



Tesis de Maestría

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

**El conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar
en la formación del profesor en Matemática.**

Una experiencia referida al contenido

Función Cuadrática.

Lic. Silvina Cafferata Ferri

Dr. Pablo Carranza

Director de Tesis

Dra. Natalia Sgreccia

Codirectora de Tesis

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Agosto de 2018

RESUMEN

El modelo teórico desarrollado por Koehler y Mishra acerca del conocimiento del profesor reconoce tres componentes principales –curricular o disciplinar, pedagógico y tecnológico– y la articulación de las relaciones entre ellos.

En el presente trabajo se identifican los componentes del conocimiento que aparecen involucrados en los estudiantes del Profesorado en Matemática cuando analizan y elaboran actividades respecto del contenido Función Cuadrática.

El enfoque de la investigación es de tipo cualitativo, con un alcance descriptivo, desde un diseño de estudio de caso. Los estudiantes participantes del trabajo son del primer año de la carrera de Profesor en Matemática en un Instituto de Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires, en la asignatura Análisis Matemático I. Para el análisis de sus trabajos, se delimita un sistema de categorías que contempla los aspectos e indicadores identificados.

Como consecuencia de este análisis, se determinan los procesos de configuración del conocimiento tecnológico integrado a lo disciplinar y a lo didáctico en los estudiantes del Profesorado en Matemática al comienzo de su trayecto formativo y se reconocen posibilidades que brindan las TIC para fortalecer el tratamiento y conversión de distintos registros de representación, de las que se apropian los futuros profesores.

PALABRAS CLAVE: Conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar – Formación del Profesor en Matemática – GeoGebra.

ABSTRACT

The theoretical model developed by Koehler and Mishra about a professor's knowledge comprises three main components –curricular or disciplinary, pedagogical, and technological- and the articulation of the relationships between them.

The present article fulfills the identification of the components of knowledge that become involved among the students of the Professorship in Mathematics when they analyze and elaborate activities regarding the Quadratic Function content.

The approach of this research is qualitative with a descriptive scope, shaped in a case-study design. The students who participated in the research are freshmen currently taking the subject Mathematical Analysis I of the Professorship in Mathematics of a Teacher Training College in the city of Buenos Aires. In order to analyze their works, a system of categories is determined, which contemplates the identified aspects and indicators.

As a consequence of this analysis there is, on the one hand, the determination of the processes of configuration of the technological knowledge -integrated into the disciplinary and the pedagogical knowledge- among the students of the Professorship in Mathematics at the beginning of their educational journey and, on the other hand, the acknowledgement of the possibilities afforded by the ICT in order to strengthen the management and the conversion of different extents of representation, which the future professors appropriate.

KEYWORDS: Technological Pedagogical Content Knowledge – Mathematics Teacher Training – GeoGebra.

DEDICATORIA

A Laura, por enseñarme día a día que la vida es mucho más linda cuando se puede compartir.

A mis familiares y amigos, por su apoyo incondicional.

RECONOCIMIENTOS

Al director Dr. Pablo Carranza y a la codirectora Dra. Natalia Sgreccia, por su colaboración y sostén en el desarrollo de esta tesis.

A los alumnos del Profesorado en Matemática, por el tiempo y dedicación en las actividades en las que han participado.

A Yalile Srouy y Andrea Campillo, por la colaboración y apoyo durante el desarrollo del presente trabajo.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Definición del problema	1
1.2 Justificación	3
1.3 Objetivos	5
1.4 Estructura de la presentación de esta investigación	6
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES EN EL TEMA	9
2.1 Conocimiento didáctico del contenido	9
2.2 Conocimiento matemático para la enseñanza	12
2.2.1 Conocimiento común del contenido	14
2.2.2 Conocimiento en el horizonte matemático	15
2.2.3 Conocimiento especializado del contenido	16
2.2.4 Conocimiento del contenido y de los alumnos	18
2.2.5 Conocimiento del contenido y de la enseñanza	19
2.2.6 Conocimiento del contenido y del currículum	20
2.3 Conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar	22
2.3.1 Conocimiento disciplinar	24
2.3.2 Conocimiento pedagógico	24
2.3.3 Conocimiento tecnológico	25
2.3.4 Conocimiento pedagógico disciplinar	26
2.3.5 Conocimiento tecnológico disciplinar	27
2.3.6 Conocimiento tecnológico pedagógico	29

2.3.7 Conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar	29
2.4 Registros de representación	32
2.5 Antecedentes en el tema	38
2.5.1 Acerca del contenido Funciones y Función Cuadrática	39
2.5.2 Acerca de las actividades matemáticas	42
2.5.3 Inclusión de las TIC en las actividades	49
2.5.4 Utilización de GeoGebra en las actividades	56
2.5.5 Otras investigaciones relacionadas con el presente trabajo	59
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	63
3.1 Diseño metodológico	69
3.2 Primera etapa de la investigación	71
3.3 Segunda etapa de la investigación	73
3.4 Tercera etapa de la investigación	75
3.5 Cuarta etapa de la investigación	76
3.6 Instrumento de análisis	77
3.6.1 Aspectos de la función cuadrática	77
3.6.2 Características de las actividades	79
3.6.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades	79
3.6.4 Formas de representación empleadas	79
3.6.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones	80
3.6.6 Análisis didáctico	83
CAPÍTULO 4. RESULTADOS: DESCRIPCIÓN E INTERPRETACIÓN	83

4.1 Primera etapa de la investigación	83
4.1.1 Acerca del Portal Educativo educ.ar	84
4.1.2 Secuencia “Función Cuadrática”	89
4.1.2.1 Actividad 1	90
4.1.2.2 Actividad 2	94
4.1.2.3 Actividad 3	100
4.1.2.4 Actividad de cierre	103
4.2 Segunda etapa de la investigación	107
4.2.1 Resolución de las actividades de la secuencia “Función Cuadrática” por parte de los estudiantes del Profesorado	108
4.2.2 Puesta en común acerca de la resolución de las actividades	112
4.3 Tercera etapa de la investigación	116
4.3.1 Acerca del diseño de la propuesta	117
4.3.2 Resolución de cada propuesta por grupos	123
4.3.2.1 Resolución de la propuesta diseñada por el Grupo 1	123
4.3.2.2 Resolución de la propuesta diseñada por el Grupo 2	127
4.3.2.3 Resolución de la propuesta diseñada por el Grupo 3	132
4.4 Cuarta etapa de la investigación	135
4.4.1 Exposición del Grupo 1	135
4.4.2 Exposición del Grupo 2	139
4.4.3 Exposición del Grupo 3	144
4.5 Análisis de las propuestas de enseñanza	149

4.5.1 Análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1	149
4.5.1.1 Aspectos de la función cuadrática	149
4.5.1.2 Características de las actividades	150
4.5.1.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades	161
4.5.1.4 Formas de representación empleadas	164
4.5.1.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones	167
4.5.1.6 Análisis didáctico	170
4.5.2 Análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2	172
4.5.2.1 Aspectos de la función cuadrática	173
4.5.2.2 Características de las actividades	174
4.5.2.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades	188
4.5.2.4 Formas de representación empleadas	191
4.5.2.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones	194
4.5.2.6 Análisis didáctico	198
4.5.3 Análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 3	200
4.5.3.1 Aspectos de la función cuadrática	200
4.5.3.2 Características de las actividades	202
4.5.3.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades	220
4.5.3.4 Formas de representación empleadas	224
4.5.3.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones	228
4.5.3.6 Análisis didáctico	231
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	235

5.1 Análisis comparativo acerca de las propuestas de enseñanza diseñadas y de las actividades incluidas	235
5.2 Análisis comparativo acerca de los registros de representación	243
5.3 Síntesis de los resultados	248
5.4 Reflexiones finales	258
5.5 Perspectivas abiertas por este trabajo de tesis	261
BIBLIOGRAFÍA	263
6.1 Referencias bibliográficas	263
6.2 Bibliografía consultada	269
ANEXO 1. Secuencias didácticas del sitio educ.ar referidas al contenido “Función Cuadrática”	283
ANEXO 2. Análisis de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la secuencia “Función Cuadrática” del sitio educ.ar	313
ANEXO 3. Diseño de una propuesta de enseñanza por parte de los estudiantes del Profesorado en Matemática acerca del contenido “Función Cuadrática” utilizando GeoGebra	323

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Dominios del Conocimiento Matemático para Enseñar	14
Figura 2.2. Conocimiento Tecnológico Pedagógico Disciplinar	23
Figura 4.1. Captura de pantalla del Portal educ.ar	84
Figura 4.2. Captura de pantalla de la opción “Recursos”	85
Figura 4.3. Captura de pantalla de la opción “Tipo de recurso”	85
Figura 4.4. Captura de pantalla de la opción “Área”	86
Figura 4.5. Captura de pantalla del listado de “Áreas”	86
Figura 4.6. Captura de pantalla de la opción “Disciplina”	87
Figura 4.7. Captura de pantalla de una búsqueda mediante la palabra “Función”	88
Figura 5.1. Subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	238
Figura 5.2. Subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica	239
Figura 5.3. Subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	241
Figura 5.4. Subcategoría: Por el tipo de actuación implicada	242
Figura 5.5. Categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades	243
Figura 5.6. Categoría: Formas de representación empleadas	244
Figura 5.7. Subcategoría: Proceso de traslación	246

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1. Tipos de conversión, directa e indirecta	33
Tabla 2.2. Proceso para realizar una conversión	34
Tabla 2.3. Proceso de traslación respecto del contenido Funciones	48
Tabla 3.1. Períodos de desarrollo de cada etapa de la investigación	69
Tabla 3.2. Categoría: Aspectos de la función cuadrática	77
Tabla 3.3. Subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	77
Tabla 3.4. Subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	78
Tabla 3.5. Subcategoría: Por la naturaleza de la tarea	78
Tabla 3.6. Subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea	78
Tabla 3.7. Subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica	78
Tabla 3.8. Subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución	78
Tabla 3.9. Subcategoría: Por el tipo de solución	78
Tabla 3.10. Subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	78
Tabla 3.11. Subcategoría: Por el tipo de actuación implicada	79
Tabla 3.12. Categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades	79
Tabla 3.13. Categoría: Formas de representación empleadas	79
Tabla 3.14. Subcategoría: Proceso de traslación	80
Tabla 3.15. Subcategoría: Tipos de conversiones	80
Tabla 3.16. Categoría: Análisis didáctico	81
Tabla 4.1. Análisis de la categoría: Aspectos de la función cuadrática – Grupo 1	150

Tabla 4.2. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 1	152
Tabla 4.3. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 1	152
Tabla 4.4. Análisis de la subcategoría: Por la presentación o formato – Grupo 1	153
Tabla 4.5. Análisis de la subcategoría: Por la naturaleza de la tarea – Grupo 1	154
Tabla 4.6. Análisis de la subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea – Grupo 1	154
Tabla 4.7. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 1 ...	156
Tabla 4.8. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 1 ...	156
Tabla 4.9. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 1	157
Tabla 4.10. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de solución – Grupo 1	157
Tabla 4.11. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 1	159
Tabla 4.12. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 1	159
Tabla 4.13. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 1	161
Tabla 4.14. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 1	161
Tabla 4.15. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 1	163
Tabla 4.16. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 1	164

Tabla 4.17. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 1 .	166
Tabla 4.18. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 1 .	167
Tabla 4.19. Análisis de la subcategoría: Proceso de traslación – Grupo 1	170
Tabla 4.20. Análisis de la subcategoría: Tipos de conversiones – Grupo 1	170
Tabla 4.21. Análisis de la categoría: Análisis didáctico – Grupo 1	171
Tabla 4.22. Síntesis de los principales hallazgos a nivel global – Grupo 1	171
Tabla 4.23. Síntesis de los principales hallazgos para cada parte de la propuesta – Grupo 1	172
Tabla 4.24. Análisis de la categoría: Aspectos de la función cuadrática – Grupo 2	174
Tabla 4.25. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 2	176
Tabla 4.26. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 2	176
Tabla 4.27. Análisis de la subcategoría: Por la presentación o formato – Grupo 2	177
Tabla 4.28. Análisis de la subcategoría: Por la naturaleza de la tarea – Grupo 2	178
Tabla 4.29. Análisis de la subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea – Grupo 2	178
Tabla 4.30. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 2 .	180
Tabla 4.31. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 2 .	180
Tabla 4.32. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 2	182
Tabla 4.33. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución –	

Grupo 2	182
Tabla 4.34. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de solución – Grupo 2	183
Tabla 4.35. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 2	184
Tabla 4.36. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 2	185
Tabla 4.37. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 2	187
Tabla 4.38. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 2	187
Tabla 4.39. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 2	190
Tabla 4.40. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 2	190
Tabla 4.41. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 2 .	192
Tabla 4.42. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 2 .	193
Tabla 4.43. Análisis de la subcategoría: Proceso de traslación – Grupo 2	196
Tabla 4.44. Análisis de la subcategoría: Tipos de conversiones – Grupo 2	197
Tabla 4.45. Análisis de la categoría: Análisis didáctico – Grupo 2	198
Tabla 4.46. Síntesis de los principales hallazgos a nivel global – Grupo 2	198
Tabla 4.47. Síntesis de los principales hallazgos para cada parte de la propuesta – Grupo 2	199
Tabla 4.48. Análisis de la categoría: Aspectos de la función cuadrática – Grupo 3	202
Tabla 4.49. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere	

del sujeto – Grupo 3	205
Tabla 4.50. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 3	206
Tabla 4.51. Análisis de la subcategoría: Por la presentación o formato – Grupo 3	206
Tabla 4.52. Análisis de la subcategoría: Por la naturaleza de la tarea – Grupo 3	207
Tabla 4.53. Análisis de la subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea – Grupo 3	207
Tabla 4.54. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 3 .	210
Tabla 4.55. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 3 .	211
Tabla 4.56. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 3	212
Tabla 4.57. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de solución – Grupo 3	212
Tabla 4.58. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 3	215
Tabla 4.59. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 3	216
Tabla 4.60. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 3	219
Tabla 4.61. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 3	220
Tabla 4.62. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 3	223
Tabla 4.63. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 3	224

Tabla 4.64. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 3 .	227
Tabla 4.65. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 3 .	228
Tabla 4.66. Análisis de la subcategoría: Proceso de traslación – Grupo 3	230
Tabla 4.67. Análisis de la subcategoría: Tipos de conversiones – Grupo 3	231
Tabla 4.68. Análisis de la categoría: Análisis didáctico – Grupo 3	232
Tabla 4.69. Síntesis de los principales hallazgos a nivel global – Grupo 3	232
Tabla 4.70. Síntesis de los principales hallazgos para cada parte de la propuesta – Grupo 3	233
Tabla 5.1. Subcategoría: Proceso de traslación	245

CAPÍTULO 1

INTRODUCCION

Se presenta en este capítulo el problema de estudio y las preguntas que motivan esta investigación, las perspectivas del trabajo y su orientación, la justificación y validación que muestran la pertinencia de esta tesis y su adecuación al problema planteado, como así también la intención de la misma a través de sus objetivos.

1.1 Definición del problema

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de la Matemática ha pasado, en resumen, por lo que podrían denominarse tres fases:

En la primera, llamada por Gómez (2001), *de la enseñanza eficiente*, se buscó identificar las características de los buenos profesores, reconociendo principalmente, las relacionadas con la personalidad del docente.

Al tratar de validar estos resultados con el rendimiento de los alumnos, comenzó la segunda fase en la que se buscó relacionar las características del profesor con el aprendizaje de sus estudiantes, y se encontró, entre otras cuestiones, que el conocimiento matemático del profesor, medido por ejemplo por el número de cursos de capacitación y actualización que ha realizado o títulos que ha obtenido, no es un indicador del rendimiento de sus alumnos.

En la tercera fase, *del pensamiento del profesor*, se parte del supuesto de que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que sabe y piensa. La reflexión se libera entonces de

las ideas anteriores que enfatizaban el conocimiento puramente matemático conjuntamente con el conocimiento de algunos aspectos generales de pedagogía.

Respecto de esta fase del pensamiento del profesor y del análisis de esos componentes del conocimiento del profesor podría cuestionarse ¿qué tipos de conocimientos necesitan los profesores?, ¿qué tipos de situaciones deben experimentar para construir esos conocimientos?

En particular, el presente trabajo se centra en lo relativo a la formación inicial del docente, por lo que podría trasladarse la pregunta anterior a aquellas situaciones que deben experimentar los estudiantes del Profesorado para construir esos conocimientos.

A partir de investigaciones iniciadas en 2006 por Koehler y Mishra (2008) se reconocen e identifican en la actualidad tres componentes principales de conocimiento del profesor: el curricular o disciplinar, el pedagógico y el tecnológico.

Esta investigación se circunscribe al análisis referido al conocimiento tecnológico por lo que, en términos generales, podemos cuestionarnos:

¿Qué tipos de experiencias pueden incluirse en la formación inicial del docente para construir el conocimiento tecnológico?

Por otra parte, el trabajo se especifica al área de Matemática. Respecto de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esta asignatura, la investigación se centra en distintos factores que intervienen en dichos procesos y el modo en que se desarrollan durante la formación inicial del profesor en Matemática. Entre ellos, la secuenciación de contenidos, su presentación y el planteo de actividades; la incorporación de recursos informáticos en las secuencias didácticas; el análisis que se realiza respecto de la elaboración de dichas secuencias y de la posible incorporación de recursos informáticos.

Considerando además la amplitud de contenidos matemáticos sobre los que se pueden trabajar, la investigación se circunscribe al contenido Funciones, dada la relevancia que el concepto tiene, no solo desde el punto de vista matemático, sino también en lo referido a su enseñanza durante toda la Escuela Secundaria.

En particular, en esta tesis se lleva a cabo una experiencia con estudiantes del primer año de la carrera del Profesorado en Matemática de un Instituto de Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires.

Interesa entonces específicamente analizar:

¿Qué componentes del conocimiento aparecen involucrados en los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y elaborar actividades respecto del contenido Función Cuadrática?

¿Cómo se manifiesta el conocimiento tecnológico en esas tareas?

1.2 Justificación

La actividad profesional de los profesores tiene lugar en un contexto caracterizado por un elevado grado de complejidad y por un gran dinamismo. Los procesos actuales de integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en las aulas hacen aún más complejo este campo, al introducirse nuevos ámbitos de conocimientos que el profesor debe dominar para desarrollar sus prácticas educativas con tecnologías (Valverde, Garrido y Fernández, 2010).

Los usos creativos de las TIC exigen que podamos, de modo innovador, definir nuevos propósitos para las herramientas existentes y orientarlas hacia una finalidad educativa.

Entre las dificultades que se encuentran para esa incorporación de las TIC en las aulas, resulta aún muy frecuente encontrar a profesores que no poseen la formación adecuada para llevar a cabo esta integración en su actividad diaria. Por otra parte, la diversidad de contextos de enseñanza y de aprendizaje muestra que no existe una única vía para lograr el proceso de integración de dichas tecnologías en las clases. Además, la adopción de las TIC en las aulas depende de que los usos educativos de las mismas sean compatibles con las concepciones pedagógicas del docente.

Diversas investigaciones realizadas desde diferentes enfoques y refiriéndose a las concepciones, creencias, constructos y teorías de los docentes coinciden en señalar cómo estos subyacen en sus acciones pedagógicas y cómo gran parte de los cambios educativos son posibles si los agentes que participan en ellos están dispuestos a modificar sus creencias y sus prácticas (Téliz, 2015, p. 15).

En la actualidad, lo relevante no es si los profesores deben integrar las tecnologías en sus prácticas docentes ya existentes, sino cómo utilizarlas para transformar su enseñanza con tecnologías y crear nuevas oportunidades para el aprendizaje.

En el ámbito de la enseñanza y del aprendizaje con tecnologías resulta necesario seguir profundizando acerca de una estructura teórica y conceptual que pueda dar forma y guiar la investigación en relación con la tecnología educativa.

Entre los conocimientos que los profesores y los estudiantes del Profesorado tienen que manejar para integrar las TIC en sus prácticas o en sus futuras prácticas, están las observaciones y el análisis de los diferentes contextos de aplicación en los que se enseña. El presente trabajo plantea una experiencia que los alumnos del Profesorado en Matemática realizan respecto de dicho análisis, el cual será el fundamento para examinar y elaborar

propuestas de enseñanza referidas al contenido Función Cuadrática que incluya la computadora como recurso didáctico.

Se analiza en esta investigación el pensamiento del estudiante del Profesorado en Matemática acerca de la integración de las tecnologías en sus futuras prácticas docentes en un contenido como el de Función Cuadrática.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Identificar componentes de los conocimientos tecnológico, pedagógico y disciplinar que se activan en estudiantes del Profesorado en Matemática al interactuar con actividades que emplean recursos informáticos.

1.3.2 Objetivos Específicos

Referido, en particular, al análisis y elaboración de actividades que involucran el contenido Función Cuadrática por parte de estudiantes del Profesorado, interesa:

- Caracterizar modos de emergencia del conocimiento disciplinar así como del didáctico del contenido en dichos estudiantes.
- Reconocer posibilidades que brindan las TIC para fortalecer el tratamiento y conversión de registros de representación de las que se apropian los futuros profesores.
- Determinar procesos de configuración del conocimiento tecnológico integrado a lo disciplinar y a lo didáctico por los que van transitando los estudiantes del Profesorado al inicio de su trayecto formativo.

1.4 Estructura de la presentación de esta investigación

Además de este primer capítulo referido a la introducción y a los subcontenidos ya planteados, esta tesis consta de otros cuatro capítulos.

En el Capítulo 2, se incluyen los conceptos y constructos teóricos que constituyen el marco de este trabajo como así también el estado del arte y los antecedentes en el tema relativos al problema de investigación.

En el tercer capítulo se presentan las bases metodológicas de esta tesis, cuyo desarrollo se ha dividido en cuatro etapas, detallando allí los períodos y el marco de trabajo en los que se ha desarrollado cada una de ellas, las características de los participantes del estudio, las técnicas y el instrumento de análisis diseñado.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de la investigación, correspondientes a cada una de las etapas definidas, describiéndolos y analizándolos de acuerdo con las tablas y categorías incluidas en el instrumento detallado en el capítulo anterior.

Y en el quinto capítulo se presentan dos análisis comparativos, uno acerca de las propuestas de enseñanza diseñadas por los estudiantes del Profesorado y otro acerca de los registros de representación involucrados en las actividades incluidas en ellas, junto a una síntesis interpretativa de dichos análisis. Se indican además las conclusiones que surgen como interpretación de los resultados, dando respuesta a los interrogantes planteados en el presente trabajo. Se comparten también algunas posibles futuras líneas de investigación que permitan contribuir con la formación de profesores en Matemática.

Finalmente, se listan las referencias bibliográficas citadas en esta tesis junto a la bibliografía consultada y se incluyen además tres anexos. El primero de ellos contiene las

siete secuencias didácticas del sitio educ.ar referidas al contenido Función Cuadrática. En el segundo, se incluyen los análisis realizados por los estudiantes del Profesorado en Matemática participantes del estudio acerca de una de las secuencias seleccionada del mencionado portal educativo. Y en el tercer anexo se presentan las propuestas de enseñanza diseñadas por los estudiantes acerca del contenido en estudio utilizando GeoGebra como recurso tecnológico.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES EN EL TEMA

Se presentan en este capítulo los constructos teóricos referidos al conocimiento del profesor y su relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje, constituyendo de este modo el marco teórico del presente trabajo de investigación. Como se ha mencionado, resulta de importancia conocer los componentes de dicho conocimiento y, en particular, lo relativo al conocimiento tecnológico. Se conceptualizan también los registros semióticos de representación.

Finalmente, se presentan los antecedentes sobre el tema con base en las publicaciones en español de acceso abierto de las últimas décadas.

2.1 Conocimiento didáctico del contenido

Los estudios realizados por Shulman (1986, 1987, 1997, 2005) y su equipo evidenciaron con claridad la poderosa influencia que tiene la manera en que los docentes entienden la disciplina sobre la forma en que ellos la enseñan. La mayoría de la gente estaría de acuerdo en que un entendimiento del contenido disciplinar específico matemático es importante para la enseñanza de la Matemática aunque, sin embargo, lo que constituye el entendimiento del contenido resulta impreciso en sus alcances.

El autor expresa que es realmente importante que el profesor conozca bien tanto el contenido de la disciplina a enseñar como la didáctica general, pero si ambos se encuentran aislados entre sí, no se está formando a un docente. Publica las primeras ideas que resultan

de los estudios sobre la interacción entre el contenido temático de la disciplina y la didáctica, y propone un tipo especial de conocimiento del profesor que denomina *conocimiento didáctico del contenido*, sugiriendo que existe un conocimiento del contenido especial para la enseñanza de una disciplina, que actúa como puente entre el conocimiento del contenido y la práctica de su enseñanza.

Teniendo en cuenta este tipo de conocimiento, Shulman (1986) propone tres componentes: el conocimiento de la disciplina, el conocimiento del currículum y el conocimiento didáctico del contenido.

Para pensar de manera apropiada acerca del conocimiento de la disciplina, se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un campo; se requiere entender las estructuras del tema. Dichas estructuras incluyen las sustantivas, que hacen referencia a la variedad de formas en las cuales los conceptos y principios básicos de la disciplina se organizan para incorporar sus hechos, y las sintácticas, que son el conjunto de formas en las cuales se establecen la verdad o falsedad, la validez o invalidez de alguna afirmación sobre un fenómeno dado.

El conocimiento del currículum involucra la conciencia de: la manera en que los tópicos se organizan, tanto en un año escolar como a lo largo de la escolaridad; las formas de usar recursos curriculares, tales como los libros de texto o las guías didácticas; la organización de un programa o plan de estudios para los alumnos; las indicaciones de programas en circunstancias particulares.

El conocimiento didáctico del contenido permite al docente transformar el conocimiento del contenido que posee, en formas que son pedagógicamente poderosas y que se pueden adaptar a las variaciones en habilidad y contexto de los alumnos. Representa la

combinación de contenido y didáctica en un entendimiento de la manera en que tópicos particulares, problemas o asuntos se organizan, representan y adaptan a los diversos intereses y habilidades de los alumnos, y se presentan para la enseñanza. La disciplina se transforma para la enseñanza, y esto ocurre cuando el docente interpreta la disciplina, encontrando diferentes formas para representarla, haciéndola accesible a los alumnos.

Incluye conocer cómo pueden ser organizados los elementos del contenido para una enseñanza mejor. Le incumbe la representación y formulación de conceptos, las estrategias didácticas, qué aspectos hacen a los conceptos difíciles o fáciles de aprender, las ideas previas de los alumnos, y las teorías epistemológicas.

En un trabajo posterior, Shulman (1987) amplía a siete los componentes del conocimiento que hace posible la enseñanza. A los tres anteriores, le incorpora: el conocimiento didáctico general, el conocimiento de los alumnos y sus características, el conocimiento de los contextos educativos, y el conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Shulman (1986, 1987) realiza un aporte innovador acerca del pensamiento sobre el conocimiento del profesor, al introducir la idea de conocimiento didáctico del contenido. Supone que a través del proceso de planificación y enseñanza del contenido específico, los docentes desarrollarían formas más potentes de conocimiento de la disciplina.

El conocimiento didáctico del contenido es la manera en que los docentes enseñan la disciplina mediante el acceso a lo que ellos conocen de la misma, acerca de los alumnos a los que les están enseñando, el currículum con el que están trabajando y lo que creen que cuenta como buena enseñanza en sus contextos. Además del entendimiento de hechos y conceptos relevantes en un área de conocimiento, los docentes necesitan entender cómo enseñar un contenido particular.

Gómez (2001) reconoce al conocimiento didáctico del contenido como una habilidad del profesor de ser capaz de comprender la disciplina para él mismo y también volverse capaz de elucidar la disciplina en nuevas formas, reorganizarla, pensarla en actividades, metáforas, ejercicios, ejemplos y demostraciones, de manera tal que pueda ser comprendida por sus alumnos.

2.2 Conocimiento matemático para la enseñanza

Basándose en los trabajos y en las hipótesis acerca del denominado conocimiento didáctico del contenido, especialistas de la Universidad de Michigan desarrollaron una teoría acerca de la Matemática que los docentes ponen en juego al enseñar: el *conocimiento matemático para la enseñanza* (*mathematical knowledge for teaching* o *MKT* de acuerdo con sus siglas en inglés) que involucra aspectos tanto del conocimiento de la disciplina como del conocimiento didáctico del contenido.

Definen el conocimiento matemático para enseñar como el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula, para producir instrucción y crecimiento en el alumno (Hill, Ball y Schilling, 2008). Es el conocimiento matemático requerido para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de la Matemática; una clase de conocimiento profesional de la Matemática diferente del requerido por otras ocupaciones que hacen uso de la Matemática, tales como Ingeniería, Física, Ciencias Económicas, Arquitectura, Bellas Artes, etc.

Mientras parece obvio que los docentes tienen que conocer los conceptos y procedimientos que enseñan, las experiencias y observaciones de los autores han resaltado dimensiones adicionales del conocimiento que, según ellos, resultan útiles. Han focalizado su esfuerzo

en la naturaleza de este conocimiento adicional, procurando dilucidar qué necesitan conocer los docentes sobre Matemática para lograr trabajar de la mejor manera posible con sus alumnos en clase.

Hay tareas predecibles y recurrentes que los docentes enfrentan, que están profundamente entramadas con la Matemática y el razonamiento matemático, como por ejemplo analizar dónde se ha equivocado un alumno, mostrar por qué un determinado algoritmo no es válido, usar representaciones matemáticas, etc. Cada una de estas tareas de enseñanza involucra tanto el razonamiento matemático como el pensamiento didáctico.

Los estudios del mencionado equipo de investigación los han llevado a hipotetizar algunas mejoras para el concepto del conocimiento didáctico del contenido y el concepto más amplio del conocimiento del contenido para la enseñanza.

Se focalizan sobre la tarea de la enseñanza para enmarcar su conceptualización sobre conocimiento y habilidades matemáticas requeridas por los docentes.

Identifican y definen dominios dentro de dos grandes grupos de conocimientos puestos en juego: *conocimiento de la disciplina* y *conocimiento didáctico del contenido* (Fig. 2.1).

El conocimiento de la disciplina incluye: el conocimiento común del contenido, el conocimiento en el horizonte matemático y el conocimiento especializado del contenido.

El conocimiento didáctico del contenido incluye: el conocimiento del contenido y de los alumnos, el conocimiento del contenido y de la enseñanza, y el conocimiento del contenido y del currículum.

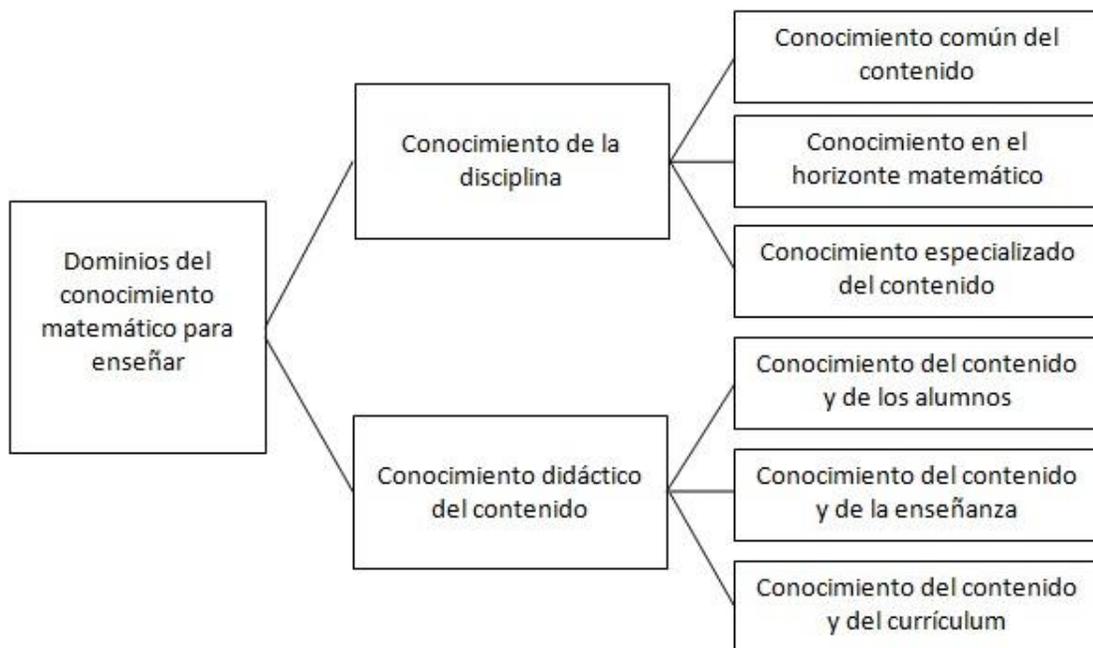


Figura 2.1. Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Fuente: elaboración propia.

2.2.1 Conocimiento común del contenido

Conocimiento y habilidad matemáticos que se usan en diversos ámbitos, no solo de enseñanza, que recurren a la Matemática para operar, formalizar ideas, derivar razonamientos, etc.

Los docentes necesitan conocer los conceptos y teorías matemáticas que enseñan, deben reconocer, por ejemplo, las respuestas equivocadas de sus estudiantes o una definición inexacta en un libro de texto. Cuando los docentes escriben en el pizarrón, necesitan usar términos y notación correctamente. Deben ser capaces de resolver ellos mismos las tareas matemáticas que asignan a sus alumnos. En la proyección del conocimiento matemático que necesitan los docentes, se sostiene que un entendimiento de la Matemática en el currículum escolar juega un rol decisivo en la planificación de la enseñanza.

Hill y Ball (2004) caracterizan este conocimiento como el conocimiento del contenido que se usa en el trabajo de enseñanza mediante formas en común con el modo en que se utiliza en la mayoría de otras profesiones u ocupaciones que usan la Matemática, o lo asocian al conocimiento y habilidad matemáticos que posee cualquier adulto escolarizado.

Incluye el conocimiento de la materia y sus estructuras organizativas. La trascendencia de este dominio radica en que los docentes deben conocer la asignatura que ellos enseñan. Conocer una disciplina para su enseñanza requiere más que conocer hechos y conceptos; es ser capaz de usar la Matemática requerida dentro del trabajo de enseñanza. Los docentes deben entender los principios organizativos, las estructuras y las reglas, para establecer lo que es legítimo hacer y decir en un campo.

2.2.2 Conocimiento en el horizonte matemático

Ball y Bass (2009) lo definen como la conciencia sobre la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan a través del currículum. Consideran que el profesor debe tener un conocimiento más avanzado del contenido específico, que lo lleve a plantearse algunas cuestiones, como por ejemplo, ¿está siendo matemáticamente distorsionado un contenido en el tratamiento escolar?, ¿hay alguna desviación en las ideas matemáticas tratadas?, ¿puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita?, ¿es interesante desde el punto de vista matemático esto que surgió en la clase?, ¿es determinada ocurrencia una perspicacia matemática importante?

Entre las acciones que comprende este dominio, los autores mencionan: tener criterio sobre la trascendencia matemática de los contenidos en tratamiento, más allá de cierto año

escolar; escuchar verdaderamente lo que los alumnos están diciendo, para detectar el alcance matemático de sus afirmaciones; resaltar y subrayar aspectos matemáticos que se consideren claves; anticipar y hacer conexiones matemáticamente consistentes; reconocer oportunidades matemáticas cuando surgen en la clase y no se tenían previstas; captar eventuales confusiones matemáticas que estén subyacentes y que puedan provocar distorsiones matemáticas posteriores.

Estas acciones de enseñanza dependen del conocimiento matemático, pero en relación con la manera en que ese conocimiento se genera y se estructura disciplinariamente, a fin de establecer consideraciones para la organización de la enseñanza.

2.2.3 Conocimiento especializado del contenido

Este dominio comprende los conocimientos y habilidades matemáticos exclusivos para la enseñanza. Se trata de un conocimiento matemático no típicamente requerido para propósitos distintos a los de la enseñanza (Ball, 2010).

Al buscar, por ejemplo, patrones en errores de alumnos, o al examinar si una propuesta no estándar funcionaría en general, los docentes tienen que hacer un tipo de trabajo matemático que no es requerido ni deseable en otros ámbitos. Este trabajo involucra un tipo de desmenuzamiento de la Matemática que no es requerido en ámbitos distintos al de la enseñanza.

La mayoría de las tareas cotidianas en la enseñanza son propias de este trabajo particular, como por ejemplo: presentar las ideas matemáticas; responder preguntas a los alumnos del tipo por qué; encontrar un ejemplo para construir un aspecto matemático específico;

reconocer qué está involucrado al usar una representación matemática particular; conectar las representaciones a ideas matemáticas subyacentes y a otras representaciones; explicar los objetivos y propuestas matemáticas; apreciar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto; modificar tareas matemáticas para que sean más fáciles o más difíciles, y para que se adapten a sus cursos y alumnos; evaluar la plausibilidad de los pedidos de alumnos; dar o evaluar explicaciones matemáticas; elegir y desarrollar definiciones útiles; usar notación y lenguaje matemáticos, y ser crítico ante su uso; formular preguntas matemáticamente productivas; seleccionar representaciones para propuestas particulares; evaluar equivalencias, etc.

Consideradas en conjunto, estas tareas de enseñanza de la Matemática demandan un entendimiento y razonamiento exclusivo. La enseñanza requiere un conocimiento más allá del que se le está enseñando a los alumnos. La enseñanza involucra el uso de conocimiento matemático de manera amplia, no comprimida, que podría enseñarse directamente a los alumnos mientras desarrollan su razonamiento. Sin embargo, el objetivo con los alumnos es desarrollar fluidez con el conocimiento matemático conciso. En una etapa final, los alumnos deberían ser capaces de usar ideas y procedimientos matemáticos sofisticados. Los docentes, sin embargo, tienen que sostener un conocimiento matemático descomprimido, porque la enseñanza involucra la construcción de características particulares del contenido, visibles para y aprehensibles por los alumnos.

Los docentes deben ser capaces de explicar cómo se usa el lenguaje matemático; cómo elegir, construir y utilizar con efectividad representaciones matemáticas; y cómo explicar y justificar sus ideas matemáticas. Es más que una comprensión consistente de los contenidos matemáticos involucrados. Las demandas de las tareas cotidianas de la enseñanza crean la

necesidad de destrezas y dominio de un cuerpo de conocimientos especializados para la enseñanza.

Mientras el conocimiento común del contenido se refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento está capacitado, el conocimiento especializado del contenido atiende, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico. Para esta última acción es posible que un sujeto adulto, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la habilidad ni la posibilidad de llevarla a cabo.

2.2.4 Conocimiento del contenido y de los alumnos

Combina el conocimiento sobre aspectos inherentes a los alumnos como aprendices de la Matemática. Es el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los alumnos piensan, saben, o aprenden un contenido particular (Hill et al., 2008). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Este dominio involucra una idea o propuesta matemática particular y el conocimiento sobre lo que los alumnos suelen pensar o hacer. Integra el conocimiento acerca de la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos.

Este tipo de conocimiento permite al docente anticipar qué pueden probablemente pensar o encontrar confuso sus alumnos sobre determinada explicación. Al elegir un ejemplo, los

docentes necesitan predecir qué les interesará o motivará a sus alumnos. Al asignar una tarea, los docentes necesitan anticipar qué harán y qué encontrarán fácil o difícil sus alumnos. Los docentes deben además ser capaces de escuchar e interpretar los pensamientos emergentes e incompletos de sus alumnos, expresados en las formas en que ellos mismos usan el lenguaje. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico, la familiaridad con los alumnos, y sus pensamientos matemáticos.

2.2.5 Conocimiento del contenido y de la enseñanza

Ball, Thames y Phelps (2008) reconocen que este dominio de conocimiento es una combinación entre un concepto o procedimiento matemático y los principios didácticos para la enseñanza de tal contenido en particular. Comprende las formas de abordar el desarrollo de la disciplina matemática para hacer accesible su contenido a otros, las orientaciones para organizar la gestión de la clase, decidir los recursos didácticos, organizar los instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos, etc.

La mayoría de las tareas de docencia en Matemática requiere un conocimiento matemático para el diseño de la enseñanza. Los profesores, por ejemplo, secuencian contenidos particulares para enseñar; eligen los ejemplos para comenzar y para profundizar un contenido; evalúan las ventajas y las desventajas didácticas de las representaciones que se usan para enseñar una idea específica; identifican qué métodos y procedimientos diferentes se permiten desde la enseñanza; distinguen entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han de ser contenido de enseñanza; toman decisiones sobre cuáles

contribuciones aportadas por los alumnos conviene trabajar para proseguir la enseñanza de acuerdo a lo planificado y proyectado para la clase o un conjunto de clases, cuáles ignorar por el momento, y cuáles dejar para más adelante. Durante una discusión de clase, un docente debe decidir cuándo hacer una pausa para aclarar algo, cuándo usar un comentario de un alumno para construir algo en conjunto, cuándo formular una nueva pregunta o proponer una nueva actividad para el aprendizaje adicional de los alumnos, etc. Cada una de estas decisiones requiere la coordinación entre la Matemática y las opciones y propuestas didácticas en juego.

Los autores consideran que este dominio de conocimiento involucra conocer acerca de la Matemática y de la enseñanza, como por ejemplo, conocer las ventajas didácticas de diferentes representaciones de cierta cuestión; saber construir a partir de los razonamientos y estrategias de los alumnos, procesos para tratar y corregir sus errores o concepciones erróneas.

Cada una de las tareas que involucra este dominio de conocimiento requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico y un entendimiento de los aspectos didácticos que afectan el aprendizaje del alumno.

2.2.6 Conocimiento del contenido y del currículum

Involucra un entendimiento de los programas curriculares e instruccionales disponibles para la enseñanza de una disciplina en varios niveles educativos. Comprende el rango completo de programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado, la variedad de materiales disponibles en relación con tales

programas y el conjunto de características que sirven tanto como indicación o contraindicación para el uso de materiales curriculares particulares en circunstancias específicas (Hill et al., 2008).

Se señalan dos dimensiones de este conocimiento que son importantes para la enseñanza: el conocimiento lateral del currículum, que relaciona el conocimiento del currículum que se está enseñando con el currículum que los alumnos están aprendiendo en otras clases de otras asignaturas, y el conocimiento vertical del currículum, que incluye la familiaridad con los contenidos que se enseñan en la misma asignatura en los distintos años de la escolaridad tanto previos como posteriores.

El diseño de la actividad docente exige hacer un recorrido transformador, que comienza en la materia tal y como es comprendida por el profesor y acaba en la mente y motivación de los estudiantes. El proceso de transformación conlleva la realización de los siguientes pasos: preparación, que supone la interpretación y análisis crítico de textos, estructuración y segmentación, creación de un repertorio curricular y clarificación de los objetivos; representación, mediante el uso de una variedad de formas de expresión de conceptos y procedimientos que incluye analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, explicaciones; selección, lo cual implica escoger dentro de un conjunto de conceptos didácticos que incluye métodos de enseñanza, organización y gestión de la actividad docente; adaptación y ajuste a las características de los alumnos, considerando para ello los conceptos, ideas previas, conceptos erróneos y dificultades de aprendizaje, idioma, cultura y motivaciones, clase social, género, edad, capacidad, aptitud e intereses.

La enseñanza involucra, entre otras cosas, la organización y gestión del aula, la presentación del contenido curricular, el establecimiento de interacciones docente-alumnos-medios, y la puesta en práctica de metodologías y estrategias didácticas para el aprendizaje. En la actualidad, con el continuo incremento de las computadoras en el aula y las numerosas aplicaciones de las TIC, este modelo necesita ser ampliado, para tomar en consideración las necesidades para estudiar y comprender el pensamiento del profesor sobre el uso educativo de las TIC.

2.3 Conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar

Koehler y Mishra (2006, 2008) amplían el concepto de conocimiento didáctico del contenido, desarrollando un enfoque teórico que considere el dominio de la tecnología educativa. La base de este modelo teórico es la comprensión de que la enseñanza es una actividad altamente compleja, que precisa de muchos tipos de conocimiento, que tiene lugar en un contexto dinámico. Se proponen que este marco teórico-conceptual sirva no solo para unificar las propuestas de integración de tecnologías en la educación sino también para transformar la formación docente y su práctica profesional. Los investigadores mencionados formularon este enfoque en el año 2006 y han continuado investigando y publicando sobre este modelo teórico de integración de las TIC en las prácticas educativas. Reconocen tres componentes principales de conocimiento: *contenido curricular o conocimiento disciplinar*; *pedagogía o conocimiento pedagógico*; y *tecnología o conocimiento tecnológico*.

El aporte de este enfoque consiste en la articulación de las relaciones entre el contenido curricular, la tecnología y la pedagogía. En términos prácticos, esto significa que además de considerar cada uno de esos componentes de manera aislada, los considera por pares y los tres en conjunto (Fig. 2.2).

Estas interacciones entre estos dominios del conocimiento están representadas como: el conocimiento de la pedagogía y el contenido curricular, denominado *conocimiento pedagógico disciplinar*; el conocimiento de la tecnología y el contenido curricular, denominado *conocimiento tecnológico disciplinar*; el conocimiento de la pedagogía y la tecnología, denominado *conocimiento tecnológico pedagógico*; y el conocimiento de la pedagogía, el contenido curricular y la tecnología, denominado *conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar* (*technological pedagogical content knowledge* o *TPCK*, por sus siglas en inglés).



