante, utilizan teoría relacionada para la resolución de la situación como ser el cálculo del volumen, expresan la situación en un lenguaje diferente: el algebraico y calculan la cantidad de litros utilizados.

Grupo 6

El grupo realiza la experiencia para arribar a una conclusión, utiliza el concepto de proporcionalidad para identificar el valor de la pendiente. Determina la ecuación $y = x.7{,}05\ L$, grafica la misma y elabora una conclusión.

Figura 7

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Se evidencia la utilización de teoría relacionada, en este caso el concepto de proporcionalidad. Utilizan lenguaje diferente: el algebraico para expresar la situación, grafican lo obtenido utilizando el programa GeoGebra, indican en los ejes las unidades de medida, tiempo en minutos y cantidad de litros.

Grupo 7

Efectúan la experiencia, comentan los elementos que utilizan y el tiempo que tardaron para hacer las mediciones. Los datos recolectados se muestran en una tabla.

Figura 8

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Decidimos comparar ambos resultados mediante la siguiente tabla:

	Luana	Luz
Tempo em minutos	6 m	5 m
Agua en Litros	20 l	9,9 l
Consumo de agua en litros por minutos	3.3 l/m	1,98 l/m

Nota. Datos propios.

La heurística que se evidencia es el trabajo hacia adelante.

Grupo 8

Para realizar la experiencia cada integrante recurre a utensilios diferentes: una jarra de un litro y su tiempo de llenado, un recipiente de 20 litros, un balde de 10 litros y el tiempo que tarda en llenarse. Con los datos de la experiencia, confeccionan el escrito sin llegar a una conclusión grupal.

Figura 9

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

INTEGRANTE	CÁLCULO EFECTUADO	OBSERVACIONES
CRISTINA	**Q = C x T = 1/6 x 720 = 120 litros** Q= Cantidad de litros consumidos C= Cantidad de agua recogida en segundos T= Tiempo de baño en segundos	Cálculo de tiempo está expresado en segundos
ROMINA	**Cantidad Inicial – Cantidad Final = Cantidad utilizada** **15 - 7,5 = 7,5 litros**	Cálculo exacto de agua utilizada, medida con balde.
MARÍA	**V= 10/3 x t = 10/3 x 18 = 60 litros** V= Volumen de agua utilizado t = tiempo de baño	Cálculo de tiempo expresado en minutos
NOELIA	**Cantidad total/tiempo de baño = Litros consumidos por minuto** 10litros/5minutos = 2 litros por minuto	Cálculo de tiempo expresado en minutos

Nota. Fuente propia.

Se evidencia el trabajo hacia adelante en relación con los datos obtenidos, una de las integrantes indica una expresión algebraica lo que muestra una reinterpretación del problema en un lenguaje diferente, otras dos integrantes realizan el gráfico de la situación utilizando un software para ello.

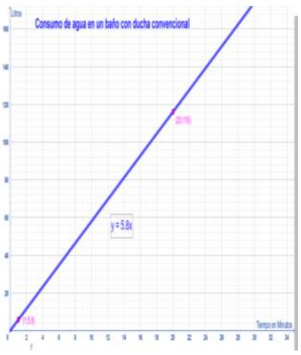
Grupo 9

Investigan el tema en forma exhaustiva, realizan la experiencia y determinan una función, utilizan para graficar GeoGebra y escriben sus conclusiones. Comparan el uso de la ducha y de una bañera.

Figura 10

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Considerando los valores obtenidos para el tiempo y el consumo en litros, podemos decir que si el tiempo en minutos $x = 0 \rightarrow lts = 0$ mientras que al transcurrir 1 minuto, es decir, $x = 1 \rightarrow lts = 5{,}8$. En el software se pudo graficar una función lineal $y = 5{,}8x$ considerando que existe una relación funcional entre el tiempo transcurrido durante el baño y el consumo de agua, entonces podemos decir que a medida que aumenta el tiempo en minutos también aumenta el consumo de agua en litros. El gráfico queda presentado de la siguiente manera:



Nota. Fuente propia.

El grupo trabaja hacia adelante, recurre a teoría relacionada, mencionan los conceptos de variables y funciones lineales, reinterpretan el problema en un lenguaje diferente: el algebraico, utilizan el programa GeoGebra para graficar la función obtenida.

3.1.3 Organización de las heurísticas emergentes

La organización de las heurísticas demandó el análisis minucioso de las conjeturas y los procedimientos de resolución registrados en las producciones escritas que presentaron los grupos. Durante el proceso de análisis se fueron identificando y clasificando las heurísticas siguiendo la Tabla 1, denominada "Descriptores, Heurísticas y descripción de las mismas con incorporación del GeoGebra".

A continuación, se presentan las heurísticas que surgieron con la primera actividad, el cuidado del agua, en la siguiente tabla.

Tabla 3

Síntesis de las heurísticas utilizadas por los distintos grupos al resolver la situación.

Heurísticas (H)	Grupos (G)								
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
H1	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H3	a	c	a	b	b	b		b	c
H5		x		x		x		x	x
H6		b		a	a	a		a	b
H8			x						
H14 con GeoGebra		x		x		x		x	x

Nota. Fuente propia.

3.1.4 Heurísticas emergentes frente al problema del cuidado del agua

En el encuentro posterior a la actividad, al dialogar en el grupo total sobre la actividad realizada, de cómo lo pensaron y cómo la resolvieron, los estudiantes expresaron que les parecía original la forma que se les presentó la situación, que tuvieran que experimentar y, a partir de la experimentación, elaborar conjeturas, tomar decisiones, arribar a una conclusión de tipo matemática.

La totalidad de los grupos (9) abordó el problema con los datos obtenidos al realizar la experiencia, es decir partiendo de las condiciones de la situación. (H1).

Cinco de los nueve grupos, a partir de los datos que recogieron al realizar su experiencia confeccionaron una tabla. Además, recurrieron a otros contenidos matemáticos que pudieron identificar para esta situación: a) cálculo de promedios, establecieron proporción entre los datos, b) ecuaciones lineales, fórmula de volumen y c) la expresión formal entre las variables: funciones lineales. (H3). En relación con los conceptos que favorecen a la resolución, se pueden mencionar los gráficos, en particular cinco de los grupos utilizan sistema de ejes coordenados para graficar la recta obtenida. (H5).

Seis de los nueve grupos interpretaron lo obtenido en un lenguaje diferente (H6), dos de los mismos pudieron utilizar el concepto de función lineal (a) para expresar mediante un modelo matemático la situación "Optamos por armar una función lineal" (grupo 2), el otro grupo utilizando el programa GeoGebra comenta: "En el software se pudo graficar una función lineal" (grupo 9). El resto de los grupos manifestó hallar una "fórmula", "ecuación", "expresión algebraica" con las cuales calcular la cantidad de agua que consumen (b).

Uno de los grupos calcula la cantidad de agua consumida al cepillarse los dientes, es decir, realizan una reducción de la situación a un problema más sencillo (H8). Si bien expresan una respuesta, no resuelven el problema original.

En términos generales, cinco de los grupos graficaron la recta asociada a una función lineal. Para la representación gráfica recurrieron a distintas herramientas, no utilizaron específicamente el GeoGebra.

3.2 Segunda actividad. Cuidado de la tierra

Se propone pensar un espacio para la elaboración de compost (abono orgánico) en un patio. La idea es que mediante la variación del área puedan llegar a la expresión de una función cuadrática considerando distintas heurísticas.

La actividad fue tomada y adaptada del Programa de Perfeccionamiento Docente: *Matemática: Modelos Didácticos* (1996) del Ministerio de Educación de la Nación. (p. 92), posteriormente la utilizaron también las autoras Segal y Giuliani (2008) en *Modelización matemática en el aula.*

La adaptación realizada para el trabajo en Seminario II, consistió en proporcionar un contexto extra matemático y presentarlo en lenguaje coloquial, teniendo en cuanta que nos encontrábamos trabajando con el tema del cuidado del medio ambiente. Esta contextualización se dio mediante el diálogo y reflexión en el aula. En la charla se les brindó enlaces de páginas de internet sobre cómo realizar un compost. La información acompañaba a la consigan de la actividad matemática.

Consideramos que la actividad podría constituirse en un “potencial problema” (Rodríguez et al, 2019, p.31) ya que la solución no es inmediata, se necesitan analizar los datos para evaluar posibles soluciones.

Parte de la consigna de la actividad matemática - descripta en el capítulo anterior- que fue presentada a los estudiantes:

> ¿Qué forma se tendría que considerar, dentro del espacio dado, para que ese lugar tome la mayor área posible?

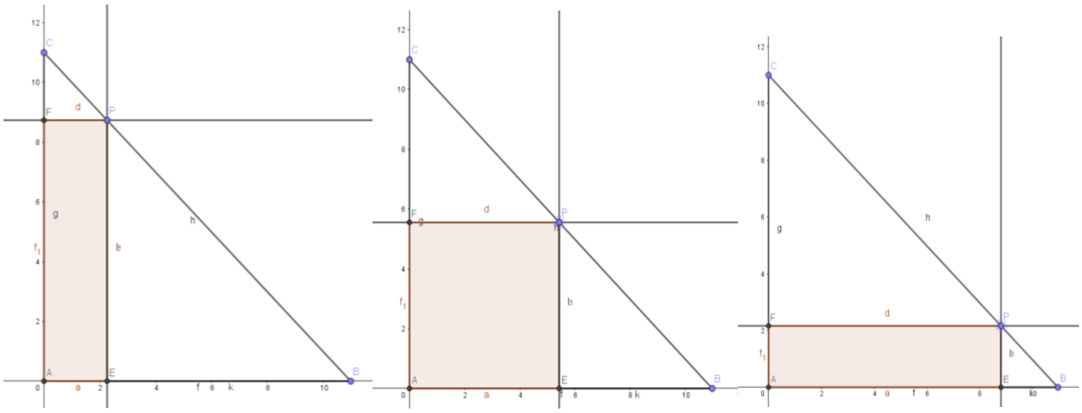
3.2.1 Análisis previo

Lo esperado fue que consideraran una forma rectangular, particularmente, un rectángulo inscripto en el triángulo y que, a partir del mismo, analizaran las variaciones del área y que pudieran arribar a que la figura de área máxima es un cuadrado.

Una posibilidad analizada fue que surgiera, tanto al trabajar con lápiz y papel como con GeoGebra, un rectángulo de dos lados coincidentes con los catetos del triángulo. Por ejemplo, ubicar los vértices del rectángulo AEPF (ver figura 12), A en el origen de coordenadas, E sobre el eje x, P sobre el segmento que une los puntos CB y F sobre eje y.

Figura 11

Posibles respuestas que podrían surgir en la situación cuidado de la tierra.



Nota. Fuente propia.

Se grafican distintas posiciones posibles para P. Se determina el valor del área de cada uno de los rectángulos.

Al trabajar tanto en papel como en GeoGebra, es posible confeccionar una tabla con valores, donde se exprese el valor de las áreas obtenidas. Para el cálculo del área se toma como base el valor de la abscisa del punto P y como altura el valor de la ordenada del mismo.

A partir de los datos de la tabla, se pueden analizar las variaciones del área de cada uno de los rectángulos e identificar que el valor máximo se produce cuando la base y la altura es de

5,5 cm. Es decir, es posible observar que el valor máximo para el área se obtiene cuando la figura es un cuadrado.

Tabla 4

Valores de base, altura y área de rectángulos.

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm^2)
1	10	10
3	8	24
5	6	30
5,3	5,7	30,21
5,5	5,5	30,25
5,7	5,3	30,21
6	5	30
7	4	28

Nota. Fuente propia.

Se puede traducir la situación al lenguaje algebraico, denominando "x" a la base del rectángulo, lado AE (figura 12) y "f(x)" a la altura, lado EP (figura 12). La ordenada del punto P, se puede determinar por medio de la función lineal $f(x) = -x + 11$. Para calcular el área del rectángulo, se realiza el producto de la base por la altura: $a(x) = x. f(x) = x. (11 - x) = 11x - x^2$. La expresión se corresponde con una función polinómica de segundo grado.

Mediante esta función, se puede determinar el valor del área máxima.

Uno de los posibles caminos al considerar la resolución en papel, es graficar la función de manera aproximada, calcular el vértice de la parábola mediante las expresiones $x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-11}{2.(-1)} = 5{,}5$, e $y_v = f(x_v) = f(5{,}5) = 30.25$. Como también determinar la intersección con el eje x, en los valores x_1=0 y x_2=11 y la ordenada al origen en el valor y=0. De esta manera se puede realizar el gráfico aproximado de la función cuadrática asociada a la situación.

Si se utiliza el programa GeoGebra se cuenta con determinadas herramientas para calcular el máximo, para ello, en la sección entrada se indica: Máximo [<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremos superior del intervalo>]. Esta herramienta calcula las coordenadas del punto correspondiente al máximo de la función en el intervalo dado. Para utilizar esta herramienta la función deberá ser continua y tener un único máximo local en el intervalo.

Figura 12

Función polinómica que representa la variación del área del rectángulo

Nota. Fuente propia.

Otro camino posible para encontrar los valores relacionados al área máxima, es mediante la derivada. En este caso, derivar la función. Igualar a cero la derivada. Resolver la ecuación para encontrar la raíz, posible punto crítico. Se puede utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar si el valor hallado es un máximo o un mínimo. Al derivar la expresión $a(x) = -x^2 + 11x$, se obtiene $a'(x) = -2x + 11$. La raíz es el valor x=5,5. Este camino es posible realizarlo con GeoGebra o sin él.

3.2.2 *Reflexión sobre las heurísticas a partir de las producciones escritas por cada uno de los grupos*

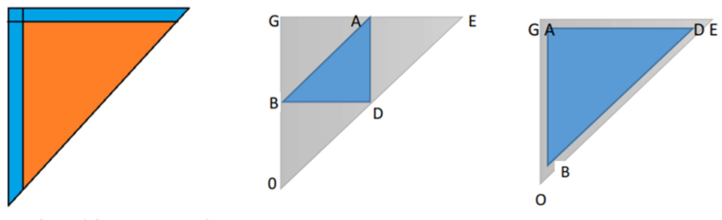
En este apartado se presenta una breve reflexión de las producciones escritas, junto a una captura de una parte de las mismas, se complementa con una tabla de síntesis, donde se condensa la producción de cada grupo indicando las heurísticas utilizadas.

Grupo 1

Para esta actividad, el grupo plantea tres posibilidades de forma triangular. Como procedimientos se limitan al cálculo de área de cada una y responder a la consigna.

Figura 13

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Por lo analizado anteriormente podemos decir que utilizamos 50 m^2 del área del terreno triangular para hacer el compost y para saber qué área vamos a utilizar para plantar las flores, al área del triángulo GOE (A_1) le tenemos que restar el área del triángulo ABD (A_2):

$A_1 - A_2 = A_F$ A_1: área del triángulo GOE

$A_F = 60{,}5\ m^2 - 50\ m^2$ A_2: área del triángulo ABD

$A_F = 10{,}5\ m^2$ A_F: área que se utilizara para plantar las flores (seria lo que está en color gris).

Gráficamente seria: color gris área para plantar las flores y color azul área para la fabricación del compost.

Nota. Fuente propia.

Las heurísticas que se evidencian son el trabajo hacia adelante, abordan el problema partiendo de los datos, la teoría que utilizan para su respuesta es el cálculo de área de figuras planas en particular la del triángulo, realizan distintos dibujos para pensar la situación. El programa GeoGebra se manipula para representar los datos en gráficos.

Grupo 2

Comentan la situación y formulan dos conjeturas por escrito, en las mismas enuncian que una figura sería un rectángulo y la otra un trapecio rectángulo.

Respecto del rectángulo inscripto en el triángulo, mencionan que toman como base la abscisa *x* de un punto sobre la base del triángulo y, como altura, la ordenada *f(x)* del punto, el cual se encuentra sobre la hipotenusa.

Figura 14

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

El rectángulo de mayor longitud que entra en el triángulo tiene base x y altura f(x). Su área es base por altura, es decir $A = x \times f(x)$ de manera que $A = x \times (-x + 11)$ desarrollando $A = -x^2 + 11x$.
Donde para tener la mayor área posible, hallamos el valor máximo de esta parábola. Derivamos A de donde obtuvimos $A' = -2x + 11$. Por consiguiente hallamos el punto máximo igualando la ecuación a cero; $-2x + 11 = 0$ en la cual resolviendo obtenemos que $x = 5{,}5$
Entonces el rectángulo con mayor área tiene base 5,5. Por último hallamos la altura reemplazando nuestro valor hallado en x en nuestra función de la recta entonces $f(5{,}5) = -5{,}5 + 11$ de donde resolviendo obtenemos que la altura es igual a $5{,}5$.
Por lo tanto, tiene base y altura igual a $5{,}5$ siendo así un cuadrado. Su área es de 30,25.

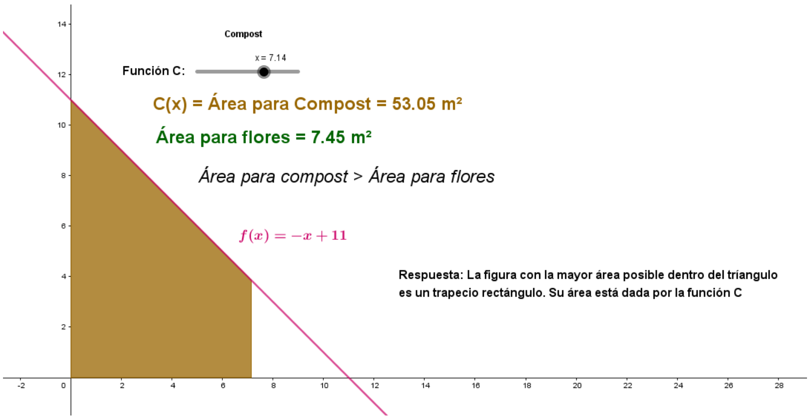
Nota. Fuente propia.

Determinan la función asociada y calculan la derivada; por medio del primer criterio de la derivada, encuentran el valor del lado para la mayor área. Concluyen que la figura es un cuadrado.

En el caso del trapecio, utilizan integrales definidas para el cálculo del área, analizan los valores dados para llegar a una conclusión.

Figura 15

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Respecto de las heurísticas podemos mencionar que el trabajaron hacia adelante, recurren a teoría relacionada utilizando los conceptos de funciones, derivadas, aplicaciones de la derivada e integrales definidas. Dividen el problema en sub problemas ya que consideran dos figuras: un rectángulo y un trapecio.

Reinterpretan el problema en un lenguaje diferente, las expresiones de las funciones evidencian el pasaje de la expresión coloquial a la simbólica, en el trabajo presentado comentan que les costó ponerse de acuerdo, aunque no quedaron plasmados los razonamientos para determinar las expresiones.

El gráfico lo realizan con GeoGebra, utilizan una herramienta que ofrece el programa denominada deslizador, mediante el cual es posible mover el punto que se elija, en este caso el valor de la base del trapecio, no queda evidencia en el escrito si esto colabora al análisis de la situación.

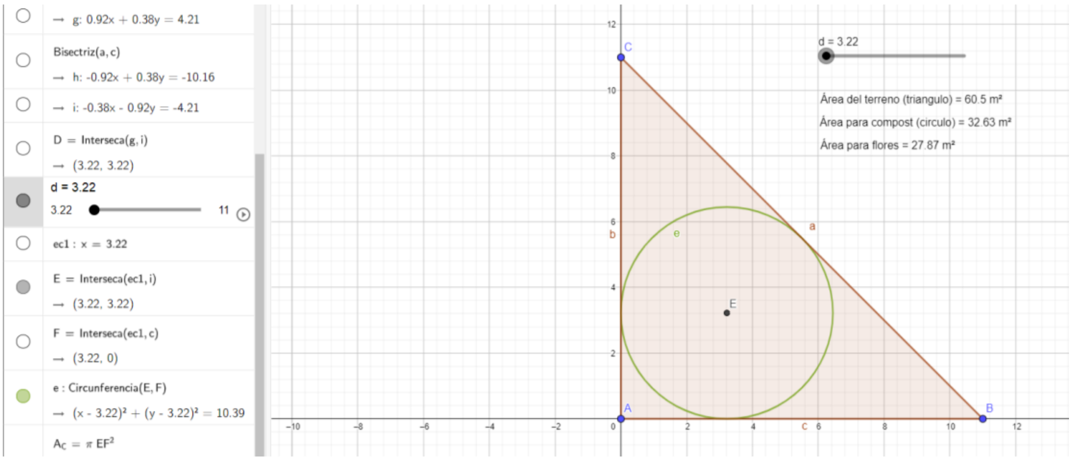
Grupo 3

El grupo expresa que les costó comprender lo que debían realizar, luego de algunas intervenciones encaran el problema partiendo de las condiciones dadas. Si bien en el trabajo expresan que formularon conjeturas no lo explicitan en el trabajo presentado.

Resuelven la actividad dividiendo el problema en subproblemas, el primero es en forma aritmética, realizan los cálculos del área del triángulo y de un circulo para restar los valores correspondientes.

Figura 16

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

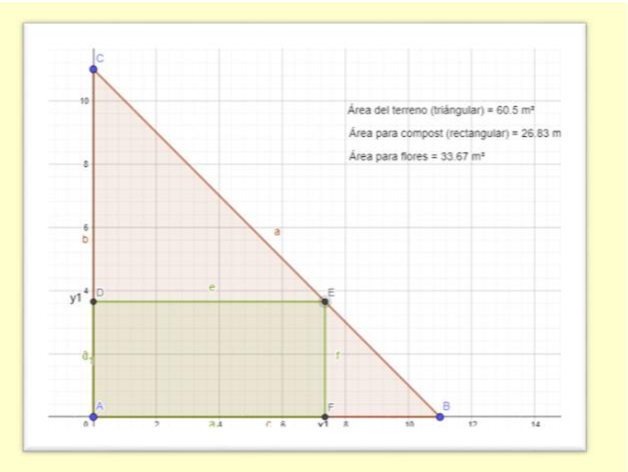


Nota. Fuente propia.

En el segundo sub problema realizan la construcción de un rectángulo inscripto en el triángulo.

Figura 17

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

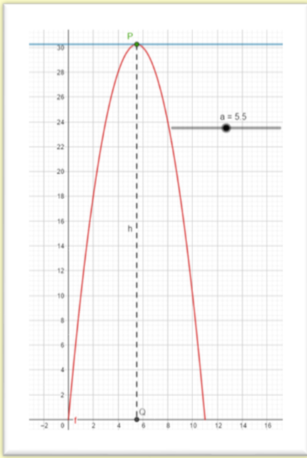
Calculan el área del rectángulo inscripto estudiando la situación en la cual el valor del área del rectángulo sea la de mayor valor, hallando el valor del lado 5,5.

Figura 18

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Si consideramos al terreno como el lugar geométrico de todos los puntos del primer cuadrante menores o iguales a $h(x) = -x + 11$, entonces la altura del rectángulo es la imagen de la longitud de la base (x) a través de la función h, luego el área del rectángulo es el producto de longitud de la base y la altura:

$$A_R = f(x) = x \cdot h(x) = x \cdot (-x + 11) = -x^2 + 11x \quad \text{con } 0 \leq x \leq 11$$



La siguiente figura representa la función del área del rectángulo, se puede observar que existe un valor de x tal que el área $f(x)$ sea la mayor de las áreas. Para hallar dicho valor x podemos hallar el valor de x que hace que la derivada de la función área sea cero.

$$f'(x) = -2x + 11 = 0 \Rightarrow x = 5{,}5$$

Sustituyendo en la función $f(x)$ tenemos:

$$f(5{,}5) = -5{,}5^2 + 11 \cdot 5{,}5 = \mathbf{30{,}25}$$

La altura de dicho rectángulo es:

$$\boldsymbol{h(5{,}5) = -5{,}5 + 11 = 5{,}5}$$

Como $h(x) = x = 5{,}5$ entonces la figura resulta ser un cuadrado.

Nota. Fuente propia.

Heurísticas utilizadas: teoría relacionada para resolver la situación, relacionan la posición del punto con el área del rectángulo y así poder hallar una expresión en particular. Recurren a una función lineal, posteriormente utilizan el concepto de derivada de una función. Además, se evidencia la reinterpretación del problema en un lenguaje diferente a través del estudio de la variación del área para avanzar a una generalización.

Utilizan el programa GeoGebra para pensar una de las situaciones, la del rectángulo inscripto y para graficar la función asociada. Se observa que hacen uso de herramientas como el deslizador para el estudio de la variación del área.

Grupo 4

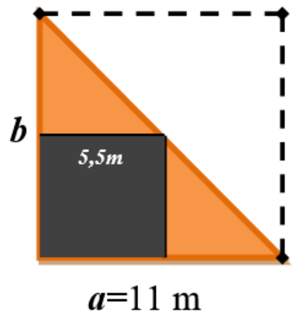
El equipo presenta en primer lugar el cálculo de área del triángulo. Recurren a relaciones trigonométricas. Justifican expresando que “el ángulo del triángulo es recto”, no hacen mención al cálculo del área de la región.

Comentan que pensaron en distintas figuras como, por ejemplo, una circunferencia y un cuadrado. El desarrollo muestra cálculos de áreas y la diferencia entre las áreas del triángulo y el cuadrado inscripto de lado 5,5. No justifican porqué consideran ese valor.

Figura 19

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Nos basamos en el triángulo principal para ello tenemos



Como se puede observar si el lado del cuadrado mide más de 5,5 metros se encontraría fuera del triángulo, y dicho así basándonos en las propiedades de los cuadrados vemos que si extendemos al triángulo original formando un cuadrado de lado 11m sabemos que las diagonales lo divides en dos triángulos de igual área, el área del cuadrado mayo es de $\boldsymbol{Area\ del\ cuadrado\ mayor} = \mathbf{11^2} = \mathbf{121}$.

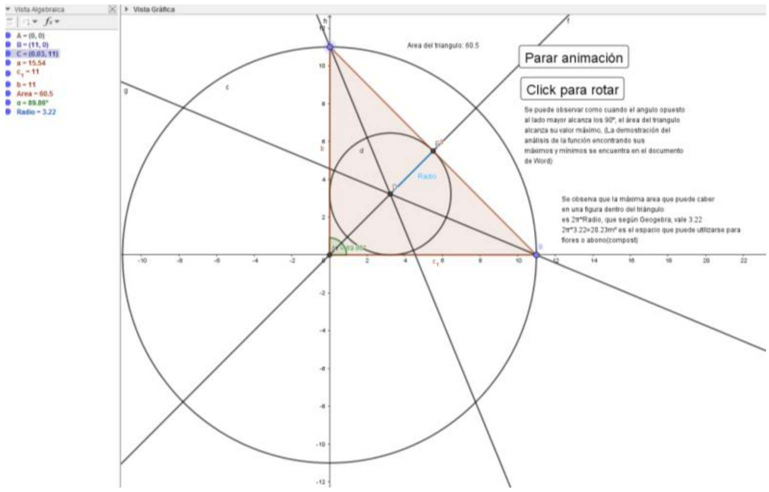
Además de eso podemos ver que el si el área de los triángulos es de ***60,5m*** coincide con ser la mitad de ***121m*** y la mitad del área con respecto al triángulo es de justamente ***30,25m*** que a su vez es el área del cuadrado que vemos en **negro** que tiene por lado ***5,5m***.