Figura 2.2. *Conocimiento Tecnológico Pedagógico Disciplinar*.
Fuente: elaboración propia, basado en Koehler y Mishra (2006, 2008).

2.3.1 Conocimiento disciplinar

El conocimiento del contenido curricular o conocimiento disciplinar está asociado a la asignatura o disciplina que se enseña y se aprende. Incluye los conocimientos de conceptos, hechos, teorías, ideas, procedimientos, estructuras organizativas, evidencias y pruebas, las prácticas establecidas y enfoques sobre el desarrollo de dicho conocimiento, las redes conceptuales que permiten explicar, organizar y conectar los conceptos y las reglas para probar y verificar el conocimiento de la disciplina (Koehler, Mishra y Cain, 2015).

Es importante para los profesores comprender los fundamentos profundos de la disciplina que enseñan. De acuerdo con Cejas, Navío y Barroso (2016) desde un punto de vista tradicional, el contenido y su dominio por parte del docente ha sido fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje debido, en parte, a un enfoque excesivamente centrado en la transmisión del conocimiento. En el actual contexto empieza a cuestionarse este enfoque y es el estudiante el que debe construir su propio conocimiento de forma autónoma y acceder a él a través de la orientación del profesor.

2.3.2 Conocimiento pedagógico

El conocimiento de la pedagogía o conocimiento pedagógico comprende los procesos y prácticas o métodos de enseñanza y de aprendizaje, e incluye, entre otros aspectos, a los objetivos generales, valores y metas de la enseñanza (Koehler y Mishra, 2008). Requiere una comprensión de teorías sobre el desarrollo humano, teorías cognitivas y sociales y cómo aplicarlas a los alumnos en el aula.

Es una forma genérica de conocimiento que se aplica al aprendizaje del alumno, la gestión u organización escolar, la planificación docente y el desarrollo curricular o la evaluación de los aprendizajes.

Incluye estrategias didácticas o métodos de enseñanza, aplicados en el aula, la naturaleza de los destinatarios de la acción formativa o las técnicas para evaluar la comprensión del alumno.

Un profesor con un profundo conocimiento pedagógico comprende cómo el estudiante construye conceptos y adquiere competencias o cómo desarrolla estrategias cognitivas y una adecuada motivación hacia el aprendizaje.

2.3.3 Conocimiento tecnológico

El conocimiento de la tecnología o conocimiento tecnológico está en un estado de cambio continuo. Se refiere al conocimiento de tecnologías tradicionales (libros, tiza, pizarrón, etc.) y de tecnologías más recientes (Internet y sus aplicaciones, dispositivos digitales, etc.).

Este conocimiento incluye las habilidades que permiten al docente operar con esas tecnologías (cómo usar una computadora y sus periféricos, utilizar herramientas informáticas, gestionar archivos, navegar en Internet, emplear el correo electrónico, etc.).

Dado que las tecnologías se modifican continuamente, el conocimiento tecnológico debe acompañar este cambio. Por esto, requiere las competencias necesarias para estar continuamente aprendiendo y adaptándose a los cambios tecnológicos que se producen en el tiempo.

Koehler y Mishra (2008) creen que existen ciertas formas de pensamiento sobre y de trabajo con la tecnología, que puede aplicarse a todas las herramientas tecnológicas. En este sentido, la definición del conocimiento de la tecnología se aproxima a la de *fluidez de la tecnología de la información*, propuesta por el Comité para la Alfabetización en Tecnologías de la Información del *National Research Council* en 1999. Va más allá de la tradicional noción de alfabetización computacional, porque requiere que las personas comprendan las TIC de forma suficientemente amplia y global como para ser capaces de aplicarlas, de modo productivo, al trabajo y a su vida cotidiana; saber reconocer cuándo las TIC pueden ayudar o impedir el logro de una meta, y saber adaptarse continuamente a los cambios de estas tecnologías.

La fluidez de la tecnología de la información requiere una comprensión más profunda y un mayor dominio de las tecnologías para procesar la información, la comunicación y la solución de problemas que las que se derivan de la definición tradicional de alfabetización informacional.

La adquisición de conocimiento tecnológico permite a los profesores llevar a cabo una variedad de tareas diversas usando las TIC y desarrollando diferentes formas de llevar a cabo una tarea dada. Esta conceptualización no establece un estado final sino más bien un estado en desarrollo continuo.

2.3.4 Conocimiento pedagógico disciplinar

El conocimiento de la pedagogía y del contenido curricular o conocimiento pedagógico disciplinar es coherente con la idea de Shulman desarrollada en los apartados anteriores, y

aplicable a la enseñanza de un contenido específico. Se refiere así al conocimiento que permite comprender cómo se debe organizar y adaptar un contenido para ser enseñado.

Se ocupa de aspectos que son claves en una práctica educativa: conciencia de los errores conceptuales más comunes y formas de descubrirlos; la importancia de desarrollar enlaces y conexiones entre diferentes ideas del contenido curricular; el conocimiento previo del alumno; estrategias alternativas de enseñanza; flexibilidad para explorar diversas formas de comprender una misma idea o problema; etc.

La noción central de este conocimiento es la transformación de la materia para la enseñanza. Esta transformación tiene lugar cuando el profesor interpreta la disciplina, encuentra múltiples formas para representarla, y adapta los materiales didácticos a concepciones alternativas y al conocimiento previo del alumno.

De acuerdo con Magadán (2012), a diferencia del saber de un experto centrado fundamentalmente en un campo de saber, esta intersección hace hincapié en la articulación entre los conceptos propios de la disciplina y las técnicas pedagógicas. También incluye el conocimiento acerca de los saberes que los alumnos traen consigo, sus estrategias, ideas previas, errores conceptuales y metodológicos más frecuentes, etc.

2.3.5 Conocimiento tecnológico disciplinar

El conocimiento de la tecnología y del contenido curricular o conocimiento tecnológico disciplinar es una comprensión de la forma en la que la tecnología y el contenido curricular se influyen, limitándose o potenciándose, el uno al otro (Cabero, 2014). Comprender el impacto de la tecnología sobre las prácticas y el conocimiento de una determinada

disciplina es básico si se quiere desarrollar apropiadas herramientas tecnológicas con fines educativos.

La elección de las tecnologías posibilita y limita los tipos de conceptos que pueden ser enseñados. De la misma forma, determinadas decisiones sobre el contenido pueden limitar los tipos de tecnologías que pueden ser utilizados.

La tecnología limita los tipos de posibles representaciones, pero también posibilita la construcción de nuevas y variadas representaciones. Las nuevas herramientas tecnológicas pueden además proporcionar un mayor grado de flexibilidad al moverse a través de estas representaciones.

Los profesores necesitan dominar algo más que la asignatura que ellos enseñan; deben poseer también una profunda comprensión de la forma en que su disciplina puede ser cambiada al aplicar las tecnologías. El profesor necesita comprender qué tecnologías específicas son las mejores situadas para ser utilizadas en su contenido de aprendizaje y cómo el contenido curricular dicta o cambia la tecnología, y viceversa (Koehler y Mishra, 2006).

Este conocimiento implica saber elegir qué tecnologías son las mejores para enseñar un tema disciplinar determinado y cómo utilizarlas de forma efectiva para abordarlo. Los docentes tienen que conocer de qué modo el contenido disciplinar es transformado por la aplicación de una tecnología y cómo el contenido a veces determina o cambia la tecnología que se utilizará. La selección de las tecnologías habilita o limita el tipo de temas que se pueden enseñar, así como la selección de un tema a veces limita la tecnología que se puede usar.

2.3.6 Conocimiento tecnológico pedagógico

El conocimiento de la tecnología y la pedagogía o conocimiento tecnológico pedagógico es el conocimiento de las tecnologías disponibles, de sus componentes y su potencial, para ser utilizadas en contextos de enseñanza y de aprendizaje (Koehler y Mishra, 2008). Es también una comprensión acerca de cómo cambian la enseñanza y el aprendizaje cuando se utilizan determinadas tecnologías. Incluye el conocimiento de las posibilidades y limitaciones pedagógicas del conjunto de herramientas tecnológicas a utilizar en los contextos de aprendizaje de disciplinas específicas.

Esta intersección entre tecnología y pedagogía implica un conocimiento acerca de la existencia de herramientas para realizar determinadas tareas y la habilidad para elegir las en función de sus posibilidades de adaptación a contextos educativos. Una misión importante de este componente del conocimiento del profesor es el desarrollo de la flexibilidad creativa con las herramientas disponibles para reformular sus propósitos técnicos a finalidades educativas específicas. En el terreno del software, la mayoría de los programas son diseñados para contextos no educativos. Los profesores necesitan desarrollar habilidades que superen la propia tecnología y la reconfiguren de manera creativa para sus propósitos pedagógicos.

2.3.7 Conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar

La integración de todos los conocimientos da lugar al conocimiento de la pedagogía, el contenido curricular y la tecnología o conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar, que Koehler y Mishra (2006, 2008) consideran como una forma emergente de

conocimiento que va más allá de los tres conocimientos básicos: contenido curricular, pedagogía y tecnología. Es una comprensión que emerge desde la interacción de los tres componentes esenciales del modelo.

De acuerdo con Magadán (2012) el conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar es, en definitiva, la base de una buena enseñanza con tecnología y requiere la comprensión de:

- la representación de ideas y de conceptos mediante el uso de tecnologías,
- las técnicas pedagógicas que utilizan la tecnología de forma constructiva para enseñar un contenido,
- el conocimiento sobre qué hace fácil o difícil la comprensión de un concepto y cómo la tecnología puede contribuir a compensar o reparar esas dificultades de aprendizaje que enfrentan los alumnos,
- el conocimiento de las ideas e hipótesis previas de los alumnos y de cómo la tecnología puede ser utilizada para construir conocimiento disciplinar, es decir, cómo las tecnologías pueden ser utilizadas para construir nuevos conocimientos a partir del conocimiento preexistente y desarrollar nuevas epistemologías o mejorar las antiguas.

Este conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar es una forma de conocimiento que los profesores ponen en juego en cualquier momento de su actividad docente. Cada inconveniente que genera la práctica de aula se presenta a los profesores como una combinación única de los tres factores y, en consecuencia, no existe una solución tecnológica simple para cada situación educativa. Las soluciones se hallan en la habilidad del profesor para navegar con flexibilidad en el espacio definido por los tres elementos y sus complejas interacciones, en unos contextos específicos. Ignorar la complejidad inherente a cada componente del conocimiento, o la complejidad de las relaciones entre

estos componentes, puede conducir a una simplificación de las soluciones o de los errores. Es por eso que los profesores no solo necesitan desarrollar una flexibilidad cognitiva para cada uno de estos conocimientos básicos sino también sobre la manera en la que los mismos interactúan, de modo que puedan encontrar soluciones que sean sensibles a los contextos específicos (Sgreccia, 2012).

Una verdadera integración de la tecnología requiere comprender y negociar la interrelación entre los tres tipos de conocimiento. Un docente capaz de negociar estas relaciones representa un saber experto diferente del de un experto disciplinar (un matemático o un historiador), o de un experto en tecnología (un ingeniero en sistemas), o un experto en pedagogía (un licenciado en educación). La integración de la tecnología en la enseñanza de un contenido disciplinar requiere el desarrollo de una sensibilidad que atienda a la relación dinámica y transaccional entre los tres componentes (Magadán, 2012).

Las tecnologías digitales actuales, en su constante evolución y cambio, impiden que se vuelvan un lugar común y requieren el desarrollo de habilidades y estrategias para aprender continuamente cómo usar las nuevas versiones, los nuevos modelos, las nuevas aplicaciones. Estas tecnologías tienen potencial para modificar la naturaleza de una clase, ya que juegan un papel esencial en la manera en que se pueden representar, ilustrar, ejemplificar, explicar y demostrar las ideas y conceptos de una disciplina para hacerlos más accesibles a los alumnos.

De acuerdo con Magadán (2012) desde este enfoque y modelo se enfatiza la necesidad de no pensar la tecnología como un agregado, colorido, separado y por lo tanto adicional, al conocimiento pedagógico disciplinar. El conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar supone que integrar las TIC en las clases implica no solamente conocer las herramientas

sino también reacomodar las prácticas, revisar y resignificar los conocimientos pedagógicos y disciplinares cuando se incluye la tecnología.

¿Cómo se traduce la interrelación de los conocimientos tecnológicos pedagógicos disciplinares en las prácticas de aula? Como en toda planificación, se trata de la toma de decisiones fundamentadas en criterios, en expectativas de logro, en conocimientos y en experiencias previas.

Tal como se ha indicado, se analiza en este trabajo el modo en el que se manifiesta ese conocimiento tecnológico en los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y elaborar actividades acerca de un contenido particular, como es el caso de Función Cuadrática, incluyendo tareas que utilicen la computadora como recurso didáctico.

2.4 Registros de representación

El análisis de los componentes del conocimiento del profesor y de la construcción de ese conocimiento durante su formación se realiza también desde la perspectiva de los registros semióticos de representación de Duval (1993, 1998, 2004).

En Matemática las representaciones son necesarias debido a que los objetos matemáticos para ser comunicados deben ser representados y, a través de esto, intentar dar significado a una cuestión abstracta. Al representar se intenta construir significados que permiten enlazar el pensamiento operativo, tanto operacional como procedimental, y el estructural, tanto el figurativo como el conceptual.

De acuerdo con Duval (1993) existe la posibilidad de confundir el objeto matemático con una de sus representaciones. De una representación a otra, no son los mismos aspectos de

un contenido los que son representados, por lo que es importante que un objeto matemático sea presentado en diferentes tipos de representaciones.

La relación existente entre los diferentes modos de representación debe ser considerada dentro de las actividades de enseñanza y de aprendizaje, con la finalidad de tener una múltiple representación del concepto.

Existen problemas en el traslado de representaciones, por lo que es necesario realizar actividades donde estén presentes múltiples representaciones y que estas actividades sean además diseñadas para promover la conversión a diferentes formas de representación.

De acuerdo con Janvier (1987, citado en Cortés, 2005), respecto de los modos de representación para el tratamiento de contenidos relativos a Funciones, se encuentran cuatro formas de representación: descripción verbal, tablas, gráficas y fórmulas o ecuaciones.

Se definen además dos tipos de conversiones: la directa y la indirecta. La directa es aquella donde es posible pasar de un modo de representación a otro y la indirecta es aquella donde, para pasar de una forma de representación a otra, existe la necesidad de intercalar una tercera que sirva de puente (Tabla 2.1).

Por ejemplo, para pasar de una ecuación a una gráfica se realiza un proceso ecuación – tabla – gráfica, aunque la conversión ecuación – gráfica puede realizarse sin la necesidad de construir una tabla, cuando se logran identificar las unidades significativas propias de la escritura algebraica y cómo influyen estas en la gráfica.

Tabla 2.1. Tipos de conversión, directa e indirecta

	Tabla	Gráfica	Ecuación
Tabla		Directo	Indirecto
Gráfica	Directo		Indirecto
Ecuación	Directo	Indirecto	

Fuente: Janvier (1987, citado en Cortés, 2005, p. 5).

Duval (1998) define lo que es un *registro semiótico de representación* como una representación que permite tres actividades cognitivas: identificación de una representación; transformación interna en el mismo sistema de representación, que denomina tratamiento; transformación de un tipo de representación a otro, que denomina conversión.

Cortés (2005) resume en una tabla (Tabla 2.2) el proceso a seguir para realizar una conversión.

Tabla 2.2. Proceso para realizar una conversión

→	Tabla	Gráfica	Ecuación
Tabla		Localizar puntos en el plano	Localizar los valores significativos de la tabla
Gráfica	Transformar los puntos del plano en coordenada		Localizar los puntos gráficos significativos
Ecuación	Evaluar la ecuación en los puntos de interés	Localizar en la ecuación el significado de los parámetros	

Fuente: Cortés (2005, p. 6).

Para realizar conversiones entre registros semióticos de representación entran en juego diferentes aspectos:

Tabla a gráfica: El proceso de conversión de una tabla a una gráfica se lleva a cabo localizando los puntos de la tabla en el plano cartesiano, considerando a un par de números como un punto en dicho plano. Después de hacerlo para cada pareja de números, se parte de una idea de continuidad y regularidades y se unen los puntos quedando la gráfica como resultado de esta unión.

Tabla a ecuación: En este proceso de conversión entra en juego el hecho de determinar cuáles son los puntos de la tabla que nos permiten escribir la ecuación, como por ejemplo, encontrar el valor de y cuando x es cero, que es la ordenada al origen o término

independiente en una expresión polinómica; encontrar el valor de x cuando y es cero, que es la abscisa al origen.

Gráfica a tabla: Cuando se realiza una conversión de gráfica a tabla, lo que se hace es localizar un punto de la gráfica y obtener su proyección tanto en el eje de las abscisas como en el eje de las ordenadas, es decir, transformar un punto del plano cartesiano a una pareja de números.

Gráfica a ecuación: Uno de los aspectos importantes para realizar este tipo de conversión es el de encontrar los parámetros significativos de una gráfica y cómo estos parámetros se relacionan con la escritura algebraica.

Ecuación a tabla: En este caso el proceso de conversión envuelve la utilización de un algoritmo de evaluación en el cual entra en juego asignar un valor numérico a una de las variables y , haciendo las operaciones indicadas en la ecuación, obtener el valor de la otra variable.

Ecuación a gráfica: Para realizar esta conversión se debe conocer lo que representa cada uno de los parámetros de la escritura algebraica.

El proceso visual involucra el pensamiento figurativo y el operacional, por lo que se puede considerar a este proceso el preludio a la abstracción de conceptos que permitirá formar modelos de una situación (Hitt, 1992). La visualización va más allá de la simple percepción apoyando la formación de las imágenes conceptuales. Dado que la visualización permite introducir la abstracción de conceptos matemáticos, se constituye en un importante recurso didáctico para el profesor, por lo que es necesario contar con materiales y actividades que promuevan en los estudiantes los procesos visuales.

Los conceptos matemáticos pueden ser representados por figuras, gráficas, fórmulas, tablas, símbolos o expresiones verbales. Un proceso visual en cada una de estas representaciones involucra la habilidad para detectar variables significativas y operar apropiadamente con ellas.

Al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a diferentes ámbitos: numéricos, gráficos, algebraicos, verbales.

La capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema requiere habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente y expresarla sobre un soporte material. Cuando se usan las representaciones gráficas como herramientas para interpretar conceptos o resolver problemas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para llegar a la comprensión de alguna propiedad específica de un concepto o alguna relación importante para la resolución de un problema a través de un diagrama, un dibujo o una gráfica (Nagel y Montenegro, 2012).

El hecho de que las representaciones visuales permanecen en segundo término, tanto en los desarrollos de la Matemática como en su enseñanza, acentúa una dificultad presente en la comprensión de toda noción matemática, que es la de articular los diferentes registros semióticos. La necesidad de proporcionar representantes de los objetos matemáticos radica en que estos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata, tal como los objetos comúnmente llamados reales o físicos.

Respecto del desarrollo de propuestas de enseñanza, algunas de las preocupaciones de las investigaciones en didáctica de la Matemática se relacionan con secuencias que contemplen: el tratamiento integrado de las representaciones semióticas de un mismo

objeto matemático, el tratamiento dinámico mediado por software que favorece la búsqueda de regularidades y la modelización de distintas situaciones, el desarrollo de distintos procedimientos en la resolución de problemas y sus modos de validación matemática, entre otras (Rojas, 2015).

La utilización de la computadora como un medio de relación entre diferentes formas simultáneas de representación, tanto en la graficación como en la tabulación y en la escritura de ecuaciones, puede ayudar a revelar una gran cantidad de información que uno solo de los registros limita a visualizar.

De acuerdo con Santos (2011), el uso de herramientas informáticas en apoyo a los procesos de enseñanza y de aprendizaje logra acercar los conceptos por medio de diferentes representaciones ya que ofrecen diversos escenarios que pueden resultar de vital apoyo en la clase de Matemática. Estas herramientas permiten, por un lado, crear las condiciones necesarias para que los alumnos experimenten los cambios de registros semióticos para un objeto matemático y logren su conceptualización por sobre las diferentes representaciones. Por otro lado, su utilización permite al profesor proponer situaciones didácticas que involucren a los alumnos más allá del conocimiento de conceptos puntuales y logren en ellos el desarrollo de habilidades tales como: plantear conjeturas y probarlas, argumentar, comprobar propiedades, desarrollar el pensamiento matemático, análisis crítico, etc.

Un software como GeoGebra¹, que se utiliza en el desarrollo del presente trabajo, permite: potenciar la conexión entre los diferentes registros semióticos de una noción matemática y

¹ Disponible en <https://www.geogebra.org/> donde se indica “GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo”.

su visualización, colaborando con el aprendizaje de la misma; realizar un tratamiento interactivo e integrado de distintos conceptos matemáticos; así como también facilitar la exploración, el ensayo y la modelización de los problemas planteados (Arcavi y Hadas, 2000).

Este software permite visualizar los objetos matemáticos en más de un registro semiótico al incluir la opción de presentarlos en varias vistas: Algebraica, Gráfica, CAS, Hoja de cálculo y 3D, favoreciendo así una mejor conceptualización de los contenidos.

2.5 Antecedentes en el tema

En este apartado se reúne la revisión de la bibliografía y de los trabajos anteriores relacionados con el problema de esta tesis, presentándose en cuatro subapartados.

En el primero se mencionan los artículos relativos al desarrollo y tratamiento del contenido Funciones y, en particular, Función Cuadrática por su vinculación al tema objeto de investigación.

El segundo resume lo relativo al diseño, análisis y elección de las actividades matemáticas en el aula y de los aspectos que pueden ser considerados en ellas.

Teniendo en cuenta de manera particular el tema a estudiar en el presente trabajo, se menciona en el tercer subapartado lo relativo a los procesos actuales de inclusión de las TIC en dichas actividades.

En el cuarto y último, se resumen algunos de los artículos relativos a la utilización de GeoGebra en Matemática en el Nivel Secundario.

Estos antecedentes también serán tenidos en cuenta junto al marco teórico en la delimitación de las categorías de análisis e interpretación de resultados.

2.5.1 Acerca del contenido Funciones y Función Cuadrática

Vrancken, Engler y Müller (2009, citado en Nagel y Montenegro, 2012) indican que pueden analizarse las consideraciones didácticas referidas a los procesos variacionales en los cuales se encuadra el contenido Funciones.

La potencia de este campo conceptual, a través de los conceptos y procedimientos involucrados, permite a los alumnos:

- Desarrollar capacidades para analizar, organizar y modelizar matemáticamente problemas relacionados con situaciones propias de la actividad práctica del hombre, de otras ciencias y las propiamente matemáticas, en las que la variación es el sustrato.
- Unificar diversos conceptos, superando la fragmentación de la Matemática escolar tradicional, planteándolos a través de una red de conceptos.

Los autores consideran que la construcción del concepto de función, como tantos otros, es un proceso lento, que presenta dificultades, ya que supone el dominio e integración de diferentes conceptos –números reales, magnitudes, variables, etc.– debiendo articularlos, tal como se ha desarrollado en el marco teórico, bajo diferentes contextos de representación – coloquial, gráfico, numérico y analítico– e incluyendo procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación, razonamiento.

A fin de favorecer la construcción procesual del pensamiento variacional resulta importante considerar:

- El tratamiento integrado de las representaciones semióticas del concepto de función – coloquial, gráfico, numérico y analítico– así como el análisis de las ventajas y desventajas de cada forma de representación según el contexto, brindando a los alumnos herramientas para decidir cuál utilizar según los aspectos que cada una de ellas pone de relieve. Esto permite que los estudiantes puedan coordinar la información que obtienen, por ejemplo gráficamente, con la que surge del tratamiento algebraico de la correspondiente ecuación, aprendiendo que un marco, ya sea el gráfico o el algebraico, puede actuar como control del otro.
- La posibilidad de proponer en la clase un trabajo reflexivo sobre los aspectos cualitativos que buscan indagar cómo cambian ciertas magnitudes en relación con la situación inicial y no solo sobre los aspectos cuantitativos de la variación.
- El trabajo reflexivo con los alumnos en relación con situaciones en las que el cambio y la variación se presentan tanto en contextos continuos como en discretos.

En lo relativo al contenido Función Cuadrática, Illuzi y Sessa (2014) elaboran un documento para el Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, como producto del trabajo conjunto de un grupo de profesores de escuela media y de especialistas en didáctica de la Matemática. Se resume allí la reflexión colectiva y las discusiones del grupo que dieron forma a una propuesta de trabajo donde se abordan distintos aspectos de la función cuadrática a partir de la formulación y análisis de un conjunto de problemas. Este grupo de especialistas presenta cuatro aspectos de la función cuadrática:

- Construcción de fórmulas cuadráticas para contar colecciones.

Se hace referencia a una actividad de elaboración de fórmulas para calcular el paso n de un proceso que cumple una cierta regularidad como una vía de entrada al trabajo algebraico y a la noción de expresiones algebraicas equivalentes. Se proponen dos problemas que permiten producir y transformar expresiones algebraicas cuadráticas.

- Introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos.

Se plantean distintos problemas con resoluciones en contextos geométricos. Se sugieren también actividades de análisis de gráficos, diferentes a la confección de gráficos; es decir, no se sigue el recorrido: fórmula de la función – confección de tablas – marcado de puntos – dibujo aproximado del gráfico, sino que el análisis del gráfico ya presentado se apoye en características y los aspectos del fenómeno descrito en el problema.

- Estudio de la función cuadrática a partir de la expresión canónica de su fórmula.

Se proponen problemas donde la búsqueda de resultados se puede apoyar en el análisis de la fórmula de la función cuadrática así como también actividades que permiten establecer relaciones entre una fórmula y el gráfico. Se espera que los alumnos puedan interpretar información dada en una fórmula para poder a partir de ella buscar algunos elementos particulares, como por ejemplo extremos o raíces, sin necesidad de hacer desarrollos algebraicos complejos. A diferencia de las actividades presentadas en el capítulo anterior donde estas cuestiones se resolvían apoyándose en el contexto, ahora se analizan con la lectura de la fórmula que define la función, profundizando la relación gráfico – fórmula, afinando la lectura de información que se puede hacer en cada uno de estos registros de representación.

- Estudio de la función cuadrática a partir de distintas escrituras de su fórmula.

Se amplía lo analizado anteriormente a distintas expresiones algebraicas de una función cuadrática, identificando cuáles son los elementos particulares (ceros, vértice, eje de simetría) que se pueden obtener de la lectura de cada una de las fórmulas. También se presentan actividades que tienen como finalidad que los estudiantes produzcan fórmulas que cumplan con determinadas condiciones, poniendo en relación diferentes aspectos de la situación modelizada con el modelo algebraico.

Si bien el documento constituye solo un ejemplo de los aspectos que pueden presentarse acerca del contenido Función Cuadrática, sirve de referencia para el presente trabajo como un modelo de análisis que permitirá identificar si éstos u otros aspectos son considerados por los estudiantes del Profesorado en Matemática al momento de analizar y elaborar actividades respecto de este contenido.

2.5.2 Acerca de las actividades matemáticas

Para estudiar cómo se manifiesta el componente del conocimiento referido al conocimiento tecnológico en los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y elaborar propuestas de actividades de enseñanza, y el modo en el que la computadora es incorporada como recurso didáctico, sirven de instrumento dichas actividades ya sea en el análisis que los alumnos hagan de ellas, como así también en el diseño que presenten.

García y Llinares (1994) remarcan que el diseño, análisis, evaluación y elección de las tareas matemáticas es una de las primeras decisiones que se toman al pensar en los procesos

de enseñanza y de aprendizaje. Aspectos tales como secuenciación de contenidos, presentación y forma de plantear las tareas son tenidos en cuenta en esa decisión.

De acuerdo con Gómez (2001), un aspecto central en la enseñanza de la Matemática consiste en el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Ese proceso de diseño, puesta en práctica y evaluación forma parte de una estructura curricular más amplia que tiene unos propósitos ya determinados que se desean lograr. Requiere de una serie de análisis que el autor agrupa en cuatro categorías y que, en conjunto, denomina análisis didáctico:

- Análisis cognitivo: Se busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden llegar a tener así como también los errores que pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen la actividad.
- Análisis de contenido: Se pretende producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permitan referirse a esos conceptos y procedimientos.
- Análisis de instrucción: Se procura producir y evaluar, de acuerdo con los análisis anteriores, diseños de las actividades que realizarán los alumnos.
- Análisis de actuación: Se atiende a las actuaciones recientes de los alumnos, que le permiten determinar su estado cognitivo.

La información que se produce en uno de los análisis permite reformular otros análisis y los resultados de esta reformulación pueden afectar el análisis original.

Los tres primeros análisis interactúan dinámicamente entre sí teniendo a la estructura conceptual como hilo conductor, contemplando el papel de los sistemas de representación dentro de esa estructura.

Gómez (2001) indica que al realizar este análisis didáctico, el docente puede obtener como resultados: una o más actividades para llevar a la práctica en la clase; una justificación de esas actividades con respecto al estado cognitivo de los alumnos, al contenido y a los objetivos; una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad. Se investiga en el presente trabajo el modo en que los estudiantes del Profesorado en Matemática realizan estos análisis al evaluar o producir actividades acerca del contenido Función Cuadrática.

Otra cuestión a considerar al momento de analizar las producciones de los estudiantes del Profesorado en Matemática es el tipo de actividades que incluyen en sus diseños acerca del contenido Función Cuadrática. Para caracterizarlas, sirve de referencia la clasificación presentada por González (2014), quien especifica una serie de criterios que permiten categorizar las actividades:

- Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto:

Ejercicio / aplicación / práctica

Problema

Ejemplo / ilustración

Explicación / comprensión

- Por la presentación o formato:

Con enunciado (verbal, no verbal: gráfico, simbólico, icónico, modelos)

Sin enunciado

- Por la naturaleza de la tarea:
 - Reales (contextuales, naturales, situaciones de la realidad)
 - Artificiales (creadas con un fin)
- Por la motivación o finalidad general de la tarea:
 - Escolares (motivación extrínseca y finalidad didáctica)
 - Socioculturales (vida cotidiana, motivación intrínseca y finalidad primaria o vital)
 - Lúdicas (juegos y pasatiempos, motivación intrínseca y finalidad personal)
 - Histórico culturales (problemas clásicos, curiosos, actuales)
- Por el tipo de finalidad didáctica:
 - De ejecución
 - De investigación / exploración, libre o guiada
 - De evaluación
 - De explicación / comprensión
- Por el tipo de proceso de resolución:
 - Tareas cerradas (proceso y solución controlados)
 - Tareas abiertas (proceso y solución no controlados), de exploración, de decisión
- Por el tipo de solución:
 - Con solución: única, múltiple, indeterminada
 - Sin solución
- Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada:
 - Demostración
 - Definición

Representación

Propiedad

Concepto

Procedimiento

Algoritmo

Problema

- Por el tipo de actuación implicada:

Construcción

Razonamiento

Justificación

Aplicación

Comunicación

Explicación

Análisis / comprensión

De acuerdo con Nagel y Montenegro (2012), no se trata de presentar problemas aislados sino organizados en secuencias que promuevan avances en la construcción de los conceptos matemáticos involucrados, tensionando los conocimientos que se disponen. Para la construcción de una propuesta de enseñanza, mencionan la interrelación concepto – problema:

- Los conceptos toman su sentido gracias a los problemas que permiten resolver. Cada nuevo problema contribuye a enriquecer el concepto.

- Un nuevo concepto se construye también situándose en relación con los conocimientos ya adquiridos, sea para ampliarlos y generalizarlos, sea para cuestionarlos y construir otros nuevos, mejor adaptados al problema propuesto.
- Un problema hace en general intervenir varios conceptos. Cada uno toma su sentido en las relaciones que establece con los otros conceptos implicados en el problema.

Para que una actividad sea considerada un problema, señalan que es necesario que genere incertidumbre en el alumno, que pueda desarrollar distintas estrategias para su resolución, que le permita probar, equivocarse, recomenzar a partir del error, construir modelos, proponer soluciones, defenderlas, discutirlos, comunicar los procedimientos y conclusiones. De acuerdo con García y Llinares (1994), las características del proceso de generación del conocimiento matemático, la naturaleza del aprendizaje producido y la forma en que este se produce viene definido en parte por el tipo de tareas que los alumnos realizan. La relación entre las tareas y la actividad que los alumnos deben desarrollar al intentar resolverla puede llegar a caracterizar una determinada comprensión de las nociones matemáticas.

Respecto del contenido Funciones, los autores establecen inicialmente categorías para analizar las actividades que se pueden presentar, que coinciden con lo ya descrito respecto de las representaciones utilizadas y de las traslaciones entre ellas que demanda la resolución de la tarea (Tabla 2.3).

Ese esquema inicial de representaciones y traslaciones dio a los autores información válida para realizar las primeras inferencias sobre la forma en que el tratamiento del concepto de función a través de las distintas tareas desarrolla ese concepto y promueve su comprensión.

Tabla 2.3. Proceso de traslación respecto del contenido Funciones

Proceso de traslación				
a de	Situación, descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmula, expresión algebraica
Situación, descripción verbal				
Tablas				
Gráficas				
Fórmula, expresión algebraica				

Fuente: García y Llinares (1994, p. 16).

Luego ampliaron ese sistema de categorías, estableciendo ocho apartados:

- Trabajo dentro de un mismo modo de representación:

Expresión algebraica. Formulación

Modo gráfico

Situación

- Traslaciones entre modos de representación:

Expresión algebraica a tabla/gráfica, y viceversa

Situación a gráfica, y viceversa

Situación a expresión, y viceversa

- Tareas de varios pasos:

Traslación entre modos de representación para trabajar en el segundo de ellos

Traslación dentro del último modo de representación utilizado

Traslación seguida de otra traslación

Trabajo dentro de un modo de representación más trabajo dentro de otro

Traslación seguido de trabajo dentro del primer modo utilizado

- Tareas en las que se plantea el análisis de una situación.

- Tareas que piden explícitamente utilizar un modo de representación diferente para resolver la cuestión planteada:

Presentación: modo algebraico; resolución: modo gráfico

Presentación: situación; resolución: formulación

- Emparejar gráficas con expresiones algebraicas, o viceversa.
- Estudio de rasgos propios del modo de representación, independientemente de las características del objeto matemático función.
- Otras.

Tal como se ha indicado anteriormente, interesa en el presente trabajo estudiar de manera específica el modo en que se manifiesta el conocimiento tecnológico de los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y diseñar actividades acerca de un contenido, por lo que se considerarán además como antecedentes en el tema los trabajos que hacen referencia a la inclusión de las TIC en las actividades matemáticas.

2.5.3 Inclusión de las TIC en las actividades

El papel del docente ha cambiado con la sociedad de la información, dejando de ser el origen principal de entrada de información. “No se trata de luchar con esta evidencia sino de adaptarnos a este nuevo panorama, aunando nuevos elementos a los ya empleados tradicionalmente, que ayuden a que nuestros alumnos generen, a partir de esa saturación de información, conocimiento” (Darias, 2005, p. 127).

No es fácil afrontar los cambios en el mundo educativo, sobre todo si afectan a aspectos relacionados con la metodología con la que los docentes trabajan en el aula, y menos aún si

los cambios requieren la incorporación de nuevos recursos que necesiten una formación previa para conocer sus aspectos técnicos. Para incorporar un nuevo recurso relacionado con las TIC no basta con adaptar lo que se hace en el aula a este nuevo elemento sino ver la manera de complementarlo para aprovechar sus posibilidades.

La actividad profesional de los profesores tiene lugar en un contexto caracterizado por un elevado grado de complejidad y por un gran dinamismo, que los lleva a integrar conocimientos diversos que tienen que ver con el contenido curricular que enseñan, con la naturaleza de los procesos cognitivos de sus alumnos y, cada vez con mayor relevancia, con el conocimiento sobre el uso de tecnologías para el aprendizaje.

Los procesos actuales de integración de las TIC en las aulas tornan aún más complejos los procesos de enseñanza y de aprendizaje al introducirse nuevos ámbitos de conocimientos que el profesor debe dominar para desarrollar buenas prácticas con tecnologías.

Las buenas prácticas educativas con TIC (en términos de Valverde, Garrido y Fernández, 2010) son acciones complejas y multidimensionales que exigen comprender la representación y formulación de conceptos y procedimientos para su comprensión a través de las TIC; desarrollar estrategias didácticas constructivistas que usen las TIC para la enseñanza de contenidos curriculares; conocer las dificultades en el aprendizaje de conceptos y de qué forma las TIC pueden ayudar a superarlas; estar al tanto del conocimiento previo de los alumnos así como la epistemología del contenido curricular para comprender cómo las TIC pueden ser utilizadas para construir sobre el conocimiento preexistente y desarrollar nuevas epistemologías.

Estos conocimientos, tal como se ha desarrollado en el apartado 2.3, claramente van más allá del que posee aisladamente un experto en un contenido curricular (profesor de una

disciplina), un experto en TIC (ingeniero u otro profesional) o un pedagogo experto (tecnólogo educativo), por lo que la formación del Profesorado exige un replanteamiento de los enfoques y prácticas actuales.

Valverde et al. (2010) utilizan la expresión *fijación funcional* para describir la forma en que las ideas que sostenemos sobre la función de un objeto pueden inhibir nuestra capacidad para usar el objeto para una función diferente. Los usos creativos de las TIC exigen ir más allá de esta *fijación funcional*, de modo que se pueda, de forma innovadora, definir nuevos propósitos para las herramientas existentes y orientarlas hacia una finalidad educativa.

De acuerdo con Valverde et al. (2010) las tecnologías educativas tradicionales se caracterizan por su especificidad (por ejemplo, un lápiz se utiliza para escribir, un microscopio para visualizar objetos pequeños), su estabilidad (bolígrafos, microscopios o pizarras, por ejemplo, no cambian mucho con el tiempo) y la transparencia de su función (el funcionamiento interno de un lápiz es bastante simple y está relacionado directamente con su función). En contraste con las tecnologías tradicionales, las tecnologías digitales son versátiles (utilizables en diferentes formas), inestables (cambian rápidamente) y opacas (su funcionamiento interno está oculto al usuario).

Esta naturaleza versátil también significa que las tecnologías digitales hacen cosas muy diferentes según quién y para qué las utiliza.

La inestabilidad de las TIC se manifiesta de dos formas: por un lado, no existe un conocimiento estable y duradero para el aprendizaje de estas tecnologías y, por otra parte, las tecnologías digitales no suelen tener un comportamiento fiable debido a su continua modificación y mejora.

La adopción de las TIC en las aulas depende de que los usos educativos de las TIC sean compatibles con las concepciones pedagógicas previas. Una innovación es menos probable que se adopte si se desvía demasiado de las creencias pedagógicas y las prácticas habituales de los profesores (Aguilar, Luzardo y Jaimes, 2015).

Loaiza (2018) describe algunas tendencias en TIC y educación:

- Mobile Learning: así como los teléfonos móviles han relegado a la telefonía fija, los dispositivos móviles o celulares con conectividad a Internet están superando a las computadoras para trabajar en el aula.
- Trabajos en la nube: los desarrolladores están desarrollando aplicaciones Web en lugar de aplicaciones de escritorio, potenciado por los servicios de espacio gratuito ofrecido por las grandes compañías en Internet como Google, Yahoo o Microsoft.
- Computación Uno a Uno: la tendencia mundial es proveer a cada estudiante de un dispositivo conectado a Internet, ya sea una tablet o un celular, lo que implica que las aulas y los docentes deben ir preparándose para desarrollar ambientes de aprendizaje basados en este acceso universal a las tecnologías y a la información.
- Aprendizaje Ubicuo: la mejora de las infraestructuras de conectividad, así como el abaratamiento de los equipos informáticos y otros dispositivos de conexión a Internet hace que el aprendizaje en cualquier momento y en cualquier lugar plantee a la escuela la necesidad de redefinir sus espacios, tanto físicos como temporales.
- Aprendizaje Personalizado: las tecnologías nos permiten pasar de aulas donde se enseña a todo un alumnado a aulas donde podemos adaptar materiales, recursos, atención y evaluación a las necesidades de cada alumno, así como a sus propios estilos de aprendizaje.

- Redefinición de los espacios de aprendizaje: las aulas del futuro inmediato deberían replantearse algunas cuestiones estructurales (como otro tipos de mesas, luz, colores), con espacios individuales para estudiantes y profesores o con espacios pensados para el aprendizaje basado en proyectos.
- Contenidos abiertos generados por los docentes: el sistema escolar que se promueve desde la inclusión de las TIC en la educación potencia la identificación y creación por parte de los mismos profesores de los recursos de aprendizaje más eficaces según las necesidades de cada grupo.
- Evaluación: la recogida, gestión, clasificación y recuperación de datos (big data) relacionados con el aprendizaje, ayudará a los docentes a entender mejor los procesos de enseñanza y de aprendizaje de sus alumnos, personalizar el contenido y los enfoques pedagógicos, hacia una evaluación que preste cada vez más atención a los procesos y menos a los exámenes.
- Rol del docente: los nuevos modelos de enseñanza y de aprendizaje obligan a los docentes a redefinirse, a dejar de ser los poseedores del conocimiento para convertirse en mentores, dinamizadores de los procesos, identificadores de recursos, facilitadores de espacios de aprendizaje colaborativo.

De acuerdo con Martí y Valdeolivas (2016) la educación 3.0 no trata de sustituir la didáctica actual por nuevas tecnologías sino trata de acoplar y utilizar las TIC junto a las didácticas que ya se utilizan en la escuela, una combinación de las ideas del siglo XX de Vygotsky o Piaget con pedagogías actuales y la inclusión de esas nuevas herramientas. Es muy importante que los docentes estén formados para así poder utilizar de manera completa las TIC, transmitir mejor los objetivos, elegir de manera adecuada su utilización, entre otras

cuestiones en los que el docente es clave para la formación y la transmisión del saber a los alumnos.

Las TIC presentan diferentes características, como la inmaterialidad, la interactividad, la interconexión, la instantaneidad de la información, la transmisión de imagen y sonido de gran calidad, la digitalización, el alcance a todos los sectores, la diversidad de usos y la innovación. Permiten manejar una gran información en diferentes formatos y de fácil acceso a los alumnos, gracias a la digitalización de los archivos.

Un ejemplo de la aplicación de TIC en la educación lo constituyen los software educativos que se han ido imponiendo en los procesos de enseñanza y de aprendizaje gracias a las potencialidades que brindan. De acuerdo con Borges y Montes de Oca (2014), para la presentación de los contenidos de forma interesante, asequible y dinámica en la elaboración de un software educativo, se estructuran una serie de recursos:

- **Multimediales:** la información está presentada a partir de algunos formatos digitales o sus combinaciones, tales como texto o hipertexto, video digital, diaporama (combinación de sonido con imágenes u otros recursos multimediales), sonido digital, animaciones, e imágenes fijas. La función de los recursos multimediales es presentar e ilustrar de forma no interactiva el contenido, estimulando la atención y el interés. Tienen finalidades instructivas, educativas y orientadoras.
- **Interactivos:** promueven una comunicación entre el usuario y la computadora, o entre usuarios con mediación de la máquina, como por ejemplo, simuladores, animaciones interactivas, applets, secuencias interactivas. Desarrollan la formulación de hipótesis y su comprobación por los métodos de ensayo y error, auspician el aprendizaje por

descubrimiento y una asimilación significativa, promueven la experimentación asistida por computadora y transmiten información desde una perspectiva analítica.

- Estructurales: Contribuyen esencialmente a la estructuración didáctica de la información.

Otro ejemplo de aplicación de las TIC en educación son las universidades y cursos virtuales ya que en estas plataformas toda la información está en la red, las clases se imparten a distancia, los exámenes y los trabajos se hacen de manera online. Algo similar sucede con las aulas virtuales asociadas a las asignaturas en algunas instituciones, que resultan un complemento de las clases presenciales, a través de los materiales y links que se pueden compartir, los chat para consultas las wikis para trabajos colaborativos grupales, entre otros recursos posibles.

Entre los conocimientos que los profesores tienen que manejar para integrar las TIC en sus buenas prácticas, están las observaciones y el análisis de los diferentes contextos de aplicación en lo que cada uno enseña. No existe una solución única para resolver la introducción de las tecnologías en el currículum; se exige el esfuerzo de rediseñar continuamente el uso de los medios para adaptarse a realidades cambiantes.

Si bien los soportes informáticos ofrecen interesantes posibilidades en el ámbito educacional, de acuerdo con Nagel y Montenegro (2012) deben encararse trabajos abocados a la descripción y análisis de situaciones de enseñanza y aprendizaje generadas en ámbitos computacionales, de modo que vayan constituyendo un cuerpo de resultados que aporten evidencias que respalden y den sentido a posibles propuestas curriculares que pretendan integrar nuevas tecnologías en las clases de Matemática.

2.5.4 Utilización de GeoGebra en las actividades

En muchas de las escuelas secundarias de nuestro país, se cuenta con relativamente nuevos escenarios educativos a partir de la incorporación de las TIC, especialmente a partir del Plan Conectar Igualdad en el que los alumnos y profesores de escuelas públicas han recibido netbooks.

Esta realidad compromete a los docentes y a las instituciones educativas a aprovechar al máximo los beneficios de estas herramientas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y a su vez ofrece una nueva oportunidad para revisar las prácticas de la enseñanza a partir de su incorporación.

Si se propone por ejemplo el cálculo del límite de una función, con la computadora y la utilización de software y graficadores es posible representar la función aprovechando las posibilidades que el programa ofrece, e interpretar el resultado para determinar o al menos tener una idea general de lo que se debería obtener al aplicar los mecanismos de cálculo que los alumnos conocen.