Nota. Fuente propia.

Expresan que se puede considerar cualquier triángulo, es decir no solamente para un triángulo rectángulo. Se evidencia ese análisis en el archivo GeoGebra adjunto, en el cual muestran la variación de la figura antes mencionada.

Figura 20

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Respecto de las heurísticas se evidencia el trabajo hacia adelante, la utilización de teoría relacionada, cálculo de áreas de figuras planas: triángulo, cuadrado y círculo. Utilizan gráficos para interpretar la situación, reinterpretan la misma en un lenguaje diferente al dado y realizan la verificación de manera algebraica.

Utilizan GeoGebra en dos momentos, para realizar el gráfico del triángulo y el cuadrado y calcular la diferencia entre áreas, por otra parte, para estudiar la variación del área del triángulo y mostrar que es máxima cuando el ángulo es de 90°.

Grupo 5

Comienzan la actividad pensando distintas formas de resolver, con las condiciones de los datos plantean tres conjeturas.

Figura 21

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Conjeturas planteadas:

1. El pozo podrá tener la forma de un triángulo rectangular isósceles.
2. Su forma será la de un trapecio rectángulo.
3. Podrá ser de la forma de cualquier polígono regular, siempre que esté dentro de la zona a trabajar.

Como se dijo anteriormente, se analizará cada una de las conjeturas mencionadas, entonces:

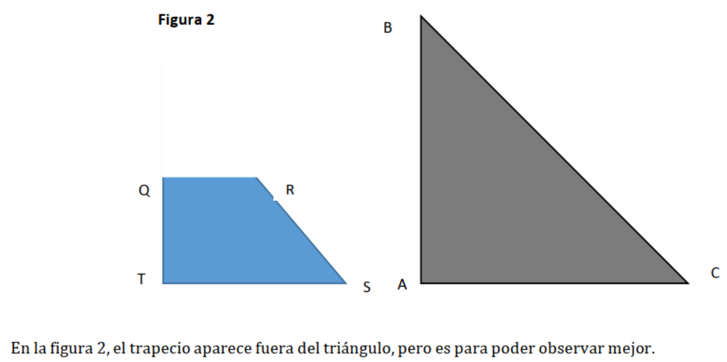
Nota. Fuente propia.

Para la primera conjetura trabajan con un triángulo semejante. Plantean uno de menores dimensiones al dado cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo dado y optimizan el mismo, pero los triángulos coincidieron y no se cumple con lo solicitado, por tal motivo lo desechan.

Para la segunda conjetura, vuelven a intentar un triángulo en el terreno y al aproximar el lado TS a la longitud AC y TQ con el lado AB, obtienen nuevamente la coincidencia entre los triángulos llegan a la conclusión que esta conjetura tampoco es válida.

Figura 22

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

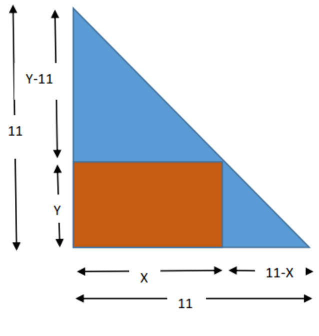


Nota. Fuente propia.

Respecto de la tercera, para validar la misma, dividieron el problema en sub problemas. La primera de las figuras analizadas es un rectángulo.

Figura 23

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Debemos maximizar el área de este rectángulo, para ello debemos encontrar su área, luego debemos encontrar una restricción, la cual es que el rectángulo debe estar inscripto en el triángulo.

$$Ar = b * h = x * y$$

Usando teorema de Tales (semejanza de triángulos), planteamos la siguiente relación entre el triángulo del terreno y el triángulo rectángulo isósceles formado sobre el rectángulo:

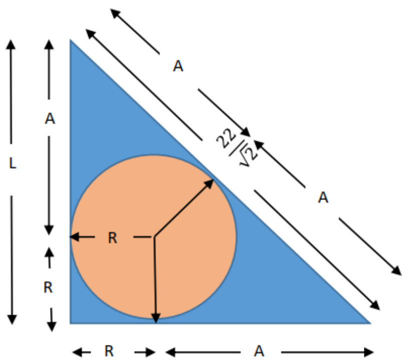
$$\frac{(11 - y)}{x} = \frac{11}{11}$$

Utilizan la expresión del área, la relacionan con la semejanza de triángulos para determinar una proporción, plantean que el área del rectángulo se puede encontrar por medio de $Ar = x.(-x + 11) = -x^2 - 11x$. Luego, derivan la expresión y determinan el punto crítico. Hallan la derivada segunda para determinar que el valor es un máximo. Calculan el valor del área que corresponde a un cuadrado.

La otra figura analizada es la de un círculo, calculan el radio, restan los valores del área del triángulo y la del círculo para determinar el área del compost y de las flores. En este caso no recurren al concepto de función, el tratamiento es numérico.

Figura 24

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



En la figura 3 podemos observar las siguientes relaciones:

$$L = A + R, 2L = 2A + 2R \Rightarrow H = 2A$$

donde H es la hipotenusa del triángulo

Nota. Fuente propia.

Respecto de las heurísticas, trabajan hacia adelante, utilizan teoría relacionada: triángulos semejantes, área de figuras planas, concepto de funciones, de derivada y sus aplicaciones. Reinterpreta la situación en un lenguaje diferente al dado al plasmarla de manera algebraica, dividen en subproblemas al analizar el rectángulo y el círculo inscripto.

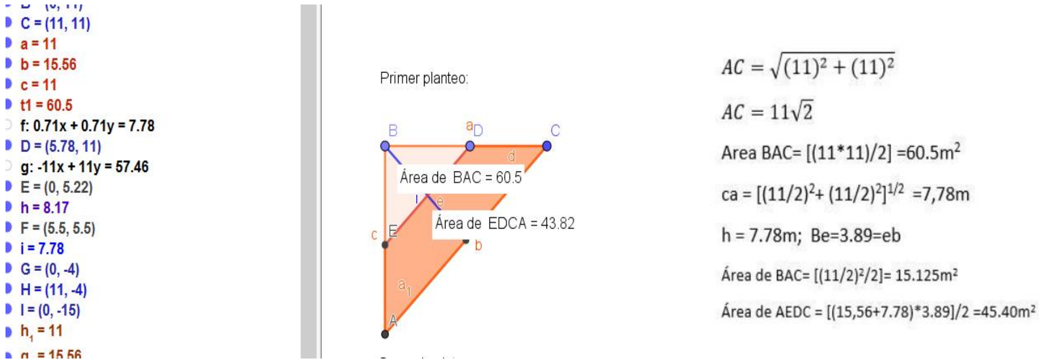
El programa GeoGebra solo se utiliza para graficar las distintas figuras consideradas, no se evidencia su uso para analizar la situación.

Grupo 6

El equipo plantea varias conjeturas, la primera es analizar un trapecio isósceles, el cual tiene como base mayor la hipotenusa del triángulo dato, calculan las áreas del triángulo BAC y del trapecio AEDC, para realizar las restas de las mismas.

Figura 25

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

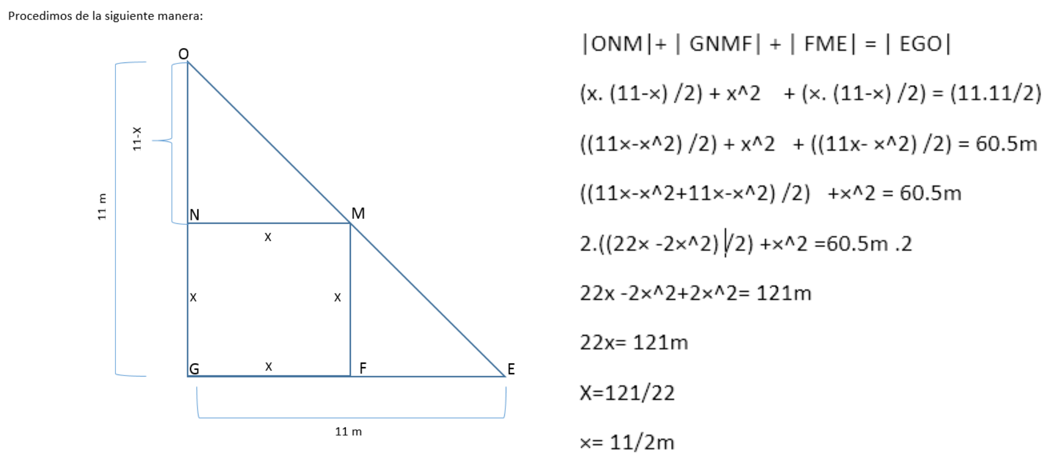


Nota. Fuente propia

Se propone un segundo planteo donde la figura analizada es un cuadrado inscripto en el triángulo. Analizan las áreas de las figuras en las que se descompuso el triángulo, es decir el cuadrado GFMN y dos triángulos NMO y FEM. (ver figura 27)

Figura 26

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Realizan los cálculos correspondientes, determinan que *x* es 11/2 y expresan: “Pudimos notar que las áreas son iguales y no sería una conjetura válida”. Desestiman el valor sin analizar en relación con la pregunta del problema.

Respecto del uso de GeoGebra, como se muestra en la captura del primer planteo, calculan los valores de las áreas. Se evidencia que, por desconocer algunas herramientas del programa, no distinguen que al hacer variar el segmento CD varía el área. Relación que se pretendía que pudieran advertir y analizar. Esto nos hace pensar que utilizan el programa por que se recomienda en la consigna, como ya se mencionó.

Respecto de las heurísticas utilizadas para llevar a cabo estas acciones son: trabajar hacia adelante, recurrir a teoría relacionada como ser, conceptos de geometría para el cálculo de áreas, realizar dibujos para una descripción gráfica; dividir en sub problemas para analizar, uno de manera aritmética y otro de manera algebraica; reinterpretar el problema en un lenguaje diferente; para dar respuesta a la situación consideraron ejemplos que fueron los analizados.

Respecto del uso de GeoGebra, lo utilizaron para graficar no se evidencia su uso para pensar la actividad.

Grupo 7

Comentan que les fue difícil ponerse de acuerdo al comenzar a pensar la actividad. Plantean la posibilidad de armar varios canteros, se enfocan en dos posibles formas dentro del triángulo. Analizan distintos trapecios, los ubican en distintas posiciones.

Las conjeturas planteadas fueron:

Figura 27

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Las conjeturas que formulamos como grupo fueron estas

Utilizar canteros en forma de trapecios y pasillos angostos nos permitiría aprovechar mejor el espacio del terreno (Fig. 2) y la otra fue usar trapecios rectangulares (Fig. 3)

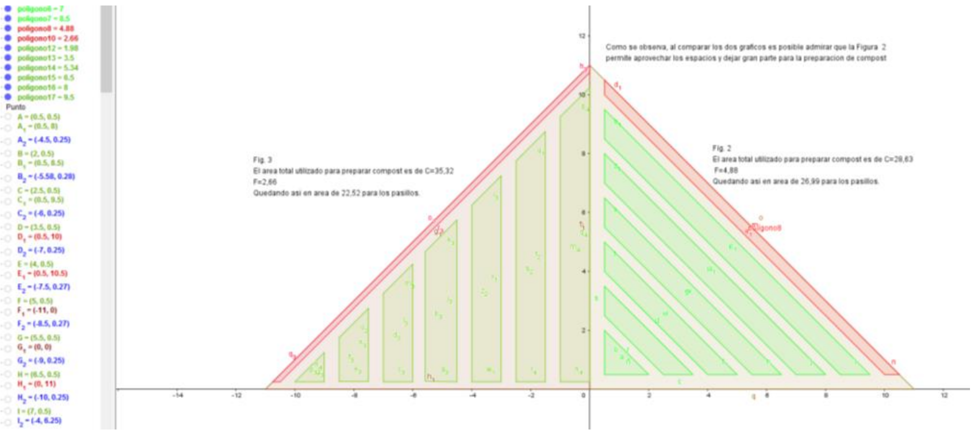
Una vez que decidimos cual sería el mejor método para realizar esta actividad, nos pusimos manos a la obra

Nota. Fuente propia.

Calculan los valores de las áreas en cada caso y llegan a la conclusión que una distribución es más conveniente que otra.

Figura 28

Parte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Las heurísticas utilizadas son: recurrir a teoría relacionada para realizar los cálculos de las áreas y los dibujos para analizar las distintas posiciones de los canteros. La utilización de GeoGebra es para realizar los gráficos.

Grupo 8

Este grupo plantean varias conjeturas, por este motivo hay más de un análisis.

Figura 29

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

CONJETURAS

1. Considerando como área para compost una circunferencia, el mayor valor de la misma se obtiene con una circunferencia inscrita en el triángulo.
2. Considerando como área para compost un cuadrado, el mayor valor del mismo se obtiene con un cuadrado inscrito en el triángulo.
3. La circunferencia inscrita en el triángulo tendrá mayor área que el cuadrado inscrito en el mismo.
4. Si se considera un rectángulo como figura inscrita en el triángulo, el mayor valor tomará cuando el rectángulo se transforme en un cuadrado, por tratarse de un triángulo isósceles.

Nota. Fuente propia

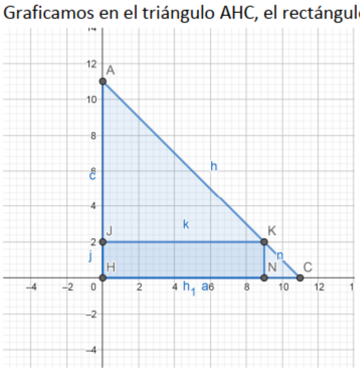
Plantean los procedimientos para analizar cada una de las conjeturas. Al considerar la circunferencia encripta, realizan su construcción y calculan el valor del área comprendida.

Otro de los caminos pensados fue considerar un rectángulo inscripto en el triángulo y variar la posición del punto ubicado sobre la hipotenusa. A partir de la ecuación de la recta determinada por dos puntos expresan la función asociada. Encuentran la expresión del área del rectángulo, trabajan con la derivada y determinan el valor del lado del cuadrado.

Figura 30

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Para la demostración de este punto, partimos de un rectángulo.
Necesitamos maximizar el área que ocupa el rectángulo dentro del triángulo planteado, por lo tanto consideramos un rectángulo cualquiera.
Graficamos en el triángulo AHC, el rectángulo JHKN.



Nuestra función objetivo, será el área del rectángulo JHKN.
Tenemos entonces: máx A(x,y) = x*y
Como restricción, sabemos que el rectángulo JHKN debe estar dentro del triángulo AHC.
El lado AH = HC = 11, llamemos y al lado JH, y x al lado HN.

Nota. Fuente propia.

Las heurísticas utilizadas identificadas: trabajar hacia adelante, utilizar teoría relacionada como círculo inscripto, rectángulo inscripto; mediatrices; cálculo de área del triángulo, rectángulo, cuadrado; como también, funciones y derivadas.

Dibujo en papel para analizar algunas posiciones (adjuntan fotos de los mismos en el trabajo). Dividen el problema en subproblemas. En uno de los subproblemas reinterpretan la situación en un lenguaje diferente al determinar la función asociada al área del cuadrado. Derivan y encuentran el valor de *x* para el área máxima.

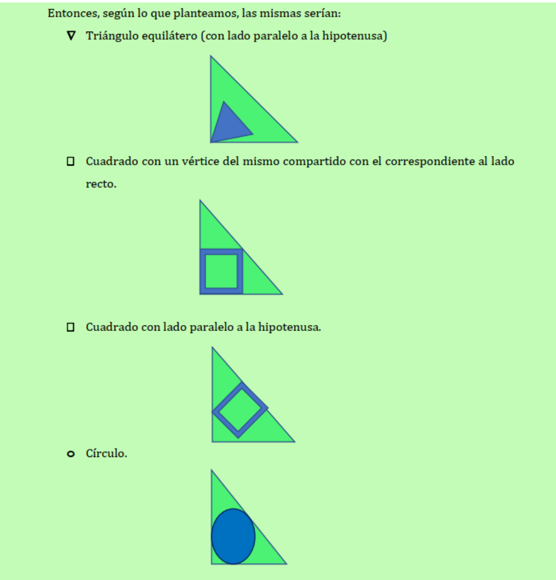
Recurren al GeoGebra para graficar de modo estático las distintas figuras analizadas.

Grupo 9

El grupo plantea las distintas situaciones con figuras interiores al triángulo indicado en la actividad (ver Figura 31)

Figura 31

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

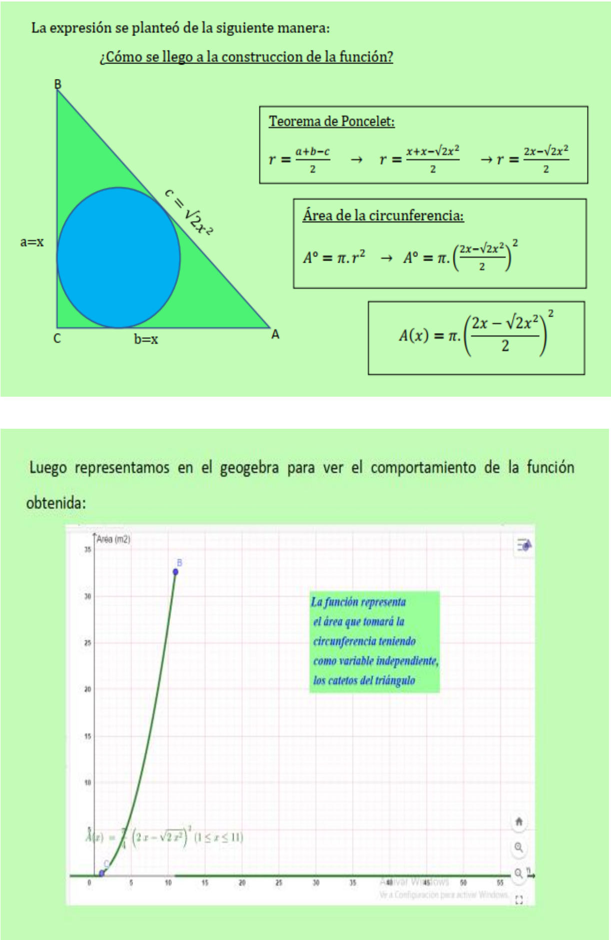


Nota. Fuente propia.

Comentan que luego de debates internos en el grupo, deciden trabajar con la que más se acerque a determinados postulados que propusieron y, por tal motivo, solo lo hacen con el círculo. No comentan si la decisión se basó en algún cálculo previo o simplemente en la observación.

Figura 32

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Respecto de las heurísticas, el grupo trabaja hacia adelante, recurren a teoría relacionada: el teorema de Poncelet, cálculo de área, funciones, gráficos cartesianos, reinterpretan la situación desde un lenguaje diferente.

Respecto de GeoGebra su utilización fue sólo para graficar la función, no realizan ningún análisis a partir de la misma. No refieren a la variación del radio tampoco a variación del área estudiada.

Se presenta a continuación la síntesis de las heurísticas abordadas en la actividad.

Tabla 5

Síntesis de las heurísticas utilizadas por los distintos grupos.

Heurísticas (H)	Grupos (G)								
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
H1	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H3	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H5	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H6		x	x	x	x	x		x	x
H9	x	x	x	x	x	x		x	
H11			x						
H5 con GeoGebra	x			x	x	x	x	x	
H1 con GeoGebra			x					x	
H14 con GeoGebra		x	x	x				x	x

Nota. Datos propios.

3.2.3 Reflexión acerca de las heurísticas emergentes frente al problemas del compost

Al comenzar la actividad, surge una consulta respecto de uno de los videos propuestos por la cátedra sobre la realización del compost. En el video se muestra fabricar en el suelo, un compost circular de unos 70 cm de diámetro, a partir de un pozo en forma de cilindro. El ejemplo mostrado llevó a uno de los grupos a plantearse si era correcta la idea de realizar varios círculos en el espacio considerado. Mediante el dialogo en la clase, tratando de influir en la respuesta lo menos posible, se aclaró que la intención del mismo era que conocieran también el proceso de elaboración, que no implicaba que tuvieran hacerlo de ese modo, que ellos podían pensar y analizar diferentes formas. Luego de la charla vuelven sobre la consigna, la reinterpretan y continúan trabajando.

El trabajar hacia adelante es lo concebido por todos los grupos (H1), cuatro de ellos plantean conjeturas y trabajan en relación con las mismas, los demás formulan una idea y la desarrollan junto con las justificaciones.

Todos los grupos recurren a teoría relacionada (H3) para poder resolver la situación, en general contenidos de la geometría como ser cálculo de área de figuras planas, el concepto de función, derivadas y sus aplicaciones, uno de los grupos utiliza integrales definidas para calcular el área en cuestión. El Grupo 8 recurre a mediatrices al trabajar con el triángulo y la circunferencia inscripta.

Los nueve grupos realizan una descripción grafica (H5) es decir, utilizan distintos tipos de gráficos para analizar la situación, tres realizan gráficos de análisis utilizando los ejes cartesianos, otros tres grupos los utilizan para analizar la función planteada y el resto realiza dibujos para distintas interpretaciones.

De los 9 grupos analizados siete reinterpretan el problema en un lenguaje diferente (H6), cinco de los ellos utilizan el concepto de función para dar solución a la situación, uno de esos siete utiliza ecuaciones para resolverla. Otro grupo expresiones algebraicas y los dos restantes trabajan en forma numérica, realizan cálculos aritméticos para determinar el área de la figura.

Respecto de dividir el problema en sub problemas (H9), los estudiantes consideran distintas figuras inscriptas y analizan por separado cada una de ellas, siete de los grupos usa esta heurística. Las figuras que se analizan son variadas: triángulos trapecios, circunferencias, rectángulos y cuadrados. Algunas de estas son descartadas, por algunos grupos, por no cumplir con lo solicitado en la consiga.

Un solo grupo le asigna distintos valores para evaluar y realizar una generalización de la situación (H11).

Respecto del uso del programa GeoGebra, como se mencionó seis de los grupos utilizan el programa para graficar la expresión hallada (H5 con GeoGebra). Solo dos grupos lo manipulan en forma dinámica, considerando las herramientas para deslizar uno de los puntos y observar la variación del área de la figura (H1 con GeoGebra). Cinco de los grupos lo utilizan para verificar (H14 con GeoGebra).

3.3 Tercera actividad. Cuidado del medio ambiente

Continuando con la idea de las actividades anteriores sobre el cuidado del planeta, se propone fabricar cajas de material reciclable para transportar el compost.

Parte de la consigna dada a los estudiantes.

Las planchas del material son rectangulares (y de distinta medida) Se establece cortar un cuadrado en cada esquina para armar la caja sin tapa.

¿Qué medida tendría que tener el lado del cuadrado que se recorta para que sea óptimo el volumen de la caja armada?

3.3.1 Análisis previo

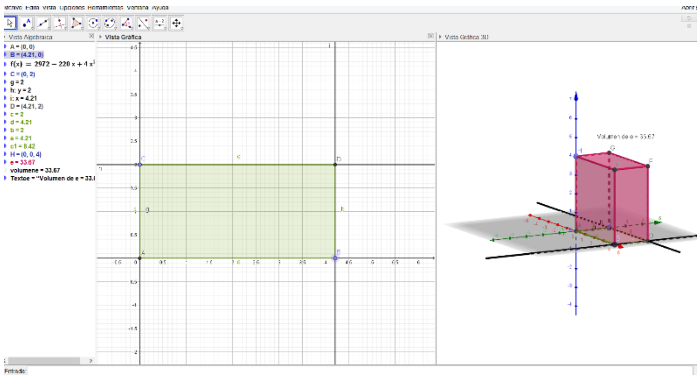
Para poder resolver la situación, se propone utilizar el modelo de caja rectangular sin tapa. Al analizar las posibles respuestas que pudieran dar los estudiantes, se especulan distintas posibilidades que van a surgir, desde realizar mediciones hasta poder pensar la situación por medio de una función. Algunas de las posibles respuestas son:

- Trabajar con lápiz y papel, a partir del dibujo de la caja, realizar algún cálculo del volumen de un prisma, considerando por ejemplo una medida particular para la plancha.
- Considerar el GG para realizar el gráfico de un prisma y utilizar las herramientas del programa para determinar el valor del volumen.
- Utilizar el programa GG, para pensar la situación a partir del gráfico de una caja dinámica, por ejemplo: para la altura o para los valores de la base, analizar las variaciones del área,

del volumen de la caja y de los casos límites. Tomar algunos valores particulares para las dimensiones, considerando el dominio de la función para la situación planteada.

Figura 33

Caja dinámica utilizando el programa GeoGebra.

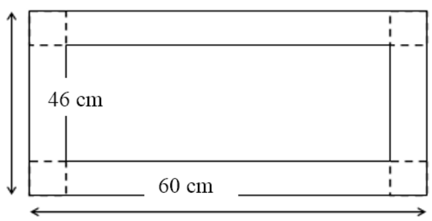


Nota. Diseño propio

- Considerar dos medidas particulares de los lados de la caja, por ejemplo: 60 y 46 cm y la altura de la misma como “x”, de esta situación se desprende una expresión para el volumen, sin embargo, cada grupo obtendrá una distinta considerando los coeficientes que utilice cada grupo. Lo que se espera, en todos los casos, es una función polinómica de grado tres, por ejemplo $f(x) = (60 - 2x)(46 - 2x)x$

Figura 34

Modelo de caja, con valores particulares.

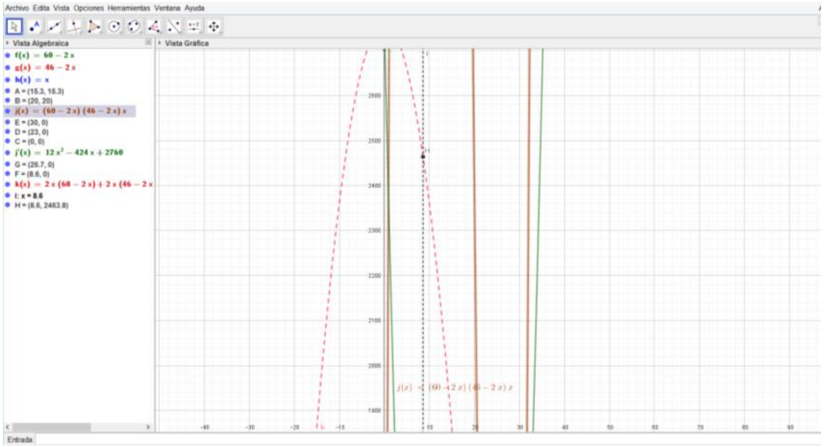


Nota. Datos propios

- Teniendo en cuenta el ejemplo, pero utilizando el GG se carga la función por medio de los comandos, observándose también el gráfico asociado.

Figura 35

Función asociada a la situación construcción de la caja.