Una actividad habitual en el aula es el estudio y representación de funciones, que tradicionalmente se inicia con la determinación de los aspectos correspondientes a dominio, puntos de intersección, asíntotas, extremos, crecimiento y decrecimiento, hasta llegar a completar los elementos necesarios que permitan su representación gráfica. Asimismo con ayuda de una computadora y de un software como GeoGebra el proceso cambia, ya que lo primero que se obtiene es la gráfica de la función, que facilita al alumno que realmente sabe Matemática determinar los elementos y características que tiene que obtener de la función cuyo estudio está realizando. Este cambio en la metodología de trabajo que requiere el uso

de software y graficadores no es fácil de asumir y por lo tanto no resulta sencillo incorporar las computadoras al aula.

La elección de un software como GeoGebra para el desarrollo de esta investigación se debe no solo a sus potencialidades matemáticas y didácticas sino también por estar incluido en las netbooks del plan Conectar Igualdad. La propuesta del trabajo con el software no está focalizada solo en la enseñanza y la aplicación del mismo sino también en el análisis didáctico sobre cómo esta herramienta tecnológica influye o puede influir en las prácticas de enseñanza y en los modos de hacer Matemática que se propone a los alumnos.

El uso de este software posibilita otros modos de hacer en la clase de Matemática, ya que los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de análisis de regularidades, que permiten la modelización, la toma de decisiones, el razonamiento y la resolución de problemas.

De acuerdo con Hernández (2013) este software permite generar y corroborar ideas, y estudiar con gran facilidad y rapidez el comportamiento de las funciones al variar determinados parámetros.

En cuanto a sus características generales, GeoGebra es un software libre y multiplataforma con una gran comunidad de usuarios que propicia el trabajo colaborativo. Dicha comunidad se encuentra en expansión gracias a la creación de Institutos GeoGebra en los cinco continentes, desarrollo de recursos para el aula, tutoriales, wikis, foros y canales de video para la comunicación entre las personas de la comunidad.

En la actualidad, se puede utilizar el software de manera on line, tanto en su versión clásica como en las que trabajan de manera específica sólo con ciertos objetos (Probabilidad, Cálculo Simbólico) o permite ser descargado e instalado, para poder trabajar sin estar

conectado. Las distintas versiones con las que cuenta el software permiten que el mismo pueda ser instalado en computadoras (de acuerdo con su sistema operativo) o en dispositivos móviles (celulares, tablets). Nuevas aplicaciones desarrolladas permiten descargar calculadoras gráficas, también su versión en 3D, y trabajar con realidad aumentada.

Tal como se indicó en el apartado 2.4, en GeoGebra los objetos tienen varias representaciones: son mostrados en simultáneo como objetos algebraicos y geométricos, si corresponde. A estas dos representaciones se añade la posibilidad de uso de planilla de cálculo, que suma una tercera representación de los objetos. Todas las representaciones se relacionan en forma dinámica, de manera que si una de ellas es transformada, las otras representaciones del mismo objeto también se modifican. En GeoGebra los objetos pueden modificarse de manera que sus propiedades permanezcan invariantes. O bien, si una construcción no está realizada como el problema lo requiere, se puede corroborar que esas propiedades no permanecen constantes (Borsari et al., 2012). Su entorno es amigable, lo que permite la fácil exploración de docentes y alumnos.

Los ambientes dinámicos no solo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permiten transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar, mentalmente o por medio de una herramienta, una instancia particular para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (Nagel y Montenegro, 2012).

Para que la incorporación de las TIC en los procesos educativos alcance un valor pedagógicamente significativo que impulse una transformación en los procesos de

enseñanza y aprendizaje es necesario trascender los usos meramente instrumentales y enfrentar al mismo tiempo un plan de acción de formación docente no sólo tecnológica (Cabero, 2010).

Los desarrollos actuales de las tecnologías y software existentes posibilitan la búsqueda de distintas y nuevas vías de solución para los ejercicios y problemas, que no pueden eludirse en los procesos de enseñanza y de aprendizaje desarrollados, en especial, en la formación de docentes. La búsqueda de distintas vías de solución para un mismo ejercicio o problema, la reflexión sobre sus características, diferencias y ventajas, contribuye a profundizar en los fundamentos de la Matemática y su didáctica.

2.5.5 Otras investigaciones relacionadas con el presente trabajo

En la investigación realizada por García (1997) se aborda el conocimiento profesional del profesor de Matemática de Enseñanza Secundaria, ligado al concepto de Función como objeto de enseñanza–aprendizaje. Considera el conocimiento del profesor desde la perspectiva de la profesión que desempeña, subrayando su carácter contextualizado y relacionándolo a tópicos matemáticos concretos. Describe el contenido y estructura del conocimiento del profesor que, de acuerdo con la autora, fundamenta sus decisiones de enseñanza de las funciones en el nivel 14-16 años, coincidiendo con lo relativo al presente trabajo. García (1997) particulariza su investigación en dos dominios de indagación: el concepto matemático de función como contenido curricular y sus diferentes modos de representación y el concepto matemático de función en relación a otros contenidos curriculares de la Matemática escolar.

También el trabajo de Paredes, Iglesias y Ortiz (2009) se centra en el conocimiento didáctico de los futuros profesores de Matemática. Evalúa un programa de formación que integra el uso de un software de cálculo simbólico y la modelización como componentes de ese conocimiento didáctico para la formación inicial de profesores, junto con el estudio de los sistemas de representación implicados, la modelización, un análisis cognitivo que estudia los errores y las dificultades, un análisis fenomenológico, un análisis histórico del tópico matemático y de los materiales y recursos relacionados.

“Partimos de la consideración que es necesario hacer propuestas que tiendan a superar la formación tradicional de unos cursos de Matemática por un lado y una formación general en ciencias de la educación por el otro” (Paredes, Iglesias y Ortiz, 2009, p. 86).

Los autores consideran que los programas de formación docente deben abordar una formación en didáctica de la Matemática que contribuya a profundizar en el conocimiento matemático escolar que impartirá el docente en su futuro trabajo profesional.

La investigación de Aguilar et al. (2018) describe cómo establecer relaciones entre los subdominios del modelo de conocimiento especializado del Profesor de Matemática y las concepciones del Profesorado de Matemática, según el modelo de concepciones de enseñanza–aprendizaje de la Matemática. Si bien el trabajo se ha realizado en Nivel Primario, se destaca como antecedente en tanto identifica y analiza estas relaciones entre componentes mencionados en la presente tesis, que permiten comprender la práctica en el aula al describir el indicador acerca de la concepción de la matemática escolar.

Posadas y Godino (2017) describen en su trabajo una experiencia de enseñanza realizada en la fase de prácticas en la formación inicial de profesores de secundaria en la especialidad Matemática, identificando propuestas fundamentadas de cambio, recopilando y sintetizando

los conocimientos didáctico matemáticos producidos en la investigación e innovación sobre la enseñanza y aprendizaje en esta asignatura. Constituye un antecedente para la presente tesis en relación con otros conceptos desarrollados en el marco teórico acerca del conocimiento del profesor en Matemática, como así también en relación con el contenido sobre el cual se realiza el trabajo, que es Función Cuadrática.

Respecto de la educación superior en la formación inicial docente, la investigación realizada por Barros y Martínez (2018) está centrada además en la incorporación de las TIC en dicha formación, objeto de interés del presente trabajo. Si bien la experiencia realizada se vincula con otros contenidos matemáticos, relativos al Álgebra, los resultados obtenidos acerca de una innovación en la formación de los futuros profesores en Matemática resultan un antecedente sobre el tema.

Noriega y Rosillo (2011) presentan también una propuesta que analiza la incorporación de las TIC en la educación y, en particular, la utilización del software GeoGebra. Sirve como referencia para el presente trabajo de tesis el análisis que realizan acerca de la traducción del lenguaje verbal al lenguaje gráfico y simbólico, relacionándolo con los registros de representación y sus procesos de translación desarrollados en el apartado 2.4.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo se define el enfoque y el alcance de esta investigación y se describe la metodología en la que se ha desarrollado el trabajo, dividiéndolo en cuatro etapas: búsqueda de las propuestas de enseñanza que se proponen en sitios con fines educativos con relación al contenido Función Cuadrática; resolución y análisis por parte de los estudiantes del Profesorado en Matemática de una secuencia de actividades seleccionada; elaboración de una propuesta de enseñanza por parte de dichos estudiantes con actividades referidas al contenido Función Cuadrática que incluya la utilización del software GeoGebra; exposición oral de las propuestas diseñadas. Se detallan a continuación los períodos y el marco de trabajo en los que se ha desarrollado cada etapa.

3.1 Diseño metodológico

El enfoque de la investigación es de tipo cualitativo, de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010), en tanto se busca describir, analizar e interpretar de manera detallada las actividades y eventos que se llevaron a cabo y las conductas que se observaron, a fin de responder la pregunta inicial acerca de cómo se manifiesta el conocimiento tecnológico en los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y elaborar actividades respecto del contenido Función Cuadrática.

De acuerdo con Rodríguez, Gil y García (1999) la investigación cualitativa estudia la realidad en su contexto natural, centrando la investigación en los hechos, a fin de

comprender los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. Los instrumentos y métodos para recoger información son utilizados para describir rutinas o situaciones problemáticas. Para ello el investigador ve el escenario y las personas desde una perspectiva holística, tratando de comprenderlas dentro de su marco de referencia.

Contreras (1994) visualiza como pertinente el enfoque cualitativo en investigaciones que estudian fenómenos didácticos ya que se relacionan con actividades humanas.

“La investigación cualitativa da testimonio, no prueba” (Carnevale, 2006, p. 111).

La información y datos a analizar en la presente investigación se obtuvieron a través de las perspectivas, puntos de vista y producciones realizadas por los estudiantes del Profesorado participantes, sin que resulte de interés una medición numérica ni un método estadístico de análisis. Si bien se recurrieron a algunos datos cuantitativos en el análisis de los resultados obtenidos, los mismos no constituyeron el objeto de interés sino un aporte para analizar los tipos de experiencias que pueden incluirse en la formación inicial del docente para construir el conocimiento tecnológico como así también comprender cómo se manifiesta el mismo en los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y elaborar una propuesta de enseñanza.

El alcance de esta investigación es descriptivo, en tanto interesa conocer las posibles relaciones que se presentan entre dos o más categorías de análisis o bien entre los grupos de participantes ante una misma cuestión (Hernández et al., 2010), desde un diseño de estudio de caso.

De acuerdo con Rodríguez et al. (1999) el estudio de caso implica un proceso de indagación que se caracteriza por un examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad

centrado en el caso (situación, persona o fenómeno concreto) objeto de interés, por lo que adquiere el atributo de ser particularista. Se trata de un asunto que se constituye en objeto de investigación ya que la única exigencia es que posea un límite físico o social que le confiera identidad.

Esta especificidad lo hace ser un método muy útil para el análisis de problemas prácticos, situaciones o acontecimientos que surgen en la cotidianeidad. Se basa en un razonamiento inductivo, donde las generalizaciones, conceptos o hipótesis surgen a partir del examen minucioso de los datos (Hernández et al., 2010).

Este tipo de estudio provee una descripción y análisis en profundidad de unidades sociales o entidades educativas de especial interés (Yin, 1989).

Merriam (1988) señala cuatro propiedades esenciales del estudio de casos: es particular, ya que se centra en una situación específica; es descriptivo, porque busca caracterizar el fenómeno estudiado; es heurístico, por cuanto el estudio ilumina sobre la comprensión del caso; y es inductivo, ya que en el curso del procesamiento de la información se introducen nuevos conceptos, se enuncian hipótesis sugeridas por la relación entre los datos, y se perciben resultados con cierto nivel de generalidad.

Mediante estudios de este tipo se pretende captar la complejidad del caso en cuestión que, por su peculiaridad, puede dar lugar a resultados que, desde una lógica inductiva y sin ánimo de generalizar, puede proporcionar categorías válidas y útiles para analizar otros casos en situaciones semejantes (Ander-Egg, 2003), como pueden ser otros institutos de formación docente.

Esta investigación se desarrolló durante el año 2016 en un Instituto de Formación Docente y Técnica de la Ciudad de Buenos Aires: Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico (INSPT), dependiente de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN).

Este Instituto se caracteriza por su oferta en carreras terciarias con orientación técnica (carreras de Técnico Superior en Informática; en Control Eléctrico y Accionamientos; en Mecánica, Automotores y Máquinas Térmicas; en Automatización y Robótica; en Electrónica; en Química y Química Aplicada; en Física y Física Aplicada; en Diseño Tecnológico) y sus carreras de formación docente (Profesor en Disciplinas Industriales; en Inglés e Inglés Técnico; en Física y Física Aplicada; en Matemática y Matemática Aplicada).

Las experiencias relativas al presente trabajo se llevaron a cabo con alumnos del Profesorado en Matemática y Matemática Aplicada.

Este profesorado se dicta en el Instituto en los turnos mañana y noche. Los alumnos con los cuales se implementaron las actividades correspondientes a este trabajo cursaban en el turno noche.

La carrera tiene un plan de estudios de cuatro años de duración, con un régimen de cursada anual para todas las asignaturas. Durante el primer año de la carrera los alumnos cursan como asignaturas: Introducción a la Problemática Educativa, Psicología General y Evolutiva de la Niñez, Análisis Matemático I, Álgebra I, Geometría I, y Complementos de Cálculo Numérico y Trigonometría.

Las actividades se implementaron con alumnos del primer año de la carrera, en la asignatura Análisis Matemático I, dado que la misma incluye una primera unidad en su

programa referida al contenido Funciones, donde se realiza en particular una revisión de la Función Cuadrática.

La asignatura tiene una carga horaria de seis horas cátedra semanales, divididas en dos horas cátedra equivalentes a 80 minutos de clase un día, y cuatro horas cátedra equivalentes a 160 minutos de clase otro día.

En la elección de los alumnos con los cuales realizar el trabajo de investigación, se consideró a quienes estaban en el inicio de su etapa formativa dentro de la carrera docente, en sintonía con los objetivos planteados en el apartado 1.3. Resulta usual que se analicen los modos de emergencia de los componentes del conocimiento en estudiantes avanzados, ya que recién ahí es donde muchas veces se enfrentan por primera vez con el desafío de elaborar propuestas de enseñanza en el momento de realizar las prácticas o residencia. En este trabajo interesó realizar esa caracterización desde el inicio de dicha formación y, de acuerdo con el tercer objetivo específico señalado, determinar los procesos de configuración de esos componentes del conocimiento al transitar el momento del trayecto formativo, en particular, lo relativo al conocimiento tecnológico.

Acerca de las características del alumnado, cabe señalar que es usual en el turno vespertino que, en su mayoría, no sean alumnos de entre 18 y 20 años como puede presuponerse para el inicio de una carrera. La totalidad de los estudiantes participantes de este trabajo superaban los 25 años de edad, e incluso la tercera parte superaba los 40 años.

Resulta usual también como caracterización del alumnado que no sea la primera carrera de nivel superior que comienzan sino que eligen ingresar al Profesorado en Matemática luego de haber comenzado y abandonado otra carrera, no siempre relativa al mismo área, en general de nivel universitario. En el caso de los estudiantes que realizaron las actividades

relativas a esta investigación, todos cursaron previamente parte de otra carrera. Uno de los participantes aún estaba cursando una Tecnicatura en simultáneo con el Profesorado en el mismo Instituto. Y otro participante era el único en haber finalizado una carrera previa, relativa al área de Computación y trabajaba en el momento de la realización de esta tesis como docente de Nivel Primario en esa asignatura.

En relación con el ámbito laboral, todos los participantes de la investigación trabajaban cuando se implementaron las actividades. Esta es una característica usual en el alumnado del turno noche del Instituto del Profesorado.

En general, esa práctica laboral no se relaciona con la docencia, excepto algunos casos particulares como el mencionado participante que tenía un título previo que lo habilitaba para trabajar en el Nivel Primario. También se pueden mencionar algunos casos de alumnos que dictan clases particulares y otros, que realizan algunas suplencias en escuelas por períodos breves. De los estudiantes que participaron, la tercera parte daban clases particulares y uno había realizado suplencias en colegios, además de dar clases particulares. De los alumnos participantes, sólo cuatro eran mujeres. El gran porcentaje de hombres que formaba parte del curso resultó algo particular de ese ciclo lectivo en el que se desarrolló el trabajo, si bien la cantidad y proporción de hombres resulta algo más frecuente que en otros institutos de formación docente, quizás por la orientación técnica con la que surgió y continúa este Instituto en particular.

Las actividades se desarrollaron durante el ciclo lectivo, pudiendo considerarse cuatro etapas (Tabla 3.1).

Tabla 3.1. Períodos de desarrollo de cada etapa de la investigación

Primera etapa	Marzo a Agosto
Segunda etapa	Septiembre
Tercera etapa	Septiembre – Octubre
Cuarta etapa	Noviembre

Fuente: elaboración propia.

Algunas clases que no se incluyeron en el cronograma de trabajo corresponden a la suspensión de actividades por la realización de exámenes finales de acuerdo con el Calendario Académico establecido por el Instituto del Profesorado y un feriado nacional. Durante los plazos que se asignaron a los estudiantes para la realización o finalización de alguna actividad o para la elaboración y entrega de materiales, se continuaron desarrollando los contenidos relativos a Análisis Matemático I en el transcurso de las clases regulares de la asignatura.

3.2 Primera etapa de la investigación

Se realizó una búsqueda de las propuestas de enseñanza que se presentan en sitios con fines educativos, circunscribiéndolo al contenido Función Cuadrática. De esos sitios disponibles, se consideró en particular educ.ar (www.educ.ar) diseñado desde el Ministerio de Educación de nuestro país, dada su importancia a nivel nacional.

De los recursos referidos al contenido Funciones, se encontraron siete secuencias didácticas relativas al contenido específico de Función Cuadrática en ese portal educativo:

1. Aplicaciones de la función cuadrática
2. Función cuadrática
3. Estudio de la función cuadrática
4. Función cuadrática en el básquet

5. Función cuadrática, parte I
6. Función cuadrática, parte II
7. De crecimientos y trayectorias

Estas secuencias, tal como aparecían en el sitio educ.ar al momento de la búsqueda, se encuentran detalladas en el Anexo 1.

Solo una de las secuencias, la última mencionada en el listado anterior, no proponía de manera expresa la utilización de algún recurso informático en la resolución de las actividades. Contaba también con un formato de presentación diferente a las otras, donde no se incluían algunos de los aspectos con que contaban las otras propuestas.

De las secuencias que incluían en los enunciados de sus actividades la utilización de algún recurso informático, la primera de las listadas mencionaba el software Graphmatica², al igual que la tercera, que además de ese programa nombraba también Winplot³. La secuencia indicada en sexto lugar en el listado anterior proponía la utilización del software Modellus⁴.

Tres de las propuestas mencionaban de manera explícita la utilización de un procesador de textos en la resolución de las actividades y solo la primera solicitaba el uso de una hoja de cálculo.

² Disponible en <http://www.graphmatica.com/index.html> donde se indica “Graphmatica se usa para resolver ecuaciones matemáticas con precisión, e incorpora cálculos y funciones numéricas”.

³ Disponible en <https://winplot.softonic.com/?ex=DSK-1080.4> donde se indica “Winplot es un generador de funciones gráficas especialmente diseñado para el estudio visual de una serie de ecuaciones matemáticas”.

⁴ Disponible en <https://modellus.programas-gratis.net/> donde se indica “Se trata de una práctica herramienta que nos permite hacer una modelización en el ordenador, creando animaciones con objetos interactivos con propiedades matemáticas. De esta forma, el usuario puede realizar un análisis de los datos experimentales con forma de imágenes, gráficos, tablas, etc.”.

Teniendo en cuenta el contexto del Profesorado en Matemática donde se ha realizado la investigación, se centró el análisis en las secuencias que incluían explícitamente el software GeoGebra en su resolución, ya que los alumnos utilizan ese programa en algunas de las asignaturas del cursado del primer año de la carrera (Álgebra I, Análisis Matemático I y Complementos de Cálculo Numérico y Trigonometría) y lo continuarán utilizando en algunas de las asignaturas de los años superiores.

De las tres propuestas que incluían la utilización de este software, una se titulaba “Función cuadrática, Parte I” pero en su “Parte II” se proponía el uso de otro programa.

Otra de las propuestas se basaba en una aplicación de los conceptos matemáticos a tratar, a través de una actividad relativa a tiro oblicuo, más vinculada con conceptos físicos.

La otra actividad que incluía GeoGebra, indicada en segundo lugar en el listado y titulada “Función Cuadrática” ha sido la seleccionada para continuar con la realización del presente trabajo.

Con el objeto de conocer de manera más detallada las actividades incluidas en la secuencia seleccionada y prever el análisis que los estudiantes del Profesorado pudieran realizar de las mismas, se realizó con anterioridad a su implementación un informe acerca de los enunciados propuestos, que se presenta en el apartado 4.1.2.

3.3 Segunda etapa de la investigación

Esta secuencia “Función Cuadrática” seleccionada del sitio educ.ar y destinada a alumnos de Nivel Secundaria, de acuerdo con lo indicado en el portal, se ha implementado con los alumnos de primer año del Profesorado en Matemática, durante el mes de septiembre

teniendo en cuenta que la asignatura se desarrolla de marzo a noviembre, de acuerdo con los períodos indicados en la Tabla 3.1.

Los estudiantes del Profesorado en Matemática resolvieron las actividades durante una clase de cuatro horas cátedra de la asignatura Análisis Matemático I. Asistieron ese día un total de 18 alumnos y resolvieron la propuesta divididos en cuatro grupos (Grupo 1 a Grupo 4), conformados de manera libre por ellos. Tres de los grupos (Grupo 1, Grupo 2 y Grupo 4) con cinco integrantes cada uno y el restante (Grupo 3) con tres.

El Instituto del Profesorado cuenta con unos gabinetes o muebles móviles que permiten trasladar 10 netbooks al lugar donde se las necesite. Para la implementación de la mencionada actividad, se contó en el aula con esas computadoras portátiles repartidas entre los grupos, además de un cañón, que permitía proyectar sobre el pizarrón aquello que resultara útil o de interés general, ya sea por parte del docente investigador o por parte de los estudiantes del Profesorado. Además, tres de los alumnos habían traído sus propias computadoras portátiles.

El Instituto cuenta con libre acceso a Internet, por lo que las computadoras que habían sido repartidas y las de los alumnos contaban con esa conexión a la red. A su vez tenían ya instalados los programas que podían resultar útiles para la realización de la actividad: procesador de textos, planilla de cálculo, GeoGebra, entre otros.

El propósito durante la resolución de las actividades fue que los alumnos del Profesorado pudieran analizar los contenidos que aparecen involucrados, los tipos de situaciones que se plantean en cada actividad, los contenidos previos que se requieren, el rol del recurso informático como herramienta didáctica en el desarrollo de los contenidos, etc. Es decir, no solo hacer hincapié en la resolución de cada actividad en sí misma sino en el análisis de

dicha secuencia. Esas resoluciones pueden resultar útiles porque en algunos casos solo a partir de ellas se pueden distinguir aspectos tales como: contenidos previos que se requieren, tipos de actividades que se proponen en la secuencia para introducir y para desarrollar el contenido Función Cuadrática, obstáculos y dificultades que podrían tener los alumnos de Nivel Secundario al resolver las actividades propuestas, tipos de representaciones respecto del contenido Funciones y las relaciones entre ellos, el rol del recurso informático como herramienta didáctica, tipos de actividades que se presentan como aplicación, revisión final y evaluación, claridad en los textos tanto en definiciones como en enunciados de actividades, entre otras cuestiones de interés que puedan emerger. En esta etapa, la recolección de datos fue a través de la observación y la anotación (Hernández et al., 2010) por parte del investigador respecto del trabajo de resolución de las actividades que realizaron los estudiantes.

3.4 Tercera etapa de la investigación

Durante la última semana de septiembre se inició la tercera etapa de la investigación, donde los alumnos del Profesorado en Matemática, divididos en grupos, han elaborado una propuesta de enseñanza con actividades referidas al contenido Función Cuadrática, teniendo en cuenta la reflexión realizada respecto de la secuencia resuelta anteriormente, y que incluya la utilización del software GeoGebra como recurso didáctico para el desarrollo del contenido.

Respecto del total de alumnos mencionados en la etapa anterior algunos han ido abandonando la cursada de la asignatura. Esta deserción es algo habitual durante cada ciclo

lectivo, tal como se ha observado también en años anteriores, e incluso ya se habían registrado algunos abandonos en los meses previos a la realización de estas actividades.

Los 15 alumnos presentes en la clase se dividieron en tres grupos de cinco integrantes cada uno: los grupos identificados como Grupo 1 y Grupo 2 en el apartado 3.3 conservaron los mismos integrantes, quedando ahora como Grupo 3 parte de los integrantes que antes estuvieron en grupos separados identificados como Grupo 3 y Grupo 4.

Para el diseño de esta propuesta de enseñanza, se había indicado previamente a los alumnos del Profesorado que podían traer libros de texto u otro material de consulta, referidos al contenido Función Cuadrática.

De manera similar a lo comentado en el desarrollo de la etapa anterior, se contó también con el gabinete móvil del Instituto del Profesorado con 10 netbooks incluidas, y además trajeron sus computadoras portátiles los mismos tres alumnos que lo habían hecho en la tarea anterior, contando en todos los casos con la conexión a Internet que brinda el Instituto.

Para el desarrollo de esta parte de la actividad se destinó una clase de cuatro horas cátedra de duración, donde cada grupo comenzó a elaborar una propuesta de enseñanza con las características mencionadas al comienzo de este apartado. Se les pidió también que incluyeran las edades de los alumnos o curso a los que está destinada la propuesta, así como un análisis que la fundamente, considerando aspectos tales como: los objetivos por los que se han seleccionado cada una de las actividades, lo que se espera de los alumnos de Nivel Secundario al resolverlas, el rol del docente durante la implementación, la justificación y análisis de los recursos utilizados, el rol del software matemático GeoGebra, los criterios

por los cuales se estima una ventaja en la utilización de la computadora por sobre otros recursos.

El papel del docente investigador fue el de observador llevando un registro de las situaciones que se presentaron durante esta actividad a través de la anotación (Hernández et al., 2010).

La propuesta diseñada por cada uno de los grupos fue resuelta por los otros grupos de estudiantes del Profesorado durante la semana siguiente a la entrega de los trabajos, de forma tal que cada uno de ellos pudo vivenciar lo que sucede cuando se implementa la propuesta de enseñanza que han diseñado.

Se destinó una clase de 80 minutos para cada grupo: uno de ellos el día miércoles, que la asignatura tiene esa carga horaria, y los otros dos grupos el día jueves, ya que este día se cuenta con 160 minutos de clase.

3.5 Cuarta etapa de la investigación

Durante la primera semana del mes de noviembre se desarrolló la cuarta etapa, donde cada grupo realizó una exposición oral de su propuesta de enseñanza, con el objeto de desarrollar las actividades diseñadas para los alumnos de Nivel Secundario, ampliar en forma más detallada el fundamento de la selección o diseño de las actividades incluidas, socializar y hacer una puesta en común con los otros grupos lo vivenciado, tanto en la elaboración del trabajo como así también durante la resolución de las actividades realizadas por los otros grupos.

Cada grupo contó con una clase de 80 minutos; de manera similar a lo comentado en la etapa anterior, uno de ellos el día miércoles y los otros dos grupos el día jueves. También aquí el papel del docente investigador fue el de observador.

Al finalizar estas exposiciones, cada grupo de estudiantes entregó por escrito el trabajo realizado (documentos de análisis, en términos Hernández et al., 2010) para ser considerado por el investigador, de acuerdo con los objetivos específicos planteados: analizar tanto la configuración del conocimiento tecnológico en los estudiantes del Profesorado en Matemática, integrado a lo disciplinar y a lo didáctico, como las posibilidades que brindan las TIC para fortalecer el tratamiento y conversión de registros de representación.

El instrumento de análisis de esos documentos consistió en una matriz de datos donde se registraron las características principales de cada propuesta de enseñanza.

3.6 Categorías de análisis

Las categorías de análisis para las propuestas diseñadas por los estudiantes del Profesorado en Matemática, devenidas de un entramado teórico – conceptual – empírico, son seis:

- 1- Aspectos de la función cuadrática
- 2- Características de las actividades
- 3- Herramientas para llevar a cabo las actividades
- 4- Formas de representación empleadas
- 5- Traslaciones y conversiones entre representaciones
- 6- Análisis didáctico

En lo que sigue (apartados 3.6.1 a 3.6.6) se desarrolla conceptualmente cada una de las categorías.

3.6.1 Aspectos de la función cuadrática

De acuerdo con lo detallado en el apartado 2.5.1 resultó de interés analizar si en las propuestas de enseñanza se abordaron algunos aspectos de la problemática cuadrática (Illuzi y Sessa, 2014). Para ello se consideraron cuatro aspectos: construcción de fórmulas cuadráticas para contar colecciones, introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos, estudio de la función cuadrática a partir de la expresión canónica de su fórmula, estudio de la función cuadrática a partir de distintas escrituras de su fórmula (Tabla 3.2).

Tabla 3.2. Categoría: Aspectos de la función cuadrática

Aspectos de la función cuadrática			
Para contar colecciones	Problemas en contextos geométricos	Expresión canónica	Distintas escrituras de su fórmula

Fuente: elaboración propia, basado en Illuzi y Sessa (2014).

3.6.2 Características de las actividades

Las actividades incluidas en las propuestas de enseñanza se analizaron considerando las características del tipo de actividad realizada (González, 2014) presentadas en el apartado 2.5.2. Se constituyeron para ello nueve subcategorías de la categoría en estudio, que se detallan en las Tablas 3.3 a 3.11.

Tabla 3.3. Subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto			
Ejercicio Aplicación Práctica	Problema	Ejemplo Ilustración	Explicación Comprensión

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.4. Subcategoría: Por la presentación o formato

Por la presentación o formato	
Con enunciado (verbal, no verbal: gráfico, simbólico, icónico, modelos)	Sin enunciado

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.5. Subcategoría: Por la naturaleza de la tarea

Por la naturaleza de la tarea	
Reales (contextuales, naturales, situaciones de la realidad)	Artificiales

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.6. Subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea

Por la motivación o finalidad general de la tarea			
Escolares	Socioculturales	Lúdicas	Histórico culturales

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.7. Subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica

Por el tipo de finalidad didáctica			
De ejecución	De investigación Exploración	De evaluación	De explicación Comprensión

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.8. Subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución

Por el tipo de proceso de resolución	
Tareas cerradas	Tareas abiertas

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.9. Subcategoría: Por el tipo de solución

Por el tipo de solución	
Con solución (única, múltiple, indeterminada)	Sin solución

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.10. Subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada							
Demostración	Definición	Representación	Propiedad	Concepto	Procedimiento	Algoritmo	Problema

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

Tabla 3.11. Subcategoría: Por el tipo de actuación implicada

Por el tipo de actuación implicada						
Construcción	Razonamiento	Justificación	Aplicación	Comunicación	Explicación	Análisis Comprensión

Fuente: elaboración propia, basado en González (2014).

3.6.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades

Se contemplaron las herramientas que se utilizaron en la resolución de las actividades: lápiz y papel, elementos de geometría, calculadora, software matemático (Tabla 3.12).

Tabla 3.12. Categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades

Herramientas para llevar a cabo las actividades			
Lápiz y papel	Calculadora	Elementos de Geometría	Software Matemático

Fuente: elaboración propia.

3.6.4 Formas de representación empleadas

Se analizaron qué registros se pusieron en juego en el desarrollo de las actividades y de los contenidos propuestos. De acuerdo con lo indicado en el apartado 2.5 respecto de los modos de representación para el tratamiento de contenidos relativos a Funciones (Janvier, 1987, citado en Cortés, 2005) comprende cuatro formas de representación: descripción verbal, tablas, gráficas y fórmulas o ecuaciones, como se muestra en la Tabla 3.13.

Tabla 3.13. Categoría: Formas de representación empleadas

Formas de representación empleadas			
Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmulas o ecuaciones

Fuente: elaboración propia, basado en Janvier (1987, citado en Cortés, 2005).

3.6.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones

Esta categoría de análisis involucra las conversiones que transforman la representación semiótica del registro original en otra representación, identificando procesos de traslación y tipos de conversión.

En el apartado 2.5.2, en lo relativo al contenido Funciones, García y Llinares (1994) establecen registros de representación que se pueden presentar (Situación / Descripción verbal, Tablas, Gráficas, Fórmula / Expresión algebraica) así como sus respectivos procesos de traslación (Tabla 3.14)

Tabla 3.14. Subcategoría: Proceso de traslación

Proceso de traslación				
A De	Situación / Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmula / Expresión algebraica
Situación / Descripción verbal				
Tablas				
Gráficas				
Fórmula / Expresión algebraica				

Fuente: García y Llinares (1994, p. 16).

En el apartado 2.5 Janvier (1987, citado en Cortés, 2005) define y describe dos tipos de conversiones (Tabla 3.15): directas e indirectas.

Se analizó si dichas conversiones aparecieron en las propuestas de enseñanza diseñadas por los estudiantes del Profesorado en Matemática.

Tabla 3.15. Subcategoría: Tipos de conversiones

Tipos de conversiones	
Directa	Indirecta
Tabla a gráfica	Tabla a ecuación
Gráfica a tabla	Gráfica a ecuación
Ecuación a tabla	Ecuación a gráfica

Fuente: elaboración propia, basado en Janvier (1987, citado en Cortés, 2005).

3.6.6 Análisis didáctico

De acuerdo con lo incluido en el apartado 2.5.2 el proceso de diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático, requiere de un denomina análisis didáctico (Gómez, 2001).

Incluye cuatro aspectos: análisis cognitivo, análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis de actuación.

En el análisis de instrucción el profesor produce y evalúa diseños de actividades que realizarán los alumnos, de acuerdo con los análisis anteriores.

Se analizó en esta investigación el modo en que los estudiantes del Profesorado en Matemática realizaron los análisis cognitivo y de contenido (Tabla 3.16) al evaluar o producir actividades acerca del contenido Función Cuadrática en la etapa correspondiente al análisis de instrucción.

Tabla 3.16. Categoría: Análisis didáctico

Análisis didáctico	
Análisis cognitivo	Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia, basado en Gómez (2001).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS: DESCRIPCIÓN E INTERPRETACIÓN

Se describen a continuación los resultados de la investigación obtenidos al implementar cada una de las cuatro etapas descritas en el Capítulo 3.

El primer apartado hace referencia a la primera etapa de la investigación donde se realiza una descripción del portal educ.ar y un análisis de la secuencia didáctica “Función Cuadrática” seleccionada entre las disponibles en el sitio.

La segunda etapa se detalla en el segundo apartado, con los resultados que se observaron durante la resolución por parte de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la mencionada secuencia y el análisis realizado por cada grupo.

En el tercer apartado se describe la tercera etapa de la investigación, donde los estudiantes diseñaron una propuesta de enseñanza acerca del contenido Función Cuadrática incluyendo la utilización de GeoGebra.

Además de la resolución de la propuesta diseñada por cada grupo, se describe en el cuarto apartado la cuarta etapa del trabajo, donde cada uno de ellos realizó la exposición correspondiente al desarrollo de las actividades planteadas.

4.1 Primera etapa de la investigación

La descripción de los resultados obtenidos acerca de esta primera etapa de la investigación se divide en dos subapartados.

En el primero se presenta una descripción del portal educativo educ.ar, las partes que componen el sitio, las opciones y recursos que se incluyen, y las secuencias didácticas que se proponen acerca del contenido Función Cuadrática.

Tal como se ha comentado en el apartado 3.2, de las siete secuencias didácticas disponibles que se relacionan con el mencionado contenido, se ha seleccionado la que se denomina “Función Cuadrática”. En el segundo subapartado se presentan y analizan las actividades incluidas en dicha secuencia.

4.1.1 Acerca del Portal Educativo educ.ar

En el momento en que se realizó el trabajo, al ingresar a la página www.educ.ar aparece un menú de opciones que en la solapa Docentes incluye otras nuevas solapas: Recursos, Experiencias, Convocatorias, Formación, En red (Fig. 4.1).



Figura 4.1. Captura de pantalla del portal educ.ar.
Fuente: recuperado en marzo de 2016 de <https://www.educ.ar/>

Al ingresar a la opción Recursos aparece un nuevo menú en el que se puede seleccionar: Portada, Efemérides, Minisitios, Software (Fig. 4.2).



Figura 4.2. Captura de pantalla de la opción “Recursos”.
 Fuente: recuperado en marzo de 2016 de <https://www.educ.ar/recursos>

Desde la opción Portada se puede acceder a distintos recursos seleccionando entre: Nivel (Inicial, Primaria, Secundaria, Superior) o Tipo de Recurso. Entre los tipos de recursos disponibles se encuentran los que se visualizan en la Fig. 4.3.

Tipo de recurso
Actividades (1092)
Aplicación (90)
Artículo periodístico (2254)
Directorio de enlaces (34)
Efemérides (8)
Entrevista (366)
Especial TV (63)
Experiencia (289)
Exposición (1366)
Infografía (136)
Juego (147)
Literatura (128)
Mapa (13)
Material de archivo (250)
Material pedagógico (218)
Normativa (373)
Películas (3)
Ponencia (63)
Proyecto (241)
Secuencia didáctica (1712)
Serie TV (1375)
Sin clasificar (4)
Sitio educativo (68)
Tutorial (398)
Webquest (22)

Figura 4.3. Captura de pantalla de la opción “Tipo de recurso”.
 Fuente: recuperado en marzo de 2016 de <https://www.educ.ar/recursos>

Seleccionando la opción Secundaria en el Nivel e ingresando en la opción Secuencia Didáctica en el Tipo de Recurso, aparece Área como otro criterio de clasificación de recursos (Fig. 4.4).

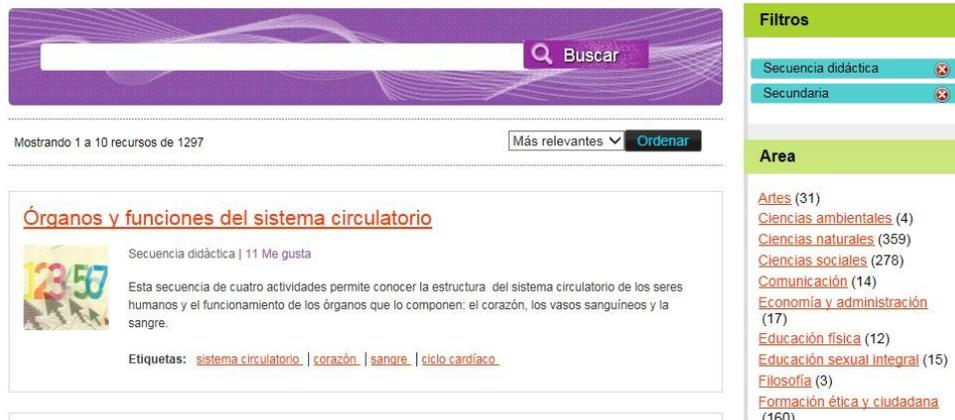


Figura 4.4. Captura de pantalla de la opción “Área”. Fuente: recuperado en marzo de 2016 de https://www.educ.ar/recursos/buscar?tema=3&tipo_recurso_educativo=7

Se encuentran como áreas disponibles las que se visualizan en la Fig. 4.5.



Figura 4.5. Captura de pantalla de la opción “Áreas”. Fuente: recuperado en marzo de 2016 de https://www.educ.ar/recursos/buscar?tema=3&tipo_recurso_educativo=7

Al seleccionar la opción Matemática, se encontraban al momento de realizar el trabajo, 168 recursos disponibles. En la sección Recursos con los filtros aplicados, aparece sobre el sector derecho de la pantalla una lista de Disciplinas que corresponden al Área Matemática: Álgebra, Geometría y medida, Números y operaciones, Probabilidad y estadística, Trigonometría (Fig. 4.6).

The screenshot displays a search interface with a purple header containing a search bar and a 'Buscar' button. Below the search bar, it indicates 'Mostrando 1 a 10 recursos de 168' and a sorting option 'Más relevantes' with an 'Ordenar' button. The main content area shows a search result for 'Medición y clasificación de ángulos', which is a didactic sequence with 11 likes. The description states that students will study the relationship between angles and their practical application in daily life using a protractor. The tags are 'medición', 'transportador', 'ángulo', and 'aplicación'. On the right side, there is a sidebar with filters and a list of disciplines: Álgebra (54), Geometría y medida (48), Números y operaciones (40), Probabilidad y estadística (12), and Trigonometría (7). The sidebar also has a 'Formato' section.

Figura 4.6. Captura de pantalla de la opción “Disciplina”. Fuente: recuperado en marzo de 2016 de https://www.educ.ar/recursos/buscar?tema=20&tipo_recurso_educativo=7

Estas opciones no incluyen el contenido matemático Funciones como parte de los bloques en los que se clasifican los recursos, por lo que la búsqueda acerca de este contenido debió realizarse por otra vía.

Cada uno de los recursos cuenta también con ciertas Etiquetas que lo caracterizan. Por ejemplo, el recurso titulado “Medición y clasificación de ángulos” (Fig. 4.6) tiene como Etiquetas: medición, transportador, ángulo, aplicación.

De acuerdo con esto, puede por ejemplo escribirse “función” o “funciones” en el cuadro de entrada correspondiente al sector de la pantalla Buscar (Fig. 4.7), obteniéndose como resultado de esa búsqueda 40 recursos disponibles.

Figura 4.7. Captura de pantalla de una búsqueda mediante la palabra “Función”.
Fuente: recuperado en marzo de 2016 de <https://www.educ.ar/recursos/buscar?q=funci%C3%B3n>

De esos recursos referidos a Funciones, hay siete secuencias didácticas que se corresponden con el contenido específico Función Cuadrática:

1. Aplicaciones de la función cuadrática
2. Función cuadrática
3. Estudio de la función cuadrática
4. Función cuadrática en el básquet
5. Función cuadrática, parte I
6. Función cuadrática, parte II
7. De crecimientos y trayectorias

Solo se consideran las secuencias que abordan de manera específica el contenido Función Cuadrática. Es decir, otros dos recursos hacen referencia a las funciones polinómicas, de manera más general y no fueron tenidos en cuenta en esta tesis.

En efecto, la secuencia didáctica “Funciones polinómicas” indica en su resumen inicial: “En esta sección trabajaremos con funciones polinómicas, se retomará el concepto de

dominio, imagen, conjuntos de positividad, negatividad, y raíces de una función trabajados para otras funciones. En las actividades los alumnos realizarán gráficos aproximados de diferentes funciones polinómicas”. Dentro de las actividades propuestas se hace referencia a la función cuadrática pero no de manera específica. Se considera este contenido como conocido, y las actividades propuestas no explican o desarrollan los contenidos referidos a este tipo de funciones sino que se incluyen como actividades de aplicación pero de todo tipo de funciones polinómicas.

Algo similar ocurre con la otra secuencia didáctica que no se ha considerado, denominada “Análisis de las funciones polinómicas”. En su resumen inicial indica: “En esta sección se trabajará con funciones polinómicas, con correspondencia entre gráficos y fórmulas de la función polinómica. El objetivo es interpretar gráficos e identificar raíces, conjuntos de positividad y negatividad de una función”. También se incluyen actividades que resultan de aplicación de contenidos relativos a funciones polinómicas en general, no específicamente referidos a las funciones cuadráticas.

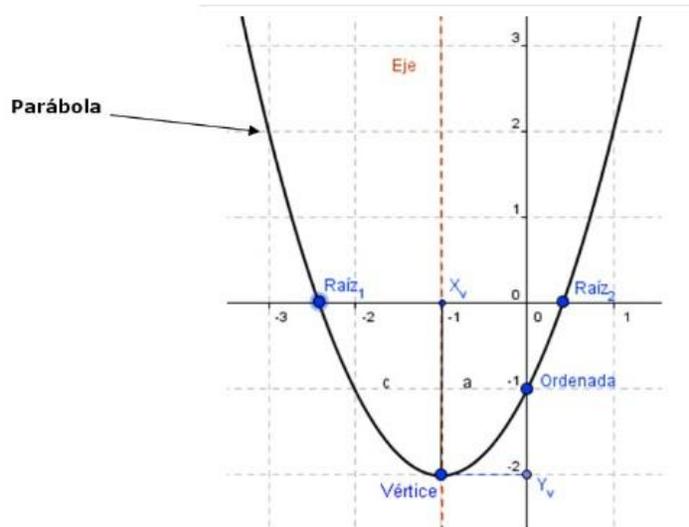
4.1.2 Secuencia “Función Cuadrática”

La secuencia seleccionada, de acuerdo con los criterios presentados en el apartado 3.2, para trabajar posteriormente con los estudiantes del Profesorado en Matemática presenta tres actividades y una actividad de cierre. En los cuatro subapartados siguientes (4.1.2.1 a 4.1.2.4) se muestran sus enunciados y se realiza un breve análisis descriptivo-interpretativo de las mismas, efectuado por la tesista previo al desarrollo de la segunda etapa de la investigación.

4.1.2.1 Actividad 1

1) Antes de comenzar, analicen junto con el docente la siguiente información sobre la función cuadrática:

- Toda función cuadrática se puede expresar de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$. Esta forma de escribir a la función cuadrática se denomina **polinómica**.
- El gráfico de una función cuadrática está formado por puntos que pertenecen a una curva llamada **parábola**. Miren el gráfico y vean los elementos que se distinguen en él:



Raíces ($raíz_1$ y $raíz_2$): las raíces o ceros de la función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0. Gráficamente, las raíces corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x .