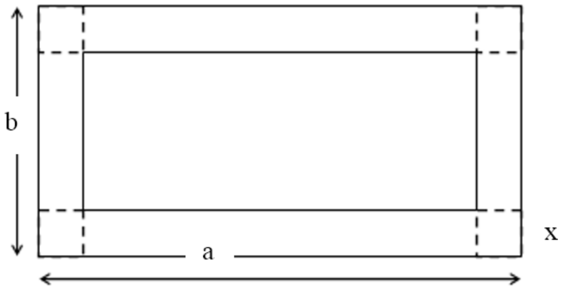
Nota. Confección propia

Para determinar la solución, ya sea por medio de lápiz y papel o utilizando el programa, se determina la derivada de la función, se calculan los valores de posibles máximos y mínimos, y se utiliza el criterio de la segunda derivada para analizar los valores hallados.

- Denominar los lados del prisma de manera simbólica, por ejemplo, "a" a un lado de la caja, "b" al otro y con "x" el lado del cuadrado a cortar (altura de la caja). En este caso la función polinómica del volumen seria: $v(x) = (a - 2x)(b - 2x)(x)$. Posteriormente se podría determinar una expresión para la altura "x" y analizar las posibles respuestas a la situación planteada.

Figura 36

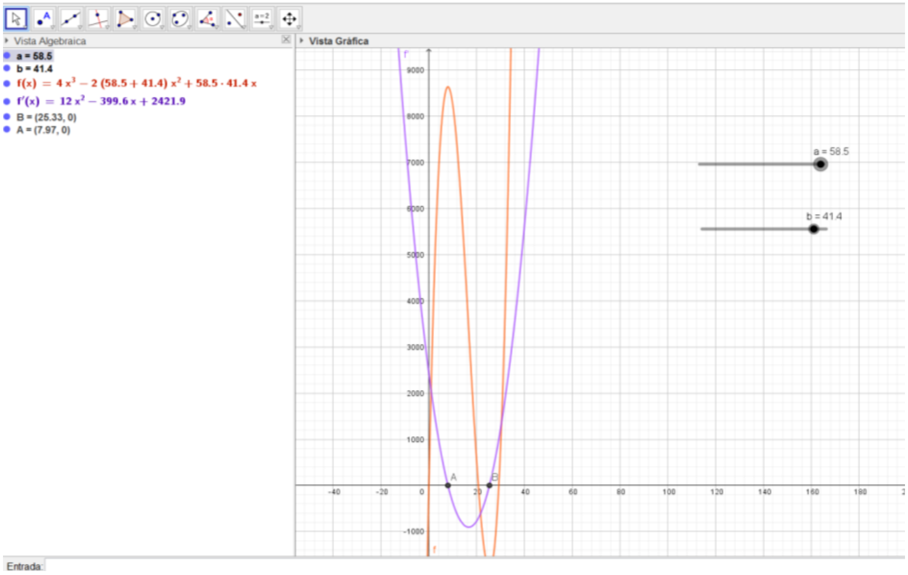
Modelo de caja, sin considerar valores.



- Utilizando directamente el programa GeoGebra, se introduce la expresión y se trabaja con la herramienta denominada "deslizadores", esto nos permite analizar la variación del volumen en relación a los valores de "a" y "b" como así también al valor de "x". Se determina la derivada de la función y se interpretan los resultados.

Figura 37

Función asociada utilizando GeoGebra y la herramienta deslizadores.



Nota. Confección propia

3.3.2 *Reflexión acerca de las heurísticas a partir de las producciones escritas por cada uno de los grupos*

En este apartado se presenta una breve descripción y análisis de las producciones escritas, junto a un recorte de las mismas, al final se complementa con una tabla resumen, donde se condensa la producción de cada grupo indicando las heurísticas utilizadas.

Grupo 1

El grupo toma las medidas de una caja de naranja, analizan la situación denominando como "x" al lado del cuadrado que hay que recortar, deciden darles valores a los lados de la plancha para poder desarrollar la actividad. Consideran que un lado mide 30 cm, por lo tanto, el otro lado tiene que ser mayor que cero y menor que 15 cm, escriben también una restricción similar para el valor de “x”.

No plantean conjeturas de manera explícita, recurren al cálculo del volumen de un prisma para determinar una función. Derivan la expresión, hallan los puntos críticos x_1=20,6 cm y x_2=6,1 cm, y en relación a la restricción antes mencionada, consideran el valor de x_2 como posible solución, descartan el valor x_1 por no satisfacer la condición, utilizan el criterio de la segunda derivada.

Figura 38

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Aplicando la fórmula del volumen:

V: Largo X Ancho X Altura

V: (50 -2x).(30 - 2x).(X)

V: **(**50 -2x). (30x $-2x^2$)

V: 1500x -100x^2 - 60x^2 +4x^3

V(x): 4x^3 - 160x^2 + 1500x ⟸ Volumen en función de x

El siguiente paso es encontrar los puntos críticos y para eso debemos hallar la derivada primera de la función y luego igualarla a cero para hallar los posibles puntos críticos:

V´(x): 12x^2 – 320x + 1500

Igualamos a cero la derivada primera: V'=0

Nota. Fuente propia.

Respecto a las heurísticas, trabajan hacia adelante, utilizan los conceptos: volumen de un prisma, funciones polinómicas de tercer grado. Realizan un dibujo para indicar los valores asignados a la caja sin tapa. Reinterpretan la situación en un lenguaje diferente y obtienen una expresión funcional, considerando distintos valores para poder determinarla, hallan los puntos críticos por medio de la derivada y llegan a la conclusión de un valor de “x” como solución. En cuanto a la utilización de GeoGebra se limita al dibujo de una caja.

Grupo 2

Plantean la situación e indican que los lados serán considerados como “a” y “b”, formulan una conjetura y a continuación formulan una expresión general.

Figura 39

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Para dicha conjetura, decidimos demostrarlo de la siguiente manera:

Siendo x la longitud del lado del cuadrado que debemos cortar, el volumen de la caja será: $V(x) = (a - 2x)(b - 2x)(x)$.

Aplicando propiedad distributiva, llegamos a la siguiente expresión:

$$V(x) = 4x^3 - 2\,(a + b)\,x^2 + (ab)\,x$$

Debemos hallar el valor máximo que puede tomar x, lo que equivale a hallar los puntos extremos de V y comprobar cuál es el máximo relativo. Para esto, derivamos V y hallamos los puntos donde la derivada vale cero:

$$V'(x) = 12x^2 - 4\,(a + b)\,x^2 + ab = 0$$

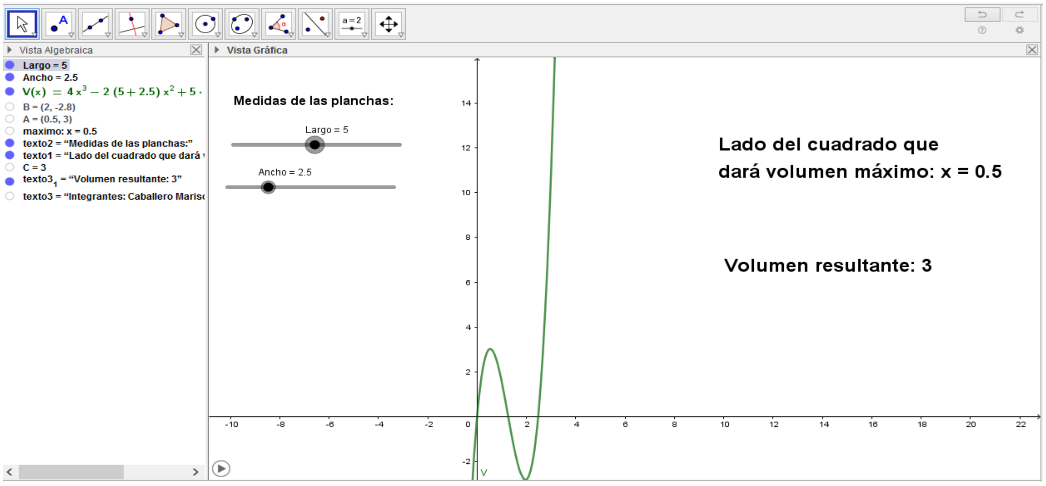
Nota. Fuente propia.

Determinan la expresión de la derivada la función volumen y del lado del cuadrado a recortar: $x < \frac{a+b}{6}$. Si bien las expresiones obtenidas son válidas, al reemplazar los valores de “a” y “b” en GeoGebra no obtienen el mismo resultado. Por ejemplo, si en la expresión anterior se reemplaza a=5 y b= 2,5 se obtiene x<1,25. En el GeoGebra esta entrada les devuelve *x*=0,5 (figura 41). El cálculo del volumen tampoco coincide con el resultado obtenido en papel, esto no lo advierten o no lo comentan. Utilizan GeoGebra para graficar la función y la herramienta denominada deslizadores.

Si bien los resultados se deben revisar, es posible analizar las heurísticas utilizadas. Desde el inicio el grupo planteó la situación considerando las condiciones del problema. Teoría utilizada: cálculo del volumen para trabajar algebraicamente, derivadas y aplicaciones para determinar valores máximos y mínimos; reinterpretaron la situación en un lenguaje diferente: el algebraico para plasmar una expresión funcional.

Figura 40

Recorte de pantalla del archivo GeoGebra



Nota. Fuente propia.

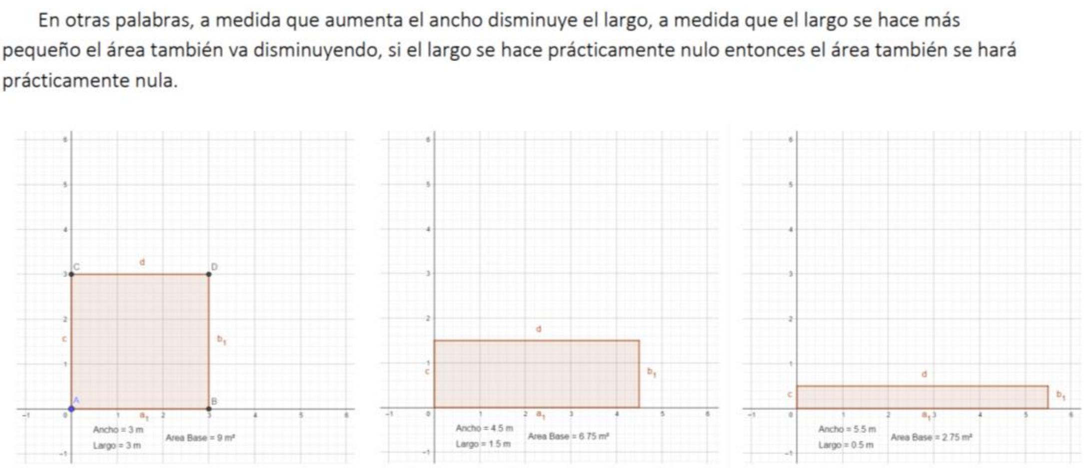
Las herramientas utilizadas en GeoGebra son ideales para realizar un análisis dinámico de la situación, los deslizadores permiten obtener distintos valores muy rápidamente. El grupo utiliza el programa, pero no verifica las respuestas obtenidas.

Grupo 3

Para el desarrollo mencionan que "la medida del lado del cuadrado que se debe cortar es igual a la altura del cajón". Consideran el perímetro y formulan una expresión $P = 2(x+y) \rightarrow y = \frac{P}{2} - x$, también el área lateral. Realizan un gráfico de análisis con el GeoGebra para arribar a una conclusión. Estudian las medidas convenientes y los casos límites, donde el área es prácticamente nula. Analizan valores de áreas y llegan a la conclusión que "las bases deberían ser cuadradas", relacionan esta respuesta con la actividad anterior (cuidado de la tierra).

Figura 41

Recorte de la respuesta dada por el grupo.


En otras palabras, a medida que aumenta el ancho disminuye el largo, a medida que el largo se hace más pequeño el área también va disminuyendo, si el largo se hace prácticamente nulo entonces el área también se hará prácticamente nula.

Nota. Fuente propia.

Introducen variables “a” y “b” como los lados la plancha. Denominan “x” e “y” para a los lados de la base de la caja, como “z” a la altura de la misma. Encaran varios procedimientos algebraicos, pero los desechan por considerarlos “muy trabajosos”.

Otra decisión que plasman es retomar la expresión del perímetro e indican una relación entre el ancho “x” y el largo “y”

$$P = 2(x + y) \rightarrow y = \frac{P}{2} - x \rightarrow A = xy = x(\frac{p}{2} - x) = \frac{p}{2}x - x^2$$

Determinan la derivada de A, la igualan a cero, encuentran valores críticos (raíces), mediante el criterio de la segunda derivada determinan máximo. Obtienen el valor del ancho de la base (x) y determinan que el largo (y) de la base debe ser igual al ancho.

Luego de varios cálculos indican que no es un cubo sino un prisma de base cuadrangular. En cuanto al valor del volumen, ensayan el cálculo midiendo una caja cualquiera y luego, lo realizan con las medidas obtenidas por ellos. Comparan los valores y concluyen que hay un “volumen ganado en esta optimización”.

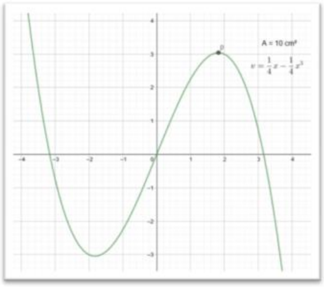
Figura 42

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

De lo obtenido en la ecuación anterior, resulta que el largo de la base debe ser igual al ancho de la base.

La ecuación para hallar la altura y el volumen se reducen a:

$$z = \frac{A - x^2}{4x} \qquad V(x) = \frac{Ax^2 - x^4}{4x} = \frac{A}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$



Igualamos a cero la primera derivada de la función $\boldsymbol{V}$ respecto de $\boldsymbol{x}$ para hallar un punto crítico:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{A}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{A}{3} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{A}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{A}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{A}{3}} \end{cases}$$

Nota. Fuente propia.