Podemos determinar las raíces de una función cuadrática igualando a cero la función $f(x) = 0$ y así obtendremos la siguiente ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para calcular las raíces se utiliza la siguiente fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Eje de simetría (eje): representa la recta vertical simétrica con respecto a la parábola.

El eje de simetría de una parábola puede determinarse mediante la siguiente expresión: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ donde x_1 y x_2 son las raíces de la función cuadrática.

Vértice (vértice): el vértice de la parábola está ubicado sobre el eje de simetría y es el único punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. A la coordenada x de este punto la llamaremos x_v y a y , y_v . El vértice de la parábola vendrá dado por las siguientes coordenadas: $V = (x_v ; y_v)$.

Las coordenadas del vértice también pueden hallarse analíticamente por las siguientes expresiones:

El valor x_v se obtiene con la misma expresión que el eje de simetría: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Una vez obtenido el valor x_v podemos determinar y_v evaluando la función cuadrática $y_v = f(x_v)$

2) A partir de lo analizado anteriormente, contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Una función cuadrática tendrá siempre dos raíces?

b) ¿El gráfico de la función cuadrática será siempre una parábola cóncava (con las ramas hacia arriba), como se muestra en el gráfico?

La primera actividad está dividida en dos ítems (1 y 2).

En el primero (1) los alumnos a los que está dirigida esta secuencia solo deben leer la información que se suministra e interpretarla.

Aparece allí la definición de una función cuadrática a partir de su expresión polinómica, el gráfico de una función genérica y el nombre de la curva.

En el gráfico se señalan sus elementos principales: las raíces, el eje de simetría, el vértice de la parábola y la ordenada al origen. Se definen luego esos elementos principales y se indican las fórmulas a través de las cuales se pueden calcular las raíces o ceros de la función, el eje de simetría y el vértice.

No se consideran los contenidos previos con los que cuentan los alumnos, o al menos no se lo explicita en el enunciado. Se incluye, por ejemplo, la definición de raíz o cero de una función, como si fuera la primera vez que los alumnos vieran este concepto.

Si bien el gráfico es genérico, se presenta como el único posible para una función cuadrática, o al menos no se detalla en forma explícita que podrían presentarse distintas situaciones, si bien siempre su representación gráfica corresponderá a una parábola.

En el caso de la definición de las raíces de la función, se indica que al igualar a cero la expresión polinómica correspondiente a una función cuadrática, se obtiene lo que denomina una ecuación cuadrática, y se presenta la fórmula para calcular dichas raíces. No se indica el modo en que se puede deducir la fórmula para calcular los ceros ni se obtiene a partir de la resolución de algunas ecuaciones cuadráticas.

Se señala, al definir el concepto de raíz, como si existieran siempre dos valores que lo verifican. No se analiza en esa primera definición las condiciones que deben verificar los coeficientes de la expresión polinómica para que sea posible utilizar esa fórmula. En el ejemplo de la representación gráfica se muestra un caso particular: dos raíces reales distintas con concavidad positiva.

De manera similar, se define el eje de simetría sin dar la posibilidad a los alumnos de deducir la simetría que la curva presenta, y se indica una fórmula para calcular ese eje, sin permitirles que la deduzcan. Tampoco se aclara que esa fórmula solo es posible utilizarla en el caso de que la función tenga raíces reales. Se insiste en presentar el ejemplo como si se pudiera generalizar, tratando a los ceros de la función como valores reales y distintos entre sí.

Algo similar sucede con el vértice de la parábola ya que se indica como única forma de calcularlo una fórmula similar a la del eje de simetría. Conocido el valor de la abscisa, los alumnos podrían deducir el valor de la ordenada, en lugar de indicárselo también a modo de definición.

Luego de haberse realizado ese primer ítem (1), en el que los alumnos deberían haber leído e interpretado la representación gráfica, las definiciones y fórmulas dadas, se presenta un

segundo ítem (2) con preguntas que los alumnos deberían responder acerca de la cantidad de raíces y de la concavidad.

A diferencia del primer ítem (1), en este caso se trata de preguntas abiertas, sin indicaciones explícitas sobre su resolución.

Acerca de la pregunta sobre la cantidad de raíces, entre posibles actuaciones estudiantiles, podría presentarse que:

- a partir del gráfico dado, imaginen que si el mismo se desplazara en distintas regiones del plano, se observaría que puede no tener intersección con el eje X, o que la intersección podría ser un único punto;
- se basen en la fórmula dada y analicen las condiciones para poder utilizarla, deduciendo así que no podrían obtenerse raíces reales en algunos casos, o que podría obtenerse un único valor, en otros;
- empleen un software que les permita graficar distintos ejemplos de funciones y visualizar gráficamente lo que sucede con las raíces o ceros de una función cuadrática.

Si en este punto surge la posibilidad de que la función cuadrática pueda no tener raíces reales, queda pendiente analizar, o al menos no se explicita en el enunciado, el modo en que se pueden calcular el vértice y el eje de simetría en esos casos.

Algo similar a lo analizado ocurre con la otra pregunta que se incluye en este ítem. Si antes no hubiera surgido en los alumnos la posibilidad de cuestionarse acerca de la concavidad del gráfico, es en este punto donde se los interroga sobre eso. Puede suponerse que los alumnos responderán acerca de la posibilidad de que la curva presente una concavidad negativa; de manera similar a lo comentado en el ítem anterior acerca de los desplazamientos que podría tener la curva, también podrían imaginar en este caso que la

curva quede con sus ramas orientadas hacia abajo, ya que en el mismo enunciado se les menciona que al gráfico presentado se lo considera con sus ramas hacia arriba. Solo desde este aspecto gráfico, no es de esperarse que los alumnos puedan deducir cuáles son las condiciones en la expresión polinómica que se relacionan de manera directa con la concavidad de la curva, si bien tampoco es lo que se pide en el enunciado.

Si los alumnos realizaran distintos ejemplos y gráficos como complemento para el análisis de lo pedido, podrían llegar a alguna conclusión acerca de la relación entre la expresión polinómica y la concavidad. Esto podría realizarse con la ayuda de un software, aunque tal como se indicó antes, no está expresamente pedido.

4.1.2.2 Actividad 2

1) *¿Cuáles de las siguientes son funciones cuadráticas?*

a) $f(x) = 2(x-3)^2 - 5(2x+3) + 8x(3-2x)$

b) $g(x) = 4x^2 - 3(x-6) - (2x-3)^2 + 5x - 8$

c) $h(x) = 6x - 3x(x+5) - 2(x-1)(3-x) + 6$

d) $t(x) = 2(x-1)^2 - 2x(x+2) + 5$

Utilizando el programa Geogebra, instalado en sus equipos portátiles, grafiquen las funciones cuadráticas encontradas. Luego señalen las raíces, el vértice y su eje de simetría.

2) *Grafiquen las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

A partir de los gráficos realizados anteriormente, contesten:

a) *¿Existe diferencia entre los gráficos? Justifiquen su respuesta.*

b) *¿Cuántas raíces tiene cada función?*

c) *¿Se puede encontrar el vértice sobre la recta x en alguna de las funciones?*

d) *¿Alguna de las funciones no corta en el eje x ? De ser así, indiquen cuánto valen sus raíces.*

La segunda actividad también está dividida en dos ítems (1 y 2).

En el primero (1) se indican las expresiones polinómicas de algunas funciones, con el objeto de que los alumnos reconozcan cuál/es de ellas corresponde/n a una función cuadrática; es decir, deben reconocer si las expresiones polinómicas corresponden a un polinomio de segundo grado, aún cuando estén expresadas de distintas maneras.

En principio, todas las expresiones podrían parecer polinomios de segundo grado, pero debería analizarse mejor cada una de ellas y hallar expresiones equivalentes a las dadas con el objeto de identificar si corresponden o no a polinomios de segundo grado.

En los ejemplos dados:

$$f(x) = 2(x-3)^2 - 5(2x+3) + 8x(3-2x) \quad \rightarrow \quad f(x) = -14x^2 + 2x + 3$$

$$g(x) = 4x^2 - 3(x-6) - (2x-3)^2 + 5x - 8 \quad \rightarrow \quad g(x) = 14x + 1$$

$$h(x) = 6x - 3x(x+5) - 2(x-1)(3-x) + 6 \quad \rightarrow \quad h(x) = -x^2 - 17x + 12$$

$$t(x) = 2(x-1)^2 - 2x(x+2) + 5 \quad \rightarrow \quad t(x) = -8x + 7$$

Se pueden rever a partir de esta actividad los conceptos relativos a la factorización de expresiones algebraicas, el desarrollo de dichas expresiones y todo lo relativo al manejo algebraico de expresiones equivalentes a una dada. Los alumnos pueden reconocer de este modo si las expresiones que se indican en el enunciado corresponden o no a funciones cuadráticas.

Se pide luego como parte del mismo ítem (1) que grafiquen “*las funciones cuadráticas encontradas*” (tal como se indica en el enunciado) en GeoGebra e identifiquen algunos de los elementos principales.

No se provoca una comparación con las expresiones dadas inicialmente en tanto ambas tienen la misma representación gráfica.

De las funciones dadas en el enunciado, las dos que resultan ser cuadráticas tienen concavidad negativa, lo cual podría reforzar el cierre de la actividad anterior (4.1.2.1). En caso de no haber podido concluirlo, en este punto los alumnos podrían caracterizar las expresiones dadas con el objeto de analizar cuándo las ramas de la parábola quedan orientadas hacia abajo.

No se detalla el modo en que los alumnos podrían “señalar” (tal como se pide en el enunciado) en el gráfico los elementos pedidos: raíces, vértices y eje de simetría.

Entre las posibles actuaciones estudiantiles para la obtención de los ceros de la función utilizando GeoGebra, de acuerdo con lo expresado en la consigna, se encuentran:

- empleo del comando *Raíz[<Polinomio>]*;
- utilización del ícono Intersección de Dos Objetos (eje X – parábola) en la Barra de Herramientas;
- aplicación de la fórmula dada en el ítem 1 de la Actividad 1 (4.1.2.1) actuando el software como calculadora. Para ello, sería necesario que los alumnos obtengan en cada caso, a partir de las expresiones dadas en el enunciado, la expresión equivalente del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si bien no se realiza expresamente ninguna indicación acerca del modo en que se pueden hallar las raíces, podría haberse pedido esta resolución analítica además de la gráfica, a fin de corroborar los resultados.

Se pide también que se señale el vértice de la parábola. Hasta lo que los alumnos conocen por haber resuelto la actividad anterior, pueden hallar las coordenadas del punto

analíticamente a través de la fórmula dada, pero esto solo sirve en los casos en que la función tiene raíces reales.

También en esos casos los alumnos pueden hallar el vértice gráficamente utilizando algunas de las herramientas que tiene el programa GeoGebra. Por ejemplo, hay un ícono en la Barra de Herramientas que es Punto Medio o Centro, que puede servir si la función tiene raíces reales distintas.

En el caso de las funciones cuadráticas encontradas, siguen siendo ejemplos que tienen dos raíces reales distintas. Esto podría interpretarse como una forma de seguir reforzando y practicando lo visto en el ítem 1 de la actividad 1 (4.1.2.1), pero también como un potencial sesgo si se llegara a entender como el único caso posible.

Para obtener las coordenadas del vértice podrían, también utilizando alguna de las funciones que tiene incluidas el programa, hallar el máximo o el mínimo de la función, que corresponde al vértice en una función cuadrática, pero hasta este momento de las actividades nunca se mencionó ni se relacionó explícitamente un concepto con el otro.

Se pide también a los alumnos identificar el eje de simetría, para lo que se podría realizar un análisis similar al caso del vértice de la parábola.

En el ítem 2 de esta actividad se da a los alumnos tres funciones, definidas a partir de expresiones del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, y se les pide que realicen el gráfico. No se detalla en el enunciado si al gráfico lo pueden realizar con el programa GeoGebra, como en el ítem anterior, o si se espera que los alumnos puedan realizar el gráfico por sus propios medios (manualmente, otro programa, etc.). Por ejemplo, podrían armar a mano una tabla de

valores, a partir de algunos tentativos aleatorios, o podrían identificar los elementos principales, anteriormente definidos, y que el gráfico se realice a partir de ello.

Se incluyen además cuatro preguntas, *a)* a *d)* en el enunciado del mismo ítem 2:

a) ¿Existe diferencia entre los gráficos?

La pregunta resulta algo amplia y podría hacer referencia a aspectos muy variados. Podría indicarse de manera más específica qué es lo que se quiere preguntar o sobre qué se quiere trabajar.

No existen diferencias si se hace referencia a que todas las funciones dadas son cuadráticas y sus gráficos son parábolas. Habiéndose hecho antes referencia a la concavidad, todas tienen la misma concavidad, positiva. Todas tienen el mismo coeficiente principal, por lo que no varían entre ellas la abertura de la parábola, si bien es probable que los alumnos no hagan referencia a este aspecto porque no fue analizado ni indicado anteriormente.

Teniendo en cuenta el vértice y el eje de simetría, todas tienen ejes y vértices diferentes.

Si se hace referencia a las raíces o intersecciones con el eje de abscisas, cada una de las tres funciones dadas corresponde a un caso distinto: una tiene dos raíces reales distintas, otra tiene una raíz real doble y la restante no tiene raíces reales.

b) ¿Cuántas raíces tiene cada función?

Esta segunda pregunta puede resultar algo redundante si se supone que ya se realizó el análisis en la pregunta anterior, porque era el aspecto principal por el que se diferenciaban cada una de las funciones dadas. Por otro lado, puede suponerse que incluir esta pregunta es para que obligatoriamente se analice este aspecto, si antes no se lo hubiera hecho.

c) *¿Se puede encontrar el vértice sobre la recta x en alguna de las funciones?*

Se podría rever la pregunta, ya que la respuesta puede ser solo afirmativa. Surge de manera natural, a partir de los gráficos realizados, que algunas parábolas pueden tener su vértice en el eje X, pero no se pide ningún análisis o justificación adicional.

Se podría relacionar la ubicación del vértice con respecto a la cantidad de raíces.

Se podría también pedir en ese análisis que se considere la ubicación del vértice, en relación con la cantidad de raíces, cuando la concavidad es negativa.

d) *¿Alguna de las funciones no corta en el eje X? De ser así, indiquen cuánto valen sus raíces.*

Por un lado, nuevamente la pregunta puede ser algo redundante. Ya se indicó antes la posibilidad de que una función cuadrática pueda no tener raíces reales, y que en consecuencia, no corte al eje X. No se entiende por qué se pide que calcule el valor de las raíces, si se refiere a hallar la expresión del número complejo, como tampoco está claro que en este punto los alumnos puedan conocer los números complejos, ya que en general, el contenido referido a las funciones cuadráticas se desarrolla antes del contenido referido a los números complejos.

Esta actividad se inició pidiendo que se identifiquen cuáles de las funciones dadas corresponde a una función cuadrática. Si hasta ese punto solo se había definido la función a partir de su expresión polinómica, es de esperar que los alumnos trabajen con las expresiones dadas, para obtener otras equivalentes, que respondan o no a la expresión polinómica a través de la cual se habían definido las funciones cuadráticas. Por ejemplo, dada la función $f(x) = 2(x-3)^2 - 5(2x+3) + 8x(3-2x)$ quizás los alumnos encuentren su

expresión equivalente $f(x) = -14x^2 + 2x + 3$ para identificar que se trata de una función cuadrática, pero ya que se está haciendo referencia a expresiones algebraicas equivalentes, no se está aprovechando la posibilidad de relacionarlo con contenidos ya desarrollados: partiendo de expresiones más sencillas, podría hacerse hincapié en la relación que existe entre la expresión polinómica dada y las raíces halladas. Por ejemplo si $f(x) = 2(x-3)^2$ puede expresarse como $f(x) = 2(x-3) \cdot (x-3)$, hace más sencillo el estudio y resolución de la ecuación $f(x) = 0$.

Luego se hace referencia a la ubicación del vértice de la parábola respecto del eje x , y también podría relacionarse la expresión de la función con la cantidad de raíces, ya sean simples o doble.

Esto, a su vez, puede relacionarse con otras formas de definir una función cuadrática, ya que en la primera actividad se menciona la expresión polinómica, pero luego al menos de manera explícita, no se mencionan las otras expresiones que existen, ni la canónica ni la factorizada, en caso de tener raíces reales.

4.1.2.3 Actividad 3

1) *Utilizando el programa GeoGebra, grafiquen las siguientes funciones:*

a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$

2) *Una vez graficadas, determinen gráfica y analíticamente los siguientes elementos: raíces de la función, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen de las funciones.*

a) *¿Cuál es el punto de intersección entre las funciones? ¿Cómo podrían calcularlo analíticamente?*

- 3) *Hallen la expresión que cumpla con los siguientes requisitos:*
- a) *Su gráfico pasa por el punto $(3; -1)$ y su vértice es el punto $V = (-2; 3)$*
 - b) *Su gráfico interseca al eje y en $(0; 7)$ y su vértice es el punto $V = (3; 2)$*

La tercera actividad está dividida en tres ítems (1, 2 y 3).

En el primero de ellos (1) solo se tienen que graficar dos funciones cuadráticas utilizando el programa GeoGebra.

En el segundo ítem (2) se tienen que hallar gráfica y analíticamente los elementos principales de cada función del ítem anterior: las raíces, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen.

Se pregunta en el mismo ítem:

¿Cuál es el punto de intersección entre las funciones? ¿Cómo podrían calcularlo analíticamente?

Como la segunda pregunta hace referencia a la parte analítica, puede suponerse que la primera pregunta podría responderse gráficamente. No se entiende si es intencional o no que se pregunte por “el punto de intersección”, como si se tratara de un único punto, cuando en este caso son dos los puntos de intersección de las dos funciones dadas.

Si a partir de esta actividad se tiene la intención de abordar lo relativo a las intersecciones entre funciones cuadráticas, podría haberse ahondado en algunas otras preguntas que hagan referencia, por ejemplo, a las distintas situaciones que podrían darse: funciones cuadráticas que no tengan ningún punto de intersección entre sí o que tengan un único punto de intersección entre ellas; también, ejemplos de gráficos con distintas variantes.

El tercer ítem (3) no se relaciona de manera directa con los ítems anteriores, ya que se pide hallar la expresión de una función cuadrática conociendo un punto de la parábola y las coordenadas de su vértice.

Los dos ejercicios dados (a y b) plantean esa misma situación, excepto que en uno de ellos el punto conocido es la ordenada al origen.

El software GeoGebra no incluye una función que indique la expresión de la ecuación dados el vértice y un punto, por lo que en un principio los alumnos deberían resolver esta actividad analíticamente. Podría luego utilizarse el programa para graficar las curvas correspondientes a las expresiones halladas y verificar los resultados obtenidos.

Para resolver analíticamente este ítem debe considerarse que conocido el vértice –y en consecuencia el eje de simetría– y otro punto de la curva, pueden deducirse las coordenadas de otro punto, simétrico al dado. Conocidos ahora tres puntos que pertenecen a la curva, puede hallarse la expresión analítica de la función cuadrática.

Los alumnos tienen que poder interpretar que, por ejemplo, si utilizan la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, y un punto que pertenece a su gráfica, pueden deducir una condición que debe verificarse. Así, por ejemplo, que el punto $(3; -1)$ pertenezca al gráfico, puede indicarse como $9a + 3b + c = -1$. Considerando los tres puntos con los que se cuenta, podrán resolver un sistema de ecuaciones. Para ello, los alumnos deberían conocer previamente cómo resolver el sistema que resulta, o puede ser el objetivo de esta actividad que deduzcan los valores de los coeficientes que resultan solución al sistema dado.

También pueden utilizar el software GeoGebra: en *Vista CAS – Cálculo Simbólico*. Se cuenta con la sentencia `Soluciones[{ecuacion1, ecuacion2},{variable1, variable2}]` que

resuelve un sistema de ecuaciones, pudiendo esto ampliarse a la cantidad de ecuaciones y variables que sean necesarias.

Como se indicó, no fueron desarrolladas, al menos explícitamente a través de las actividades dadas, las distintas expresiones con las que puede representarse una función cuadrática. Solo se indicó, al comienzo de la primera actividad, la expresión polinómica del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Puede quedar a cargo del docente que implemente las actividades desarrollar las otras expresiones equivalentes. Si los alumnos conocieran la expresión canónica de la función cuadrática $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, la resolución de este último ítem puede ser mucho más inmediata, a partir de los datos dados.

Cuando se da en el enunciado el vértice de la parábola y la ordenada al origen, también resulta más sencilla la resolución ya que, aún utilizando la expresión polinómica, uno de los coeficientes se conocería de forma inmediata. Teniendo en cuenta esa variable que facilita la resolución, los ejemplos podrían haberse dado en otro orden, siendo este el primer caso a resolver, y dejando luego el otro que resulta algo más complejo.

4.1.2.4 Actividad de cierre

- 1) *Reunidos en grupos de dos o tres alumnos, investiguen en Internet o en otras fuentes la biografía del matemático Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi.*
- 2) *Analicen en qué consiste el método utilizado por este matemático para resolver ecuaciones cuadráticas. Discutan con sus compañeros y el docente la forma en que se obtienen las raíces de la ecuación cuadrática.*
- 3) *Consideren la siguiente función cuadrática: $y = 3x^2 - 2x - 1$. Encuentren sus raíces, según el método investigado, y luego hallen el vértice y la ordenada al origen. Con estos datos realicen en papel un gráfico aproximado.*

Aparece al final una actividad que se denomina Actividad de cierre, dividida en tres ítems (1, 2 y 3).

En el primero (1) se pide a los alumnos que se distribuyan en grupos, de dos o tres integrantes, y que investiguen la biografía del matemático Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi. Como solo en esta actividad se indica de manera explícita la distribución en grupos, se puede sobreentender que las anteriores se resolvieron de forma individual.

En el segundo ítem (2) se pide que analicen el método utilizado para resolver ecuaciones cuadráticas. Básicamente, podría resumirse en que el método propuesto por Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi se relaciona con la idea de completar cuadrados, pudiendo resolverse incluso geoméricamente, a partir del área entre figuras, cuadradas y rectangulares. En los documentos encontrados, este matemático resuelve de manera gráfica y analítica (pero lo analítico lo va desarrollando en lenguaje coloquial, paso a paso) la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

Propone como resolución:

“Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$, escribe: un cuadrado y diez raíces son iguales a 39 unidades. Entonces, la pregunta en este tipo de ecuación es aproximadamente así: cuál es el cuadrado que, combinado con diez de sus raíces, dará una suma total de 39. La manera de resolver este tipo de ecuación es tomar la mitad de las raíces mencionadas. Ahora, las raíces en el problema que tenemos ante nosotros son diez. Por lo tanto, tomamos 5 que multiplicadas por sí mismas dan 25, una cantidad que agregarás a 39 dando 64. Habiendo extraído la raíz cuadrada de esto, que es 8, sustraemos de allí la mitad de las raíces, 5, resultando 3. Por lo tanto el número tres representa una raíz de este cuadrado”.

El ejemplo que puede encontrarse desarrollado por el matemático Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi, no resulta sencillo adaptar a la resolución del ejemplo propuesto en el tercer ítem (3) de la actividad $y = 3x^2 - 2x - 1$. Si se hace hincapié en la resolución gráfica a partir de figuras geométricas, no es elemental cómo se va a considerar la expresión

$3x^2 - 2x$ ya que en el caso de ser una suma, se considera la suma de un cuadrado y un rectángulo; la suma de sus áreas se interpreta gráficamente como una nueva figura, donde la suma de las áreas representa el área total de la nueva figura, pero no resulta inmediato en el caso de una resta.

La resolución indicada por el matemático hace mención a que la expresión x^2 puede interpretarse como un cuadrado de lado x . Podría de manera sencilla interpretarse que una expresión como por ejemplo $4x^2$ se corresponde con un cuadrado de lado $2x$. Pero, en consecuencia, no resulta sencillo interpretar la expresión $3x^2$ que aparece en el enunciado.

Los alumnos podrían recurrir a expresiones equivalentes tales como

$3x^2 - 2x - 1 = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right)$ para trabajar así con la expresión $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ que queda

similar a lo analizado anteriormente.

Como no resulta inmediata la resolución de la expresión dada en este último ítem (3) respecto de lo desarrollado anteriormente, podría ser el objetivo de esta actividad que los alumnos tengan que resolver un problema, justamente que no resulte similar a los anteriores. Queda a criterio del docente dar a los alumnos el espacio y el tiempo para que la puedan resolver, con todo lo que ello implica en cuanto a lo relativo a la resolución de un problema, o ir resolviendo distintos ejemplos, a fin de ir incorporando de manera gradual las variables que van complejizando el problema: por ejemplo, habiendo resuelto $x^2 + 10x = 39$ podría luego resolverse una ecuación como $x^2 + 10x = 30$ donde la solución no resulte un número entero; la ecuación $x^2 - 10x = 39$ para interpretar gráfica y

analíticamente la resta de los primeros términos en lugar de la suma; una ecuación como $4x^2 + 10x = 39$ para interpretar el rol del coeficiente principal, y así otros ejemplos.

Resulta importante también analizar junto con los alumnos que la resolución de Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi, por estar directamente vinculada con lo geométrico, solo considera la solución positiva de la ecuación cuadrática, pero no menciona la negativa.

No se explicita en la secuencia el tiempo que se estima destinar a la resolución de las actividades.

En el portal educ.ar se indica, junto a la secuencia didáctica: “En esta sección estudiaremos los diferentes elementos que componen el gráfico de una función cuadrática como lo son el eje de simetría, el vértice y sus raíces. En las actividades los alumnos graficarán diferentes funciones cuadráticas utilizando el programa GeoGebra, y deberán reconocer el eje de simetría, el vértice y las raíces de diferentes funciones”.

Tal como se menciona en esa introducción, no se desarrollan todos los contenidos relativos a las funciones cuadráticas, sino la identificación y cálculo de algunos elementos principales de su gráfica.

Ya que las actividades se circunscriben de manera prácticamente exclusiva de la gráfica de las funciones cuadráticas, y se incluyó el análisis de la concavidad, podría haberse considerado el análisis de la abertura de la gráfica y de su relación con la expresión de la función.

Esto también se relaciona con el hecho de haberse mencionado la ordenada al origen como uno de los elementos de la gráfica, pero no se vinculó de manera explícita con la expresión

polinómica con la que se definió la función cuadrática al comienzo de la secuencia. Es decir, podría haberse analizado con mayor profundidad la relación que existe entre la expresión polinómica del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la influencia de algunos de los coeficientes en el gráfico de la función.

Podría haberse afianzado a través de distintos tipos de actividades el pasaje y la relación entre los distintos tipos de expresiones o registros que pueden aparecer: coloquial, tabular, gráfico, simbólico.

Resulta poco aprovechado el software GeoGebra como herramienta didáctica en la resolución de actividades, reduciéndolo casi exclusivamente a la función de graficador. Cuenta con mucho más potencial y está poco explotado el carácter dinámico del programa.

4.2 Segunda etapa de la investigación

Los resultados relativos a la segunda etapa de la investigación se presentan divididos en dos subapartados.

En el primero se describen las observaciones realizadas durante la resolución que los estudiantes del Profesorado en Matemática desarrollaron de las actividades incluidas en la secuencia didáctica “Función Cuadrática” seleccionada del sitio educ.ar.

En el segundo subapartado se presenta el análisis que los estudiantes realizaron acerca de cada tarea y la puesta en común realizada sobre la propuesta escogida del portal.

4.2.1 Resolución de las actividades de la secuencia “Función Cuadrática” por parte de los estudiantes del Profesorado

Al comenzar la clase los estudiantes del Profesorado en Matemática distribuidos por grupos estuvieron leyendo la propuesta de actividades entregada. Los primeros 15 – 20 minutos aproximadamente se centraron en un análisis “verbal” de las actividades, sin resolverlas por escrito. Conversaban mucho entre los integrantes de cada grupo, pero sin haber resuelto puntualmente cada actividad.

En uno de los grupos (identificado como Grupo 1) comentaron que la Actividad 1, explicitada en el subapartado 4.1.2.1, no se basa en los contenidos previos, que comienza de manera muy general a definir funciones cuadráticas sin repasar otras funciones vistas previamente, como es el caso de las funciones lineales por ejemplo.

En el Grupo 4 comentaron que no estaban de acuerdo con el gráfico que se adjunta en la Actividad 1, donde aparecen identificados algunos elementos principales de las funciones cuadráticas y se los define, pero sin “un valor concreto” como ejemplo. Mencionaron que ellos le hubieran dado un valor numérico a las raíces o a las coordenadas del vértice.

En general, del mismo análisis que surge de la Actividad 1, se entremezcla la opinión de cada alumno respecto de cómo lo hubiera hecho. En cada grupo hay al menos un alumno que tiene alguna experiencia previa relativa a la docencia; en algunos casos solo dando clases particulares, y en otros casos habiendo trabajado en escuelas por períodos breves cubriendo alguna suplencia del docente titular del curso. De ahí que algunos de ellos tienden a querer indicar el modo en el que ellos hubieran presentado el tema y la actividad

introductoria. En particular, el Grupo 1 es el que más se extendió en lo relativo a la Actividad 1 y en cómo ellos variarían la propuesta.

En el Grupo 3 se observa cierta “separación” dentro de los integrantes. Dos de las alumnas están aún leyendo y analizando lo pedido en la Actividad 1, mientras que la otra integrante está comenzando a realizar algunos gráficos en GeoGebra, en principio no correspondientes con ninguna de las actividades puntualmente incluidas en la guía. Las integrantes que aún están analizando la primera de las actividades señalan que, cuando se define eje de simetría en la propuesta del portal educ.ar, no se aclara que esa forma de calcularse no es general y que en algunos casos (cuando las funciones cuadráticas no tienen raíces reales) no va a poder utilizarse ese cálculo propuesto.

En el Grupo 2 también hay cierta “separación” entre los integrantes del grupo, especialmente en uno de ellos, que escribe de manera mucho más detallada que los demás la resolución de cada actividad. De manera similar a lo comentado respecto de otros grupos, mientras que los demás integrantes debaten en forma oral acerca de la introducción al contenido, este escribe las resoluciones.

El ítem 1 de la Actividad 2, explicitada en el subapartado 4.1.2.2, se presta más que el anterior a que necesiten escribir su resolución para poder dar una respuesta a lo pedido, aunque en la mayoría de los casos solo resuelven los primeros ejemplos y, a partir de ellos, generalizan la idea acerca del objetivo de la actividad.

La integrante del Grupo 1 que había comenzado a realizar algunos gráficos en GeoGebra resuelve con el programa esta actividad. Responde lo pedido acerca de identificar cuáles de las funciones dadas corresponden a funciones cuadráticas, solo a partir de lo observado en

el gráfico de cada función: si al introducir la expresión en GeoGebra su gráfico es una parábola, indica que se trata de una función cuadrática.

El inconveniente surgió en el tercero de los ítems de la Actividad 2: al introducir la expresión de la función dada, si no se cambia la escala del gráfico, puede malinterpretarse el resultado porque no se visualizan algunos elementos principales de la parábola (vértice, raíces, por ejemplo). Cuando el docente se acerca a observar el trabajo del grupo y le consulta sobre ese resultado, las otras integrantes comentan sobre la expresión equivalente que se puede obtener, y allí surge conversar entre las integrantes acerca de la resolución que cada una ha realizado, y la integrante que está trabajando con el software comprende la resolución analítica que las demás realizaron.

Algo similar sucede en el ítem 2 de la Actividad 2, donde tratan de dar respuesta a las preguntas que allí aparecen, valiéndose de los conocimientos con que cuentan. Les cuesta resolver puntualmente toda la actividad o todos los ítems que aparecen e intentan dar una respuesta en forma oral teniendo en cuenta sus conocimientos previos acerca de la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática. En general tratan de “ayudarse” entre ellos, haciendo que al menos uno de los integrantes de cada grupo realice los gráficos que se piden y el resto visualiza lo obtenido.

En la Actividad 3, explicitada en el subapartado 4.1.2.3, resulta más notorio que los estudiantes tratan de dar una respuesta y hacer un análisis de la misma, sin realizar su resolución sino a través de la lectura del enunciado. En esta actividad se acentúa lo comentado acerca de algunos integrantes en dos de los grupos (Grupo 2 y Grupo 3) que trabajan de manera más individual, queriendo resolver de manera más completa o detallada la actividad para poder dar respuesta a lo pedido. Por una cuestión de tiempo, no llegan a

resolver todo lo pedido mientras sus compañeros toman apuntes acerca del análisis que podría realizarse sobre la actividad.

Respecto de la Actividad de Cierre que se presenta en la propuesta, explicitada en el subapartado 4.1.2.4, ninguno de los estudiantes conoce la biografía del matemático Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi ni el método que se menciona para resolver ecuaciones cuadráticas. Todos los grupos pudieron consultar alguna página en Internet que presentara este método de resolución y se ayudan entre los integrantes para comprenderlo, donde siempre alguno explica a los otros lo entendido.

Uno de los integrantes del Grupo 1 pasa de manera espontánea al pizarrón para explicar a dos de sus compañeros acerca de lo que había leído. Durante la explicación se suman también dos de los integrantes del Grupo 2 y todos coincidieron en haber comprendido el modo en que aparece resuelta una ecuación cuadrática y el método utilizado.

Ningún grupo resuelve en clase uno de los ítems propuestos dentro de la Actividad de Cierre, donde se propone la resolución de otra ecuación cuadrática, siguiendo el método anterior.

Si bien durante la clase se fue haciendo alguna breve puesta en común acerca de lo que cada grupo había ido comentando sobre cada actividad, sobre el final de la clase se recuerda a los alumnos que a la clase siguiente traigan sus comentarios para hacer un análisis y reflexión general entre los grupos acerca de lo que habían trabajado.

Los alumnos que habían estado en el pizarrón conversando acerca del método geométrico de resolución de una ecuación cuadrática se quedan después de hora, mientras los otros grupos ya se retiraron. Se quedaron pensando si existe un método también gráfico de resolución de una ecuación de tercer grado. Si bien no llegaron a una respuesta, ensayaron

una resolución similar a la que se realiza como interpretación geométrica del cubo de un binomio.

4.2.2 Puesta en común acerca de la resolución de las actividades

Durante la clase siguiente, de dos horas cátedra de duración y que se desarrolló durante la semana siguiente, se realizó en forma oral una puesta en común acerca de las resoluciones de las actividades propuestas y de la reflexión didáctica que de ellas surgieron.

Desde la primera Actividad los estudiantes expresaron su inquietud acerca de la forma de introducir un nuevo contenido y su relación con los contenidos previos. Algunos integrantes de cada grupo manifestaron sus opiniones sobre cómo desarrollarían el contenido Función Cuadrática.

Pudo notarse, en general, una visión un poco “simplificada” ya que propusieron la enseñanza de una manera según ellos “sencilla” y “transparente”. Fue posible advertir como dificultoso situarse en el lugar de los alumnos de nivel secundario, comprender las dificultades que podrían presentarse o los obstáculos con que podrían encontrarse.

Por ejemplo, uno de los integrantes del Grupo 1 comentó que, teniendo experiencia en el dictado de clases particulares, suele desarrollar este contenido de un modo, mientras que otro de los integrantes del mismo grupo dijo que lo haría de otro modo. Se preguntaron entonces “¿cuál es la mejor opción?”. De este modo tendieron a simplificar el análisis y la enseñanza de un contenido, como Función Cuadrática en este caso, a la elección de un único modo de hacerlo, alegando que una forma de secuenciar las actividades puede resultar en todos los casos mejor que otra.

Todos los grupos coincidieron en que se basarían en los contenidos previos con que deberían contar los alumnos, mencionando el tema de Funciones y sus gráficas, Ecuaciones, Polinomios y Función Lineal como caso particular de una función polinómica. Comentaron que no se visualiza, al menos de forma explícita, la revisión de estos contenidos en la secuencia analizada.

La manera de introducir el nuevo contenido es lo que generó el mayor “debate” e intercambio de opiniones:

- El Grupo 3 comentó que no hubiera presentado el gráfico de una función cuadrática en la primera actividad sino que hubiera tratado de que lo generen los alumnos a partir de la resolución de alguna actividad.
- El Grupo 4 hubiera comenzado por una actividad como la segunda, por ejemplo, para que los alumnos reconozcan primero la ecuación general de una función cuadrática y luego realicen su gráfico, destacando que lo harían con valores numéricos y no como se presenta en la secuencia analizada.
- El Grupo 1 dijo que agregaría más casos, donde se presente por ejemplo el coeficiente principal negativo o el gráfico de parábolas que no sean funciones.
- El Grupo 2 indicó que no se incluyen muchos gráficos en la secuencia, y que justamente el único es el que aparece en la primera actividad, señalando al igual que otro grupo, que no están de acuerdo con que no se identifiquen valores numéricos.
- Los integrantes del mismo grupo manifestaron además que hubieran agregado la expresión o fórmula de la función que se corresponde con el gráfico presentado; en lo relativo a la primera actividad y a la forma de introducir el contenido, coincidieron en no presentar un gráfico “genérico” sino que presentarían la fórmula relativa a una función

en particular, su gráfico correspondiente y los elementos principales que caracterizan su gráfica, identificados con sus valores numéricos.

Al continuar con el intercambio, el Grupo 4 mencionó el modo en que introduciría el concepto de raíces de una función cuadrática: realizarían una revisión de lo visto en función lineal como intersección con uno de los ejes y luego presentarían “la fórmula resolvente”. Aunque no lo indicaron de forma explícita, estarían coincidiendo con el modo en que se presenta el tema en la secuencia analizada, excepto la relación con una función anteriormente vista. Indican que a partir de esa fórmula analizarían los casos que pueden presentarse acerca de las raíces de una función cuadrática.

El Grupo 1 hizo referencia a que agregarían actividades referidas a las distintas formas en que se puede expresar una función cuadrática, ya que no se menciona en la secuencia analizada la expresión canónica o factorizada.

Respecto de la expresión canónica, el Grupo 4 hizo referencia a que la introduciría a partir de los desplazamientos de los gráficos: comenzarían con la expresión $f(x) = x^2$ realizando el gráfico correspondiente en GeoGebra, para luego ir viendo sus desplazamientos, y “llegar a la ecuación completa”, haciendo referencia a la expresión polinómica de la función cuadrática.

Todos los grupos coincidieron en que utilizarían un software como GeoGebra en el desarrollo de los contenidos. Todos hicieron un enfoque muy centrado en la aplicación del programa a modo de graficador, casi como única herramienta, sin aprovechar otras potencialidades que ofrece el software.

Al efectuar comentarios globales de la actividad el Grupo 1 destacó que puede presentarse una dificultad en la utilización de GeoGebra si los alumnos no conocieran previamente su manejo, sus funciones, comandos, etc. Consideraron importante que primero sea el docente el que realice una demostración acerca de su uso, por ejemplo, mostrando la utilización de deslizadores y los desplazamientos de las gráficas de las funciones de acuerdo con la variación de algunos parámetros.

El Grupo 2 consideró que los primeros ejemplos a mostrar sobre el gráfico de una función cuadrática o los primeros ejercicios que se resuelvan referidos a este contenido, deberían “realizarse manualmente”, es decir, sin la utilización del software en los primeros gráficos que se realicen.

Expresaron que quizás se estén considerando como contenidos previos que los alumnos de Nivel Secundario ya conocen cómo realizar algunos gráficos mediante una tabla, trazar una gráfica a partir de algunos puntos obtenidos, manejo de coordenadas en los ejes cartesianos, etc. Pero dado que se trata de una nueva función para ellos, no vista anteriormente, los estudiantes del Profesorado consideran que primero podrían realizarse “en forma manual” los primeros gráficos, y luego utilizar un software como GeoGebra.

Mencionaron luego la utilización del programa como un recurso de autoevaluación, para que el estudiante pueda corroborar con el software los resultados obtenidos cuando realiza los gráficos a través de una tabla de valores.

En el Grupo 3, de manera similar a lo comentado en el anterior, indicaron que no hubieran utilizado el software en los primeros gráficos de la función, sino que “despertarían el interés y la imaginación” en los alumnos tratando de que ellos descubran el tipo de gráfico que resulta en el caso de las funciones cuadráticas.

Comentaron que les resultó interesante la utilización de la computadora, tanto en el caso del software GeoGebra como en la búsqueda de información en Internet planteada explícitamente en un enunciado, para que los alumnos descubran usos de la misma que no sean solo juegos y redes sociales.

Respecto del software, propusieron ejemplos o actividades similares a las que fueron analizadas en la secuencia, observando la variación del gráfico de la función de acuerdo con la variación en algunos parámetros.

El Grupo 4 no agregó otros comentarios diferentes a los indicados por los grupos anteriores: también centró su análisis del software como graficador y el potencial que se presenta gracias a la utilización de deslizadores que permiten visualizar las modificaciones de la curva al variarlos; mencionaron también que dejarían que los alumnos “tengan libertad para jugar” con esas variaciones, ya que eso les permitiría acercarse a “un modelo de base empírica”.

Durante la clase siguiente, correspondiente a la tercera semana del mes de septiembre, los alumnos solicitaron un mayor plazo para poder entregar por escrito el análisis realizado. Se atendió el pedido y grupos entregaron los documentos durante la semana siguiente.

Dichos documentos se encuentran compilados en el Anexo 2.

4.3 Tercera etapa de la investigación

Este apartado, donde se relatan los resultados correspondientes a la tercera etapa de la investigación, se divide en dos subapartados.

En el primero se describen las observaciones realizadas durante el diseño de las propuestas de enseñanza que los estudiantes del Profesorado en Matemática desarrollaron acerca del contenido Función Cuadrática.

Cada una de esas propuestas fue resuelta por los otros grupos de estudiantes y las observaciones realizadas se describen en el segundo subapartado.

4.3.1 Acerca del diseño de la propuesta

Todos los alumnos participaron activamente en el diseño de sus propias propuestas de enseñanza.

En los Grupos 1 y 3 los alumnos que trajeron sus computadoras personales son los que comenzaron a escribir el archivo en el que iban a trabajar; en el Grupo 2 quien escribía el texto lo hizo utilizando una de las computadoras del Profesorado. El resto de los integrantes en cada grupo contaba casi en su totalidad con alguna computadora para realizar consultas, pero no en todos los casos la utilizaron.

Todos los grupos trajeron algún libro de texto de nivel secundario que incluya el contenido Función Cuadrática. El Grupo 1 tenía el libro Matemática 1 Activa de la Editorial Puerto de Palos (autores: Berio, Colombo, D'Albano, Sardella y Zapico). El Grupo 2 tenía el mismo texto y Función de Gala de la Editorial El Hacedor (autores: Carnelli, Novembre y Vilariño). El Grupo 3, los libros Matemática Polimodal Funciones 1 de la Editorial Longseller (autores: Altman, Comparatore y Kurzrok) y Matemática Funciones y Estadística de la Editorial A-Z (autores: De Simone y Turner).

Todos los grupos coincidieron en comenzar a pensar y discutir acerca de las actividades que plantearían sobre el desarrollo del contenido Función Cuadrática, sin contemplar otras cuestiones a considerar, como los objetivos que se quieren plantear para la propuesta, por ejemplo.

El Grupo 1 coincidió en que comenzaría con algunos aspectos teóricos, por lo que discutieron entre algunos integrantes acerca de cómo escribir la definición de una función cuadrática y sus elementos principales. Uno de los integrantes del grupo, basándose en la secuencia analizada en la etapa anterior, volvió a utilizar GeoGebra para realizar algunos gráficos y ver ejemplos.

En esa etapa inicial del trabajo, algunos integrantes del Grupo 2 consultaron los libros de texto que trajeron y otros miraron páginas en Internet. Cuando la tesista se acercó, le comentaron que estaban buscando alguna actividad que pueda servir de problema inicial para introducir el contenido Función Cuadrática.

El Grupo 3, de manera similar al primero, también comenzó a escribir un documento con la primera actividad y coincidieron entre los integrantes en plantear la construcción de distintos gráficos de funciones cuadráticas utilizando una tabla de valores. Discutieron entre ellos acerca de con qué ejemplos comenzar, de acuerdo con los elementos principales de una parábola que se consideren; algunos hicieron referencia a la abertura de la parábola, otros a la orientación de la concavidad, otros al desplazamiento del gráfico. De acuerdo con el tema en el que se centrarían, plantearon distintos ejemplos de funciones con las que iniciarían la actividad. Finalmente, acordaron comenzar con los gráficos de las funciones

$f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$. Trataron de ponerse de acuerdo también en la redacción del enunciado y los ítems a incluir dentro del mismo.

Mientras tanto, en el Grupo 1 avanzaron en la definición de una función cuadrática y de sus elementos principales. Acordaron incluir algunos ejemplos de gráficos de estas funciones y, de manera similar a lo comentado en el grupo anterior, surgió entre los integrantes el análisis acerca de en qué parámetro hacer hincapié para mostrar diferentes tipos de gráficos (abertura, concavidad, etc.). Se pusieron de acuerdo en que esos primeros ejemplos que se van a mostrar se centrarán en la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática. Así, se dividieron entre los distintos integrantes la tarea de definir una función que tenga dos raíces reales distintas, otra función que tenga dos raíces reales iguales entre sí y otra que no tenga raíces reales. El alumno que estaba escribiendo el documento esperaba a que sus compañeros le indiquen ejemplos de funciones a incluir. A medida que le iban indicando ejemplos de cada uno de los casos que se podía presentar, acordaban también sobre la inclusión de un gráfico que represente la función dada, realizado en GeoGebra. Le comentaron a la tesista que, de manera similar a la forma en que comenzaba la secuencia analizada en la etapa anterior, les parece bien mostrar en un gráfico los elementos principales de una función cuadrática. Asimismo expresaron que prefieren hacerlo sobre “un ejemplo concreto”, con los valores numéricos que corresponden a ese ejemplo, y no mostrarlo sin valores o escalas como en la secuencia analizada.

Decidieron también a partir de esto modificar el orden en algunas de las cuestiones que ya tenían escritas: dejaron la definición de una función cuadrática al comienzo, incluyeron luego los ejemplos de gráficos de algunas funciones mostrando los distintos casos que se

pueden presentar respecto de las raíces y luego copiaron las definiciones que ya habían escrito de los elementos principales que están mostrados en cada gráfico.

En el Grupo 2 decidieron comenzar con un problema que introduzca el tema a desarrollar, teniendo en cuenta uno que está propuesto en uno de los textos que tienen, pero debatieron acerca de cómo modificarlo. Estuvieron de acuerdo en no transcribirlo de manera textual, pero expresaron que “les gusta la idea de lo que se propone”. De esta forma, plantearon la primera actividad de su propuesta, con un problema cuya resolución involucra contenidos referidos a las funciones cuadráticas. Modificaron algunos de los ítems que se plantean respecto de los que se incluyen en el texto, coincidiendo también en no incluir todos sino hacerlo más breve. Llevó relativamente bastante tiempo que entre los integrantes del grupo se pusieran de acuerdo acerca de cómo redactar la actividad, qué ítems incluir, etc. Aunque no lo escribieron en el documento que estaban redactando, dos de los integrantes del grupo iban resolviendo las actividades a medida que las planteaban y escribían los enunciados, confirmando a los demás integrantes que puede resolverse lo pedido y mostrándoles cuáles serían las respuestas en cada caso.

En el Grupo 3 debatieron entre sus integrantes, divididos en dos subgrupos para ver el monitor de dos computadoras, sobre la utilización de los deslizadores en GeoGebra para representar algunos de los parámetros de la función cuadrática. Se pusieron de acuerdo con que el primer ejemplo de deslizador sea para representar las funciones de la forma $f(x) = a \cdot x^2$, centrando la atención en el signo del parámetro y su influencia en el gráfico.

Pensaron en generalizar luego hacia la expresión polinómica de la función cuadrática, pero no utilizaron el software e intentaron comenzar a delinear el enunciado de la próxima

actividad. El integrante del grupo que escribía el documento también participaba del debate acerca de qué ejemplos se podrían incluir. Remarcaba al resto que esta nueva actividad, al tener relación con la anterior, podría centrarse en el signo del coeficiente principal. Si bien todos estaban de acuerdo con esto, también quisieron incluir otro ítem dentro de la actividad que apunte a saber identificar las funciones cuadráticas dentro de una lista de expresiones correspondientes a distintas funciones.

Al igual que en los grupos y actividades anteriormente comentados, les llevó bastante tiempo pensar y redactar la actividad y los ejemplos de funciones a incluir. Finalmente, la actividad quedó planteada dividida en dos ítems: uno referido a la concavidad de la gráfica y otro relativo a la identificación de la función cuadrática.

Los integrantes del Grupo 1, luego de las definiciones con las que comenzaron la propuesta, ensayaron algunos ejemplos en GeoGebra, “probaron” algunas gráficas y la utilización de deslizadores. Querían incluir una actividad referida a este tema, aunque seguían debatiendo sobre su enunciado y los ejemplos. Comentaron a la tesista que, tal como lo señalaron en el análisis de la secuencia de la etapa anterior, debería incluirse en el enunciado y de manera más detallada, el modo de utilización de algunas cuestiones referidas al software GeoGebra, por si los alumnos de Nivel Secundario no las conocieran; por ejemplo, dónde se encuentra en la barra de herramientas y cómo se incluye un deslizador, cómo se lo configura, la sintaxis de algunas expresiones en la barra de entrada. Comenzaron entonces a escribir la siguiente actividad, referida a la utilización de GeoGebra y los deslizadores para definir una función del tipo $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ y analizar el modo en que influye cada uno de esos

coeficientes. Para ello, escribieron el enunciado de cada ítem, incluyendo también la descripción y la manera en la que deben utilizar el software.

Los integrantes del Grupo 2 también estuvieron trabajando con deslizadores en GeoGebra, pero a diferencia del anterior, definieron la expresión polinómica de una función cuadrática en la primera actividad, a modo de introducción en el tema. En esta otra actividad, la inclusión y el uso de deslizadores tuvieron por objeto analizar el modo en que algunos parámetros influyen en el gráfico de la función, pero haciendo referencia a su expresión canónica. Cuando la tesista se acercó al grupo, estaban escribiendo el enunciado, dividido en distintos ítems, donde se pedía realizar en GeoGebra el gráfico correspondiente a las funciones del tipo $f(x) = a \cdot x^2$, $f(x) = x^2 + c$ y $f(x) = (x - b)^2$. En cada caso indicaban entre qué valores se configuraba cada deslizador. Debatieron entre los integrantes del grupo sobre incluir o no otro ítem que combine los deslizadores, pero concluyeron que no era necesario explicitarlo sino que lo harían en clase cuando se desarrollen los ítems anteriores.

Los integrantes del Grupo 1 llamaron a la tesista para hacerle una consulta. Estuvieron debatiendo acerca de “hasta qué contenidos desarrollar” dentro de la unidad referida a Función Cuadrática. Se les indicó que ellos mismos eran los que debían analizar y definir qué aspectos de este contenido consideraban que se pueden incluir. Siguieron conversando entre los integrantes y concluyeron que van a considerar las distintas expresiones de una función cuadrática y el modo en que pueden obtener una expresión equivalente a otra entre sus distintas formas.

Cuando la tesista se acercó al Grupo 3, ya estaban adelantados en el enunciado de la actividad siguiente. Comentaron que habiendo indicado previamente a los alumnos de

Nivel Secundario la fórmula resolvente para hallar las raíces de una función cuadrática, se les pediría luego hallarlas en algunos ejemplos dados, donde se incluyan todos los casos posibles que se pueden presentar en este tipo de funciones, y comentaron que harían hincapié en el signo del determinante. Dijeron que continuarán con la definición de los elementos principales de la función cuadrática en la actividad siguiente.

Dado que se acercaba el final de la clase, se indicó a los grupos que, para la próxima, continúen y finalicen la actividad, completando la propuesta de enseñanza acerca de este contenido. Disponían para ello de dos semanas, por lo que se fijó la fecha de entrega de los trabajos para la segunda semana del mes de octubre.

4.3.2 Resolución de cada propuesta por grupos

Cada uno de los grupos de estudiantes del Profesorado en Matemática ha diseñado una propuesta de enseñanza acerca del contenido Función Cuadrática incluyendo GeoGebra en sus actividades.

Cada una de esas propuestas fue resuelta por los otros grupos de estudiantes por lo que se describen en este apartado las observaciones realizadas durante el desarrollo de esta etapa, dividiéndolo en tres subapartados (4.3.2.1 a 4.3.2.3) correspondiente cada uno de ellos a la resolución de la propuesta de cada grupo.

4.3.2.1 Resolución de la propuesta diseñada por el Grupo 1

Los integrantes del Grupo 1 repartieron en versión impresa a cada uno de los integrantes de los otros dos grupos la secuencia diseñada, quienes se disponen a leer el material.

Al ser el primer grupo que implementa su propuesta, los primeros comentarios entre los integrantes de los demás grupos fueron a modo de “comparación” respecto de la propuesta que ellos diseñaron. En cuanto a su formato, les pareció interesante una imagen inicial que incluyeron.

El Grupo 3 mencionó que no incluyó en su propuesta algunos aspectos que estaban presentes al comienzo de la propuesta del Grupo 1, como los objetivos. La tesista les dijo que luego pueden agregarlo.

Continuaron los dos grupos leyendo lo que se indicaba en el Desarrollo, que incluía la presentación y definición de una función cuadrática y de algunos de sus elementos principales. Coincidieron en que les parecieron interesantes unas imágenes y unas fotos que se incluyeron en la propuesta para visualizar algunos ejemplos de parábolas en la vida cotidiana.

El Grupo 1, autor de la propuesta, comentó a los otros dos grupos que prefirieron definir algunos de los elementos de la parábola incluyendo la expresión de la función, para representar los casos de la cantidad de raíces que pueden presentarse a través de ejemplos concretos y conociendo la fórmula que la define, y no a través de un gráfico genérico, como el que aparecía en la secuencia de educ.ar. Los grupos coincidieron en eso y adelantaron que algo similar pensaron al diseñar sus propuestas. Los grupos siguieron leyendo luego las otras definiciones que se incluyeron sobre algunos de los elementos principales de la función cuadrática.

Para realizar la actividad que luego se indicaba utilizando GeoGebra, se propuso a los grupos que realicen todos los pasos para poder seguir y verificar cada uno de los ítems que

aparecían. Utilizaron para ello las computadoras que se habían repartido y prefirieron resolver los ítems compartiéndola de a dos o tres integrantes en cada grupo.

En el Grupo 2 surgió como comentario entre algunos de los integrantes que les pareció adecuado haber incluido algunas cuestiones referidas al software GeoGebra, como por ejemplo indicaciones acerca de la ubicación de algunos íconos en la barra de herramientas y la configuración de un deslizador. Pero dentro del mismo grupo, otro integrante comentó que depende del curso con el que se vaya a trabajar y de los conocimientos previos que tengan del programa. Supuso que si los alumnos de Nivel Secundario ya vieron polinomios y función lineal en particular, ya trabajaron con el software y ubicarían algunas consideraciones generales que son básicas. Mientras conversaban acerca de esto, cada uno de los ítems fueron realizados sin dificultad y sin agregar algún comentario.

En el Grupo 3 intercambiaron pareceres acerca del modo en que influye cada uno de los coeficientes de la expresión polinómica de una función cuadrática, representada en la actividad propuesta a través de deslizadores en GeoGebra. Observaron en el enunciado que, luego de indicarse los pasos a seguir para la construcción de lo pedido, solo se indicaba a los alumnos que observaran los resultados o que visualizaran distintos gráficos sin la necesidad de tener que realizarlos en lápiz y papel, lo que llevaría mucho tiempo. A partir de esto, los alumnos no tendrían que realizar otra actividad sino solo observar los desplazamientos. Se lo comentaron al Grupo 1, que indicó que esta fue la intención de la actividad, pero que tendrán en cuenta el comentario, porque podrían agregar alguna indicación acerca de qué tienen que hacer con ello los alumnos.

Los dos grupos continuaron luego leyendo el material entregado, donde se definían las distintas formas de expresar una función cuadrática (desarrollada o polinómica, canónica,

factorizada) y se incluía un desarrollo a través de un ejemplo acerca de cómo pasar de una expresión polinómica a una canónica y, a través de otro ejemplo, cómo pasar de una expresión factorizada a una polinómica. No se pedía a los alumnos de Nivel Secundario que lo hicieran sino que el desarrollo estaba incluido en el material que el Grupo 1 ha diseñado. Sus integrantes aclararon oralmente que esto se haría en clase, entre todos, guiados por el docente. Se les consultó sobre los otros pasajes de una expresión a la otra que no se habían incluido en la propuesta e indicaron que solo habían incluido los ejemplos que consideraron que los alumnos podrían realizar por los contenidos previos con los que cuentan.

Acerca de la siguiente actividad, un integrante del Grupo 2 consultó si, de manera similar a lo anterior, consistía en un desarrollo que se haría en clase junto a los alumnos y un integrante del Grupo 1 respondió satisfactoriamente. La actividad proponía un análisis completo de una función cuadrática, comenzando por la expresión polinómica de una función cuadrática, e indicando luego: dominio, imagen, raíces, eje de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de positividad y negatividad, y el gráfico de la función realizado en GeoGebra donde se destacan el vértice y las raíces.

Como cierre de la clase, los dos grupos continuaron leyendo la propuesta que finalizaba con un ejercicio denominado integrador, donde se presentaba un ejemplo de una función cuadrática en su expresión factorizada, pasándola luego a la polinómica y a la canónica; se incluía su gráfico y un análisis completo de la función, similar al anterior.

Los grupos que resolvieron la actividad comentaron que la forma en que el material estaba escrito era muy clara, entendible y estaba muy completo.

Acerca de la utilización de GeoGebra, manifestaron que se podría haber incluido un poco más. El Grupo 1 recordó la actividad en la que se incluyeron deslizadores y dijeron que les pareció que es completa y que muestra el potencial del software.

Finalizado el tiempo destinado para este Grupo 1, los otros dos grupos alcanzaron a leer el material, resolvieron las actividades y realizaron los comentarios y puesta en común mencionados.

4.3.2.2 Resolución de la propuesta diseñada por el Grupo 2

El Grupo 2 repartió en versión impresa a cada uno de los integrantes de los otros dos grupos su propuesta de enseñanza.

Comenzaron leyendo los destinatarios y objetivos, y luego leyeron la primera actividad. Ambos grupos realizaron algunos comentarios acerca del modo diferente en que el Grupo 2 propuso comenzar a desarrollar la propuesta de enseñanza, presentando una situación problemática, en lugar de definir primero los contenidos teóricos referidos a Función Cuadrática.

En cada uno de los grupos alguno de los integrantes era el que escribía en su cuaderno las respuestas a la actividad planteada mientras que todos realizaban comentarios en forma oral y seguían u observaban lo que se iba resolviendo.

Uno de los integrantes del Grupo 1 consultó cómo lo resolverían los alumnos de Nivel Secundario ya que al no conocer previamente el contenido consideraba que no podrían responder las preguntas que se incluían en la actividad. Otro de los integrantes leyó lo que el Grupo 2 escribió acerca de la actividad, y remarcó que conocer la construcción y

utilización de tablas de valores que ya usaron en otras funciones, podría favorecer a interpretar y resolver la actividad. También los alumnos de Nivel Secundario conocerían el modo de representar esos valores en un sistema de ejes cartesianos y visualizar gráficamente lo consignado en la tabla. En el Grupo 3 también se encontraban analizando el modo en que se puede resolver la actividad, conversando entre sus integrantes acerca de los ítems a considerar, sin centrarse tanto en la forma en que podrían resolverlos los alumnos de Nivel Secundario sino ellos mismos.

Los dos grupos continuaron leyendo los comentarios que el Grupo 2 ha incluido en la actividad donde se menciona la utilización de GeoGebra para realizar el gráfico de la función dada. También leyeron acerca de la definición de sus elementos principales. Solo en el Grupo 3 agregaron en su resolución por escrito los datos referidos a la actividad planteada, si bien no lo pedía explícitamente en el enunciado. Escribieron así las raíces, el vértice y el eje de simetría correspondiente a la función dada en la Actividad 1.

Para la Actividad 2, los grupos utilizaron las computadoras que se repartieron y realizaron en GeoGebra la actividad planteada. Emplearon dos computadoras por grupo; mientras uno de los integrantes escribía las respuestas en su cuaderno, el resto de los integrantes compartía la pantalla y visualizaba las salidas del software.

Surgió entre todos los grupos, en forma oral, la comparación con una actividad similar que resolvieron en la propuesta diseñada por el Grupo 1. Este recordó que prefirieron incluir una descripción más detallada acerca de la utilización del software y de algunos de sus elementos, mientras que el Grupo 2 indicó que asumía cierto manejo previo del programa; por ejemplo los alumnos de Nivel Secundario ya conocerían el modo de realizar un gráfico

en GeoGebra y de incluir deslizadores. El Grupo 3 adelantó que en su propuesta coincidieron al respecto.

Los dos grupos resolvieron la actividad tal como se planteaba en el enunciado, definiendo ciertos deslizadores y configurándolos para que varíen entre los valores propuestos.

Uno de los integrantes del Grupo 1 comentó que utilizaría otras letras para definir los deslizadores, para no confundir la expresión polinómica de una función cuadrática con los valores de los deslizadores, es decir, para que los alumnos de Nivel Secundario no crean que el valor de “ b ” en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ se corresponde con el mismo valor en la expresión $f(x) = (x - b)^2$. El Grupo 2 escuchó la recomendación, y uno de sus integrantes señaló que podría remarcarse en el desarrollo de la clase, si surgiera esta confusión, que son actividades diferentes y que no se hace referencia a los mismos valores. Agregó que, si bien la actividad tiene por objetivo llegar a la expresión canónica de la función cuadrática, no le parece bien adelantarse a esa expresión y escribir por ejemplo $f(x) = (x - x_v)^2$ sino que prefiere que esa deducción surja a partir de la resolución de la actividad. Tomaron en consideración el comentario realizado e indicaron que van a analizar el modo en que se podría agregar o modificar algo en el enunciado, para que no se llegue a un posible error de interpretación por la notación utilizada; uno de los integrantes del Grupo 2 lo escribió en su copia impresa, para rever.

Los dos grupos continuaron trabajando con las computadoras en GeoGebra realizando la Actividad 3. En cada grupo, uno de los integrantes siguió escribiendo los resultados de lo pedido en el enunciado. Mientras dos de ellos escribían en la computadora, todos

visualizaban los resultados e indicaban al que escribía cuáles eran las respuestas en cada caso.

Continuaron utilizando GeoGebra para realizar la Actividad 4. Graficaron las tres funciones dadas y, sin haber leído previamente los comentarios incluidos por el Grupo 2 al diseñar la propuesta, les llamó la atención que les quedara el mismo gráfico. Siguieron mirando el material entregado y confirmaron que este hecho es parte de la intención de la actividad.

Uno de los integrantes del Grupo 1 recordó la propuesta que diseñaron, donde se incluía un ejemplo de cómo pasar de una expresión a otra de la función cuadrática y sugirió que se trabajara en relación con esto. Uno de los integrantes del Grupo 2 comentó que lo habían pensado al diseñar la actividad, pero se dieron cuenta que no lo escribieron en el comentario correspondiente. Otro de los integrantes del Grupo 2 tomó nota en su versión impresa e indicaron que lo agregarán en los comentarios, ya que a partir de esta actividad se podría desarrollar lo relativo al pasaje de una expresión a otra, entre la forma polinómica, factorizada o canónica de una función cuadrática.

Como actividad de cierre se presentó una situación problemática que los Grupos 1 y 3 comenzaron a leer entre los integrantes y conversaron acerca de su resolución. En cada grupo, el mismo integrante que había estado escribiendo las respuestas a las actividades anteriores es el que fue transcribiendo las ideas que surgieron entre todos. Así, resolvieron el primer ítem. Los dos grupos coincidieron en aplicar el teorema de Pitágoras para hallar el valor de la hipotenusa del triángulo que quedó definido en la figura y así poder hallar la superficie pedida. A partir de este primer ítem, el segundo les resultó trivial por ser muy similar al anterior pero con otro valor de lado. Si bien el procedimiento también es similar en el tercero, les demandó más tiempo generalizar la respuesta, cualquiera sea el valor con

el que se estuviera trabajando. Conversaron entre los integrantes de cada grupo para tratar de llegar a una respuesta acerca del último ítem donde se pedía analizar el cuadrado de menor superficie posible. Ambos grupos coincidieron en analizar la función que quedaba definida en el ítem anterior y relacionar lo pedido con el vértice de la parábola.

En la puesta en común, ambos grupos coincidieron en que la actividad final les pareció interesante, ya que se mostraba una situación en donde se involucraba una función cuadrática, no de manera directa sino que a partir de la resolución es de donde se puede deducir su fórmula.

Aparecía también la aplicación de algunos conceptos y el modo en que influyen sus elementos principales; el vértice por ejemplo estaba visto como el valor mínimo que puede obtenerse en una función cuadrática.

Acerca de GeoGebra, comentaron que se emplea en varias de las actividades propuestas, en general, como graficador e incluyendo deslizadores. Uno de los integrantes del Grupo 3 expresó que le pareció interesante la utilización de un graficador en una actividad como la 4, ya que sin conocer previamente las distintas expresiones de una función cuadrática, no era “esperable” el gráfico que surge de las funciones dadas. No se puede prever que se trate de la misma función, expresada de distintas maneras, por lo que le resultó de interés que a partir de ese resultado se pueda llevar a los alumnos a que justifiquen lo que se visualiza mediante el software.

El Grupo 2 dijo que la última actividad de cierre también fue diseñada con GeoGebra, pero no lo incluyeron en el enunciado sino que lo mostrarían en el desarrollo de la clase.

4.3.2.3 Resolución de la propuesta diseñada por el Grupo 3

Mientras los integrantes del Grupo 3 repartieron sus propuestas a los otros dos grupos, recordaron lo que ya habían comentado acerca del material inicialmente diseñado, donde no incluyeron los objetivos, pero que lo agregarán en una nueva entrega.

De manera similar a los trabajos anteriores, en cada uno de los grupos que resolvía la propuesta uno de los integrantes escribía en su cuaderno lo que conversaban entre todos acerca de la resolución de cada actividad. En cuanto a la primera, no presentó complejidad o discusión; igualmente cada grupo resolvió por escrito la actividad, planteando los cálculos y gráficos que se piden.

La segunda actividad resultó similar a otras que resolvieron en propuestas anteriores; al igual que en la primera, uno de los integrantes en cada grupo realizó lo pedido en GeoGebra, definiendo la función dada y el deslizador tal como se indicaba en el enunciado. Leyeron los comentarios incluidos en el material entregado y resolvieron la actividad.

En cada grupo analizaron entre todos y “le dictaron” a quien escribía cuáles de las funciones dadas tienen sus ramas hacia arriba, tal como se pedía en uno de los ítems, y cuáles corresponden a una función cuadrática, como se solicitaba en el otro.

En la actividad siguiente se pedía calcular los ceros de cada función dada utilizando la fórmula para hallar las raíces de una función cuadrática. En el Grupo 1 surgió de manera natural, o sin haberlo indicado explícitamente, que cada uno de los integrantes eligió una función diferente y realizaron los cálculos correspondientes, mientras que otro integrante utilizaba GeoGebra para graficar las funciones y corroborar los cálculos que sus compañeros estaban realizando.

En el Grupo 2 uno de los integrantes tenía una calculadora que halla las soluciones de una ecuación cuadrática, por lo que el resto de los integrantes le iban indicando los coeficientes de cada término de cada una de las funciones dadas, y así iban resolviendo la actividad e indicando las respuestas correspondientes a quien escribía. Leyeron luego el comentario que el Grupo 3 había escrito acerca de esta actividad y se dieron cuenta que el objetivo era trabajar con la fórmula resolvente y el signo del determinante. Conversaron entre ellos acerca del signo que quedaría en cada caso, aunque no lo realizaron por escrito.

Al querer resolver la siguiente actividad donde se mencionaba que se les daría a los alumnos de Nivel Secundario la fórmula para hallar el vértice de una parábola, uno de los integrantes del Grupo 1 consultó si se hacía referencia a $x_v = -\frac{b}{2a}$. Uno de los integrantes

del Grupo 3 respondió afirmativamente. Quien había realizado la consulta aclaró que la duda era porque también podría definirse a partir de las raíces de la función, al ser el punto medio de ellas. El integrante del Grupo 3 indicó que al diseñar la actividad habían pensado en la fórmula anterior, que permite calcularlo en todos los casos, aún cuando no haya raíces reales.

Mientras conversaban acerca de esto, el resto de los integrantes de los Grupos 1 y 2 resolvió lo pedido, hallando las raíces, el eje de simetría y el vértice de una función cuadrática dada; también graficaron en GeoGebra para corroborar los resultados, tal como se pedía en la actividad.

Resolvieron la siguiente actividad de manera similar a algunas de las anteriores: en cada grupo, quien escribía las resoluciones iba transcribiendo lo que conversaban entre todos los integrantes. Conociendo la expresión canónica y la factorizada de una función cuadrática, la

primera resolución en cada ítem era inmediata, por lo que escribieron la respuesta en cada caso, y realizaron los pasos y los cálculos correspondientes para escribir cada función cuadrática en todas sus formas, tal como se pedía en el enunciado. Los cálculos que corresponden en cada caso llevaron un cierto tiempo pero no se presentaron dificultades ni consultas a los integrantes del grupo que diseñaron la propuesta.

Comenzaron a leer el enunciado de la actividad integradora, donde a partir de la fórmula correspondiente a una función cuadrática se pedía identificar sus elementos principales y realizar el gráfico en GeoGebra. Surgió a modo de comentario en el Grupo 2 que, al tratarse de una actividad donde se puede resumir todo lo realizado, solo faltaría que se hiciera referencia a las distintas expresiones que puede tener esta función. Dado que en el enunciado se indicaba la función cuadrática en su expresión polinómica, los integrantes del Grupo 3 comentaron que podrían agregar lo que sugiere el otro grupo.

Antes de resolver la última actividad planteada, un integrante del Grupo 1 consultó por qué se presentaba como una actividad optativa. El Grupo 3 comentó que la pensaron para integrar contenidos previos como el de función lineal, intersección entre funciones y resolución de sistemas de ecuaciones. Acerca del subtítulo que escribieron, dijeron que dejarían esta actividad para resolver entre todos los alumnos en clase según el tiempo con que cuenten para ello, o que quede a modo de tarea, de manera optativa para aquellos alumnos que tengan interés en resolver actividades extras.

Finalizando el tiempo destinado a la implementación de la propuesta, los grupos que resolvieron las actividades coincidieron en que los enunciados les parecieron claros y que las dudas que surgieron ya fueron comentadas o consultadas.

Acerca de la utilización de GeoGebra, expresaron que de manera similar a algunas de las actividades anteriores, su uso se centró principalmente en el gráfico de las funciones. En esta propuesta en particular, casi siempre a modo de corroborar los resultados de lo realizado y calculado en lápiz y papel. Por otro lado, en una sola actividad se incluyó la utilización de un deslizador. Esto pudo también leerse en un comentario que el Grupo 3 escribió al final de su propuesta, donde mencionaron que el software permite visualizar los gráficos de manera más exacta, prolija y rápida.

4.4 Cuarta etapa de la investigación

Se describen, divididas en tres subapartados (4.4.1 a 4.4.3), las observaciones realizadas durante la cuarta etapa de la investigación correspondiente a la exposición que cada uno de los tres grupos de estudiantes del Profesorado en Matemática ha realizado respecto de la resolución de su propuesta de enseñanza acerca del contenido Función Cuadrática incluyendo GeoGebra en sus actividades.

4.4.1 Exposición del Grupo 1

En este grupo el rol de “docente” fue asumido por uno de sus miembros. Los demás grupos contaban con el material impreso y distribuido en la etapa anterior. Tal como se proponía al comienzo del diseño, el integrante del Grupo 1 definió una función cuadrática como una función polinómica de segundo grado y escribió en el pizarrón su expresión general, identificando sus coeficientes. A partir de definir su gráfica como una parábola y haciendo

referencia a las imágenes que se incluyeron en su propuesta, mencionó que se la puede encontrar en muchas de las construcciones que se encuentran en la vida cotidiana.

Escribió a continuación en el pizarrón la expresión de la primera función que aparecía en el diseño: $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$. Definió también la función en GeoGebra utilizando la computadora conectada al cañón, haciendo que el gráfico se visualizara en el pizarrón.

De acuerdo con el texto que aparecía en su propuesta, fue leyendo las definiciones de algunos de los elementos principales de la parábola y señalando cada uno de ellos en el gráfico.

Así, leyó la definición correspondiente a la ordenada al origen y utilizó el ícono incluido en GeoGebra que permite calcular la intersección de dos objetos, en este caso la gráfica de la función y el eje y .

Leyó la definición de la raíz de una función y copió en el pizarrón la fórmula que permite hallar las raíces de una función cuadrática. Realizó los cálculos correspondientes a la función dada, obteniéndose las soluciones $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. En GeoGebra comentó que se puede utilizar el ícono ya visualizado anteriormente en la barra de herramientas para hallar las intersecciones entre la gráfica y el eje x , y mostró los resultados a través del cañón.

Luego leyó la definición del eje de simetría y copió en el pizarrón la fórmula correspondiente. De manera similar a lo anterior, realizó los cálculos y obtuvo la ecuación

de la recta $x = -\frac{1}{2}$. Escribió la ecuación en GeoGebra para graficar el eje de simetría y

eligió una línea punteada como estilo de trazo en las propiedades del objeto. A partir de ello, leyó la definición de vértice como intersección entre ese eje y la gráfica, y utilizó el ícono incluido en la barra de herramientas en GeoGebra para identificar esa intersección.

Comentó que luego se darían las fórmulas correspondientes a las otras dos funciones cuadráticas que aparecían en la propuesta de enseñanza diseñada, con el objeto de realizar un análisis similar al anterior, y mostrar ejemplos de funciones con diferente cantidad de raíces.

Respecto de la siguiente actividad, el integrante del Grupo 1 comentó que la intención de la misma era centrarse en la utilización de GeoGebra, incluyendo lo relativo a su manejo, por si los alumnos de Nivel Secundario no estuvieran familiarizados. Como los integrantes de los otros dos grupos ya habían resuelto la actividad, se centraron en la visualización en el pizarrón de lo que realizaba quien estaba exponiendo. Así, mostró la forma en que se pueden definir los deslizadores y la configuración de algunas especificaciones, tales como definir una función dependiendo de esos deslizadores y visualizar el modo en que varía la función cuadrática de acuerdo con los valores de cada coeficiente. El expositor comentó que, a partir de la implementación que habían realizado y la resolución por parte de los otros grupos, modificaron la última parte de la actividad. Agregaron un ítem: indicar las coordenadas del vértice y de las raíces para las dos funciones dadas, ya que antes no se pedía algo en particular sino solo visualizar el modo en el que variaban los gráficos.

Volvió luego a utilizar el pizarrón para la actividad siguiente, donde leyó del material las distintas formas en que se puede expresar una función cuadrática y, en cada caso, escribía la expresión correspondiente.

Efectuó en el pizarrón el desarrollo para expresar una función cuadrática en su forma canónica a partir de su forma polinómica, y en su forma polinómica a partir de su forma factorizada, utilizando los ejemplos que aparecían en su propuesta. Los integrantes de los

otros dos grupos fueron siguiendo cada procedimiento, participando y dictando lo que corresponde a cada paso.

Respecto de la siguiente actividad, también continuó en el pizarrón con el título Análisis de una función cuadrática. A partir del ejemplo que se mencionaba en la propuesta $f(x) = x^2 + 4x + 3$ fue siguiendo el material y escribió en el pizarrón, como ítems a completar, Dominio, Imagen, Raíces, Eje de simetría, Intervalo de crecimiento, Intervalo de decrecimiento, Intervalo de positividad, Intervalo de negatividad.

Indicó a modo de revisión la definición de conjunto dominio y entre todos acordaron la respuesta a escribir.

Continuó con la definición de conjunto imagen y comentó que el mismo puede determinarse a partir del gráfico de la función. Para realizarlo, propusieron entre todos que se podrían determinar algunos de los elementos principales, por lo que calcularon en el pizarrón las raíces de la función $x_1 = -3$; $x_2 = -1$, el eje de simetría $x = -2$ y el vértice $(-2; -1)$. En cada caso, escribieron también las respuestas a los ítems del análisis que habían quedado anteriormente. El miembro del grupo que estaba exponiendo graficó la función en otro sector del pizarrón y a partir de ello acordaron entre todos el conjunto imagen y lo escribió como respuesta.

Definió en cada caso los intervalos que se habían pedido en el análisis y, a partir del gráfico obtenido, indicaron entre todos las respuestas a escribir.

A modo de corroboración de los resultados obtenidos, el estudiante que exponía representó gráficamente la función en GeoGebra y todos visualizaron el gráfico proyectado mediante cañón.

Los miembros del grupo comentaron que se presentaba una actividad final a modo de ejercicio integrador que, por una cuestión de tiempo, en este caso se mostraba rápidamente pero en la clase destinada a los alumnos de Nivel Secundario se dejaría el tiempo necesario para que ellos solos la pudieran ir resolviendo. Se planteó una función cuadrática expresada en su forma factorizada, pudiendo expresarse en sus formas polinómica y canónica. Se podría realizar luego el gráfico de la función y el análisis completo de la misma, de manera similar a lo realizado en la actividad anterior.

4.4.2 Exposición del Grupo 2

Uno de los integrantes del Grupo 2 inició el desarrollo de la actividad, pidiendo a los integrantes de los otros dos grupos que tuvieran el diseño de la propuesta que habían realizado. Comentó respecto de la primera actividad que la adaptaron, quitando algunos ítems y modificando los que dejaron, a partir de un problema que se presentaba en uno de los textos que trajeron el día que comenzaron el diseño de la propuesta. Expresó que, al desarrollar las actividades con los alumnos de Nivel Secundario, dejarían un tiempo para que la resuelvan y luego harían una puesta en común.

Consultó a los otros dos grupos cómo resolvieron la actividad y uno de los integrantes del Grupo 1 comentó que, tal como se había indicado en el material entregado, una posible resolución sería a partir de una tabla de valores. De ese modo, representaron algunos puntos y graficaron la curva. Mientras comentaron el modo en el que comenzaron a resolver la actividad, el integrante del Grupo 2 en el pizarrón fue escribiendo lo que comentaban: hizo una tabla, le consultó los valores que eligieron y los puntos que les quedaron, y realizó el

gráfico de la función $f(t) = t \cdot (8 - t)$. Entre los dos grupos respondieron las dos preguntas que estaban incluidas en la actividad.

El integrante del Grupo 2 continuó indicando que, a partir de los resultados obtenidos en la resolución de esa primera actividad, se desarrollarían los contenidos referidos a Función Cuadrática: mostró que la función $f(t) = -t^2 + 8t$ es un caso particular de un polinomio de grado dos, cuya expresión más general es de la forma $f(x) = a x^2 + b x + c$.

Utilizando el cañón para visualizar en el pizarrón lo realizado en GeoGebra, graficó con el software $f(x) = -x^2 + 8x$, comentando que en la función dada en el problema, en el marco del contexto del mismo, las variables que representaban el tiempo transcurrido o la distancia recorrida deberían considerarse solo para valores positivos, mientras que en la expresión de la función polinómica su dominio es el conjunto de los números reales.

Recordó, suponiendo como ya visto en desarrollos anteriores, la definición de cero de una función, y escribió en este caso el conjunto de ceros identificándolos a partir del gráfico.

Comentó que, si se calculara analíticamente, resultaría en este caso:

$$-x^2 + 8x = 0 \rightarrow x \cdot (-x + 8) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 8$$

De manera similar, indicó como contenidos previos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, y escribió en el pizarrón los que corresponden a la función graficada.

Definió como elementos principales de la parábola las raíces halladas anteriormente, e identificó en el gráfico realizado el punto que era el vértice de la parábola y la recta que era el eje de simetría.

Otro de los integrantes del Grupo 2 realizó la siguiente actividad. Para ello, utilizó el cañón y se visualizó en el pizarrón el trabajo en GeoGebra. Definió la función $f(x) = x^2$ e insertó un deslizador para luego modificar la función a la forma $f(x) = a x^2$, configurándolo de acuerdo con lo que se indica en la actividad. Mostró así las variaciones del gráfico, mientras los otros dos grupos comentaban a modo de conclusión la forma en la que influye el coeficiente principal, según su signo y según sus valores mayores o menores que 1 en valor absoluto.

Insertó luego otro deslizador y modificó la función a la forma $f(x) = x^2 + c$. Analizaron entre todos las variaciones del gráfico de acuerdo con los valores del término independiente.

Por último, insertó otro deslizador y modificó la función definiéndola como $f(x) = (x - b)^2$. También entre todos concluyeron el modo en que variaba el gráfico de la función.

Si bien no estaba en la propuesta como un ítem de la Actividad 2, mostró en el pizarrón utilizando GeoGebra la función $f(x) = (x - b)^2 + c$ identificando el vértice en cada caso. Utilizó en el pizarrón la notación $(x_v ; y_v)$ para las coordenadas del mismo.

Modificó luego la función en GeoGebra definiendo $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$ y mostró el modo en el que variaba el gráfico. Habiendo identificado las coordenadas del vértice, agregó la variación en la apertura de la parábola a partir del coeficiente principal.

A modo de conclusión de todo lo trabajado en la segunda actividad, definió la expresión canónica de la función cuadrática.

Otro de los integrantes del Grupo 2 realizó la tercera actividad. Graficó en GeoGebra las funciones dadas e identificó en cada caso las raíces, el vértice y el eje de simetría. Comentó que se quería mostrar a partir de los ejemplos dados la cantidad de ceros que puede tener una función cuadrática. Para hallar las raíces de una ecuación del tipo $a x^2 + b x + c = 0$, escribió en el pizarrón la fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$ y la aplicó a las funciones dadas, identificando en cada caso los valores de los coeficientes, y corroborando que se llegaban a los mismos resultados que lo visualizado en los gráficos. Los otros dos grupos ya habían resuelto la actividad, por lo que en este caso solo siguen los cálculos realizados en el pizarrón.

Otro de los integrantes del Grupo 2 resolvió la cuarta actividad. Comenzó graficando en GeoGebra las funciones dadas, que resultaban ser la misma función expresada de distintas maneras. Escribió en el pizarrón las expresiones de una función cuadrática, definiendo como polinómica a la forma $f(x) = a x^2 + b x + c$ y factorizada a $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 las raíces de la función.

A partir de estas primeras definiciones, mostró que en la propuesta la primera función era $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, aplicó la fórmula dada en la actividad anterior para obtener los valores $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ por lo que la función pudo expresarse de la forma $f(x) = 2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1)$ tal como está definida la función g en la actividad. Indicó que así puede pasarse de una expresión polinómica a una expresión factorizada.

Luego, desarrolló en el pizarrón el modo en que se puede pasar de la expresión factorizada a la expresión polinómica, aplicando la propiedad distributiva:

$$f(x) = 2 \cdot (x+3) \cdot (x-1) \rightarrow f(x) = (2x+6) \cdot (x-1) \rightarrow f(x) = 2x^2 - 2x + 6x - 6$$

Llegó así a la expresión de la primera función dada en la actividad $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Recordó luego la expresión canónica definida en una actividad anterior como

$$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v.$$
 Identificó en el gráfico las coordenadas del vértice, por lo que

comentó que así puede pasarse de la expresión polinómica $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ a la

expresión canónica $f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 8$ coincidiendo con la función h dada en el enunciado.

Indicó que puede también aplicarse la propiedad distributiva para pasar de la expresión canónica a la expresión polinómica:

$$f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 8 \rightarrow f(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot (x+1) - 8 \rightarrow f(x) = (2x+2) \cdot (x+1) - 8$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2x + 2 - 8 \rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$

Uno de los integrantes del Grupo 3 le consultó si en lugar de aplicar la propiedad distributiva podría utilizar el desarrollo del cuadrado de un binomio. El integrante del Grupo 2 que desarrolló la actividad en el pizarrón le comentó que no sabe si los alumnos de Nivel Secundario ya vieron esos contenidos; indicó que podría utilizarse un desarrollo o el otro, dependiendo del momento en que se implementaran las actividades y los contenidos previos con los que cuenten los alumnos.

Como estaba por terminar el tiempo destinado al desarrollo de la clase, la actividad de cierre se realizó un poco más rápido. Otro integrante del grupo mostró en GeoGebra un archivo que ya traía diseñado, donde se visualizaba el cuadrado dado en el enunciado, los puntos que se indicaban y el cálculo del área pedida. Mostró cómo ese cálculo del área se

modifica cuando se mueve el punto E ubicado sobre el lado AB. Comentó que esta actividad les pareció muy interesante como una aplicación de la función cuadrática, y que le destinarían en clase el tiempo necesario para que los alumnos de Nivel Secundario la resuelvan. Consultó cómo la resolvieron los otros grupos cuando implementaron la propuesta, y entre algunos integrantes de cada grupo se fueron comentando las respuestas: hallaron la medida del lado del cuadrado EFGH aplicando el teorema de Pitágoras y fueron trabajando los primeros ítems de la actividad; luego hallaron la expresión del área en una fórmula general, donde algunos la dejaron escrita como $f(x) = x^2 + (25 - x)^2$ y otros la desarrollaron como $f(x) = 2x^2 - 50x + 625$. Todos coincidieron en identificar la menor área posible a través del vértice de la parábola y creían que los alumnos de Nivel Secundario también podrían identificarlo de ese modo.

4.4.3 Exposición del Grupo 3

Uno de los integrantes del Grupo 3 repartió a los otros dos grupos la propuesta de enseñanza diseñada y comentó que agregaron los objetivos, que no habían sido incluidos en la entrega inicial, cuando el material fue entregado a los otros grupos.

Escribió en el pizarrón las dos funciones con las que se proponían iniciar las actividades:

$f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$, calculó los valores de las funciones en los puntos dados y diseñó las tablas correspondientes. Ubicó los puntos en un sistema de ejes, tal como se indicaba en el enunciado, y presentó así el gráfico de una función cuadrática definiendo la curva como una parábola.

Propuso utilizar el software GeoGebra por lo que hizo los mismos gráficos en la computadora conectada al cañón. Insertó un deslizador, configurando los valores de acuerdo con los que aparecían en el enunciado de la actividad y definió la función $f(x) = a x^2$. Comentó que de este modo puede visualizarse en el gráfico la forma en la que varía la amplitud de la parábola de acuerdo con el signo del coeficiente principal.

Uno de los integrantes del Grupo 1 comentó que además del signo, que se asocia a que la parábola quede orientada hacia arriba o hacia abajo, podría hacerse hincapié en los valores mayores o menores que 1 en valor absoluto, ya que modifican la apertura del gráfico respecto de la primera función graficada. Todos estuvieron de acuerdo en esas dos cuestiones que se pueden remarcar a partir de la resolución de esta segunda actividad.

El mismo integrante del Grupo 3 escribió luego en el pizarrón lo que indicó como la forma polinómica de una función cuadrática $f(x) = a x^2 + b x + c$, que se corresponde con un polinomio de grado 2. Recordó la fórmula correspondiente a una función lineal, como un polinomio de grado 1, y comentó la diferencia entre ambas expresiones.

Copió en el pizarrón las fórmulas de las funciones dadas en el enunciado e indicó que sobre ellas se puede analizar si la parábola va a estar orientada hacia arriba o hacia abajo. Los integrantes de los otros dos grupos fueron respondiendo y el estudiante que se encontraba en el pizarrón colocó al lado de cada ítem la respuesta que le fueron indicando.

De manera similar, procedió con las otras funciones y preguntó cuáles de ellas se correspondían con una función cuadrática. También en este caso los integrantes de los otros dos grupos fueron respondiendo, teniendo en cuenta la resolución que habían realizado la clase anterior. Así, revisando los cálculos correspondientes en algunos ítems, fueron

respondiendo para cada función y quien se encontraba en el pizarrón escribió junto a cada expresión la respuesta que iban indicando.

Otro de los integrantes del Grupo 3 fue quien continuó con el desarrollo de las actividades, escribiendo en el pizarrón Raíces de una función cuadrática, a modo de título, y a continuación escribió la fórmula correspondiente. A modo de revisión de algunos contenidos previos indicó que, en el caso de las funciones lineales, los alumnos de Nivel Secundario ya habían hallado su cero o raíz y también habían visto su interpretación gráfica como intersección con uno de los ejes cartesianos.

Escribió a continuación la expresión de la primera función dada en el enunciado y explicó el modo en el que se aplica la fórmula escrita anteriormente. Realizó los cálculos que

correspondían al ejemplo dado, llegando a los valores de las raíces $x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{4}$ y

$x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{4}$. Indicó que, de acuerdo con la fórmula dada, podrían hallarse dos raíces en

el caso de las funciones cuadráticas, a diferencia de las funciones lineales conocidas.

Graficó en GeoGebra la función, corroborando los resultados obtenidos, y volvió a la interpretación gráfica donde los valores se correspondían con la intersección del eje de abscisas.

Repitió los pasos para los dos ejemplos siguientes, donde se incluyeron una función cuadrática con una raíz real doble $x_1 = x_2 = 1$ y otra sin raíces reales. En cada caso, luego de los cálculos realizados, también representó gráficamente en GeoGebra a modo de confirmación de los resultados obtenidos y mostró la interpretación gráfica.

Repasando los cálculos realizados, señaló en cada caso el signo del radicando, indicando que se denomina discriminante, y de ello depende si la función cuadrática tiene raíces reales, con la correspondiente intersección con el eje de abscisas, y cuántas.

El mismo estudiante escribió luego en el pizarrón las fórmulas para calcular el eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$ y el vértice de la parábola $(x_v; y_v) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ y propuso

aplicarlas a la función $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$. Con la participación de todos, fueron realizando los cálculos correspondientes en el pizarrón, hallando los valores de las raíces además del eje y el vértice. Utilizando el cañón para proyectar en el pizarrón, realizó con GeoGebra el gráfico correspondiente.

Otro de los integrantes del Grupo 3 pasó al pizarrón y explicó que la fórmula dada $f(x) = ax^2 + bx + c$ correspondía a la expresión polinómica de la función cuadrática, existiendo también la expresión canónica y la expresión factorizada, indicando en cada caso la forma correspondiente. Aclaró que la expresión $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$ hace referencia al coeficiente principal y al vértice de la parábola, hallado en la actividad anterior. Así, utilizó esos resultados obtenidos a modo de ejemplo para indicar que $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$ podía expresarse de la forma $f(x) = -2 \cdot (x - 2)^2 + 18$. Y aclaró luego que la expresión $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ hace referencia al coeficiente principal y las raíces de la parábola, en caso de tener raíces reales. Utilizando a modo de ejemplo la misma función, escribió que $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$ podía expresarse de la forma $f(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)$.