Respecto a las heurísticas utilizadas, se identifica el trabajo hacia adelante; proponen sub problemas, calculan valores que consideran o los descartan según se ajusten o no a sus planteos.

Realizan gráficos para estudiar la situación: utilizan el programa para pensar la actividad y considerar casos límites. Emplean teoría relacionada para dar una posible solución. Reinterpretan el problema en un lenguaje diferente. Verifican la solución a la que pudieron arribar. Además, el programa es utilizado para graficar la función.

Grupo 4

Comienzan el desarrollo considerando como “m” al lado mayor y “n” al menor de la plancha; el lado del cuadrado a cortar en los vértices como “a”. Formulan dos conjeturas. Luego de desarrollar una parte del trabajo desechan una de ellas, indicando: “a la hora de llevar esto a la práctica se complicó”, se puede observar que intentan aplicar funciones de varias variables (contenido que estaban aprendiendo en ese momento en Análisis II).

Respecto a la segunda conjetura, analizan que el lado “a” debe tener determinadas características. Una, que su valor debe ser menor a “n”.

Escriben la expresión $(m - 2a)\ y\ (n - 2a)$, comentan que la cantidad de compost que se albergara se definirá por medio del volumen $V(m, n, a) = (m - 2a)(n -$

$2a)a \quad trabajando\ la\ expresión\ V = (m, n, a) = amn - 2a^2m - 2a^2n + 4a^3$, acuerdan utilizar un caso particular para el cual toman m=4 y n=2

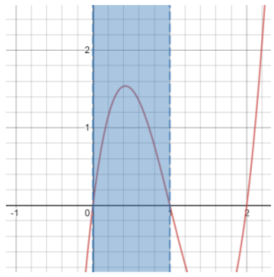
Figura 43

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

$$si\ m = 4; n = 2 \rightarrow V(a) = 8a - 12a^2 + 4a^3$$

Dicha función como sabemos, ***a*** no puede tomar valores negativos y mucho menos ser del mismo tamaño que el lado más pequeño, así como tampoco puede ser la mitad del mismo.

La misma función no estará dejando esta gráfica



$$V'(a) = 12a^2 - 24a + 8$$

Nota. Fuente propia.

Utilizando el criterio de la primera derivada determinan dos valores posibles para "a", desechan uno de los mismos por medio del criterio de la segunda derivada, consideran a=0,42. Arriban a la conclusión que "fijando las dimensiones de la caja pueden perfeccionar el valor del volumen a obtener".

Se pueden identificar las siguientes heurísticas: el grupo trabaja hacia adelante, toman decisiones a medida que obtienen resultados y nuevos datos; recurren a teoría relacionada utilizando los conceptos de: volumen del prisma, derivada de una función e intentan relacionar con conceptos de funciones de varias variables. Realizan gráficos para estudiar la situación, reinterpretan el problema en un lenguaje diferente: del esquema de la caja al concepto de volumen y, de esta manera, la expresión funcional. Analizan casos límites al considerar valores que "no puede tomar a". Utilizan el programa para graficar y verificar la función, considerando valores de "m" y "n" particulares.

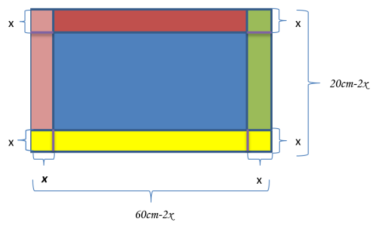
Grupo 5

El grupo plantea una conjetura sobre el volumen de la caja. Calcula tres casos particulares de volumen para probar la conjetura. Escriben para determinar el volumen en función del lado del cuadrado que se recorta (x). Derivan V(x) y utilizan el criterio de la segunda derivada para determinar el valor de "x".

Figura 44

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Por lo tanto x seria la longitud de los lados del cuadrado que hay que cortar.



Entonces el total del largo será, el lado de la caja más el lado del cuadrado que hay que cortar: 60cm-2x y el total del ancho será: 20cm-2x.

Utilizando el volumen de un paralelepípedo, se podrá hallar el valor de x (lado del cuadrado).

$$V = (base)(ancho)(altura) = (60cm - 2x)(20cm - 2x)(x).$$

Representándolo como función:

$$V(x) = (60 - 2x)(20 - 2x)(x)$$

$$V(x) = (60 - 2x)(20x - 2x2)$$

$$V(x) = 1200x - 120x2 - 40x2 + 4x3$$

$$V(x) = 1200x - 160x2 + 4x3$$

Hallando la primera derivada:

Nota. Fuente propia.

Heurísticas utilizadas por este grupo: trabajan hacia adelante, recurren a teoría relacionada como ser volumen de un cuerpo y concepto de función; interpretan la actividad en un lenguaje diferente, formulan una expresión, realizan gráficos de la caja para interpretar la actividad; asignan valores particulares a la variable para explorar la situación.

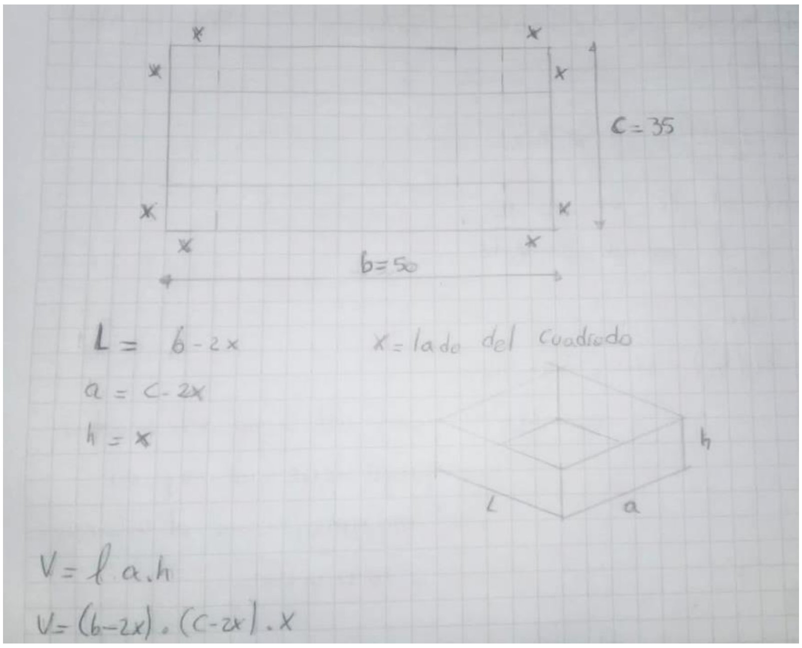
Grupo 6

Comienzan el análisis de la situación con datos particulares de una caja. Determinan una expresión para el volumen V(x) en función de la altura (x). Derivan la función y determinan valores de "x". Utilizan el criterio de la segunda derivada, para probar los valores hallados y encontrar la altura de la caja.

Posteriormente, plantean un razonamiento con “valores genéricos” según sus palabras, en el cual un lado de la caja es “b”, el otro lado es “c” y el lado del cuadrado es “x”. Trabajan algebraicamente y determinan una expresión en la que reemplazan los valores particulares con los que trabajaron al inicio de la actividad. Obtienen como resultado valores distintos para el volumen. No se evidencia ningún comentario o conclusión por parte del grupo sobre estas diferencias.

Figura 45

Recorte de la respuesta dada por el grupo.



Nota. Fuente propia.

Las heurísticas son similares a las utilizadas por los otros grupos, trabajaban hacia adelante, la teoría se corresponde al volumen de un prisma, derivada de una función y sus aplicaciones, realizan dibujos para analizar la situación. Reinterpretan el problema en un lenguaje diferente, se evidencia el principio de inducción ya que desde un ejemplo intentan generalizar la situación.

Grupo 7

El grupo describe cuales son las ideas que tienen al comenzar el desarrollo de la actividad. Uno de los integrantes comenta que trabajó con material concreto utilizando un cartón, pero solo al inicio. Otro integrante intenta generalizar la situación desde el principio: “de entrada quise generalizar el ejercicio y se complicó un poco la mano con la parte algebraica”. Luego de intercambiar opiniones optan por trabajar con medidas. Una de ellas fue considerar una plancha cuadrada de 60 cm de lado, pero abandonaron la idea rápidamente al no cumplir con la consigna. Realizan otros intentos considerando: 90 cm, 70 cm y 20 cm, respectivamente, en relación con esto analizan “pero terminamos cambiando los datos porque vimos que no eran convenientes para los cálculos”. Luego consideran un lado a= 108 cm, el otro lado b=81 cm y “x” como lado del cuadrado a recortar.

Comentan que a partir de los casos particulares notan la posibilidad de generalizar y determinan una expresión para el volumen “$V=4x^3-2(a + b)\ x^2+ (a.\ b)$”, utilizan el concepto de derivada de una función y el criterio de la segunda derivada.

Figura 46

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Reemplazamos los valores correspondientes quedando la siguiente expresión: $V_{(c)}= (108-2x) *(81-2x) *x$. Si distribuimos los factores obtenemos: $V_{(c)}= 4x^3-378x^2+8748x$

Antes de proseguir determinamos el dominio de esta función, como se trata de una caja se sabe que “x” no podrá tomar valores negativos (porque se trata de una longitud) y tampoco podrá ser cero (o sino no se formaría la caja). No podría tomar el valor 54(porque sería imposible) ni el valor de 40,5(ya que nos quedaría solo un retazo de 20cm por 70cm). En conclusión, se tiene que el lado podrá tomas los valores $0<x<40,5$. Dentro de ese intervalo se debe encontrar el valor que debe tomar “x” para que la caja tenga su mayor volumen

Nota. Fuente propia.

Heurísticas utilizadas: trabajan hacia adelante, recurren a teoría relacionada, como el cálculo del volumen, concepto de derivada. Trabajan con valores particulares de dimensiones de una caja, analizan posibles valores para “x”. Se evidencia una reinterpretación de la situación en un lenguaje diferente, el algebraico. Como así también, un indicio de inducción.

Grupo 8

En el desarrollo del trabajo comentan las medidas estándar de cajas de naranjas, plantean una conjetura, en que el lado del cuadrado a cortar deberá ser el 12,5% de la medida del largo de la plancha, no escriben el porqué de esa condición.

Para seguir con el análisis de la situación establecen valores particulares: 60 cm de largo, 50 cm de ancho y el lado del cuadrado a cortar denominado “x”. Utilizan la expresión del volumen del prisma para determinar una función relacionada a la situación.

Hallan la primera derivada, igualan a cero y con los valores obtenidos trabajan con el criterio de la segunda derivada. Mencionan que $x<25$ por considerar el ancho de 50 cm. Con este valor calculan el volumen de la caja. Comentan que esta conjetura no resultó válida, muestran el desarrollo realizado con distintos valores de “x”.

Respecto al uso de GeoGebra, si bien intentan pensar la actividad con el programa mencionan que deben “volver al papel y lápiz”.

Figura 47

Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Lo que queremos conocer es cuál será el lado del cuadrado a recortar, al que llamamos X, con lo que primero identificamos las ecuaciones iniciales:
Largo l = 60 - 2X
h = X (La altura será el lado del cuadrado que estamos buscando)
Ancho a = 50 - 2X
Como mencionamos anteriormente todas las medidas deben ser positivas, es decir > a 0.
Como l = 60 - 2X > 0, luego X<30, y a = 50 -2X > 0, entonces X<25. Para cumplir con ambas restricciones el valor de X deberá ser menor a 25 cm.
Desarrollando la fórmula de Volumen, V= l*h*a
Luego tenemos:
V = (60-2X)*(50-2X)*(X)
Haciendo los correspondientes cálculos obtenemos:
V = $4x^3 - 220x^2 + 3000x$

Nota. Fuente propia.

Respecto de las heurísticas utilizadas: trabajan hacia adelante, recurren a teoría relacionada como volumen y derivada de una función, realizan dibujos para comenzar a pensar la situación; interpretan el problema en un lenguaje diferente. Utilizan valores particulares tanto para abordar la situación como para verificar la expresión del volumen.

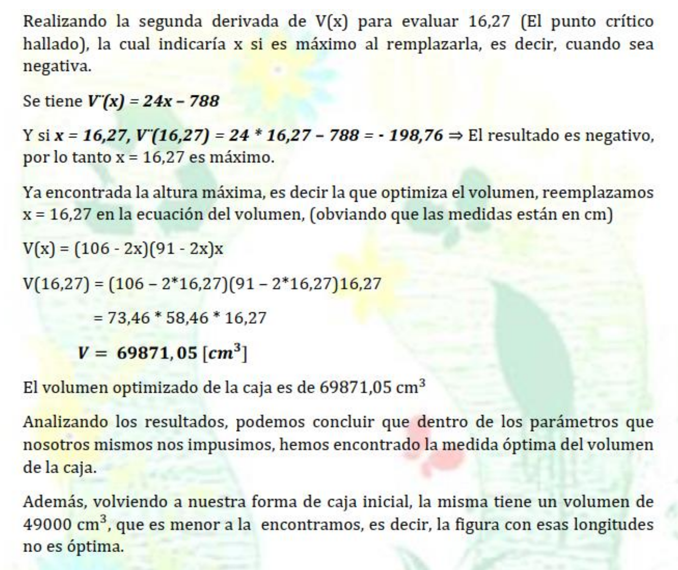
Respecto del uso de GeoGebra, como ellos mismos señalan, pretenden usarlo para pensar la situación, pero no es posible.

Grupo 9

Para comenzar con el análisis de la situación toman las medidas de una caja particular y calculan su volumen. A partir de desarmar la caja, y reemplazar la altura por x escriben una expresión para el volumen, consideran posibles restricciones para x. Luego determinan una expresión general. Derivan la función y determinan por medio del criterio de la segunda derivada el valor de “x”. Comparan el volumen de la caja particular con el obtenido a partir de la expresión general y concluyen que el último valor es el óptimo.