Respecto de la actividad incluida en la propuesta diseñada por el grupo, copió en el pizarrón los enunciados y en cada caso entre todos los integrantes de los grupos fueron indicando las respuestas, siguiendo las resoluciones que habían realizado en la clase correspondiente a la implementación de las actividades. También en cada caso graficó en GeoGebra y se visualizó en el pizarrón el gráfico de cada función, corroborando si la fórmula obtenida se correspondía con los datos dados en los enunciados. El estudiante que estaba exponiendo comentó a los otros grupos que le pareció importante que al momento de resolver la actividad, los alumnos de Nivel Secundario se pudieran dar cuenta qué forma o expresión de la función cuadrática conviene más usar en cada caso, de acuerdo con los datos con que se cuente.

Volvió a pasar al pizarrón el integrante del Grupo 3 que había realizado las primeras actividades y propuso resolver como actividad final o integradora un análisis de la función $f(x) = -3x^2 + x + 2$ identificando los elementos principales que se pedían en el enunciado: los coeficientes, el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces. Los otros dos grupos iban indicando las respuestas, por tener los cálculos realizados previamente. Graficó también la función en GeoGebra y corroboraron los resultados obtenidos.

Por falta de tiempo, no llegaron a resolver la actividad presentada como optativa, pero recordaron que en la clase destinada a la implementación de la propuesta se había conversado acerca del tema, considerándola como optativa porque la dejarían planteada para aquellos alumnos que tengan interés en relacionar la función lineal ya vista con la función cuadrática. No comentó el modo en que resolvería analíticamente el sistema de ecuaciones, pero llegó a mostrar en GeoGebra que graficando las dos funciones dadas,

podrían visualizarse los puntos de intersección entre ellas, y podrían calcularse utilizando la herramienta incluida en el software que halla las intersecciones entre objetos.

Las propuestas de enseñanza diseñadas por los grupos, en algunos casos con las modificaciones realizadas a partir de las implementaciones y la reflexión conjunta, se encuentran compiladas en el Anexo 3.

4.5 Análisis de las propuestas de enseñanza

A continuación se recorren las categorías de análisis, de acuerdo con lo incluido en el apartado 3.6, para cada una de las propuestas de enseñanza diseñadas por los tres grupos de estudiantes del Profesorado en Matemática con los que se han realizado las actividades (apartados 4.5.1 a 4.5.3).

4.5.1 Análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1

De acuerdo con las categorías presentadas en el apartado 3.6, el análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1 se divide en seis subapartados (4.5.1.1 a 4.5.1.6) teniendo en cuenta los atributos considerados.

4.5.1.1 Aspectos de la función cuadrática

La secuencia realiza el estudio de la función cuadrática a partir de las distintas escrituras de su fórmula (sombreado en la Tabla 4.1): inicia el desarrollo del contenido presentando la expresión polinómica y la forma en la que se pueden identificar y calcular los elementos

principales de su gráfica a partir de los coeficientes de dicha expresión; define luego las distintas expresiones de la función cuadrática, identificando la polinómica, la canónica y la factorizada, e incluye dos ejemplos acerca de cómo puede realizarse el pasaje de una expresión a otra (un ejemplo es de la expresión polinómica a la canónica y el otro es de la factorizada a la polinómica). Un ejercicio integrador que se encuentra al final de la propuesta también presenta las tres expresiones que corresponden a una función dada.

Tabla 4.1. Análisis de la categoría: Aspectos de la función cuadrática – Grupo 1

Aspectos de la función cuadrática			
Para contar colecciones	Problemas en contextos geométricos	Expresión canónica	Distintas escrituras de su fórmula

Fuente: elaboración propia.

Si bien se menciona la expresión canónica como una de las posibles para una función cuadrática, no es la manera en que se introduce el estudio de la misma; solo se la presenta al momento de definir las tres expresiones en que puede escribirse este tipo de funciones, pero no se realiza un estudio de ellas a partir de su expresión canónica, como puede ser el análisis de los desplazamientos de su gráfica, por ejemplo.

4.5.1.2 Características de las actividades

La propuesta de enseñanza no está dividida de manera explícita en distintas actividades sino que presenta un ejemplo de desarrollo de la unidad relativa al contenido Función Cuadrática, donde se combinan las explicaciones y las presentaciones de cada uno de los aspectos y de los temas relativos a dicha función, con las actividades destinadas a los alumnos incluyendo además su resolución. La exposición que ha realizado el Grupo 1 en la última etapa de la investigación, donde se ha explicitado de manera más detallada el modo

en que se desarrollarían las actividades con los alumnos de Nivel Secundario, ha contribuido a diferenciar aquellas que serán explicadas por el docente de las que serán resueltas por los estudiantes destinando el tiempo necesario para ello.

De esta manera, puede identificarse en el diseño de la propuesta una primera parte a modo de introducción que define la función cuadrática a través de su expresión polinómica, presenta ejemplos de gráficas y define los elementos principales que las componen: una tarea destinada a la explicación y la comprensión por parte de quien lee el texto, como tipo de actividad principal.

Se presenta luego una actividad para realizar en GeoGebra, donde se indican los pasos a seguir en el software para definir algunos elementos y configurar algunas de las opciones que estos incluyen, y se solicita al alumno responder acerca de algunos elementos principales de la función cuadrática dada. La actividad apunta a la aplicación y ejercitación de los contenidos desarrollados en el ítem anterior de la propuesta.

Se incluye a continuación un nuevo desarrollo teórico definiendo las tres expresiones que puede tener la fórmula correspondiente a una función cuadrática, identificándose también con la subcategoría de explicación y comprensión.

A continuación se identifican dos tipos de actividades que corresponden a *Ejemplo – Ilustración*, ya que a través de ellos se muestra respectivamente el pasaje de un tipo de expresión a otra en la fórmula de una función cuadrática y el análisis completo de otro ejemplo dado.

Finalmente, y con el subtítulo Ejercicio integrador, se presenta una actividad que resulta del tipo *Ejercicio – Aplicación – Práctica* ya que requiere la aplicación y revisión de todo lo desarrollado anteriormente.

Lo analizado se resume en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 1

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	
Propuesta de enseñanza	Tipo de actividad
(1) Introducción	Explicación – Comprensión
(2) Actividad	Ejercicio – Aplicación – Práctica
(3) Desarrollo de contenidos	Explicación – Comprensión
(4) Actividad	Ejemplo – Ilustración
(5) Análisis de una función cuadrática	Ejemplo – Ilustración
(6) Ejercicio integrador	Ejercicio – Aplicación – Práctica

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 4.3 se visualizan los posibles tipos de actividades que la tarea requiere del sujeto, de acuerdo con lo indicado en el apartado 3.6, con las actividades que se corresponden con cada tipo en la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1.

Tabla 4.3. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 1

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	
Tipo de actividad	Propuesta de enseñanza
Ejercicio – Aplicación – Práctica	(2) Actividad (6) Ejercicio integrador
Problema	
Ejemplo – Ilustración	(4) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática
Explicación – Comprensión	(1) Introducción (3) Desarrollo de contenidos

Fuente: elaboración propia.

Tal como se desprende de la Tabla 4.3, no se presenta alguna actividad que tenga como objetivo la resolución de una situación problemática. Junto a los desarrollos teóricos que se incluyen a modo de explicación de los contenidos, se agregan actividades guiadas y pautadas que presentan algún ejemplo de resolución para luego aplicarse a otro ejercicio similar o ejercicios que requieren la utilización de las fórmulas dadas para ser aplicadas en los cálculos correspondientes a su resolución.

Con respecto a la subcategoría de análisis Por la presentación o formato, se puede observar que en todas las actividades incluidas prevalece un enunciado verbal, si bien en algunos casos se acompaña de un lenguaje simbólico cuando se incluyen las fórmulas correspondientes a las funciones cuadráticas dadas y de un lenguaje gráfico cuando el desarrollo teórico que se incluye en la propuesta muestra también el gráfico correspondiente a la función (Tabla 4.4).

Tabla 4.4. Análisis de la subcategoría: Por la presentación o formato – Grupo 1

Por la presentación o formato	
Con enunciado Verbal No verbal: Simbólico – Gráfico	Sin enunciado

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la naturaleza de la tarea, las actividades incluidas en la propuesta son artificiales (Tabla 4.5). Tal como se ha indicado, la misma se inicia con un desarrollo teórico a partir de la expresión polinómica de una función cuadrática y las definiciones de algunos de los elementos principales de su gráfica, incluyendo expresiones algebraicas generales sin ningún contexto. Solo en esta actividad introductoria se presentan unas imágenes junto al comentario:

Su gráfica es una parábola y lo podemos apreciar en efectos o construcciones de nuestra vida cotidiana.

Las imágenes muestran respectivamente: una persona tirando una pelota desde distintos puntos visualizando la diferencia entre una caída libre o un tiro oblicuo, los cables de un puente colgante y dos monumentos en distintas ciudades.

Si bien estas imágenes permiten identificar las parábolas en distintos contextos reales, no se hace foco en este punto dentro del desarrollo de la actividad ni se trabaja a partir de ello. La actividad se centra en la presentación de la expresión polinómica correspondiente a una

función cuadrática y de sus coeficientes, los elementos principales que se identifican en su gráfica y las fórmulas que permiten calcular los valores de algunos de esos elementos a partir de la expresión polinómica dada.

El resto de las actividades también tiene una naturaleza artificial, trabajando con las distintas expresiones de la función cuadrática, incorporando en algún caso la utilización del software GeoGebra, pero ninguno centra la naturaleza de la tarea en un contexto real.

Tabla 4.5. Análisis de la subcategoría: Por la naturaleza de la tarea – Grupo 1

Por la naturaleza de la tarea	
Reales (contextuales, naturales, situaciones de la realidad)	Artificiales

Fuente: elaboración propia.

Considerando la motivación o finalidad general de la tarea, todas las actividades son escolares (Tabla 4.6).

Tabla 4.6. Análisis de la subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea – Grupo 1

Por la motivación o finalidad general de la tarea			
Escolares	Socioculturales	Lúdicas	Histórico culturales

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la finalidad didáctica, la actividad que se presenta a modo de introducción es *De explicación – Comprensión* ya que, tal como se ha comentado en subcategorías anteriores, se incluye a modo de desarrollo teórico la definición de la función cuadrática a través de su expresión polinómica, la influencia del signo del coeficiente principal, ejemplos de gráficos de parábolas en la vida cotidiana y gráficos realizados en GeoGebra de ciertas fórmulas dadas. A lo largo de toda la actividad, tal como es presentada en la propuesta y tal como el Grupo 1 lo ha implementado en la etapa anterior de la presente

investigación, los alumnos de Nivel Secundario a los que está destinada deben comprender el texto incluido e interpretar los resultados de los gráficos dados.

La siguiente, que requiere la utilización de GeoGebra, se considera *De ejecución*, ya que en el enunciado se detallan paso a paso los elementos del software que hay que utilizar, se especifican los valores de las configuraciones y se señala el específico que debe indicarse en un deslizador, por ejemplo, limitando el carácter dinámico del software a un único caso en lugar de permitir la investigación o la exploración acerca de la variación del gráfico de acuerdo con los distintos valores posibles.

Aparece luego un desarrollo teórico que explica los tipos de expresiones de una función cuadrática, considerándose una actividad *De explicación – Comprensión*, seguida de otra *De ejecución*, donde a través de ejemplos dados se desarrolla el modo en el que se puede pasar de un tipo de expresión a otra.

El análisis de una función cuadrática dada que se presenta a continuación corresponde con una actividad *De ejecución*, aplicando las fórmulas que fueron incluidas con anterioridad para hallar sus elementos principales y realizar su gráfico.

El ejercicio integrador que se incluye al final de la propuesta puede considerarse una actividad *De evaluación*, ya que repasa los contenidos desarrollados, aplica las fórmulas mencionadas para el cálculo de algunos de los elementos principales de su gráfica y su resolución permite evaluar lo visto.

Lo analizado se resume en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 1

Por el tipo de finalidad didáctica	
Propuesta de enseñanza	Tipo de finalidad didáctica
(1) Introducción	De explicación – Comprensión
(2) Actividad	De ejecución
(3) Desarrollo de contenidos	De explicación – Comprensión
(4) Actividad	De ejecución
(5) Análisis de una función cuadrática	De ejecución
(6) Ejercicio integrador	De evaluación

Fuente: elaboración propia.

Puede visualizarse en la Tabla 4.8 los posibles tipos de finalidad didáctica junto con las actividades que se corresponden con cada tipo en la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1.

Tabla 4.8. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 1

Por el tipo de finalidad didáctica	
Tipo de finalidad didáctica	Propuesta de enseñanza
De ejecución	(2) Actividad (4) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática
De investigación – Exploración	
De evaluación	(6) Ejercicio integrador
De explicación – Comprensión	(1) Introducción (3) Desarrollo de contenidos

Fuente: elaboración propia.

Como se puede apreciar en la Tabla 4.8, ninguna resulta *De investigación* o *De exploración*. Además de incluirse los desarrollos teóricos de los contenidos a modo de explicación y comprensión, prevalecen ejercicios del tipo *De ejecución* donde se aplican las fórmulas dadas para realizar cálculos que llevan a su resolución o se siguen en GeoGebra los pasos indicados y pautados previamente en el enunciado.

De acuerdo con el tipo de proceso de resolución, todas las actividades son *Cerradas* (Tabla 4.9). Tal como se comentó en la subcategoría anterior, hay una única actividad para ser

resuelta en GeoGebra que podría permitir la exploración, pero el enunciado limita los valores que deben asignársele a los deslizadores y no cuestiona acerca de sus variaciones.

Tabla 4.9. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 1

Por el tipo de proceso de resolución	
Tareas cerradas	Tareas abiertas

Fuente: elaboración propia.

Todas las actividades resultan *Con solución* y cada respuesta es *única* también en todos los casos por las características de los enunciados, de manera similar a lo comentado respecto de las subcategorías anteriores (Tabla 4.10). Así, se encuentran desarrollos teóricos que incluyen definiciones y fórmulas, ejemplos ya resueltos que muestran un único caso y generalizan los resultados hallados a otros posibles y las actividades destinadas a ser resueltas por los alumnos incluyen, por ejemplo, preguntas del tipo:

En cada caso, ¿cuáles son las coordenadas del vértice y de las raíces?, habiendo graficado previamente en GeoGebra las funciones $f(x) = x^2 + 3x + 4$ y $f(x) = 2x^2 - 2$, limitando las soluciones a que sean únicas.

Tabla 4.10. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de solución – Grupo 1

Por el tipo de solución	
Con solución Única	Sin solución

Fuente: elaboración propia.

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada, la primera propuesta a modo de introducción se asocia a *Definición*, ya que incluye las definiciones de: una función cuadrática a través de su expresión polinómica, el coeficiente principal y la manera en que influye su signo en la representación gráfica de la función, ordenada al origen, raíz y su fórmula para calcularla, eje de simetría y vértice. Dentro de la misma actividad también puede mencionarse la *Representación* ya que se incluyen cuatro

imágenes de gráficas de parábolas en situaciones cotidianas o en construcciones arquitectónicas como así también tres ejemplos de expresiones polinómicas y sus gráficos correspondientes.

La siguiente actividad se asocia al tipo *Procedimiento* ya que detalla los pasos a seguir para utilizar el software GeoGebra, definir deslizadores y la expresión polinómica de una función cuadrática utilizándolos.

El desarrollo teórico que se presenta a continuación se corresponde con el tipo *Definición*, incluyendo en este caso lo relativo a las distintas expresiones que puede tener una función cuadrática. Así, se definen las formas polinómica, canónica y factorizada presentando las expresiones generales de cada una de ellas y los elementos que la componen.

La actividad que se presenta a continuación se corresponde con el tipo *Algoritmo* ya que presenta las operaciones y los cálculos necesarios para pasar de una expresión polinómica a una canónica, y de una factorizada a una polinómica.

El análisis de una función cuadrática que se incluye a continuación es del tipo *Procedimiento*, ya que presenta todos los pasos a seguir para realizarlo, incluyendo las fórmulas que ya habían sido dadas junto a las definiciones, para ser utilizadas ahora en el cálculo de algunos de los elementos principales del gráfico. Como algunas definiciones pueden haberse presentado con anterioridad al desarrollar el contenido Funciones o Función Lineal, se considera en este punto una revisión de las definiciones de intervalos de crecimiento, decrecimiento, de positividad y de negatividad, por lo que no es el objetivo principal de la actividad y por eso no se la asocia al tipo *Definición*.

La última actividad presentada como un ejercicio integrador se asocia al tipo *Procedimiento* ya que su resolución incluye los pasos a seguir para pasar a las expresiones polinómica y

canónica la fórmula de una función cuadrática dada en su expresión factorizada, la realización de su gráfico, y el análisis correspondiente a partir del mismo (indicar el dominio, imagen, vértice, eje de simetría, ceros o raíces, intervalos de crecimiento, decrecimiento, de positividad y de negatividad, ordenada al origen). Se incluye también el *Algoritmo* para pasar de una expresión polinómica a una canónica por el método de completar cuadrados.

Lo analizado se resume en las Tablas 4.11 y 4.12.

Tabla 4.11. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 1

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	
Propuesta de enseñanza	Tipo de conocimiento involucrado
(1) Introducción	Definición – Representación
(2) Actividad	Procedimiento
(3) Desarrollo de contenidos	Definición
(4) Actividad	Algoritmo
(5) Análisis de una función cuadrática	Procedimiento
(6) Ejercicio integrador	Procedimiento – Algoritmo

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.12. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 1

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	
Tipo de conocimiento involucrado	Propuesta de enseñanza
Demostración	
Definición	(1) Introducción (3) Desarrollo de contenidos
Representación	
Propiedad	
Concepto	
Procedimiento	(2) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador
Algoritmo	(4) Actividad (6) Ejercicio integrador
Problema	

Fuente: elaboración propia.

Tal como puede advertirse en la Tabla 4.12 hay varios tipos de actividades matemáticas (*Demostración, Representación, Propiedad, Concepto*) que no aparecen involucradas

dentro del diseño de la propuesta analizada. Prevalcen actividades del tipo *Procedimiento* donde sus resoluciones solo requieren de la utilización y aplicación de fórmulas dadas o de la reproducción de ciertos pasos similares a otro ejemplo ya desarrollado.

En cuanto al tipo de actuación implicada (Tabla 4.13) la actividad introductoria apunta al *Análisis – Comprensión* por parte de los alumnos de las definiciones dadas, de los contenidos, imágenes y gráficos presentados.

La actividad a desarrollarse en GeoGebra hace su foco en la *Construcción* utilizando algunos de los elementos que incluye el software y especificándolo luego a los ejemplos dados.

El desarrollo teórico que se incluye a continuación se asocia al tipo *Análisis – Comprensión* de las definiciones incluidas en la propuesta de enseñanza, correspondientes a las distintas expresiones de una función cuadrática.

Los ejemplos que se presentan luego para realizarse el pasaje de una expresión a otra, se corresponden con la aplicación de las fórmulas que permiten calcular la abscisa del vértice y los ceros de una función cuadrática, y utilizar los resultados obtenidos en la expresión correspondiente.

Del mismo modo, en las últimas dos actividades se reconoce la aplicación de las fórmulas incluidas anteriormente y de los contenidos desarrollados; en un caso, en el análisis completo de una función cuadrática, y el otro, en el pasaje de una expresión a otra de este tipo de función y su correspondiente análisis.

Tabla 4.13. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 1

Por el tipo de actuación implicada	
Propuesta de enseñanza	Tipo de actuación
(1) Introducción	Análisis – Comprensión
(2) Actividad	Construcción
(3) Desarrollo de contenidos	Análisis – Comprensión
(4) Actividad	Aplicación
(5) Análisis de una función cuadrática	Aplicación
(6) Ejercicio integrador	Aplicación

Fuente: elaboración propia.

También en esta subcategoría es posible advertir que hay varios tipos de actuación que no aparecen involucradas en el desarrollo de la propuesta de enseñanza analizada: *Razonamiento, Justificación, Comunicación, Explicación*. Prevalcen las actividades centradas en la *Aplicación*, según el caso, de cálculos presentados a través de fórmulas o de procedimientos que se siguen a partir de otro ejemplo mostrado (Tabla 4.14).

Tabla 4.14. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 1

Por el tipo de actuación implicada	
Tipo de actuación	Propuesta de enseñanza
Construcción	(2) Actividad
Razonamiento	
Justificación	
Aplicación	(4) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador
Comunicación	
Explicación	
Análisis – Comprensión	(1) Introducción (3) Desarrollo de contenidos

Fuente: elaboración propia.

4.5.1.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades

La actividad introductoria no utiliza en la propuesta presentada ninguna herramienta ya que desarrolla los contenidos relativos a la definición de función cuadrática, presenta unos ejemplos de gráficos y algunos de sus elementos principales e indica las fórmulas correspondientes para calcular dichos elementos. Con base en el modo en que el Grupo 1 ha

realizado su exposición, se consideran las herramientas que se han utilizado: el software GeoGebra para graficar el primer ejemplo de función dada, lápiz y papel y calculadora para la realización de algunos de los cálculos correspondientes a los valores de los elementos principales de su gráfica.

La actividad que se incluye a continuación se centra en la utilización del software GeoGebra para su realización.

El desarrollo teórico que aparece luego, donde se definen las tres formas en que se puede expresar una función cuadrática, no requiere de la utilización de alguna herramienta ya que solo consiste en la lectura y comprensión del texto dado.

En la siguiente tarea, donde se pasa de una expresión a otra en dos ejemplos de funciones cuadráticas, se requiere de lápiz y papel para su resolución. En ninguna parte de la propuesta se menciona la utilización de la calculadora, por lo que no se explicita si se permite su uso. Durante la resolución que se hizo en la etapa de implementación comentada, han utilizado la calculadora como herramienta de cálculo en la realización de las actividades, por lo que se puede sobreentender que la hayan considerado al diseñar esta tarea.

Algo similar sucede en el análisis de una función cuadrática que se presenta a continuación, donde prevalece el desarrollo en lápiz y papel, se incluyen las fórmulas correspondientes para el cálculo de algunos elementos y se puede sobreentender la utilización de la calculadora, que no se menciona de manera explícita.

El gráfico que aparece al final del análisis está realizado con GeoGebra, al igual que todos los que se muestran en la propuesta de enseñanza. Durante la etapa de la investigación referida a la Exposición del Grupo 1 (apartado 4.4.1) solo en esta actividad, (5) Análisis de

una función cuadrática, el integrante del grupo que ha realizado dicha exposición realizó en el pizarrón el gráfico de una función cuadrática sin utilizar la computadora; en ese caso, si bien en la propuesta no se lo explicita, los alumnos de Nivel Secundario a los que están destinadas las actividades requieren de elementos de Geometría para la realización de ese gráfico.

El desarrollo del ejercicio integrador que muestra el análisis completo de una función cuadrática y también repasa las distintas maneras en que se puede expresar la misma, es realizado en lápiz y papel, pudiendo utilizar una calculadora si se considerara necesario, y el gráfico es realizado en GeoGebra.

En las Tablas 4.15 y 4.16 se resume lo relativo a esta categoría.

Tabla 4.15. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 1

Herramientas para llevar a cabo las actividades	
Propuesta de enseñanza	Herramienta
(1) Introducción	GeoGebra Lápiz y papel Calculadora
(2) Actividad	GeoGebra
(3) Desarrollo de contenidos	
(4) Actividad	Lápiz y papel Calculadora
(5) Análisis de una función cuadrática	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra
(6) Ejercicio integrador	Lápiz y papel Calculadora GeoGebra

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.16. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 1

Herramientas para llevar a cabo las actividades	
Herramienta	Propuesta de enseñanza
Lápiz y papel	(1) Introducción (4) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador
Calculadora	(1) Introducción (4) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador
Elementos de Geometría	(5) Análisis de una función cuadrática
Software matemático – GeoGebra	(1) Introducción (2) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador

Fuente: elaboración propia.

Si bien todas las herramientas son utilizadas para llevar a cabo las actividades, puede observarse que en la utilización de GeoGebra prevalece su función de graficador, en algunos casos para presentar el gráfico correspondiente a una función definida a través de su fórmula, o en otros, para corroborar con el software los resultados obtenidos en cálculos realizados con lápiz y papel.

4.5.1.4 Formas de representación empleadas

La actividad introductoria se inicia con una descripción verbal a modo de definición de la función cuadrática, de su coeficiente principal y de su influencia en el gráfico. Asimismo su foco está puesto en la fórmula o ecuación como forma de representación predominante ya que, a partir de la expresión polinómica, es como se la define. Se incluyen también tres gráficos a modo de ejemplos que ilustran en cada caso su vértice y la cantidad de raíces que puede tener una función de este tipo, junto a otras definiciones de algunos de los elementos principales, también dados a través de sus fórmulas.

La siguiente actividad también se centra en la fórmula o ecuación como forma de representación de la función cuadrática, definiéndola en GeoGebra a través de su expresión polinómica e insertando deslizadores para representar sus coeficientes, si bien interviene también la representación gráfica como una de las salidas obtenidas a partir de la utilización del software.

El desarrollo teórico que se incluye a continuación define las distintas maneras en que se puede expresar una función cuadrática, con una descripción verbal que caracteriza cada una de ellas y las fórmulas o ecuaciones correspondientes, como formas de representación.

En la actividad siguiente se indican a través de fórmulas dos ejemplos de funciones cuadráticas, una en forma polinómica para ser expresada en forma canónica y otra en forma factorizada para ser pasada a la polinómica, utilizando siempre las expresiones algebraicas correspondientes, sin intervenir en ningún caso otra forma de representación.

El análisis completo de una función cuadrática que se incluye a modo de ejemplo o ilustración se inicia a partir de la fórmula correspondiente a una función dada, si bien interviene luego la gráfica como otra forma de representación, que también se utiliza en dicho análisis ya que a través de ella se definen algunos de los elementos principales. A modo de revisión de contenidos previamente desarrollados en otras unidades, se incluyen las definiciones de conjuntos dominio e imagen, eje de simetría, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, intervalos de positividad y de negatividad. Interviene la descripción verbal como otra forma de representación empleada además de las fórmulas o ecuaciones que corresponden a los resultados del análisis de la función dada a modo de ejemplo.

Algo similar sucede con la última actividad planteada como ejercicio integrador, donde se agrega también una revisión de las distintas formas de expresar una función cuadrática, dándole a la fórmula o ecuación como forma de representación un papel más predominante. En ninguna de las actividades se incluye de manera explícita la tabla como una forma de representación y la descripción verbal se utiliza solo al incluir definiciones pero no como forma de representar una situación que pueda ser modelizada a través de una expresión cuadrática.

Lo analizado se resume en la Tabla 4.17.

Tabla 4.17. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 1

Formas de representación empleadas	
Propuesta de enseñanza	Forma de representación
(1) Introducción	Fórmulas o ecuaciones Descripción verbal Gráficas
(2) Actividad	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
(3) Desarrollo de contenidos	Descripción verbal Fórmulas o ecuaciones
(4) Actividad	Fórmulas o ecuaciones
(5) Análisis de una función cuadrática	Fórmulas o ecuaciones Gráficas Descripción verbal
(6) Ejercicio integrador	Fórmulas o ecuaciones Gráficas

Fuente: elaboración propia.

Tal como puede observarse a lo largo de la propuesta de enseñanza analizada, en ninguna actividad aparece la tabla como forma de representación empleada, como así tampoco ha sido utilizada en la exposición realizada por un integrante del grupo en la etapa de investigación comentada (Tabla 4.18).

Tabla 4.18. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 1

Formas de representación empleadas	
Forma de representación	Propuesta de enseñanza
Descripción verbal	(1) Introducción
Tablas	
Gráficas	(1) Introducción (2) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador
Fórmulas o ecuaciones	(1) Introducción (2) Actividad (3) Desarrollo de contenidos (4) Actividad (5) Análisis de una función cuadrática (6) Ejercicio integrador

Fuente: elaboración propia.

4.5.1.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones

La introducción no presenta una actividad o indicación para los alumnos a ser desarrollada por ellos. Muestra en forma de texto las definiciones de: una función cuadrática, su coeficiente principal y su influencia en el gráfico, algunos elementos que componen su gráfica, como ordenada, raíz, eje de simetría, vértice. Puede interpretarse como una tarea que implica para el alumno la interpretación de ese texto y se incluye en el desarrollo la traslación de ese registro de descripción verbal al de fórmula o expresión algebraica, si bien no es una actividad que se le pide al alumno que la realice. Así, por ejemplo, se pasa de un registro de descripción verbal a fórmula cuando se indica:

En Matemática, una función cuadrática o función de segundo grado, es una función polinómica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$

En esa misma introducción también aparece una traslación, de la fórmula o expresión algebraica como registro de representación al gráfico, al presentar tres ejemplos de funciones cuadráticas definidas a partir de su fórmula como polinomio de segundo grado y

sus correspondientes gráficos, donde se identifican en cada caso su vértice y la cantidad de raíces que tiene.

En la siguiente actividad, a ser desarrollada por los alumnos en GeoGebra, también aparece el proceso de traslación del registro fórmula o expresión algebraica al gráfico. Se indica por ejemplo:

*Ahora copiar en la barra de entradas $f(x)=a*x^2+b*x+c$ y presionar Enter, habiendo definido previamente tres deslizadores que representan cada uno de los coeficientes del polinomio de segundo grado. A partir de ello, el software realiza el gráfico correspondiente y se pide identificar las coordenadas del vértice y de las raíces considerando los dos casos particulares que se indican en el enunciado: $f(x) = x^2 + 3x + 4$ y $f(x) = 2x^2 - 2$.*

El desarrollo teórico que se encuentra a continuación acerca de las distintas formas en que se puede expresar una función cuadrática según sea polinómica, canónica o factorizada, se corresponde con una traslación del registro de descripción verbal a fórmula. De manera similar a lo indicado en la actividad introductoria, se espera de los alumnos la lectura e interpretación tanto del texto como de esa traslación de un registro a otro, ya que ese pasaje se encuentra escrito y no se le solicita a los alumnos hacerlo. Por ejemplo:

La forma canónica puede quedar expresada mediante el cuadrado de un binomio. Nos permite visualizar las coordenadas del vértice $(x_v ; y_v)$

$$y = (x - x_v)^2 + y_v$$

La siguiente tarea a ser desarrollada por los alumnos requiere la aplicación de lo visto en las actividades anteriores pasando de una forma a otra las posibles expresiones de una función cuadrática. En lo relativo a los registros de representación, solo aparece el de fórmula o

expresión algebraica, obteniendo distintas expresiones equivalentes entre los distintos pasos para su resolución.

En el análisis de la función cuadrática que se incluye a continuación, se escriben a modo de revisión algunas definiciones (conjunto dominio e imagen, raíces, eje de simetría, intervalos de crecimiento, decrecimiento, de positividad y de negatividad) acompañadas en algunos casos de las fórmulas correspondientes o de las respuestas al ejemplo dado $f(x) = x^2 + 4x + 3$, mostrando una traslación del registro de descripción verbal al de fórmula o expresión algebraica. A su vez, se realiza luego otro proceso de traslación del registro de fórmulas o expresión algebraica al gráfico, de donde se deducen también algunas respuestas correspondientes al análisis.

El último ejercicio presentado como integrador incluye el tratamiento dentro del mismo registro de fórmula o expresión algebraica, al pasar de una expresión a otra el ejemplo dado de una función cuadrática: se presenta en forma factorizada $g(x) = -(x-3) \cdot (x-1)$ y se la expresa luego en forma polinómica y canónica. Se realiza el gráfico utilizando los valores de los elementos principales que se han calculado y se realiza el correspondiente análisis de la función de manera similar a la actividad anterior, mostrando también en este ejercicio la traslación de la fórmula o expresión al registro gráfico.

Se resume al respecto en la Tabla 4.19.

Tabla 4.19. Análisis de la subcategoría: Proceso de traslación – Grupo 1

Proceso de traslación				
A De	Situación / Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmula / Expresión algebraica
Situación / Descripción verbal				(1) Introducción (3) Desarrollo de contenidos (5) Análisis de una función
Tablas				
Gráficas				
Fórmula / Expresión algebraica			(1) Introducción (2) Actividad (5) Análisis de una función (6) Ejercicio integrador	(4) Actividad (6) Ejercicio integrador

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con lo analizado respecto de las actividades incluidas en la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1 todas las actividades se corresponden con el tipo de conversión indirecta, mostrándose únicamente el pasaje de la ecuación a la gráfica dentro de los tipos posibles (Tabla 4.20).

Tabla 4.20. Análisis de la subcategoría: Tipos de conversiones – Grupo 1

Tipos de conversiones	
Directa	Indirecta
	Ecuación a gráfica

Fuente: elaboración propia.

4.5.1.6 Análisis didáctico

Si bien se pidió de manera expresa incluir un análisis del tipo cognitivo en el diseño de la propuesta de enseñanza, el Grupo 1 no explicita dicho análisis: no aparece por escrito en el texto entregado ni se ha mencionado en la exposición realizada ningún tipo de análisis referido a la identificación o la descripción de posibles dificultades que los alumnos de Nivel Secundario puedan enfrentar o los posibles errores que puedan cometer al resolver las

actividades propuestas, ni las posibles preguntas que podría hacer el docente, ni los modos en que se iría gestionando la clase, entre otras cuestiones a considerar.

El análisis por parte de los estudiantes del Profesorado se centra en lo referido al contenido (Tabla 4.21), con hincapié en la estructura de la unidad referida a Función Cuadrática. Identifican los conceptos y los procedimientos involucrados en la resolución de las actividades, si bien este análisis puede parecer incompleto o limitado ya que tal como se ha mostrado en las categorías anteriores, no aparecen algunos tipos de actividades, hay un único proceso de resolución y tipo de solución involucrados, y no se utilizan todas las formas y registros de representación.

Tabla 4.21. Análisis de la categoría: Análisis didáctico – Grupo 1

Análisis didáctico	
Análisis cognitivo	Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

Las Tablas 4.22 y 4.23 resumen lo analizado respecto de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1.

Tabla 4.22. Síntesis de los principales hallazgos a nivel global – Grupo 1

Aspectos de la función cuadrática		Distintas escrituras de su fórmula
Características de las actividades	Por la presentación o formato	Con enunciado verbal No verbal: simbólico – gráfico
	Por la naturaleza de la tarea	Artificiales
	Por la motivación o finalidad general de la tarea	Escolares
	Por el tipo de proceso de resolución	Tareas cerradas
	Por el tipo de solución	Con solución única
Traslaciones y conversiones entre representaciones	Tipo de conversiones	Indirecta
Análisis didáctico		Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.23. Síntesis de los principales hallazgos para cada parte de la propuesta – Grupo 1

Propuesta Categ. o Subcateg.	(1) Introducción	(2) Actividad	(3) Desarrollo de contenidos	(4) Actividad	(5) Análisis de una función cuadrática	(6) Ejercicio integrador
Tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	Explicación Comprensión	Ejercicio Aplicación Práctica	Explicación Comprensión	Ejemplo Ilustración	Ejemplo Ilustración	Ejercicio Aplicación Práctica
Tipo de finalidad didáctica	De explicación Comprensión	De ejecución	De explicación Comprensión	De ejecución	De ejecución	De evaluación
Tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	Definición Representación	Procedimiento	Definición	Algoritmo	Procedimiento	Algoritmo
Tipo de actuación implicada	Análisis Comprensión	Construcción	Análisis Comprensión	Aplicación	Aplicación	Aplicación
Herramientas para llevar a cabo las actividades	GeoGebra Lápiz y papel Calculadora	GeoGebra		Lápiz y papel Calculadora	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra	Lápiz y papel Calculadora GeoGebra
Formas de representación empleadas	Fórmulas o ecuaciones Descripción verbal Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Descripción verbal Fórmulas o ecuaciones	Fórmulas o ecuaciones	Fórmulas o ecuaciones Gráficas Descripción verbal	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Proceso de traslación	Descripción verbal a fórmula Fórmula a gráfica	Fórmula a gráfica	Descripción verbal a fórmula	Fórmula a fórmula	Descripción verbal a fórmula Fórmula a gráfica	Fórmula a fórmula Fórmula a gráfica

Fuente: elaboración propia.

4.5.2 Análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2

De acuerdo con las categorías presentadas en el apartado 3.6, el análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2 acerca del contenido Función Cuadrática incluyendo GeoGebra en sus actividades, se divide en seis subapartados (4.5.2.1 a 4.5.2.6).

4.5.2.1 Aspectos de la función cuadrática

Esta propuesta de enseñanza se estructura presentando cuatro actividades para el desarrollo de los contenidos relativos a Función Cuadrática y otra, mencionada como actividad de cierre.

Se incluye junto a cada actividad un comentario o aclaración acerca de la misma donde se indican algunas cuestiones referidas a su análisis: contenidos previos que se requieren, contenidos que se pueden desarrollar a partir de su implementación, resultados que se esperan, etc.

Con respecto a los aspectos referidos a las funciones cuadráticas que se analizan en este apartado, puede observarse que en la primera actividad se hace hincapié en las distintas escrituras de su fórmula, presentando un problema donde la función está definida en forma factorizada $f(t) = t \cdot (8 - t)$, aclarando luego en el análisis que se incluye en la propuesta:

A partir de esta actividad se ve con los alumnos que $f(t) = t \cdot (8 - t) = -t^2 + 8t$ y se define entonces la función cuadrática a partir de un polinomio de 2° grado $f(x) = a x^2 + b x + c$

La segunda actividad aborda como aspecto de la problemática cuadrática el referido al estudio de la función a partir de la expresión canónica de su fórmula, trabajando con el software GeoGebra. Se inicia la actividad graficando $f(x) = x^2$ y, a través de distintos deslizadores, se analiza la manera en que se va modificando el gráfico inicial según el modo en que varíen los valores de esos deslizadores, graficando así $f(x) = a x^2$, $f(x) = x^2 + c$, $f(x) = (x - b)^2$, correspondientes a distintos ítems de la misma actividad.

Las siguientes dos actividades también se centran en la utilización de las distintas escrituras de su fórmula, una de ellas centrándose en lo relativo a la cantidad de raíces que puede

tener una función cuadrática, y la otra haciendo hincapié en las distintas formas en que se puede expresar la misma función.

La actividad de cierre presenta un problema en un contexto geométrico, con algunos puntos ubicados en los lados de un cuadrado que forman un nuevo cuadrado. Se pide analizar el modo en que varía el área de esta nueva figura a medida que se desplazan los puntos a lo largo del lado del cuadrado inicial.

Los aspectos contemplados se indican en la Tabla 4.24.

Tabla 4.24. Análisis de la categoría: Aspectos de la función cuadrática – Grupo 2

Aspectos de la función cuadrática			
Para contar colecciones	Problemas en contextos geométricos	Expresión canónica	Distintas escrituras de su fórmula

Fuente: elaboración propia.

4.5.2.2 Características de las actividades

Se introduce el contenido Función Cuadrática a través de la Actividad 1, que corresponde a un problema en cuanto al tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto que la resuelve de acuerdo con lo analizado en esta subcategoría, modelizando a través de una expresión cuadrática la distancia recorrida por un camión en función del tiempo y de ello se agregan luego dos preguntas o ítems a responder:

La distancia en km a la que se encuentra un camión respecto de la empresa para la que trabaja, desde que sale hasta que vuelve, en función del tiempo (expresado en horas) está dado por la fórmula $f(t) = t \cdot (8 - t)$

- a) ¿Cuántas horas tarda el camión en volver a la empresa?*
- b) Si el camión salió a las 7:00 hs, ¿ a qué hora se encuentra más lejos de la empresa y a qué distancia está?*

Dado que los alumnos de Nivel Secundario no conocen aún el contenido sino que se lo introduce a través de esta actividad, la misma resulta un problema ya que debe interpretarse el enunciado y la situación planteada, puede apelarse a distintas formas de resolverlo o de

tomar registro de los datos y no es inmediata la respuesta a cada una de las preguntas planteadas, ya que no se conocen previamente las fórmulas o los conceptos que pueden llevar a ellas.

La segunda actividad requiere del sujeto que la resuelve una explicación y comprensión para fundamentar y justificar la respuesta, ya que trabajando con GeoGebra y la utilización de deslizadores, deben contestar acerca de lo que sucede de acuerdo con la variación de los mismos, según sean ellos por ejemplo positivos o negativos, menores o mayores que 1, entre otras cuestiones.

La Actividad 3 se asocia al tipo *Ejercicio – Aplicación – Práctica* ya que su resolución requiere de la utilización de GeoGebra para realizar los gráficos correspondientes a tres funciones dadas e identificar en ellos algunos de sus elementos principales, como raíces, eje de simetría y vértice. Puede considerarse una ejercitación y aplicación de temas desarrollados en las actividades anteriores.

Algo similar sucede con la siguiente, donde también se pide graficar tres funciones dadas, expresadas de manera diferente en el enunciado, e identificar los elementos principales en cada una de ellas.

Tanto en la tercera actividad como en la cuarta, el análisis que incluyen los estudiantes del Profesorado que diseñaron la propuesta hace referencia a los contenidos que se quieren desarrollar a partir de su resolución. En un caso se trata de la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática y en el otro, las distintas expresiones que pueden utilizarse en la definición de su fórmula según se trate de una expresión polinómica, factorizada o canónica.

La actividad de cierre presenta un problema a través de una situación representada geoméricamente, que requiere la interpretación de su enunciado y de los datos dados, la resolución de los primeros ítems a partir de algunos valores, la generalización que luego puede hacerse respecto de la situación planteada, la modelización a través de una fórmula y la vinculación con los conceptos anteriormente desarrollados, como es el de máximo de una función en este caso.

Este análisis de la subcategoría Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto se resume en la Tabla 4.25.

Tabla 4.25. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 2

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	
Propuesta de enseñanza	Tipo de actividad
Actividad 1	Problema
Actividad 2	Explicación – Comprensión
Actividad 3	Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad 4	Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad de cierre	Problema

Fuente: elaboración propia.

No se presenta ninguna actividad cuyo objetivo principal haga referencia a mostrar un ejemplo o ilustración acerca del desarrollo de alguno de los contenidos relativos a las funciones cuadráticas (Tabla 4.26).

Tabla 4.26. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 2

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	
Tipo de actividad	Propuesta de enseñanza
Ejercicio – Aplicación – Práctica	Actividad 3 Actividad 4
Problema	Actividad 1 Actividad de cierre
Ejemplo – Ilustración	
Explicación – Comprensión	Actividad 2

Fuente: elaboración propia.

En las cuatro actividades que presenta la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2 prevalece el enunciado verbal, si bien aparece también el lenguaje simbólico a través de las fórmulas que definen las funciones cuadráticas dadas. En la actividad de cierre hay una figura de análisis que se destaca para la comprensión del enunciado; está acompañado de un lenguaje verbal pero este resulta incompleto y solo a modo introductorio (Tabla 4.27).

Tabla 4.27. Análisis de la subcategoría: Por la presentación o formato – Grupo 2

Por la presentación o formato	
Con enunciado Verbal	Sin enunciado
No verbal: Simbólico - Icónico	

Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta la naturaleza de la tarea (Tabla 4.28), todas las actividades se podrían considerar artificiales dado que los alumnos no recopilan información o recogen datos de un contexto real. Pero se pueden reconocer aspectos diferentes entre unas y otras, de acuerdo con los enunciados dados.

Así, la primera actividad incluye la fórmula correspondiente a una función cuadrática, indicando que esta expresa la distancia a la que se encuentra un camión respecto de la empresa para la que trabaja, en función del tiempo. De esta manera, se está modelizando una situación que podría ser real, si bien los datos dados no se justifican desde la base de una situación concreta de la realidad.

Las otras tres actividades, tal como se ha indicado, presentan una naturaleza artificial, analizando desde el punto de vista gráfico el comportamiento de las funciones de acuerdo con la variación de algunos parámetros, la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática y las distintas expresiones de su fórmula.

La actividad de cierre, de manera similar a lo comentado en la primera, también se presenta desde un contexto que podría considerarse real si se lo vincula con la geometría, analizando lo que sucede a medida que varía la ubicación de ciertos puntos sobre los lados de un cuadrado.

Tabla 4.28. Análisis de la subcategoría: Por la naturaleza de la tarea – Grupo 2

Por la naturaleza de la tarea	
Propuesta de enseñanza	Naturaleza de la tarea
Actividad 1	Real, situación de la realidad
Actividad 2	Artificial
Actividad 3	Artificial
Actividad 4	Artificial
Actividad de cierre	Real, contexto geométrico

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la finalidad general de la tarea, todas las actividades que se presentan son escolares (Tabla 4.29).

Tabla 4.29. Análisis de la subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea – Grupo 2

Por la motivación o finalidad general de la tarea			
Escolares	Socioculturales	Lúdicas	Histórico culturales

Fuente: elaboración propia.

Si bien la primera actividad permite introducir a los alumnos en los primeros conceptos relativos al contenido Función Cuadrática, por presentarse en forma de problema, se puede considerar *De investigación – Exploración* de acuerdo con el tipo de finalidad didáctica ya que se puede recurrir a distintos procedimientos, analizar alternativas y examinar posibilidades para dar respuesta a las preguntas formuladas en el enunciado. Si bien las mismas pueden tener una respuesta inmediata cuando se cuenta con determinados contenidos, en esta primera etapa los alumnos de Nivel Secundario tendrían que recurrir a la investigación y a la exploración para llegar a los resultados.