Figura 48

Parte de la respuesta dada por el grupo.


Realizando la segunda derivada de V(x) para evaluar 16,27 (El punto crítico hallado), la cual indicaría x si es máximo al remplazarla, es decir, cuando sea negativa.

Se tiene $V''(x) = 24x - 788$

Y si $x = 16{,}27$, $V''(16{,}27) = 24 * 16{,}27 - 788 = -198{,}76 \Rightarrow$ El resultado es negativo, por lo tanto x = 16,27 es máximo.

Ya encontrada la altura máxima, es decir la que optimiza el volumen, reemplazamos x = 16,27 en la ecuación del volumen, (obviando que las medidas están en cm)

V(x) = (106 - 2x)(91 - 2x)x

V(16,27) = (106 – 2*16,27)(91 – 2*16,27)16,27

= 73,46 * 58,46 * 16,27

$V = 69871{,}05\ [cm^3]$

El volumen optimizado de la caja es de 69871,05 cm^3

Analizando los resultados, podemos concluir que dentro de los parámetros que nosotros mismos nos impusimos, hemos encontrado la medida óptima del volumen de la caja.

Además, volviendo a nuestra forma de caja inicial, la misma tiene un volumen de 49000 cm^3, que es menor a la encontramos, es decir, la figura con esas longitudes no es óptima.

Nota. Fuente propia.

Las heurísticas utilizadas por este grupo son el trabajo hacia adelante, recurren a teoría relacionada como ser el cálculo del volumen y aplicaciones de la derivada, realizan gráficos tanto para pensar la situación como para representar lo hallado una vez calculado el volumen final. Reinterpretan el problema en un lenguaje diferente ya que formalizan la expresión de una función, verifican la situación por medio de la comparación con los valores trabajados al principio.

3.3.3 Organización de las heurísticas emergentes

Resumen por medio de la tabla, de las heurísticas utilizadas al realizar la actividad.

Tabla 6

Síntesis de las heurísticas utilizadas por los grupos.

Heurísticas (H)	Grupos (G)								
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
H1	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H3	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H4			x						
H5	x	x	x	x	x	x		x	x
H6	x	x	x	x	x	x	x	x	x
H11	x					x	x	x	
H12			x	x					
H13					x		x	x	
H15								x	x
H5 con GeoGebra	x					x			
H1 con GeoGebra			x						
H 14 con GeoGebra		x	x	x	x				

Nota. Datos propios.

3.3.4 Reflexión acerca de las heurísticas emergentes frente al problemas del cuidado del medio ambiente

Todos los grupos abordan la situación partiendo de los datos (H1). En base a la consigna toman decisiones para dar respuesta, por ejemplo, medir una caja para analizar la relación entre las medidas de las aristas y el volumen. Cinco de los grupos redactan en forma explícita una conjetura para luego intentar verificarla.

Utilizan para el desarrollo conceptos teóricos aprendidos (H3): cálculo del volumen de un prisma, operaciones algebraicas, función polinómica de tercer grado, cálculo de derivada y sus aplicaciones.

Cinco de los grupos realizan distintos dibujos (H5) para el análisis de la situación. Tres grupos recurren a los ejes cartesianos para graficar posteriormente la función obtenida.

Todos los grupos reinterpretan la situación en un lenguaje diferente (H6), es decir, obtienen una función polinómica de grado tres, cuatro grupos asignan valores a los parámetros para analizar la situación (H11) para extraer pautas y generalizar.

Dos de los grupos consideraron casos limites o especiales (H12). Uno, supuso que la base de la caja sea un cuadrado. El otro, evaluó relaciones entre el lado del rectángulo de la base y el lado cuadrado a recortar. En ambos casos el análisis colaboró para una conclusión parcial.

Tres de los grupos utilizan datos particulares de los lados de la caja (H13), y partir de los mismos obtienen valores para ejemplificar, explorar la situación y de esta manera llegar a la expresión de una función para cada caso particular.

Respecto a verificar la respuesta obtenida reemplazando valores particulares (H15), solo dos la llevan a cabo.

En cuanto al uso de GeoGebra, dos de los grupos utilizan el programa para realizar dibujos de distintas cajas para pensar la situación (H5 con GeoGebra). Un solo grupo analiza parte de la actividad con el programa (H1 con GeoGebra). Otros cuatro lo utilizan para graficar la función obtenida (H14 con GeoGebra) y un grupo deja por escrito que intentaron pensar la actividad, pero volvieron al papel y lápiz.

4 A modo de conclusión

La presente investigación tuvo como finalidad identificar y describir las estrategias heurísticas desplegadas por estudiantes universitarios durante la resolución de problemas.

El enfrentarse a las mismas, desde la mirada del estudiante, exige poner en juego alguna estrategia, formular conjeturas pensar en algún camino de solución, para arribar a una respuesta, en palabras de Santos Trigos (2014):

> La resolución de problemas se basa en el desarrollo y empleo de un método de búsqueda y cuestionamiento donde el estudiante pregunta, cuestiona, indaga, representa y explora el comportamiento de los objetos matemáticos a partir de uso de recursos, estrategias y formas de razonar con que son consistentes con el quehacer y desarrollo de la disciplina. (p. 19)

El estudio de corte cualitativo con un proceso interpretativo, se efectivizó en el contexto de las clases de Seminario II, correspondiente al segundo año del Profesorado en Matemática de la UNaM durante el año 2019.

A partir de los escritos de los estudiantes se identificaron y clasificaron las heurísticas más utilizadas por ellos durante la resolución de problemas.

A los efectos de la caracterización de las heurísticas emergentes, en el proceso de resolución de los problemas presentados, se utilizó la herramienta teórico- metodológica denominada Tabla de Descriptores, Heurísticas y descripción de las mismas, trabajado por los autores Rodríguez et al. (2019), con la incorporación de un apartado con descriptores sobre el uso de GeoGebra de construcción propia.

La identificación permite describir, en primer lugar, las referidas a la comprensión y planificación de las actividades. Una vez leído el enunciado, comenzaban el proceso de resolución. Todos los grupos utilizaron la heurística de trabajar hacia adelante, es decir, abordaron las situaciones considerando los datos y su interpretación. Es importante destacar que; en las distintas actividades se alentaba a que registren todas sus conjeturas y procedimientos de manera explícita. La mayoría de los grupos escribieron los procedimientos de resolución y las cuentas realizadas. Sin embargo, solo algunos registraron o explicitaron sus conjeturas. En este aspecto, cabe la reflexión ¿no redactan sus conjeturas porque no lo pide la consigna? ¿con qué tiene que ver esta ausencia? Tal vez promoviendo este tipo de actividades en distintos espacios se propicie la escritura.

Tras la lectura inicial, los estudiantes activaron sus experiencias previas, recuperaron los contenidos matemáticos aprendidos para llevar a cabo lo solicitado. Además, surgió durante la exploración la heurística relacionada a descartar casos, como lo indica Carrillo (como se citó en Romero (2011)), se pudo apreciar que algunos grupos comenzaron con una idea, la estudiaban y luego la abandonaban.

En cuanto a los conceptos relacionados con funciones identificaron variables, avanzaron en la escritura simbólica. Utilizaron e interpretaron correctamente la representación gráfica en ejes cartesianos. Algunos grupos utilizaron en concepto de la derivada de la función y su aplicación en el estudio de máximos y mínimos. Un solo grupo consideró las integrales definidas en el estudio del compost para el cálculo del área.

Es importante mencionar que, si bien en la última actividad todos los grupos evidenciaron estrategias heurísticas más complejas, relacionadas con las funciones, esto no fue evidente desde la primera. El despliegue de cantidad de heurísticas, así como la expresión de lo verbal, aritmético, algebraico y gráfico fue gradual, esto coincide con lo mencionado por Santos Trigo (2014) "Un cambio en la forma de trabajar dentro del salón de clase toma su tiempo, y no se debe esperar un resultado radical favorable inmediatamente". (p.103). A medida que se avanzaba en el desarrollo de los problemas y como producto de las discusiones colectivas que se propiciaron entre los grupos, se hicieron presente heurísticas más complejas.

Asimismo, hubo grupos que aun en la segunda actividad continuaban con el trabajo algebraico e inclusive aritmético.

Respecto de reinterpretar la situación en un lenguaje diferente al dado, la mayoría de los grupos, en la segunda actividad, pudo asociar una función. Se observó que al avanzar en las distintas situaciones surge la heurística de reinterpretación, superaron lo intuitivo y utilizaron lenguaje pertinente. Esto les permitió expresar la función simbólicamente, asignarles valores a los parámetros del problema y avanzar hacia una solución. Algunos grupos manifestaron haber tenido dificultad para identificar una función relacionada en las dos primeras actividades. Esta fue superada a medida que se avanzó en la propuesta, ya que todos llegaron a la escritura simbólica de una función, en la tercera actividad.

Los estudiantes utilizaron el software únicamente para graficar las funciones y en algunos casos verificar lo hallado. Si bien se sugería su uso, desde el inicio, esto no sucedió. Una vez que determinaban las reglas de las funciones recurrían al programa para graficarla. En la tercera actividad un grupo intentó una resolución con el software a partir del resultado obtenido en la segunda, pero luego abandonaron ese razonamiento. GeoGebra tiene una interfaz relativamente sencilla y se alentó su uso, sin embargo, los estudiantes no lo incorporaron como aliado para resolver los problemas. Los resultados respecto al uso de GeoGebra nos advierten la necesidad de un trabajo previo con el programa, para que los estudiantes se familiaricen con las herramientas del mismo, posiblemente de este modo se "facilitaría construcciones más complejas que pueden estar presentes en problemas geométricos con un análisis algebraico" (Ferragina y Lupinacci, 2015, p. 9).

Posterior al análisis de las actividades, considerando lo estudiado, los resultados obtenidos y la recomendación de expertos, se realizan las modificaciones a las consigas de las actividades para el uso en clases futuras.

Los resultados, a los que se arribó mediante la investigación, alientan a recomendar la implementación de este enfoque de trabajo en las clases de matemática universitaria.

Se recomienda, además la articulación y desarrollo de contenidos tomando como eje la resolución de problemas, teniendo en cuenta que propicia el entrenamiento en el uso de las distintas heurísticas y colaboraría en la formación docente del futuro Profesor en Matemática.

4.1 Limitaciones y posibles preguntas para continuar el estudio el tema

En el transcurso del proceso de elaboración de la tesis, se han presentado dos desafíos, que se debieron atravesar.

El estudio se aborda desde las heurísticas de los estudiantes y se restringe a un grupo de clase particular, de una asignatura específica con un contenido matemático a desarrollar y en un momento determinado. Si bien no se persigue, las conclusiones no serían posibles de ser generalizadas a un contexto más general.

El otro desafío fue sostener la vigilancia metodológica que permitiera mantener una distancia optima como investigadora, y no caer en supuestos personales, teniendo en cuenta la fuerte relación sujeto-objeto establecida, por desarrollar el estudio en el lugar de trabajo. En este aspecto, los instrumentos utilizados y el procesamiento de los datos fueron coherentes con el enfoque de investigación asumido y, en el compromiso de minimizar subjetividad, si bien la investigación cualitativa no la niega ni rechaza, en relación con los objetivos planteados se lograron conclusiones parciales y finales bastante fieles a la realidad estudiada.

La elaboración del trabajo de tesis, se ha constituido en un valioso proceso de aprendizaje, que permitió significar enfoques y métodos, no exento de esfuerzos.

De cara a futuras investigaciones, considerando que se obtuvieron resultados interesantes y reconociendo las bondades del enfoque metodológico, cabría la posibilidad de continuar con esta línea de investigación en el espacio curricular como también en otras asignaturas, de otros años de la carrera. Además, resultan interesantes para ampliar el estudio a futuro, considerar las siguientes preguntas ¿qué impresiones se llevan los estudiantes de la resolución de problemas?, ¿identifican los procesos por los cuales avanzan al resolver una situación problema?

Desde otra mirada ¿qué actitudes tienen los docentes del profesorado frente a la resolución de problemas?, ¿qué postura asumen los docentes del profesorado ante la resolución de problema como eje de desarrollo de contenidos?, ¿qué espacios curriculares se podrían articular para trabajar la resolución de problemas como eje?, ¿de qué manera implementar la resolución de problemas en las asignaturas de primer año con la incorporación del GeoGebra?, entre otras.

5 Anexos

Anexo A. Cuidado del agua

Cuidado del agua en Argentina

Shutterstock 162

El cuidado del plantea y principalmente del agua es uno de los temas más importantes de la agenda a nivel mundial.

¿Cuál es el día del cuidado de agua?

En el siguiente link se puede leer al respecto al día del agua

https://www.infobae.com/2016/03/22/1798826-cuidar-el-agua-un-compromiso-que-gana-adeptos-la-argentina/

Hay distintas campañas de concientización del cuidado del medio ambiente una de ellas es la empresa Corona y también Stella artois. Desde internet se puede ver:

https://www.expoknews.com/campana-de-corona-por-los-oceanos/

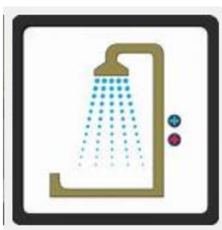
http://www.vinomanos.com/2019/04/stella-artois-y-waterorg/

Comencemos a investigar.

En relación con todo esto, ¿Cuál es nuestra postura? ¿Hacemos algo para el cuidado del agua? ¿Tenemos un consumo responsable? ¿Qué significa tener un consumo responsable?

Veamos…

¿Cuánta agua usan ustedes para bañarse?



Consigna del trabajo

Observación y experimentación

1. Analicen el desafío planteado
2. Experimenten: reflexionen sobre la forma de probar el desafío, que consideran mejor.
3. Utilizar para experimentar los elementos que crean necesarios, en lo posible elementos caseros y sencillos (por ejemplo: baldes o tacho, vasos medidores, reglas o lo que consideren necesario). Documenten fotográficamente el proceso realizado con no más de dos o tres imágenes.
4. Recopilar los datos necesarios para responder al interrogante.
5. Establecer el modelo matemático más apropiado para poder, utilizando los datos obtenidos, representar la solución del desafío.

Entrega y conclusión

Cumplidos los puntos anteriores armen un documento que contenga

a) Nombre y apellido de los integrantes
b) Descripción de todo lo sucedido. Paso a paso de las decisiones que tuvieron que realizar, si se pusieron de acuerdo rápido, como lo hicieron, etc.
c) Coloquen las imágenes de la experiencia realizada
d) Representar la resolución del desafío: realizar gráficos, esquemas, expresiones matemáticas. (se puede utilizar el GeoGebra)
e) Escriban las conclusiones (hacer una referencia al trabajo realizado mencionando aspectos esenciales y la idea final desde el punto de vista de la experiencia y en contexto del cuidado del medio ambiente)

Anexo B. Cuidado de la tierra.

Cuidado de la tierra

¿Cuándo es el Día de la Tierra?

Para poder seguir pensando en cómo cuidar nuestro planeta le proponemos reciclar, pero no cualquier reciclaje, uno que no lleva mucho tiempo y es más sencillo de lo que pensamos y ayudaremos al medio ambiente

En nuestras casas generamos mucha basura, algunas de ellas pueden ser recicladas en tu mismo hogar

El compost puede incluir cáscaras de fruta, restos de verduras, pedazos de madera y hojas secas, entre otros materiales. La composta se usa en agricultura y jardinería como abono orgánico, aunque también se

Foto propia: fondo de la casa de una de las profesoras

A modo de ejemplo los invitamos a ver este enlace para entender que se entiende por hacer compost.

https://www.youtube.com/watch?v=y3AHXOkM-Vc

Situación a pensar**:**

Foto propia

Para poder unirse a la idea, un estudiante piensa en las posibilidades de utilizar un terreno vecino. Le prestaron para esta práctica un espacio de 11 metros hacia cada lado desde la unión de las paredes (es decir GO=GE= 11 m)

Se quiere dejar en esta zona triangular de tierra, la mayor parte para realizar compost y el resto para poner unas flores.

¿Existe un área en la cual este valor tome su valor mayor?

Análisis de la situación

Registren aspectos centrales de la discusión en torno al análisis de la situación. (también los razonamientos que descartan luego de la misma).

Formulen al menos dos conjeturas acordadas en el grupo. Escribirlas

¿Cómo podrían validar las conjeturas realizadas? Escriban todos los procedimientos o expresiones.

Pueden utilizar el GeoGebra como herramienta para pensar la posible solución.

Entrega y conclusión

Cumplidos los puntos anteriores armen dos documentos: un archivo Word y un archivo GeoGebra.

Nombre y apellido de los integrantes (ambos archivos)

Descripción de todo lo sucedido. Paso a paso de las decisiones que tuvieron que realizar, si se pusieron de acuerdo rápido, como lo hicieron, etc. (Word)

Escriban la respuesta a la pregunta (ambos archivos)

Subir los documentos al aula virtual

Anexo C. Cuidado del medio ambiente

Cuidado del medio ambiente

Somos una nueva empresa misionera que quiere fabricar distintos envases los cuales están pensados para cuidar el medio ambiente.

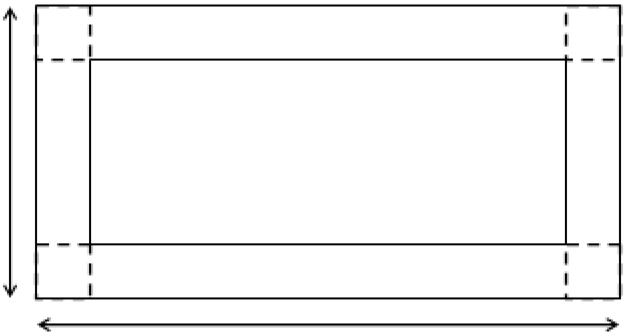
Para el diseño de los mismos se pretende utilizar materiales biodegradables pensado en la siguiente idea:

https://www.clarin.com/ciudades/solo-18-anos-creo-maquina-fabrica-vasos-ecologicos_0_HJ-RWCPDg.html

Problema

Se necesita construir una caja, de las dimensiones aproximadamente de un cajón de naranja, de material biodegradable para trasladar el compost.

Las planchas del material son rectangulares (y de distinta medida) Se establece cortar un cuadrado en cada esquina (ver figura), y armar la caja sin tapa.



¿Qué medida tendría que tener el lado del cuadrado que se recorta para que sea optimo el volumen de la caja armada?

¿Qué cantidad de compost cargaría?

Antes de comenzar a resolver: formular una conjetura acordada con el grupo. ¿Cuáles serían las posibles dimensiones de las cajas?

Análisis de la situación

-Utilicen el GeoGebra como herramienta para pensar la posible solución.

-Registren aspectos centrales de la discusión en torno al análisis de la situación. (también los razonamientos que descartan luego de la misma).

-Escribir la conjetura acordada con el grupo. Para posterior verificación.

- ¿Cómo podrían validar las conjeturas realizadas? Escriban todos los procedimientos

6 Apéndices

Resumen de la presentación en el 3 FORO sobre Trayectorias académicas como objeto prioritario de investigación y producción de conocimiento en la UNaM. Fecha de presentación: 21-10-2021. Modalidad virtual. Aceptado para ser publicado en el libro digital con ISSN.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMER AÑO UNIVERSITARIO. UN RECURSO PARA DESPERTAR LA CURIOSIDAD Y EL INVOLUCRAMIENTO EN LA TAREA.

Mgter Prof. Margarita Benítez. Prof. Roxana Operuk

Resumen

Al ingresar a la universidad los estudiantes traen consigo un bagaje de conocimientos, que deben ser re conceptualizados y puestos en valor en el contexto para poder avanzar en la construcción de nuevos aprendizajes. Es sabido que la mayor deserción se produce en los primeros años, y también el mayor estancamiento en la trayectoria de formación. El interés en la temática conduce al equipo de investigación a encarar este trabajo, con el propósito de reconocer las estrategias heurísticas desplegadas por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, analizarlas, clasificarlas, describirlas e interpretarlas.

La investigación se lleva a cabo con estudiantes de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales (FHyCS) y la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM). El paradigma adoptado es de corte cualitativo, la metodología de tipo mixta, el análisis se centra en las producciones escritas de estudiantes de los primeros años.

Desde la postura que plantea la resolución de problemas por parte de los estudiantes, para desarrollar autonomía en el abordaje de los mismos, se sostiene que durante ese proceso se ponen en juego distintas posturas de acción, estas acciones promueven una actividad investigativa, la formulación de conjeturas y de un plan de resolución y, a medida que se avanza, se vuelve sobre el problema para analizarlo. El estudio espiralado favorece el aprendizaje y la autonomía.

Los conocimientos a los que se pudieran arribar será información relevante para ajustar la planificación de la asignatura, la articulación con otros espacios curriculares en cuanto a contenidos, metodologías de trabajo y enfoques de enseñanza.

Palabras claves: Heurísticas, Resolución de problemas, trayectorias académicas, Universidad.

7 Referencias.

Asamblea General de las Naciones Unidas, noviembre 1992, Resolución A/RES/47/193.

Barrantes, H. (2006), Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 1, Volumen 1, 1-9

Bejarano Franco, M. (2011). El aprendizaje basado en problema: una estrategia de enseñanza en el contexto universitario. En Morales Calvo, S. *Nuevos contextos de enseñanza y aprendizajes en el espacio europeo de enseñanza superior*. (p 127- 137). Editorial Miño y Dávila.

Benítez, M. (2004). *Procesos de construcción y significación de una innovación en la organización académica de una Facultad*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Ingeniería. Maestría en Docencia Universitaria] archivo digital. https://hdl.handle.net/20.500.12219/2878

Benítez, S y Benítez, L. (2013). La resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. VII *Congreso Iberoamericano de educación Matemática* (CIBEM). Montevideo. Uruguay

Camacho, M., & Santos Trigo, M. (2015). Aportes sobre resolución de problemas, tecnología y formación de profesores de matemática. *Avances y realidades de la educación matemática*, 46, 113.

Campistrous Pérez, L y Rizo Cabrera, C (2014). Reflexiones sobre la resolución de problemas en la escuela. En: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (Eds). XV *Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: el sentido de las matemáticas con sentido*. (pp. 394-403).

Caronía, S. Lombardo, G. Operuk, R. Abildgaard, E. Pereyra, V. Corvo, M. Domínguez, L. Ledesma, P. (2014) Proyecto de Investigación: Aplicación De Herramientas

Computacionales Aplicadas Al Proceso De Evaluación Continua En Matemática Código 16Q500 Resolución CD 0222/12 Informe final. Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales.

Chacón, M.; Farías, S.; González, V.; Poco, A. (2009). Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas, *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática.* Formato CD. Buenos Aires

Chrobak, R (2000) La Metacognición y Las Herramientas Didácticas (articulo). *X Jornadas de Producción y Reflexión sobre Educación*. Comahue. Argentina. https://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Chrobak.htm

de Dios Pita, G; Añino, M; Ravera, E; Miyara, A; Merino, Gabriela; Escher; Leandro (2011). Enseñar Matemática a través de problemas abiertos: un desafío para los docentes. In: *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Comité Interamericano de Educación Matemática*. Recife. Brasil.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. In M. Wittrok (Ed.), La investigación de la enseñanza. II *Métodos cualitativos de observación*. Barcelona: Paidós MEC. Pp. 203-47.

Ferragina, R. y Lupinacci, L. (2015). La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas. México. http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol4Tech.pdf

GeoGebra, software libre, versión clásica 5.0.672.0. año 2001 https://www.geogebra.org/

Hammersley, M. y Atkinson, P. (1994). *Etnografía*. Editorial Paidós. Barcelona.

Hernández Sampieri R, Fernández Collado C., Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México. Editorial Mc Graw Hill (quinta edición).

Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In *Invited lectures from the 13th international congress on mathematical education* (pp. 307-324). Springer.

Marino, T. y Rodríguez, M. (2008). Heurísticas en la resolución de problemas matemático: análisis de un caso. En Ascheri, M. E., Pizzaro, R. A y Ferreyra, N. *II Reunión Pampeana de Educación matemática* (REPEM) - Memorias. La Pampa. Argentina. (pp. 213-222)

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013) Guía para la formación en centros sobre las competencias básicas. Gobierno de España. https://sede.educacion.gob.es/publiventa/vistaPrevia.action?cod=16109&area=E

Pinargote Carreño, V (2021). *¿Ayudan las TIC en el desarrollo del pensamiento lógico para la resolución de problemas matemáticos?* Universidad San Gregorio de Portoviejo. Maestría en Educación.

Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. México. Editorial Trillas. vigesimosegunda reimpresión.

Poveda Fernández, W. E. (2020). Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 9(1), 26-42.

Pozo, J I; Pérez Echevarría, M del P (2009) Aprender para comprender y resolver problemas. En Pozo, JI; Pérez Echevarría M del P (Coord.). *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*. (pp.31-43). Editorial Morata.

Pozo, J. Monereo, C. (2009). La nueva cultura del aprendizaje universitario o por que cambian nuestras formas de enseñar y aprender en Pozo, J y Pérez Echeverría M. (Coords.) *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*. (pp. 9- 28). Ediciones Morata.

Prieto Navarro, L. (2008). La resolución de problemas: cómo adquirir y poner en práctica habilidades profesionales en el contexto universitario. En Prieto Navarro, L. Blanco Blanco, A. Morales Vallejo, P. Torre Puente, J. (Ed.) *La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje*. (p. 91-115). Ediciones Octaedro.

Pruner, M., & Liljedahl, P. (2021). *Collaborative problem solving in a choice-affluent environment. ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 753-770. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01232-7

Real Academia Española: Diccionario de la lengua española, 23.ª ed., [versión 23.5 en línea]. https://dle.rae.es https://dle.rae.es/heur%C3%ADstico

Reyes-Rodríguez, A., Vargas, V., Cristóbal, C., & Soberanis, V. (2015). Formas de razonamiento que emergen al resolver problemas de máximos y mínimos con un SGD. *Revista Épsilon*, 32(91), 7-24.

Rodríguez, M (2012). Resolución de Problemas. En Pochulu, M; Rodríguez, M. *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. (pp. 153-174). Editorial Universitaria Villa María.

Rodríguez, M. Barreiro, P. Casseta, I. Chacón, M. González, V. Zuvialde, D. Leonian, P. Marino, T. (2019) *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos*. Educación: educación en ciencias Nro. 2. Ediciones Universidad Nacional de General Sarmiento.

Romero, S. (2011) La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática. *Modelling in Science Education and Learning*. 4, 35-70

Sampieri, R., Collado, C., & Lucio, P. (2004). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Santos Trigos, L (2014) *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. 2da edición. Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 9-34.

Segal, S. y Giuliani, D. (2008). *Modelización matemática en el aula: Posibilidades Y Necesidades*. Libros del Zorzal. Formación docente matemática.

Sirvent, T (2003). El proceso de investigación. *Cuadernos de cátedra*. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.

Sombra Del Río, L. y Costa, V. A. (2012) GeoGebra Como Instrumento de Modelización Matemática en la Enseñanza de la noción de función. En *XII Simposio de Educación Matemática* (SEM) Chivilcoy, Buenos Aires. (pp.371-379) http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/45293