En la Actividad 2 hay una etapa *De ejecución*, cuando se pide graficar en GeoGebra la función $f(x) = x^2$ y definir deslizadores que redefinen la función anterior de la forma $f(x) = a x^2$, $f(x) = x^2 + c$, $f(x) = (x - b)^2$. Se puede considerar también una finalidad *De investigación – Exploración* cuando se pide analizar el modo en que varían los gráficos de la funciones a medida que lo hacen los valores de los deslizadores y que ello conduzca a los alumnos a establecer la relación que existe con el vértice de la parábola.

La Actividad 3 se corresponde con el tipo *De ejecución* ya que se deben graficar en GeoGebra tres funciones dadas e identificar en cada caso sus raíces, el eje de simetría y el vértice, siendo en todos los casos elementos previamente definidos en actividades anteriores.

Algo similar sucede en la cuarta actividad donde también se deben graficar en GeoGebra tres funciones e identificar sus elementos principales. Dado que se trata de la misma función expresada de tres maneras diferentes, según se trate de su definición polinómica, factorizada o canónica, puede considerarse también una finalidad *De explicación – Comprensión* cuando los alumnos de Nivel Secundario deban fundamentar o justificar esa respuesta.

Dado que la última actividad se presenta como cierre, puede considerarse *De evaluación* en tanto reúne todos los contenidos ya desarrollados en las actividades anteriores, si bien intervienen procesos *De investigación – Exploración* en su resolución.

Lo analizado se resume en la Tabla 4.30.

Tabla 4.30. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 2

Por el tipo de finalidad didáctica	
Propuesta de enseñanza	Tipo de finalidad didáctica
Actividad 1	De investigación – Exploración
Actividad 2	De ejecución De investigación – Exploración
Actividad 3	De ejecución
Actividad 4	De ejecución De explicación – Comprensión
Actividad de cierre	De evaluación

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con lo indicado, si bien prevalecen actividades del tipo *De ejecución*, las mismas no se limitan únicamente a la aplicación de algoritmos y cálculos para dar respuesta a lo pedido sino que en casi todos los casos se agrega otra instancia, como el análisis, la fundamentación, la investigación o la exploración, según la actividad de la que se trate (Tabla 4.31).

Tabla 4.31. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 2

Por el tipo de finalidad didáctica	
Tipo de finalidad didáctica	Propuesta de enseñanza
De ejecución	Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4
De investigación – Exploración	Actividad 1 Actividad 2
De evaluación	Actividad de cierre
De explicación – Comprensión	Actividad 4

Fuente: elaboración propia.

Considerando el proceso de resolución (Tabla 4.32), la Actividad 1 se puede considerar abierta ya que los alumnos de Nivel Secundario no cuentan previamente con los contenidos que están involucrados en la situación problemática planteada, por lo que las respuestas a las preguntas del enunciado no son inmediatas y pueden recurrir a distintos razonamientos y procedimientos para llegar a esa resolución.

Las siguientes tres actividades se plantean para ser resueltas en GeoGebra. En la Actividad 2 se utilizan deslizadores para analizar la variación de ciertos parámetros en la fórmula que define una función cuadrática. En la tercera y en la cuarta se pide identificar los elementos principales, tales como las raíces, el eje de simetría y el vértice, con el objeto de analizar, en un caso, la cantidad de raíces que puede tener una función de este tipo, y en otro, las distintas formas en las que se puede expresar la misma fórmula.

Si bien la característica dinámica del software permite cierto proceso de investigación por parte de los alumnos, por ejemplo en el análisis que surge de la utilización de deslizadores, las actividades se pueden considerar cerradas ya que no aparecen distintos procesos en su resolución: se indica en el enunciado la forma en que se deben definir esos deslizadores, se establecen los valores entre los cuales estos varían, se incluyen las fórmulas correspondientes a ciertas funciones dadas y solo se deben identificar los elementos que se piden.

La Actividad de cierre es una tarea abierta, ya que no hay un único procedimiento que permita su resolución. Dado el planteo a partir de una situación geométrica, los alumnos de Nivel Secundario podrían llegar a dar respuesta a las preguntas que se incluyen en el enunciado a través de distintos razonamientos o justificaciones; los contenidos relativos a las funciones cuadráticas que aparecen involucrados no se mencionan de manera explícita en la consigna, por lo que su resolución no se limita solo a la aplicación de lo visto en esta propuesta de enseñanza.

Tabla 4.32. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 2

Por el tipo de proceso de resolución	
Propuesta de enseñanza	Proceso de resolución
Actividad 1	Tarea abierta
Actividad 2	Tarea cerrada
Actividad 3	Tarea cerrada
Actividad 4	Tarea cerrada
Actividad de cierre	Tarea abierta

Fuente: elaboración propia.

Si bien los integrantes del Grupo 2, tanto en la etapa de resolución de las actividades por parte de los otros grupos como en la de exposición, no hicieron una referencia explícita a estos tipos de resoluciones que se pueden dar, se observa en la propuesta que se inicia y se concluye con actividades abiertas y se desarrollan en el transcurso otras de carácter algo más cerrado, con aplicaciones más directas de los contenidos vistos (Tabla 4.33).

Tabla 4.33. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 2

Por el tipo de proceso de resolución	
Proceso de resolución	Propuesta de enseñanza
Tareas cerradas	Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4
Tareas abiertas	Actividad 1 Actividad de cierre

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con lo analizado en las subcategorías anteriores, las actividades pueden diferenciarse respecto de su proceso de resolución, del tipo de tarea que requiere o su finalidad didáctica. Pero todas coinciden en que se puede llegar a una solución única. Algunas tareas hubieran permitido otros tipos de soluciones pero de acuerdo con los enunciados y las preguntas que se incluyen en las consignas, se esperan respuestas únicas a cada una de las actividades propuestas más allá de la exploración y de la diversidad de procedimientos que conducen a ellas (Tabla 4.34).

Tabla 4.34. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de solución – Grupo 2

Por el tipo de solución	
Con solución Única	Sin solución

Fuente: elaboración propia.

La Actividad 1 se corresponde con el tipo *Problema* teniendo en cuenta el conocimiento matemático involucrado en su resolución (Tabla 4.35), de acuerdo con las características de esta tarea mencionadas en el análisis de las subcategorías anteriores.

En la actividad siguiente se destaca el tipo *Procedimiento* en cuanto se indican algunos pasos a seguir para su resolución: definir una función cuadrática, incluir deslizadores (los que mencionan indicando su nombre y valores de su configuración), analizar a partir de ello el comportamiento y variación del gráfico, de acuerdo con las variaciones de esos deslizadores. Puede identificarse también la *Representación* como otro tipo de actividad involucrada.

En las Actividades 3 y 4 predomina la *Representación*, ya que se solicita representar gráficamente funciones cuadráticas dadas e identificar a partir de ello sus raíces, el eje de simetría y el vértice. También puede asociarse al tipo *Algoritmo* si se considera que, de acuerdo con lo indicado por el Grupo 2 en su propuesta, se quiere lograr que los alumnos de Nivel Secundario, a través de una de las actividades, identifiquen la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática y conozcan la fórmula para hallarlas, y a través de la otra, conozcan las distintas expresiones de este tipo de funciones y conozcan el modo en que se puede realizar el pasaje de una forma a otra.

La Actividad de cierre se caracteriza por ser del tipo *Problema* de acuerdo con el modo en que se plantea una situación geométrica y las formas en las que se puede llegar a su

resolución, modelizando a través de una función cuadrática el contexto dado y mostrando una aplicación del concepto de mínimo.

Tabla 4.35. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 2

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	
Propuesta de enseñanza	Tipo de conocimiento involucrado
Actividad 1	Problema
Actividad 2	Procedimiento Representación
Actividad 3	Representación Algoritmo
Actividad 4	Representación Algoritmo
Actividad de cierre	Problema

Fuente: elaboración propia.

Ninguna de las actividades propuestas se relaciona específicamente o de manera explícita con la *Demostración*, si bien muchas de las preguntas que se hacen pueden incluir una argumentación o fundamentación en las respuestas dadas.

De manera similar, no hay actividades que hagan referencia a definiciones o que las incluyan como parte del enunciado de la actividad, aunque en los comentarios que el Grupo 2 incluyó junto a cada tarea se exponen los contenidos que se esperan definir y desarrollar a partir de cada resolución. Similarmente se puede indicar respecto de ejercicios que involucren de manera específica en su consigna la aplicación de conceptos como tipo de conocimiento por lo que no se ha considerado como la principal actividad involucrada. Esto se visualiza en la Tabla 4.36.

Tabla 4.36. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 2

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	
Tipo de conocimiento involucrado	Propuesta de enseñanza
Demostración	
Definición	
Representación	Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4
Propiedad	
Concepto	
Procedimiento	Actividad 2
Algoritmo	Actividad 3 Actividad 4
Problema	Actividad 1 Actividad de cierre

Fuente: elaboración propia.

Respecto del tipo de actuación implicada, predomina en la Actividad 1 el *Análisis* y *Comprensión* de la situación que se describe, la interpretación de los datos y de las distintas alternativas para su representación y los diferentes procedimientos que se pueden utilizar para su resolución, si bien también se puede mencionar la *Justificación* en la forma de argumentar las respuestas a las que se llegan.

En la Actividad 2 se destaca, por un lado, la *Construcción* que debe realizarse a partir de las indicaciones dadas en el enunciado, iniciando la definición en GeoGebra de una función cuadrática y agregando luego deslizadores que representan ciertos parámetros de su fórmula. Por otro lado, y centrando el análisis en preguntas que se incluyen en la propuesta de enseñanza, se puede considerar que la *Explicación* es la actuación que predomina en la actividad ya que en los tres ítems se debe argumentar qué sucede en la gráfica de la función según se varíen los valores de los deslizadores, concluyendo lo que sucede en una fórmula general del tipo $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$.

La tercera actividad puede considerarse de *Aplicación* en tanto solo se debe responder a la consigna hallando, para cada una de las tres funciones cuadráticas dadas, las raíces, el eje de simetría y el vértice en cada caso. Desde el punto de vista de la *Construcción* no aparece esta en la realización del gráfico, ya que solo deben ingresarse en GeoGebra esas tres funciones. Asimismo puede considerarse una actuación implicada para quien resuelve la actividad dado que no se conocen previamente las fórmulas que permitirían hallar los elementos pedidos de manera inmediata, por lo que la utilización de conceptos relativos a la Geometría y aplicaciones de las herramientas del software pueden conducir a la resolución de la actividad.

De acuerdo con el enunciado de la Actividad 4, solo se pide graficar en GeoGebra tres funciones dadas y reconocer sus elementos principales, pero se trata de la misma función expresada de tres maneras diferentes, según sea polinómica, factorizada o canónica. En este sentido, se puede interpretar que la actuación implicada que predomina en la resolución no es solo el cálculo de esos valores que se piden sino la explicación y la justificación que se pueda brindar respecto de por qué sucede que los elementos principales encontrados sean los mismos en todos los casos.

En la Actividad de cierre se pueden reconocer distintos tipos de actuación, según los ítems que se incluyen dentro de la misma tarea. Por tratarse de un problema enunciado a partir de una figura geométrica, se puede mencionar el *Análisis* y la *Comprensión* como una de las primeras implicancias relativas a la interpretación de la situación planteada y de los datos dados. Cuando se intente modelizar esa situación a través de una ecuación cuadrática aparece el *Razonamiento* que permite deducir una fórmula que generaliza los resultados obtenidos, y la *Aplicación* de los contenidos desarrollados a través de las actividades

anteriores, en particular, el de mínimo de una función aplicado en este caso a la posibilidad de hallar la menor superficie posible entre todos los cuadrados que se forman en la figura dada.

Lo analizado respecto de esta subcategoría Por el tipo de actuación implicada se resume en la Tabla 4.37.

Tabla 4.37. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 2

Por el tipo de actuación implicada	
Propuesta de enseñanza	Tipo de actuación
Actividad 1	Análisis – Comprensión Justificación
Actividad 2	Explicación Construcción
Actividad 3	Aplicación Construcción
Actividad 4	Explicación Justificación
Actividad de cierre	Análisis – Comprensión Razonamiento Aplicación

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.38. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 2

Por el tipo de actuación implicada	
Tipo de actuación	Propuesta de enseñanza
Construcción	Actividad 2 Actividad 3
Razonamiento	Actividad de cierre
Justificación	Actividad 1 Actividad 4
Aplicación	Actividad 3 Actividad de cierre
Comunicación	
Explicación	Actividad 2 Actividad 4
Análisis – Comprensión	Actividad 1 Actividad de cierre

Fuente: elaboración propia.

Tal como surge del análisis realizado, las actividades incluidas en la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2 presentan una mayor variedad en el tipo de actuaciones

que implican su resolución, como así también se puede observar que cada actividad por separado o en forma individual tiene una mayor riqueza en la cantidad de actuaciones que pueden aparecer implicadas, por la cantidad de ítems que se incluyen con distintos objetivos y acciones o por la naturaleza de la situación planteada que ofrece un abanico de consideraciones para hacer (Tabla 4.38).

4.5.2.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades

Excepto en el caso del software GeoGebra, donde en algunas actividades a su utilización se la menciona de manera explícita, todas las herramientas pueden ser empleadas dependiendo de quien la resuelve y del procedimiento que elija para ello.

Así, en la Actividad 1 se incluyen dos preguntas relativas a la situación problemática planteada en el enunciado. En su resolución, puede utilizarse lápiz y papel para el desarrollo, calculadora de ser necesario para la realización de algún cálculo, y elementos de Geometría en la construcción de la tabla y el gráfico correspondiente. De acuerdo con la aclaración o comentario que los integrantes del Grupo 2 incluyen en la propuesta junto a esta actividad, GeoGebra será utilizado a modo de verificación de los resultados obtenidos, comparando el gráfico realizado a mano con el que brinda el software.

La Actividad 2 se propone realizar en GeoGebra y utilizar deslizadores para analizar los desplazamientos del gráfico de acuerdo con la variación de algunos parámetros y llegar así a la expresión canónica de la función cuadrática. Excepto que se utilice lápiz y papel para escribir las conclusiones a las que se llegan, solo se utiliza el software para la resolución de la actividad.

En la siguiente también se propone el uso de GeoGebra para graficar las funciones dadas e identificar los elementos principales en cada una de ellas. En la aclaración o comentario que los integrantes del Grupo 2 incluyen respecto de esta tarea se menciona que a partir de la resolución se analizará con los alumnos de Nivel Secundario la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática y se les dará la fórmula que permite su cálculo inmediato. A partir de esto, la comparación y verificación que se puede hacer entre los resultados obtenidos a través del software y los que se pueden hacer a través de la fórmula, requiere la utilización de lápiz y papel y de calculadora según el caso.

Algo similar sucede en la Actividad 4 donde también se pide en el enunciado que se grafiquen en GeoGebra tres funciones dadas y se indiquen sus elementos principales. Si bien el software puede ser la única herramienta que se necesita en la resolución, luego se aclara la intención del ejercicio, consistente en que los alumnos de Nivel Secundario reconozcan que se trata de la misma función expresada de tres maneras diferentes. Al querer justificar esta afirmación se necesitará de lápiz y papel para realizar por escrito los pasos necesarios que conducen de una expresión a otra.

La Actividad de cierre involucra la utilización de elementos de Geometría si se quiere reproducir la figura dada, como así también lápiz y papel y calculadora de ser necesaria para la resolución de los primeros ítems donde se pide hallar la superficie de un cuadrado para ciertos valores de un segmento dado. Para deducir la función que representa el cálculo de esa superficie en todos los casos se requiere de lápiz y papel, al igual que para responder al último ítem acerca del cuadrado de menor superficie posible. Si bien no lo pide de manera expresa en el enunciado, también se puede llegar a la interpretación gráfica de ese resultado a través de la aplicación del mínimo de una función, para lo que se puede

necesitar de elementos de Geometría o GeoGebra para la realización del gráfico correspondiente.

En la Tabla 4.39 se sintetizan estos hallazgos.

Tabla 4.39. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 2

Herramientas para llevar a cabo las actividades	
Propuesta de enseñanza	Herramienta
Actividad 1	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra
Actividad 2	GeoGebra
Actividad 3	GeoGebra Lápiz y papel Calculadora
Actividad 4	GeoGebra Lápiz y papel
Actividad de cierre	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.40. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 2

Herramientas para llevar a cabo las actividades	
Herramienta	Propuesta de enseñanza
Lápiz y papel	Actividad 1 Actividad 3 Actividad 4 Actividad de cierre
Calculadora	Actividad 1 Actividad 3 Actividad de cierre
Elementos de Geometría	Actividad 1 Actividad de cierre
Software matemático - GeoGebra	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4 Actividad de cierre

Fuente: elaboración propia.

Excepto en la Actividad 2 donde su resolución puede limitarse solo a la utilización del software, en el resto de las actividades pueden intervenir distintas y variadas herramientas

de acuerdo con el procedimiento que se elija o las interpretaciones que se quieran deducir (Tabla 4.40).

4.5.2.4 Formas de representación empleadas

La Actividad 1 se presenta como una situación problemática, con la correspondiente descripción verbal que caracteriza dicha situación, la que se combina con la forma de representación correspondiente a fórmula o ecuación, ya que la función cuadrática se presenta de ese modo. Es decir, teniendo en cuenta el contenido en el que está centrada la propuesta de enseñanza, se puede indicar que la función cuadrática se presenta a través de su fórmula, si bien interviene la descripción verbal como parte de la contextualización y en los enunciados de los ítems pedidos, ya que debe realizarse una interpretación de los mismos para poder dar respuestas a las preguntas.

En los comentarios que realizan los integrantes del Grupo 2 en el diseño de la propuesta, aclaran que para poder resolver esta primera actividad los alumnos de Nivel Secundario cuentan con ciertos contenidos previos por lo que “pueden realizar un gráfico aproximado de la situación e interpretar el problema dado construyendo una tabla”. Es decir, plantean como un posible procedimiento el empleo de esas otras dos formas de representación.

Las siguientes actividades se centran en la utilización de GeoGebra. Si bien los objetivos en cada caso son diferentes, las tres actividades coinciden en utilizar las gráficas y las fórmulas o ecuaciones como formas de representación empleadas. En la Actividad 2, estas se utilizan en el análisis de la variación de algunos deslizadores que representan ciertos parámetros en la fórmula de una función cuadrática; en la siguiente, el objetivo se centra en

el análisis de la cantidad de ceros o raíces que puede tener una función de este tipo; y la cuarta, en los distintos modos de expresar la misma función cuadrática. Aunque las finalidades sean diferentes, las tres coinciden en emplear las gráficas y fórmulas como formas de representación para el tratamiento del contenido.

La Actividad de cierre utiliza la descripción verbal. Uno de los ítems incluidos en el enunciado pide hallar una función que modelice a través de su fórmula el modo de calcular la superficie de un cuadrado en función de la distancia que tiene uno de sus vértices al vértice de otro cuadrado dado. Aparece de ese modo la fórmula o ecuación como una de las formas de representación empleada. Para resolver los otros ítems, se pueden utilizar las tablas y las gráficas para dar respuesta a lo pedido, pero su empleo no es explícito sino que podría formar parte de los procedimientos posibles.

Lo analizado respecto de la categoría Formas de representación empleadas se resume en la Tabla 4.41.

Tabla 4.41. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 2

Formas de representación empleadas	
Propuesta de enseñanza	Forma de representación
Actividad 1	Fórmulas o ecuaciones Descripción verbal Tablas Gráficas
Actividad 2	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Actividad 3	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Actividad 4	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Actividad de cierre	Descripción verbal Fórmulas o ecuaciones

Fuente: elaboración propia.

Tanto la primera actividad como la de cierre son más abiertas en cuanto a las posibilidades de resolución, lo cual permite una multiplicidad de formas de representación que se pueden

utilizar. En el análisis realizado y en el resumen de la Tabla 4.41 solo se mencionan las que aparecen de forma explícita ya sea en el enunciado o en el análisis que agregan los integrantes del Grupo 2.

Las Actividades 2, 3 y 4, si bien de manera más directa y específica emplean solo dos de las formas de representación para el tratamiento del contenido Función Cuadrática, ninguno de los enunciados indica una única forma de resolución ni incluye las fórmulas que podrían permitir de manera directa calcular lo pedido, por lo que también en esos casos podrían utilizarse otras formas de representación de acuerdo con el procedimiento que se elija en su resolución.

En todas las actividades propuestas se emplean las fórmulas o ecuaciones como forma de representar el contenido a tratar y en casi todas se utilizan las gráficas. Solo en la actividad de cierre se presenta una actividad que requiere el pasaje de una descripción verbal a una fórmula o ecuación que modelice esa situación planteada (Tabla 4.42).

Tabla 4.42. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 2

Formas de representación empleadas	
Forma de representación	Propuesta de enseñanza
Descripción verbal	Actividad 1 Actividad de cierre
Tablas	Actividad 1
Gráficas	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4
Fórmulas o ecuaciones	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4 Actividad de cierre

Fuente: elaboración propia.

4.5.2.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones

Dado que la Actividad 1 se presenta como una situación problemática, se puede asociar la descripción verbal al registro de representación correspondiente, aunque se destaca que dentro del enunciado ya se indica una fórmula o expresión algebraica que modeliza la situación dada. En el contexto de la actividad, es el tipo de registro más representativo por el modo en que está planteada. Si bien no se detalla de manera explícita cómo se puede resolver, se pueden tener en cuenta los comentarios que los integrantes del Grupo 2 agregan a la actividad y el modo en que fue resuelta por los otros grupos durante la etapa de investigación correspondiente. Las preguntas que se incluyen se pueden responder a través de la interpretación del enunciado y la fórmula que se indica y del proceso de traslación de ese tipo de registro a otro, como puede ser el de tabla por ejemplo. A partir de este, se puede pasar al registro gráfico teniendo en cuenta los conocimientos previos que poseen, ya que a ese pasaje entre dichos registros lo han realizado respecto de otras funciones ya vistas, como las lineales por ejemplo. Se considera este paso previo, ya que los alumnos de Nivel Secundario no cuentan aún con los contenidos necesarios para poder pasar de manera directa al registro gráfico solo a través de la fórmula que define la función cuadrática.

También en el comentario que los integrantes del Grupo 2 realizan respecto de esta primera actividad, hay un tratamiento dentro del registro *Fórmula o Expresión algebraica* ya que se propone mostrar a los alumnos de Nivel Secundario que la fórmula dada en el enunciado (en forma factorizada) corresponde a un polinomio de grados dos, que es la manera en que se plantean definir las funciones cuadráticas en la propuesta de enseñanza.

Al querer comparar y verificar los resultados obtenidos con la representación gráfica a través de un software se puede mencionar, por un lado, el proceso de traslación del registro *Fórmula al Gráfico*.

Por otro lado, durante la exposición que realizó el Grupo 2, se hizo referencia en esta primera actividad al contexto en el que está enmarcada la situación problemática planteada, por lo que la variable independiente que representa el tiempo transcurrido desde que sale un camión de la empresa para la que trabaja corresponde al conjunto de los números reales positivos. Al realizar el gráfico en GeoGebra, si no se modifican algunas configuraciones, el software lo hace considerando como dominio de la función el conjunto de los números reales. Este análisis y aclaración que hicieron los integrantes del grupo y que harían con los alumnos de Nivel Secundario se puede corresponder con un tratamiento dentro del mismo registro de representación gráfico.

En las Actividades 2 y 3 hay un proceso de traslación del registro *Fórmula o Expresión algebraica al Gráfico*, definiendo en cada caso distintas funciones cuadráticas a través de sus correspondientes fórmulas para ser graficadas en GeoGebra. En una de ellas, la intención es el análisis de esas gráficas y de sus desplazamientos, y en la otra, la cantidad de raíces que se pueden presentar en este tipo de funciones.

Si bien la Actividad 4 tiene un comienzo similar, requiriendo un proceso de traslación similar al de las actividades anteriores, en esta también aparece un tratamiento dentro del mismo registro *Fórmula o Expresión algebraica* en su resolución o al momento de fundamentar en la respuesta que se trata de la misma función cuadrática expresada de maneras distintas, según se presente en forma polinómica, canónica o factorizada.

En la Actividad de cierre hay un proceso de traslación del registro *Situación o Descripción verbal* al de *Fórmula o Expresión algebraica*, al calcular la superficie de un cuadrado para ciertas medidas dadas y al hallar una fórmula general correspondiente a una función que represente la superficie de ese cuadrado para cualquier distancia.

Para responder acerca de la menor superficie posible correspondiente a un cuadrado dado, se pueden aplicar de manera directa algunos conceptos claves como el de mínimo (o máximo) de una función cuadrática asociado a su vértice. En el caso de la propuesta de enseñanza analizada, este ha sido siempre hallado a través de la gráfica correspondiente, por lo que se puede indicar para esta pregunta de la Actividad de Cierre que hay un proceso de traslación del registro *Fórmula* al de *Tabla* y de este a *Gráfica*.

De manera similar a lo indicado en otras actividades, a lo largo de la propuesta se complementa lo realizado en lápiz y papel con la realización del gráfico en GeoGebra. En ese caso aparece también el proceso de traslación del registro *Fórmula* a *Gráfica*.

Lo analizado acerca de la subcategoría Proceso de traslación se resume en la Tabla 4.43.

Tabla 4.43. Análisis de la subcategoría: Proceso de traslación – Grupo 2

Proceso de traslación				
De \ A	Situación / Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmula / Expresión algebraica
Situación / Descripción verbal				Actividad de cierre
Tablas			Actividad 1 Actividad de cierre	
Gráficas			Actividad 1	
Fórmula / Expresión algebraica		Actividad 1 Actividad de cierre	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4 Actividad de cierre	Actividad 1 Actividad 4

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con lo analizado, ninguna actividad se propone inicialmente partiendo de una tabla o de un gráfico como tipos de registros de representación para que sea trasladado a otro, y de manera similar, ninguna tarea propone partir de algún registro de representación para ser llevado al registro de situación o descripción verbal.

De acuerdo con los posibles tipos de conversiones (Tabla 4.44), la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2 incluye actividades que presentan tanto la directa como la indirecta.

Del tipo de conversión directa, se presentan ejemplos donde se requiere el pasaje del registro *Tabla* al de *Gráfica* y también el de *Ecuación* al de *Tabla*, en ambos casos, tanto en la primera actividad como en la de cierre. Se incluyen preguntas que pueden ser respondidas por los alumnos de Nivel Secundario recurriendo a distintos procedimientos y, entre ellos, uno requiere de este tipo de conversión directa.

Respecto de la conversión indirecta, solo se presenta el pasaje del registro *Ecuación* a *Gráfica* en todas las actividades que se incluyen en la propuesta de enseñanza a través de la utilización de GeoGebra. En tres de las actividades, esta conversión se indica de manera explícita ya que forma parte del mismo enunciado y de su resolución. De forma similar a lo comentado anteriormente, en la primera actividad y en la de cierre puede aparecer involucrada esta conversión como parte de uno de los procedimientos posibles para su resolución de acuerdo con el método que se elija para llegar a las respuestas pedidas.

Tabla 4.44. Análisis de la subcategoría: Tipos de conversiones – Grupo 2

Tipos de conversiones	
Directa	Indirecta
Tabla a gráfica Ecuación a tabla	Ecuación a gráfica

Fuente: elaboración propia.

4.5.2.6 Análisis didáctico

Respecto del análisis cognitivo y como se muestra en la Tabla 4.45, se puede mencionar algo similar a lo comentado respecto de la propuesta de enseñanza del Grupo 1 en el apartado 4.5.1.6, ya que el mismo no se incluye en forma explícita ni en el trabajo escrito entregado ni en la exposición oral que han realizado.

Aparece el análisis de contenido ya que junto a cada actividad, excepto la de cierre, los integrantes del Grupo 2 describen los contenidos relativos a Función Cuadrática que pueden desarrollarse a partir de cada resolución. Solo en la primera actividad hacen referencia también a los contenidos previos con los que los alumnos cuentan respecto de unidades anteriormente desarrolladas: concepto de función, gráfico de funciones a través de una tabla de valores, ceros, crecimiento y decrecimiento de una función.

Tabla 4.45. Análisis de la categoría: Análisis didáctico – Grupo 2

Análisis didáctico	
Análisis cognitivo	Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

Las Tablas 4.46 y 4.47 resumen lo analizado respecto de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 2.

Tabla 4.46. Síntesis de los principales hallazgos a nivel global – Grupo 2

Características de las actividades	Por la presentación o formato	Con enunciado verbal No verbal: simbólico – icónico
	Por la motivación o finalidad general de la tarea	Escolares
	Por el tipo de solución	Con solución única
Análisis didáctico		Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.47. Síntesis de los principales hallazgos para cada parte de la propuesta – Grupo 2

Propuesta Categ. o Subcateg.	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad de cierre
Aspectos de la función cuadrática	Distintas escrituras de su fórmula	Expresión canónica	Distintas escrituras de su fórmula	Distintas escrituras de su fórmula	Problema en contexto geométrico
Tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	Problema	Explicación Comprensión	Ejercicio Aplicación Práctica	Ejercicio Aplicación Práctica	Problema
Naturaleza de la tarea	Real Situación de la realidad	Artificial	Artificial	Artificial	Real Contexto geométrico
Tipo de finalidad didáctica	De investigación Exploración	De ejecución De investigación Exploración	De ejecución	De ejecución De explicación Comprensión	De evaluación
Tipo de proceso de resolución	Tarea abierta	Tarea cerrada	Tarea cerrada	Tarea cerrada	Tarea abierta
Tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	Problema	Procedimiento Representación	Representación Algoritmo	Representación Algoritmo	Problema
Tipo de actuación implicada	Análisis – Comprensión Justificación	Explicación Construcción	Aplicación Construcción	Explicación Justificación	Análisis – Comprensión Razonamiento Aplicación
Herramientas para llevar a cabo las actividades	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra	GeoGebra	GeoGebra Lápiz y papel Calculadora	GeoGebra Lápiz y papel	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra
Formas de representación empleadas	Fórmulas o ecuaciones Descripción verbal Tablas Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Descripción verbal Fórmulas o ecuaciones
Procesos de traslación entre los registros de representación	Fórmula a tabla Tabla a gráfica Fórmula a gráfica Fórmula a fórmula Gráfica a gráfica	Fórmula a gráfica	Fórmula a gráfica	Fórmula a gráfica Fórmula a fórmula	Descripción verbal a fórmula Fórmula a tabla Tabla a gráfica Fórmula a gráfica

Tipos de conversión entre los registros de representación	Directa Indirecta	Indirecta	Indirecta	Indirecta	Directa Indirecta
---	----------------------	-----------	-----------	-----------	----------------------

Fuente: elaboración propia.

4.5.3 Análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 3

A partir de las categorías indicadas en el apartado 3.6, el análisis de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 3 se presenta a continuación dividido en seis subapartados (4.5.3.1 a 4.5.3.6).

4.5.3.1 Aspectos de la función cuadrática

Bajo el título Actividades y desarrollo de la clase se presenta la propuesta de enseñanza para el desarrollo del contenido Función Cuadrática. En cada uno de los ítems se escriben algunas indicaciones acerca de la actividad, su enunciado, un comentario acerca del objetivo o la intencionalidad de la tarea. No están escritas de forma enumerada, pero en caso de hacerlo, hay seis actividades, otra denominada final o integradora y otra, indicada como optativa.

Se introduce a los alumnos de Nivel Secundario al concepto de Función Cuadrática a través de su fórmula, proponiendo en la primera actividad que realicen una tabla de valores y el gráfico correspondiente a cada una de las funciones dadas, definiendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$.

La segunda actividad se propone realizar en GeoGebra, a partir de la definición de un deslizador y de la fórmula $f(x) = a x^2$, para ciertos valores dados del parámetro, analizando los resultados obtenidos.

En la tercera actividad se indica la forma polinómica de la función cuadrática como la manera en que se van a definir estas funciones, remarcando las diferencias con otras funciones conocidas como es el caso de la función lineal y la denominación de los coeficientes según se trate del cuadrático, lineal o independiente.

A partir de ello, en las siguientes dos actividades se definen y calculan algunos elementos principales, como las raíces, el vértice y el eje de simetría, trabajando en todos los casos con la expresión polinómica de la función cuadrática.

En la sexta actividad se indican las formas canónica y factorizada, con ejemplos para expresar algunas funciones cuadráticas en sus tres formas.

En la Actividad final e integradora se realiza, a partir de la definición de una función dada en forma polinómica, una revisión de los contenidos desarrollados: reconocer los coeficientes, el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces, proponiendo también su gráfico a partir de la utilización de GeoGebra.

En la Actividad optativa se pide hallar la intersección entre dos funciones, lo que conduce a resolver un sistema de ecuaciones entre una cuadrática y una lineal.

En lo relativo a los aspectos de la función cuadrática, a lo largo del desarrollo de la propuesta de enseñanza solo aparece su tratamiento desde las distintas escrituras de su fórmula, como se resume en la Tabla 4.48.

Tabla 4.48. Análisis de la categoría: Aspectos de la función cuadrática – Grupo 3

Aspectos de la función cuadrática			
Para contar colecciones	Problemas en contextos geométricos	Expresión canónica	Distintas escrituras de su fórmula

Fuente: elaboración propia.

4.5.3.2 Características de las actividades

La propuesta se inicia con la Actividad 1 donde se definen $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ y se pide:

Hallar los valores de las funciones cuando x toma los valores: -2, -1, 0, 1, 2.

Ubicar esos puntos en un par de ejes cartesianos y unir los puntos.

Teniendo en cuenta el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto, se considera *Ejercicio – Aplicación – Práctica* ya que los alumnos de Nivel Secundario cuentan con conocimientos previos para evaluar las funciones en los valores dados y ubicar los puntos en un sistema de ejes cartesianos. A partir de ello, se introduce a los estudiantes en el estudio de las funciones cuadráticas.

En la Actividad 2 se pide ingresar en GeoGebra la función $f(x) = ax^2$, definiendo previamente un deslizador con valores comprendidos entre -3 y 3. Para los estudiantes que la están resolviendo, requiere por parte de ellos un análisis de lo que sucede en el gráfico a medida que varían los valores del coeficiente, es decir, una *Explicación – Comprensión* que fundamente la respuesta.

Previa definición en el pizarrón de la expresión polinómica de una función cuadrática, de acuerdo con los comentarios incluidos por los integrantes del Grupo 3 en la propuesta, se pide en la Actividad 3 indicar respecto de una lista de cuatro fórmulas dadas:

¿Cuáles de las siguientes funciones cuadráticas tiene sus “ramas” hacia arriba y cuáles hacia abajo?

Y otro ítem dentro de la misma actividad pide, respecto de otra lista de cuatro fórmulas dadas:

Indicar cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas y cuáles no. Justificar.

Respecto de la tarea que requiere de quien responde ambas consignas, se puede asociar al tipo *Explicación – Comprensión* para fundamentarlas, si bien también requiere cierta ejercitación y aplicación de otros contenidos para hallar expresiones equivalentes a las dadas que justifiquen si corresponden o no a las funciones estudiadas.

Considerando también en la Actividad 4 los comentarios incluidos por los integrantes en el diseño de la propuesta, se indica que se les dará a los alumnos de Nivel Secundario la fórmula correspondiente que permite calcular las raíces de una función cuadrática y a partir de ello, se pide calcular las raíces de tres funciones dadas. De su resolución surge que se relacionan con cada uno de los casos posibles: una función cuadrática con dos raíces reales distintas, otra con una raíz real doble y otra sin raíces reales. Considerando que se conoce con anticipación la fórmula correspondiente al cálculo de esas raíces, la actividad requiere su aplicación y puesta en práctica para los ejemplos dados.

De manera similar, los integrantes del Grupo 3 indican luego a modo de comentario en la propuesta de enseñanza que antes de la Actividad 5 se escriben en el pizarrón las fórmulas correspondientes al cálculo de las coordenadas del vértice y del eje de simetría de una parábola, para luego aplicarlas en la búsqueda de esos elementos en la función $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$. Se pide también en otro ítem de la misma actividad que se grafique en GeoGebra y se corroboren los resultados obtenidos. Tal como se ha indicado en la

actividad anterior, dadas las características mencionadas, se asocia la misma al tipo *Ejercicio – Aplicación – Práctica*.

Como comentario adjunto a la Actividad 6 se menciona que se presentan previamente las expresiones canónica y factorizada de una función cuadrática. De acuerdo con la exposición realizada y detallada en el apartado 4.4.3 se ha utilizado la función de la Actividad 5 y los resultados obtenidos para ejemplificar el modo en el que puede expresarse la misma función de tres formas diferentes. Esta primera parte de la actividad se asocia al tipo *Ejemplo – Ilustración*. En la segunda parte de la actividad se incluyen tres ítems para que los alumnos de Nivel Secundario apliquen las expresiones dadas a esos casos, donde se conocen el vértice y el coeficiente principal en uno, las raíces y el coeficiente principal en otro, así como el vértice y un punto perteneciente a la curva en el tercer ítem. Dadas las características y la forma en que se propone la tarea, es del tipo *Ejercicio – Aplicación – Práctica*.

A modo de Actividad final e integradora se presenta la fórmula $f(x) = -3x^2 + x + 2$ y se pide identificar y hallar algunos de sus elementos principales: los coeficientes de los términos, el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces. Se pide también graficar la función utilizando GeoGebra. A través de esta actividad, se aplican todos los contenidos desarrollados anteriormente y se ponen en práctica a través de un ejercicio dado. Finalmente, y a modo de Actividad optativa, se pide hallar las intersecciones entre las funciones $f(x) = x^2 - x - 2$ y $g(x) = 3x - 1$, graficándolas además en GeoGebra. Se quieren integrar de este modo los contenidos relativos a las funciones cuadráticas recientemente desarrollados con los contenidos previos con que cuentan los alumnos de

Nivel Secundario relativos a las funciones lineales. Puede considerarse una tarea que constituye un *Problema* para esos alumnos si no conocen previamente el modo en el que se puede llegar a una resolución analítica, pudiendo entonces hacerlo de distintos modos o a través de diferentes razonamientos y pueden relacionarlo con la interpretación gráfica a través de la utilización del software.

Estas características se sintetizan en la Tabla 4.49.

Tabla 4.49. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 3

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	
Propuesta de enseñanza	Tipo de actividad
Actividad 1	Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad 2	Explicación – Comprensión
Actividad 3	Explicación – Comprensión Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad 4	Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad 5	Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad 6	Ejemplo – Ilustración Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad final e integradora	Ejercicio – Aplicación – Práctica
Actividad optativa	Problema

Fuente: elaboración propia.

En el diseño de la propuesta de enseñanza predominan actividades del tipo *Ejercicio – Aplicación – Práctica*, especialmente en el modo en que las mismas se presentan. En la mayoría de los casos, se definen previamente los contenidos que se quieren desarrollar y se indican sin ninguna deducción ciertas fórmulas que permiten calcular algunos elementos de la gráfica, para luego solo aplicarlas a las funciones dadas. Actividades similares a las que se han incluido pero presentadas de otro modo o que las respuestas requieran otros procesos y justificaciones podrían requerir otro tipo de tareas por parte del sujeto que la resuelve (Tabla 4.50).

Tabla 4.50. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto – Grupo 3

Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	
Tipo de actividad	Propuesta de enseñanza
Ejercicio – Aplicación – Práctica	Actividad 1 Actividad 3 Actividad 4 Actividad 5 Actividad 6 Actividad final e integradora
Problema	Actividad optativa
Ejemplo – Ilustración	Actividad 6
Explicación – Comprensión	Actividad 2 Actividad 3

Fuente: elaboración propia.

Todas las actividades se presentan con un enunciado verbal, acompañado en todos los casos con el lenguaje simbólico representado a través de expresiones matemáticas, ejemplos de entradas a escribir en GeoGebra y fórmulas que definen las funciones incluidas (Tabla 4.51).

Tabla 4.51. Análisis de la subcategoría: Por la presentación o formato – Grupo 3

Por la presentación o formato	
Con enunciado Verbal No verbal: Simbólico	Sin enunciado

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la naturaleza de la tarea (Tabla 4.52), las actividades incluidas en la propuesta son artificiales. Se propone trabajar con las distintas expresiones de la función cuadrática, iniciándose con la forma polinómica para luego desarrollar las formas canónica y factorizada y se plantean las fórmulas que permiten calcular algunos de los elementos principales de las parábolas para ser aplicadas luego a los ejemplos de las funciones dadas en los enunciados. En algunos casos se incluye de manera explícita la utilización de GeoGebra. En ninguna de las actividades planteadas la naturaleza de la tarea es un contexto real.

Tabla 4.52. Análisis de la subcategoría: Por la naturaleza de la tarea – Grupo 3

Por la naturaleza de la tarea	
Reales (contextuales, naturales, situaciones de la realidad)	Artificiales

Fuente: elaboración propia.

Considerando la motivación o finalidad general de la tarea, todas las actividades son escolares (Tabla 4.53).

Tabla 4.53. Análisis de la subcategoría: Por la motivación o finalidad general de la tarea – Grupo 3

Por la motivación o finalidad general de la tarea			
Escolares	Socioculturales	Lúdicas	Histórico culturales

Fuente: elaboración propia.

En cuanto a la finalidad didáctica de las actividades, puede observarse que la primera de ellas es del tipo *De ejecución* en tanto consigna en su enunciado los pasos a seguir a partir de dos funciones dadas: se pide armar una tabla de valores para cada caso, indicándose los valores que se asignan a la variable independiente, se pide ubicar los puntos hallados en un par de ejes cartesianos y unirlos para identificar la curva.

En la Actividad 2 hay también un aspecto *De ejecución* siguiendo su enunciado, donde se solicita ingresar una función en GeoGebra a partir de la definición de un deslizador y se indican además los valores entre los cuales está comprendido. Puede considerarse también el tipo *De investigación – Exploración* al analizar el modo en el que influye gráficamente el deslizador que representa el coeficiente principal de la función cuadrática.

La Actividad 3 corresponde al tipo *De explicación – Comprensión* debido a que, a partir de fórmulas dadas correspondientes a las definiciones de ciertas funciones, los alumnos tienen que fundamentar o justificar según el ítem que corresponda:

¿Cuáles de las siguientes funciones cuadráticas tienen sus “ramas” hacia arriba y cuáles hacia abajo?

Indicar cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas y cuáles no.

En la siguiente actividad se reconoce el aspecto *De ejecución* ya que a partir de haber proporcionado a los alumnos de Nivel Secundario la fórmula que permite calcular las raíces de una función cuadrática se les pide aplicarla y hallar dichas raíces para el caso de tres funciones dadas. En los comentarios que los integrantes del Grupo 3 agregan a la actividad indican:

Trabajamos analíticamente en la fórmula resolvente para que vean qué ocurre cuando el discriminante es mayor, menor o igual a 0.

De acuerdo con el modo en que esto se lleve a cabo, puede considerarse también una finalidad didáctica del tipo *De explicación – Comprensión* si los alumnos de Nivel Secundario también analizan y justifican la cantidad de raíces que puede tener una función cuadrática a partir de la fórmula dada e incluso pueden relacionarlo con el registro gráfico.

La Actividad 5 es *De ejecución* ya que, habiendo indicado antes el modo de calcular el vértice y el eje de simetría de una parábola, se pide en el enunciado:

Graficar $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$ indicando sus raíces, su eje de simetría y su vértice.

Se solicita luego graficar la función en GeoGebra y corroborar los resultados obtenidos.

También corresponde al mismo tipo de finalidad didáctica la Actividad 6, donde a partir de haber presentado la expresión canónica y la factorizada de una función cuadrática, se pide escribir en sus tres formas cada una de las tres funciones dadas indicando distintos elementos como datos en cada caso.

En los comentarios que incluyen los integrantes del Grupo 3 hacen referencia a que los alumnos de Nivel Secundario tendrían que comenzar cada ítem de la actividad utilizando la expresión de la función cuadrática que les resulte más conveniente de acuerdo con los datos

datos. Si bien esto no se explicita en el enunciado, si los alumnos tuvieran que explicar y fundamentar la elección de una u otra expresión, se puede considerar también un aspecto *De explicación – Comprensión* dentro de la misma tarea.

La Actividad final e integradora es para quien la resuelve una tarea del tipo *De ejecución* ya que a partir de una función cuadrática dada se deben calcular todos los elementos pedidos, utilizando las fórmulas vistas en las actividades anteriores y aplicando a este nuevo ejemplo todo lo desarrollado. Si se tiene en cuenta la finalidad didáctica que puede tener esta tarea al momento de ser diseñada, también se involucra el aspecto *De evaluación* en tanto su resolución permite monitorear si los alumnos de Nivel Secundario pueden aplicar todos los contenidos vistos.

La Actividad optativa presenta un aspecto que puede considerarse *De investigación – Exploración* al incluir una propuesta que, por un lado, aplica y hace hincapié en los contenidos previos con que se cuentan pero, por otro lado, requiere de una resolución que no es inmediata para los alumnos de Nivel Secundario que no han visto con anterioridad un sistema de ecuaciones. Al pedir que se calcule la intersección entre dos funciones dadas, una lineal y otra cuadrática, pueden apelar a muchos de los contenidos vistos pero no tienen hasta ahora otro modelo o ejemplo que les permita solo seguir un razonamiento similar a una resolución dada o a una realizada en conjunto.

Lo analizado acerca de la subcategoría Por el tipo de finalidad didáctica se resume en la Tabla 4.54.

Tabla 4.54. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 3

Por el tipo de finalidad didáctica	
Propuesta de enseñanza	Tipo de finalidad didáctica
Actividad 1	De ejecución
Actividad 2	De ejecución De investigación – Exploración
Actividad 3	De explicación – Comprensión
Actividad 4	De ejecución De explicación – Comprensión
Actividad 5	De ejecución
Actividad 6	De ejecución De explicación – Comprensión
Actividad final e integradora	De ejecución De evaluación
Actividad optativa	De investigación – Exploración

Fuente: elaboración propia.

En general, tanto el diseño de la propuesta como los enunciados que se incluyen tienen una tendencia volcada al tipo de finalidad *De ejecución*: se indica a los alumnos de Nivel Secundario la fórmula que define dos funciones cuadráticas y se les pide hallar los valores de las imágenes correspondientes a ciertos valores también dados de la variable independiente, ubicar en un sistema de ejes cartesianos los puntos hallados y unirlos. Se les pide que definan en GeoGebra una función indicándoles la expresión que se debe ingresar, el deslizador que se debe incluir y los valores entre los cuales debe variar el mismo. Se les indica previamente la fórmula que permite calcular las raíces de una función cuadrática para luego aplicarla a una serie de ejemplos dados; del mismo modo respecto de la fórmula que permite calcular el vértice y el eje de simetría de una parábola, y la revisión e integración de todos los contenidos desarrollados aplicándolo a una función dada. En algunos casos esta finalidad se puede ver complementada con otras si se consideran los comentarios incluidos por los integrantes del Grupo 3 respecto de algunas actividades y del modo en el que se implementarían, donde los alumnos de Nivel Secundario se involucran

también justificando o fundamentando una respuesta, eligiendo una resolución por sobre otra según resulte más conveniente, analizando otras alternativas que pueden presentarse.

En la Tabla 4.55 se visualizan estos hallazgos.

Tabla 4.55. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica – Grupo 3

Por el tipo de finalidad didáctica	
Tipo de finalidad didáctica	Propuesta de enseñanza
De ejecución	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 4 Actividad 5 Actividad 6 Actividad final e integradora
De investigación – Exploración	Actividad 2 Actividad optativa
De evaluación	Actividad final e integradora
De explicación – Comprensión	Actividad 3 Actividad 4 Actividad 6

Fuente: elaboración propia.

Según el tipo de proceso de resolución (Tabla 4.56), casi todas las actividades son cerradas, de acuerdo con lo analizado en las subcategorías anteriores. Algunas tareas que podrían haber tenido una característica más abierta se limitaron desde el enunciado: por ejemplo, para representar algunos puntos en un sistema de ejes cartesianos se indican previamente los valores de la variable independiente que se deben considerar, o para analizar el modo en que influye el coeficiente principal de la fórmula de una función cuadrática se propone trabajar en GeoGebra pero se indica previamente entre qué valores debe variar un deslizador.

Solo la Actividad optativa puede considerarse abierta en tanto los alumnos pueden recurrir a distintos procedimientos o razonamientos para llegar a su resolución. Conocen previamente las funciones lineales, han desarrollado en esta unidad los contenidos relativos

a las funciones cuadráticas y se les pide que, a partir de lo visto, hallen los puntos de intersección entre dos funciones dadas, pudiendo resolverlo gráfica o analíticamente.

Tabla 4.56. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de proceso de resolución – Grupo 3

Por el tipo de proceso de resolución	
Tareas cerradas	Tareas abiertas (Actividad optativa)

Fuente: elaboración propia.

Las actividades incluidas en la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 3 resultan *Con solución* y, de manera similar a lo comentado respecto de las subcategorías anteriores, esa respuesta es *única* también en todos los casos, dadas las características de los enunciados (Tabla 4.57).

Tabla 4.57. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de solución – Grupo 3

Por el tipo de solución	
Con solución Única	Sin solución

Fuente: elaboración propia.

Acerca del tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada, en la resolución de la Actividad 1 se puede mencionar el *Procedimiento* como uno de los principales aspectos en tanto se indica en el enunciado los valores de la variable independiente que deben evaluarse en las dos funciones dadas y se pide a partir de ello ubicar los puntos en un sistema de ejes cartesianos y unirlos trazando la curva correspondiente. De esto se deduce mencionar también la *Representación* como otro de los aspectos involucrados en la resolución.

Algo similar sucede en la Actividad 2 donde también se indica el *Procedimiento* para definir en GeoGebra una función cuadrática que depende de un deslizador y se indican los valores entre los que este varía, por lo que aparece también involucrada la *Representación*

al igual que cuando se analiza el modo en el que ese coeficiente principal influye en la gráfica.

La Actividad 3 se inicia con la *Definición* de una función cuadrática a partir de su expresión polinómica y la misma se necesita aplicar en los ítems que se incluyen, cuando se requiere analizar si ciertas expresiones dadas se corresponden o no con una función cuadrática, en un caso, y si las gráficas tienen su concavidad positiva o negativa, en otro caso. Se puede considerar también que lo relativo a la aplicación de *Conceptos* es otro aspecto involucrado en la resolución.

Se comienza la Actividad 4 indicando a modo de comentario que se dará a los alumnos la fórmula correspondiente que permite calcular las raíces de una función cuadrática para luego aplicarla a tres funciones dadas, por lo que se puede asociar a la aplicación de un *Procedimiento* y la búsqueda de un *Algoritmo* que generalice ese procedimiento a otros ejemplos. Algo similar sucede en la siguiente actividad, donde también se indican al inicio las fórmulas correspondientes al cálculo del vértice y del eje de simetría de una parábola, para luego aplicarlas a una función dada.

Además de los aspectos ya mencionados en la actividad anterior, en esta se suma la *Representación* ya que se pide graficar la función, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra.

En la Actividad 6 se definen las otras dos formas de expresar una función cuadrática: canónica y factorizada. Utilizando esto y apareciendo involucrado el aspecto de *Definición*, se deben expresar las fórmulas correspondientes a tres funciones, teniendo en cuenta los datos dados. Puede considerarse la aplicación de *Conceptos* cuando se utiliza una forma de

expresión por sobre otra según resulte más conveniente a partir de los elementos de la gráfica dados en el enunciado.

La Actividad final e integradora se puede asociar al tipo *Procedimiento y Algoritmo* ya que, tal como se ha comentado, solo reúne las fórmulas dadas y los contenidos desarrollados en las tareas anteriores y los aplica de manera directa en un nuevo ejemplo de función dada, es decir, solo se sigue un procedimiento y con ello se quiere establecer un algoritmo general que sirva para analizar cualquier función cuadrática, realizando su gráfico a partir de los elementos principales de la parábola. A partir de esa representación gráfica, utilizando GeoGebra de acuerdo con el enunciado, aparece también el aspecto relativo a la *Representación*.

La Actividad optativa puede considerarse un *Problema* si se considera que no se ha desarrollado previamente ningún ejemplo similar. Los alumnos de Nivel Secundario pueden apelar a los contenidos previos con que cuentan para hallar la intersección pedida entre una función lineal y una cuadrática o incluso a una resolución gráfica. De manera explícita, también se menciona en el enunciado utilizar GeoGebra para graficar ambas funciones, por lo que se involucra también la *Representación*.

Este análisis acerca de la subcategoría Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada se consigna en la Tabla 4.58.

Ninguna de las actividades propuestas se relaciona de manera explícita con la *Demostración*, si bien algunas actividades pueden complementarse con la argumentación o fundamentación de las respuestas por parte de los alumnos. Por ejemplo, en la Actividad 2 en el análisis del modo en el que influye un deslizador que representa el coeficiente principal de una función cuadrática, en la Actividad 3 cuando se tiene que justificar si

ciertas expresiones corresponden a la definición de una función cuadrática y su concavidad o en la Actividad 6 cuando se elige una de las expresiones de una función cuadrática teniendo en cuenta la que resulte más conveniente de acuerdo con los elementos principales que se dan como datos.

Tampoco hay actividades que se caractericen por involucrar la utilización de *Propiedades* en su resolución.

Tabla 4.58. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 3

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	
Propuesta de enseñanza	Tipo de conocimiento involucrado
Actividad 1	Procedimiento Representación
Actividad 2	Procedimiento Representación
Actividad 3	Definición Concepto
Actividad 4	Procedimiento Algoritmo
Actividad 5	Procedimiento Algoritmo Representación
Actividad 6	Definición Concepto
Actividad final e integradora	Procedimiento Algoritmo Representación
Actividad optativa	Problema Representación

Fuente: elaboración propia.

Predominan las actividades que comprenden la utilización de *Procedimientos* para su resolución: se inician indicando una definición o una fórmula para que estas sean aplicadas de manera directa para dar respuesta a lo pedido.

Algo similar sucede con la *Representación*, predominando el registro gráfico, ya sea en lápiz y papel o utilizando GeoGebra, donde el uso de ese software se limita en casi todos los casos a la realización de un gráfico (Tabla 4.59).

Tabla 4.59. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada – Grupo 3

Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	
Tipo de conocimiento involucrado	Propuesta de enseñanza
Demostración	
Definición	Actividad 3 Actividad 6
Representación	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 5 Actividad final e integradora Actividad optativa
Propiedad	
Concepto	Actividad 3 Actividad 6
Procedimiento	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 4 Actividad 5 Actividad final e integradora
Algoritmo	Actividad 4 Actividad 5 Actividad final e integradora
Problema	Actividad optativa

Fuente: elaboración propia.

Con respecto al tipo de actuación implicada, en la Actividad 1 se puede reconocer el aspecto *Aplicación* en tanto se utilizan los contenidos previos con que se cuentan para poder elaborar una tabla evaluando las funciones dadas en los valores de la variable independiente que se piden. Esto se complementa con la *Construcción* cuando se deben representar esos puntos en un sistema de ejes cartesianos y trazar la gráfica correspondiente.

En la Actividad 2 se puede reconocer el tipo de actuación referida a la *Construcción* cuando se pide definir en GeoGebra un deslizador y una función del tipo $f(x) = a x^2$ y también el *Análisis – Comprensión* cuando se pide estudiar el modo en el que influye ese deslizador en el gráfico de la función.

La Actividad 3 se inicia escribiendo en el pizarrón la forma polinómica de la función cuadrática para, a partir de ello, analizar si ciertas expresiones dadas corresponden a una función de este tipo como así también poder indicar la concavidad del gráfico, para el caso de otras expresiones, lo que se puede asociar a actuaciones del tipo *Justificación* y *Explicación*.

En la Actividad 4 se indica previamente la fórmula que corresponde al cálculo de las raíces de una función cuadrática, para que luego se pueda indicar la *Aplicación* como actuación ya que deben hallarse las raíces de tres funciones dadas conociendo dicha fórmula. A partir de los comentarios que agregan los integrantes del Grupo 3 en el diseño de la propuesta, se puede complementar con el *Análisis – Comprensión* cuando se indica que se puede estudiar el modo en el que influye el discriminante en la cantidad de raíces que tienen las funciones de este tipo.

De manera similar, la Actividad 5 también se inicia presentando previamente la fórmula para hallar el vértice y el eje de simetría de una parábola, por lo que se puede asociar al tipo *Aplicación* cuando solo se debe utilizar la misma en el cálculo de esos elementos principales como así también de las raíces para una función cuadrática dada. Se puede mencionar además la *Construcción* ya que se pide graficar la función en lápiz y papel, y corroborarlo con GeoGebra.

Al igual que en las dos actividades anteriores, se presentan previo al desarrollo de la Actividad 6 las formas canónica y factorizada de las funciones cuadráticas. Conocidas esas dos nuevas expresiones, además de la polinómica mencionada en la Actividad 3 y con la que se han desarrollado las anteriores tareas, se pide hallar en cada uno de los tres ítems dados la definición correspondiente a cada función cuadrática, en todas sus formas. Si bien

se puede asociar a la *Aplicación* de las expresiones generales dadas utilizándolas en cada uno de los ítems, se distingue también el aspecto de *Justificación* en los comentarios que agregan los integrantes del Grupo 3 porque se menciona el trabajo con los alumnos de Nivel Secundario acerca de la fundamentación por haber elegido una expresión inicial por sobre otras, según resulte más conveniente de acuerdo con los elementos de la parábola que se indican en el enunciado.

La Actividad final e integradora es de *Aplicación* ya que se resume en un mismo ejercicio todo lo desarrollado en los anteriores: a partir de la fórmula correspondiente a una función cuadrática se pide señalar los coeficientes de los términos, calcular el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces. Se puede mencionar también la *Construcción* ya que se pide realizar el gráfico, si bien de manera explícita solo se menciona la utilización de GeoGebra.

En el caso de la Actividad optativa se puede mencionar el aspecto de *Análisis – Comprensión* ya que se deben realizar esas operaciones de pensamiento para interpretar el enunciado dado y resolver lo pedido. Si bien puede resultar solo un ejercicio de aplicación cuando se conoce el algoritmo y los procedimientos para hallar los puntos de intersección pedidos, en este caso no se ha realizado con anterioridad una actividad similar, por lo que los alumnos de Nivel Secundario podrían apelar a los contenidos desarrollados tanto en esta unidad como en algunas anteriores para analizar la manera en la que pueden llegar a la respuesta pedida. De acuerdo con el modo en que se realice la actividad, esto puede complementarse con aspectos como la *Comunicación* o la *Explicación*, según como los alumnos deban expresar el razonamiento seguido y la búsqueda de los resultados. Se

considera en el presente análisis la *Construcción* ya que se menciona de manera explícita en el enunciado lo relativo a la realización de los gráficos correspondientes.

El análisis de la subcategoría Por el tipo de actuación implicada se resume en la Tabla 4.60.

Tabla 4.60. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 3

Por el tipo de actuación implicada	
Propuesta de enseñanza	Tipo de actuación
Actividad 1	Aplicación Construcción
Actividad 2	Construcción Análisis – Comprensión
Actividad 3	Justificación Explicación
Actividad 4	Aplicación Análisis – Comprensión
Actividad 5	Aplicación Construcción
Actividad 6	Aplicación Justificación
Actividad final e integradora	Aplicación Construcción
Actividad de optativa	Análisis – Comprensión Construcción

Fuente: elaboración propia.

De manera similar a lo que ha surgido del análisis de otras subcategorías, dada la metodología propuesta, muchas de las actividades se corresponden con el tipo *Aplicación* ya que no se proponen tareas en donde los alumnos de Nivel Secundario puedan experimentar, investigar, explorar, descubrir, sino que se presentan previamente las definiciones o las fórmulas que se corresponden con el contenido a desarrollar y luego la consecuente actividad que sirve para aplicar lo anteriormente indicado.

También se menciona en numerosas actividades el tipo de actuación referida a la *Construcción* ya que en la mayoría de ellas se complementan los cálculos realizados o los procedimientos aplicados con la realización del gráfico correspondiente a la función

cuadrática dada, en algunos casos con lápiz y papel, en otros con la utilización de GeoGebra y también con ambos métodos.

Ninguna tarea se asoció con la *Comunicación* o con el *Razonamiento* como principal tipo de actividad, si bien en alguna de ellas se hace hincapié en el modo en que se justifica o se explica el análisis realizado, lo cual también podría vincularse con la comunicación que se realice de los resultados o con el razonamiento que se ha seguido (Tabla 4.61).

Tabla 4.61. Análisis de la subcategoría: Por el tipo de actuación implicada – Grupo 3

Por el tipo de actuación implicada	
Tipo de actuación	Propuesta de enseñanza
Construcción	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 5 Actividad final e integradora Actividad optativa
Razonamiento	
Justificación	Actividad 3 Actividad 6
Aplicación	Actividad 1 Actividad 4 Actividad 5 Actividad 6 Actividad final e integradora
Comunicación	
Explicación	Actividad 3
Análisis – Comprensión	Actividad 2 Actividad 4 Actividad optativa

Fuente: elaboración propia.

4.5.3.3 Herramientas para llevar a cabo las actividades

La primera actividad se inicia definiendo dos funciones cuadráticas y pidiendo que se realice una tabla para cada una de ellas a partir de ciertos valores de la variable independiente. Solo requiere la utilización de lápiz y papel y, si bien no se lo explicita en la propuesta diseñada por el Grupo 3, podrían los alumnos de Nivel Secundario utilizar la

calculadora en su resolución. Se requiere también el uso de elementos de Geometría para realizar el gráfico que se pide luego como parte de la misma actividad.

La Actividad 2 se realiza íntegramente en GeoGebra, analizando el modo en el que influyen los valores de un deslizador que representa el coeficiente principal en una función cuadrática. Los resultados de ese análisis podría considerarse que requieren de la utilización de lápiz y papel para dejarlos expresados pero excepto que esto se indique de un modo más explícito, no se ha considerado en los análisis de las propuestas anteriores.

En la Actividad 3 solo se requiere de la utilización de lápiz y papel para dar respuesta a lo pedido: reconocer entre cinco expresiones de funciones cuadráticas dadas qué tipo de concavidad tienen e indicar también entre otras cinco expresiones dadas cuáles corresponden a una función cuadrática. Se podría necesitar la utilización de una calculadora, pero se descartan en este caso dados los tipos de cálculos que se presentan en cada uno de los ítems.

La Actividad 4 requiere para su resolución la utilización de lápiz y papel y calculadora, para hallar las raíces de tres funciones cuadráticas dadas, habiéndose presentado previamente la fórmula que permite obtener esos ceros.

Algo similar sucede en la Actividad 5, donde también se requiere la utilización de lápiz y papel y calculadora pero para hallar en este caso las coordenadas del vértice y el eje de simetría de una función cuadrática dada, habiéndose indicado antes las fórmulas correspondientes. A diferencia de la actividad anterior, en este caso se pide además el gráfico correspondiente, lo que requiere de elementos de Geometría, y en otro ítem se pide corroborar los resultados obtenidos con la salida que devuelve el software GeoGebra.

Como herramientas para llevar a cabo la Actividad 6 se puede mencionar solo al lápiz de papel, para expresar en las tres formas posibles las fórmulas de las funciones cuadráticas correspondientes a los elementos principales dados, habiéndose definido previamente las formas canónica y factorizada, además de la polinómica con la que ya se había trabajado en las actividades anteriores. Si bien no se menciona de manera explícita en ningún caso la utilización de calculadora, no se considera en esta tarea por las características de los cálculos que se incluyen en la resolución.

La Actividad final e integradora resume lo desarrollado en las anteriores, identificando para una función cuadrática dada los coeficientes de sus términos, el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces, debiendo utilizarse lápiz y papel y calculadora en su resolución. Se pide luego que se grafique la función en GeoGebra por lo que también se utiliza esa herramienta.

En la Actividad optativa, por presentarse de un modo más abierto y con mayor amplitud en cuanto al tipo de resolución, pueden utilizarse cualquiera de las herramientas mencionadas anteriormente ya que pueden involucrarse el lápiz y papel y la calculadora como así también los elementos de Geometría si se apela a la resolución gráfica. Se menciona en el enunciado realizar el gráfico en GeoGebra por lo que se indica esta herramienta además de las anteriores.

Lo relativo a esta categoría se resume en la Tabla 4.62.

Tabla 4.62. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 3

Herramientas para llevar a cabo las actividades	
Propuesta de enseñanza	Herramienta
Actividad 1	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría
Actividad 2	GeoGebra
Actividad 3	Lápiz y papel
Actividad 4	Lápiz y papel Calculadora
Actividad 5	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra
Actividad 6	Lápiz y papel
Actividad final e integradora	Lápiz y papel Calculadora GeoGebra
Actividad optativa	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra

Fuente: elaboración propia.

La Actividad 2 es la única cuya realización se pide expresamente en GeoGebra como única herramienta o como la principal.

El resto de las actividades se centran en una resolución en lápiz y papel aplicando las definiciones o las fórmulas dadas, donde también puede usarse la calculadora para facilitar los cálculos que intervienen en dicha resolución.

Excepto la mencionada Actividad 2, en el resto de los enunciados la utilización de GeoGebra aparece de manera optativa o solo como un graficador que complementa lo realizado en lápiz y papel (Tabla 4.63).

Tabla 4.63. Análisis de la categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades – Grupo 3

Herramientas para llevar a cabo las actividades	
Herramienta	Propuesta de enseñanza
Lápiz y papel	Actividad 1 Actividad 3 Actividad 4 Actividad 5 Actividad 6 Actividad final e integradora Actividad optativa
Calculadora	Actividad 1 Actividad 4 Actividad 5 Actividad final e integradora Actividad optativa
Elementos de Geometría	Actividad 1 Actividad 5 Actividad optativa
Software matemático – GeoGebra	Actividad 2 Actividad 5 Actividad final e integradora Actividad optativa

Fuente: elaboración propia.

4.5.3.4 Formas de representación empleadas

La Actividad 1, si bien se presenta con un enunciado verbal tal como se ha descrito en la subcategoría Presentación o formato de la categoría Características de las actividades (apartado 4.5.3.2), se inicia con la forma de representación de *Fórmula o ecuaciones* indicándose de ese modo las dos funciones dadas. Se pide luego que se diseñe una *Tabla* considerando ciertos valores dados de la variable independiente y, a partir de ello, que se ubiquen en un par de ejes cartesianos y se trace la *Gráfica* correspondiente.

La Actividad 2 combina definir en GeoGebra una función a través de su *Fórmula o ecuaciones* con su forma de representación *Gráfica*, trabajando con esta última a través del análisis correspondiente del modo en el que influye el coeficiente principal en la gráfica de una función cuadrática.

En la Actividad 3 aparece solo la forma de representación correspondiente a *Fórmulas o ecuaciones* ya que así se define previamente una función cuadrática a través de su expresión polinómica para luego analizar en una serie de fórmulas dadas cuáles corresponden a funciones de este tipo como así también la concavidad correspondiente a cada uno de los ejemplos dados.

De manera similar, esta forma de representación de *Fórmulas o ecuaciones* aparece en la Actividad 4 a través de la fórmula que permite calcular las raíces de una función cuadrática y las tres funciones dadas para aplicarla y hallar en cada caso los ceros correspondientes. Considerando el comentario que los integrantes del Grupo 3 agregan en la secuencia diseñada, también van a analizar en la fórmula dada la influencia del discriminante en la cantidad de raíces halladas, continuando el trabajo en la misma forma de representación empleada a lo largo de toda la actividad.

La Actividad 5 también se inicia con esa forma de representación con las fórmulas que permiten hallar el vértice y el eje de simetría de una parábola, para luego aplicarlas a un ejemplo dado. A diferencia de las dos actividades anteriores, en esta se agrega la forma de representación *Gráfica* pidiendo explícitamente en el enunciado que se grafique esa función, con lápiz y papel y en GeoGebra.

También la Actividad 6 comienza indicando previamente las expresiones generales correspondientes a las formas canónica y factorizada de una función cuadrática, definiéndolas de acuerdo con la forma de representación de *Fórmulas o ecuaciones*. Continúa la actividad trabajando en esta misma forma de representación cuando se ejemplifican las tres formas de expresar una función cuadrática a partir de la función definida en la Actividad 5. Luego, se pide expresar tres funciones dadas de acuerdo con los

tres tipos de expresiones vistos. Se puede mencionar la forma de representación de *Descripción verbal* en el modo en el que se señalan los elementos principales a considerar en cada ítem.

La Actividad final e integradora se corresponde con las formas de representación *Fórmulas o ecuaciones* y *Gráficas* ya que se define una función cuadrática a través de su fórmula y se pide aplicar a ese ejemplo dado todos los contenidos desarrollados en las actividades anteriores graficándola también en GeoGebra.

En la Actividad optativa, donde se deben hallar los puntos de intersección entre una función lineal y una cuadrática, no se indica el modo en que se pueden encontrar ni se ha mostrado previamente un procedimiento similar que permita su cálculo. Las funciones están dadas utilizando la forma de representación correspondiente a las *Fórmulas o ecuaciones* y en esa misma forma puede continuar la resolución, si bien luego se menciona expresamente en el enunciado que se grafiquen ambas funciones utilizando GeoGebra, por lo que la forma de representación *Gráfica* aparece también ya sea como parte de su resolución o como modo de verificar los resultados obtenidos. Otras formas de representación, como la utilización de tablas no se mencionan en el enunciado de la actividad, quedando entonces supeditado al tipo de resolución que se siga.

Se resumen estas cuestiones referidas a la categoría Formas de representación empleadas en la Tabla 4.64.

Tabla 4.64. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 3

Formas de representación empleadas	
Propuesta de enseñanza	Forma de representación
Actividad 1	Fórmulas o ecuaciones Tablas Gráficas
Actividad 2	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Actividad 3	Fórmulas o ecuaciones
Actividad 4	Fórmulas o ecuaciones
Actividad 5	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Actividad 6	Fórmulas o ecuaciones Descripción verbal
Actividad final e integradora	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Actividad optativa	Fórmulas o ecuaciones Gráficas

Fuente: elaboración propia.

Tal como puede observarse en el análisis realizado, en todas las actividades propuestas se emplean las fórmulas o ecuaciones como forma de representar el contenido a tratar. Excepto en dos actividades, también se visualiza la gráfica como otra forma de representación predominante. En casi todos los ejemplos en los que esta forma se presenta, es a modo de verificación de los resultados obtenidos analíticamente. Las resoluciones o los análisis de las funciones no surgen de su forma gráfica sino que son una consecuencia de los cálculos realizados como aplicaciones de las definiciones y fórmulas dadas.

En una sola actividad se menciona explícitamente la confección de una tabla de valores como paso previo a la realización del gráfico a través de algunos puntos obtenidos.

En ninguna actividad se utiliza la descripción verbal de una situación que se pueda modelizar a través de una expresión cuadrática. Solo se mencionó una de las actividades incluidas respecto de esta forma de representación porque no se apeló solo al lenguaje simbólico sino que se acompaña con el coloquial (Tabla 4.65).

Tabla 4.65. Análisis de la categoría: Formas de representación empleadas – Grupo 3

Formas de representación empleadas	
Forma de representación	Propuesta de enseñanza
Descripción verbal	Actividad 6
Tablas	Actividad 1
Gráficas	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 5 Actividad final e integradora Actividad optativa
Fórmulas o ecuaciones	Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3 Actividad 4 Actividad 5 Actividad 6 Actividad final e integradora Actividad optativa

Fuente: elaboración propia.

4.5.3.5 Traslaciones y conversiones entre representaciones

Respecto del proceso de traslación de los registros de representación la Actividad 1 está bastante pautada, iniciándose con el de *Fórmula o Expresión algebraica* a través de la definición de dos funciones cuadráticas y realizándose el pasaje al de *Tabla* siguiendo la primera parte del enunciado; luego se pasa de ese registro al *Gráfico* en la segunda parte, donde se pide representar en un par de ejes cartesianos los puntos hallados y unirlos para trazar su gráfica.

La Actividad 2 muestra un proceso de traslación del registro *Fórmula o Expresión algebraica* tal como se define inicialmente la función cuadrática dada al *Gráfico* utilizando GeoGebra para analizar el modo en el que influye el coeficiente principal representado a través de un deslizador.

En la Actividad 3 hay un proceso dentro del mismo registro *Fórmula o Expresión algebraica*, indicándose previamente la expresión polinómica de una función cuadrática

para luego analizar la concavidad correspondiente al gráfico de tres funciones dadas en un ítem y reconocer si son funciones cuadráticas algunas de las tres fórmulas dadas en otro ítem, debiendo obtenerse expresiones equivalentes a las iniciales para poder dar respuesta a lo pedido.

Algo similar sucede en la siguiente actividad, donde también aparece únicamente el registro *Fórmula o Expresión algebraica* para aplicar a tres ejemplos dados la fórmula correspondiente al cálculo de las raíces de una función cuadrática.

La Actividad 5, si bien incluye también un trabajo dentro del mismo registro *Fórmula o Expresión algebraica* aplicando a un ejemplo de función cuadrática las fórmulas para calcular el vértice y el eje de simetría, aparece además un pasaje al registro *Gráfico* ya que se explicita en el enunciado la realización del mismo, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra.

En la Actividad 6 se reconoce el trabajo dentro del mismo registro *Fórmula o Expresión algebraica* iniciándose con la definición de las expresiones canónica y factorizada de las funciones cuadráticas que se suma a la polinómica con la que ya se ha trabajado, se ejemplifica en un caso dado el pasaje de una expresión a otra y se pide luego expresar en las tres formas existentes las fórmulas correspondientes a tres funciones considerando ciertos elementos principales de cada una de ellas y analizando la conveniencia en la utilización de una por sobre la otra según los datos que se han dado. Puede mencionarse también un proceso de traslación del registro *Situación o Descripción verbal* al de *Fórmula o Expresión algebraica* cuando se indican en lenguaje coloquial los elementos principales que se deben considerar como datos en cada caso.

En la Actividad final e integradora se resumen los contenidos desarrollados en las actividades anteriores aplicando las definiciones y fórmulas dadas al análisis de una función cuadrática, observándose un proceso de traslación dentro del mismo registro *Fórmula o Expresión algebraica* como así también en el pasaje al registro *Gráfico*.

La Actividad optativa puede considerarse abierta en su resolución teniendo en cuenta las anteriormente desarrolladas, por lo que podrían utilizarse tablas para su resolución aunque no se lo menciona de manera explícita en el enunciado. Su resolución puede vincularse de manera más directa al proceso de traslación dentro del mismo registro *Fórmula o Expresión algebraica* como así también el pasaje al registro *Gráfico*, ya sea como parte de su resolución o a modo de verificación de los resultados.

En la Tabla 4.66 se muestra una síntesis.

Tabla 4.66. Análisis de la subcategoría: Proceso de traslación – Grupo 3

Proceso de traslación				
A De	Situación / Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmula / Expresión algebraica
Situación / Descripción verbal				Actividad 6
Tablas			Actividad 1	
Gráficas				
Fórmula / Expresión algebraica		Actividad 1	Actividad 2 Actividad 5 Actividad final e integradora Actividad optativa	Actividad 3 Actividad 4 Actividad 5 Actividad 6 Actividad final e integradora Actividad optativa

Fuente: elaboración propia.

Con respecto al tipo de conversión directa, se incluyen dos de los tres posibles en la primera actividad de la propuesta diseñada: de *Ecuación a Tabla* y de esta a *Gráfica*.

De los tipos de conversiones indirectas solo aparece la relativa al pasaje de *Ecuación a Gráfica* en varias de las actividades incluidas (Tabla 4.67).

Tabla 4.67. Análisis de la subcategoría: Tipos de conversiones – Grupo 3

Tipos de conversiones	
Directa	Indirecta
Tabla a gráfica Ecuación a tabla	Ecuación a gráfica

Fuente: elaboración propia.

4.5.3.6 Análisis didáctico

De manera similar a lo comentado en las secuencias ya analizadas (Grupos 1 y 2), en esta tampoco se incluye un análisis cognitivo que identifique y describa las dificultades que los alumnos de Nivel Secundario pueden enfrentar en la resolución de las actividades ni los errores que pueden llegar a cometer al realizarlas.

Se incluye en la mayoría de las actividades de la secuencia un análisis de contenido. Así, por ejemplo en la primera se hace referencia a las funciones lineales como un contenido previo. Si bien no se lo menciona de manera explícita, se presupone también el conocimiento de la elaboración de una tabla, de la ubicación de puntos en un sistema de ejes cartesianos y el trazo de una gráfica correspondiente a una fórmula dada.

En la segunda y tercera actividad se menciona a modo de análisis de contenido que el objetivo de la misma es el estudio acerca de la influencia del signo y del valor del coeficiente principal en la gráfica de una función cuadrática.

En la Actividad 4 se hace referencia a la fórmula que permite calcular las raíces de este tipo de funciones y el análisis de su discriminante.

En la sexta actividad se menciona el análisis acerca de la utilización de la expresión correspondiente a una función cuadrática que resulte más conveniente de acuerdo con los datos que se tengan de sus elementos principales.

Y en la Actividad optativa se retoman los contenidos previos relativos a las funciones lineales para integrarlos y complementarlos con los desarrollados acerca de las funciones cuadráticas presentando una actividad en donde calcular los puntos de intersección entre dos funciones dadas. Se menciona en el análisis la intención de integrar “*el tema de sistema de ecuaciones con dos incógnitas*”. Este análisis se visualiza en la Tabla 4.68:

Tabla 4.68. Análisis de la categoría: Análisis didáctico – Grupo 3

Análisis didáctico	
Análisis cognitivo	Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

Las Tablas 4.69 y 4.70 resumen lo analizado respecto de la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 3.

Tabla 4.69. Síntesis de los principales hallazgos a nivel global – Grupo 3

Aspectos de la función cuadrática		Distintas escrituras de su fórmula
Características de las actividades	Por la presentación o formato	Con enunciado verbal No verbal: simbólico
	Por la naturaleza de la tarea	Artificiales
	Por la motivación o finalidad general de la tarea	Escolares
	Por el tipo de proceso de resolución	Tareas cerradas Tarea abierta: actividad optativa
	Por el tipo de solución	Con solución única
Traslaciones y conversiones entre representaciones	Tipo de conversiones	Indirecta Directa: Actividad 1
Análisis didáctico		Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4.70. Síntesis de los principales hallazgos para cada parte de la propuesta – Grupo 3

Propuesta Categ. o Subcat.	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Actividad 6	Actividad final	Actividad optativa
Tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto	Ejercicio Aplicación Práctica	Explicación Comprensión	Explicación Comprensión Ejercicio Aplicación Práctica	Ejercicio Aplicación Práctica	Ejercicio Aplicación Práctica	Ejemplo Ilustración Ejercicio Aplicación Práctica	Ejercicio Aplicación Práctica	Problema
Tipo de finalidad didáctica	De ejecución	De ejecución De investigación Exploración	De explicación Comprensión	De ejecución De explicación Comprensión	De ejecución	De ejecución De explicación Comprensión	De ejecución De evaluación	De investigación Exploración
Tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada	Procedimiento Representación	Procedimiento Representación	Definición Concepto	Procedimiento Algoritmo	Procedimiento Algoritmo Representación	Definición Concepto	Procedimiento Algoritmo Representación	Problema Representación
Tipo de actuación implicada	Aplicación Construcción	Construcción Análisis Comprensión	Justificación Explicación	Aplicación Análisis Comprensión	Aplicación Construcción	Aplicación Justificación	Aplicación Construcción	Análisis Comprensión Construcción
Herramientas para llevar a cabo las actividades	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría	GeoGebra	Lápiz y papel	Lápiz y papel Calculadora	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra	Lápiz y papel	Lápiz y papel Calculadora GeoGebra	Lápiz y papel Calculadora Elementos de Geometría GeoGebra
Formas de representación empleadas	Fórmulas o ecuaciones Tablas Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Fórmulas o ecuaciones	Fórmulas o ecuaciones	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Descripción verbal	Fórmulas o ecuaciones Gráficas	Fórmulas o ecuaciones Gráficas
Procesos de traslación entre los registros de representación	Fórmula a tabla Tabla a gráfica	Fórmula a gráfica	Fórmula a fórmula	Fórmula a fórmula	Fórmula a fórmula Fórmula a gráfica	Fórmula a fórmula Situación a fórmula	Fórmula a fórmula Fórmula a gráfica	Fórmula a fórmula Fórmula a gráfica

Fuente: elaboración propia.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos que se han detallado en el Capítulo 4, se realiza a continuación un análisis comparativo de las propuestas de enseñanza diseñadas por los estudiantes del Profesorado en Matemática acerca del contenido Función Cuadrática, dividido en dos apartados: el primero, acerca de las actividades incluidas y de los aspectos considerados en el instrumento de análisis, y el segundo, respecto de los registros de representación involucrados. La síntesis interpretativa de dichos análisis se presenta en el tercer apartado de este capítulo.

En el cuarto, se indican las reflexiones que surgen de acuerdo con las preguntas que dieron inicio al presente trabajo y los objetivos planteados.

Por último, un quinto apartado presenta algunas perspectivas abiertas por este trabajo de tesis.

5.1 Análisis comparativo acerca de las propuestas de enseñanza diseñadas y de las actividades incluidas

Con respecto a las propuestas de enseñanza diseñadas para el desarrollo del contenido Función Cuadrática los tres grupos coincidieron en ubicar a modo de destinatarios de las actividades a alumnos de Nivel Secundario en un promedio de 14 años: un grupo mencionó esa edad, otro los ubicó entre 13 y 14 años y el otro, entre 14 y 15 años.

Esto se corresponde con los diseños curriculares de la Ciudad de Buenos Aires ya que, de acuerdo con estos, se destinan siete años para el Nivel Primario y cinco para el Nivel Secundario (Nueva Escuela Secundaria o NES según sus siglas). Este último comprende dos ciclos: Ciclo Básico, de dos años de duración, y Ciclo Orientado, con una extensión de tres años.

En el diseño curricular correspondiente al área de Matemática en la Formación General del Ciclo Básico se indican cuatro ejes: Números y Álgebra, Funciones y Álgebra, Geometría y Medida, Estadística y Probabilidades.

Dentro de los Contenidos Troncales en el Eje Funciones y Álgebra se mencionan en el diseño aquellos relativos a los conceptos matemáticos abordados a través de la presente investigación, por lo que las propuestas diseñadas pueden corresponderse con el Ciclo Básico del Nivel Secundario y con las edades mencionadas por los estudiantes del Profesorado.

Dos de los grupos incluyeron los objetivos de la propuesta y el otro, los agregó luego de la etapa de resolución de cada diseño. En el apartado 4.3.2 se comentaron los aspectos relativos a la resolución de cada propuesta y habiéndose presentado los dos primeros grupos, el tercero consideró incluir los objetivos a partir de haberlos visto en las dos anteriores.

En todos los casos, las actividades que luego se plantearon resultaron relativamente acordes con esos objetivos planteados. En general, coincidieron en considerar como objetivos de sus propuestas que los alumnos de Nivel Secundario puedan identificar una función cuadrática y sus elementos principales, realizar su correspondiente gráfica y análisis de la misma. Un solo grupo hizo referencia en los objetivos a la resolución de sistemas de

ecuaciones, si bien luego a la única actividad referida a ese contenido se la presentaba como optativa. Y también en un único grupo se hizo referencia a la posibilidad de modelizar una situación a través de una expresión cuadrática y se mencionó específicamente dentro de los objetivos la utilización de GeoGebra como una herramienta para la representación gráfica. Ninguno de los grupos consideró la bibliografía consultada o mencionó las referencias bibliográficas correspondientes, si bien habían consultado libros de texto de Nivel Secundario y los utilizaron en clase durante la tercera etapa, en el diseño de sus propuestas (apartado 4.3.1).

Respecto de las categorías consignadas en el apartado 3.6, puede indicarse que, de los aspectos de la función cuadrática señalados por Illuzi y Sessa (2014), siempre la introducción a dicho contenido se ha presentado en todas las propuestas de enseñanza a través de actividades cuya resolución implica un trabajo con las distintas escrituras de su fórmula. Y, en general, la implementación de las otras actividades también requiere de un conocimiento algebraico que permite desarrollar una expresión de maneras equivalentes o se pueden aplicar fórmulas dadas para el cálculo de algunos elementos. Un solo grupo incluyó además otro tipo de actividades presentando, por ejemplo, un problema en un contexto geométrico cuya resolución requiere la modelización a través de una expresión cuadrática, que es otro de los aspectos mencionado por los autores acerca del contenido. Este fue incluido dentro de la propuesta, a modo de actividad de cierre; es decir, no fue considerado para introducir a los alumnos en el tema Función Cuadrática.

Dentro de la categoría de análisis referida a las características de las actividades, se ha examinado como una de las subcategorías posibles el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto (Fig. 5.1).

En los Grupos 1 y 2 se observó una distribución relativamente uniforme en la cantidad de actividades que se consideraron dentro de cada tipo; en el Grupo 1 solo faltó alguna relativa a *Problema* mientras que en el Grupo 2 sucedió algo similar respecto de las que involucran *Ejemplo – Ilustración*. En el Grupo 3 resultó más notoria la tendencia muy volcada a las tareas del tipo *Ejercicio – Aplicación – Práctica*, no solo por las características de cada actividad en sí misma sino por la propuesta de implementación que se describió en el trabajo y por la exposición realizada, donde en la mayoría de los casos se plantearon e indicaron con anterioridad las definiciones y las fórmulas correspondientes que debían luego solo aplicarse a las funciones cuadráticas dadas en los enunciados.

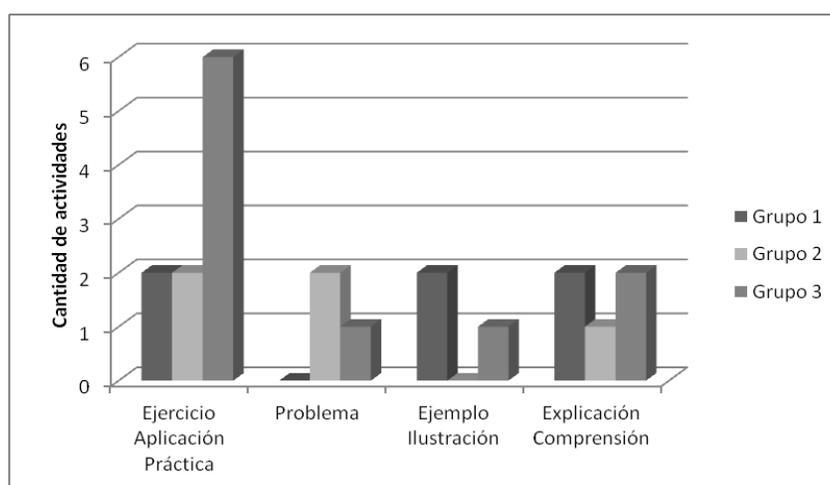


Figura 5.1. Subcategoría: Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto.
Fuente: elaboración propia.

Respecto de la presentación o formato de los enunciados, las tres propuestas de enseñanza incluyeron actividades con enunciados en todos los casos verbales, complementados en algunas situaciones con: lenguaje simbólico, a través de fórmulas y expresiones algebraicas; gráficos, cuando se incluyeron las representaciones de algunas curvas como

parte del enunciado; e icónico, cuando se ha indicado una figura de análisis que completa la tarea presentada.

En relación con la naturaleza de las tareas incluidas, todas las actividades de las propuestas diseñadas por los Grupos 1 y 3 resultaron del tipo *Artificiales*. Solo el Grupo 2 incluyó una actividad considerada *Situación de la realidad* y otra actividad *Contexto geométrico*, ambas dentro del tipo real en la clasificación propuesta por González (2014); las otras tres tareas incluidas en la propuesta de este grupo son artificiales, al igual que lo mencionado respecto de los otros dos grupos.

Considerando la motivación o finalidad general de la tarea, todas las actividades incluidas en las tres propuestas de enseñanza diseñadas por los grupos resultaron del tipo *Escolares*, es decir, no se propusieron otros tipos de actividades como podrían ser las socioculturales, lúdicas o histórico culturales consideradas en la mencionada clasificación.

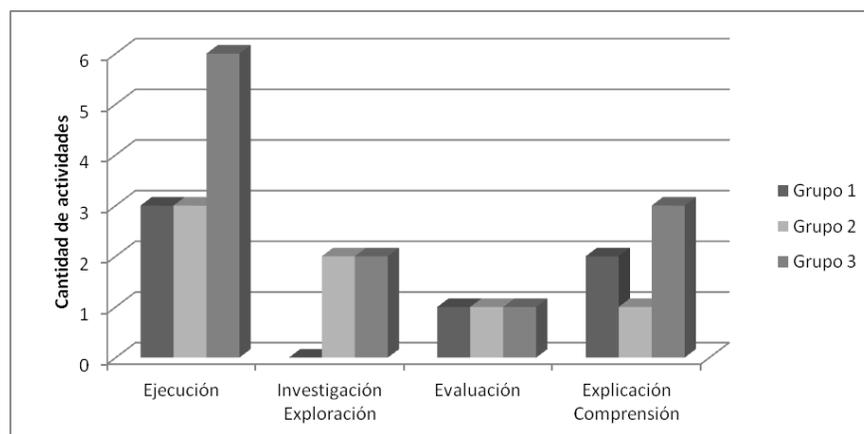


Figura 5.2. Subcategoría: Por el tipo de finalidad didáctica. Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta la finalidad didáctica de las tareas incluidas (Fig. 5.2), han predominado las del tipo *De ejecución* especialmente por el modo en que varias de ellas han sido planteadas, porque se indican de manera explícita los pasos a seguir en su

resolución o se muestran las fórmulas correspondientes que luego solo deben ser aplicadas a un ejercicio en particular. De manera similar a lo analizado respecto de la subcategoría Por el tipo de actividad que la tarea requiere del sujeto, este predominio es más notorio aún en la propuesta diseñada por el Grupo 3.

De acuerdo con el tipo de proceso de resolución, han predominado las actividades *Cerradas*. El Grupo 1 incluyó en su propuesta todas tareas de esta clase, como así también el Grupo 3 excepto una actividad optativa. Solo el Grupo 2 presentó cierta variedad en su propuesta, iniciando y finalizando la secuencia con actividades *Abiertas*, mientras que las otras también eran cerradas.

En cuanto al tipo de solución, todas las actividades incluidas en las tres propuestas de enseñanza que se han diseñado resultaron *Con solución única*, es decir, ninguna de las secuencias ha considerado alguna tarea que no admita solución o que la misma sea múltiple o indeterminada.

Al analizar el tipo de conocimiento matemático o la actividad matemática involucrada en las tareas incluidas en las secuencias diseñadas (Fig. 5.3), se ha podido observar que ninguno de los tres grupos ha considerado alguna relativa a la *Demostración* o que implique la utilización de *Propiedades*. Pueden mencionarse como actividades con mayor frecuencia de aparición las relativas a la *Representación* por la vinculación del contenido Función Cuadrática con la representación gráfica en ejes cartesianos, con lápiz y papel o con la utilización de GeoGebra, como así también las que emplean algún *Procedimiento* o aplican un *Algoritmo* en su resolución.

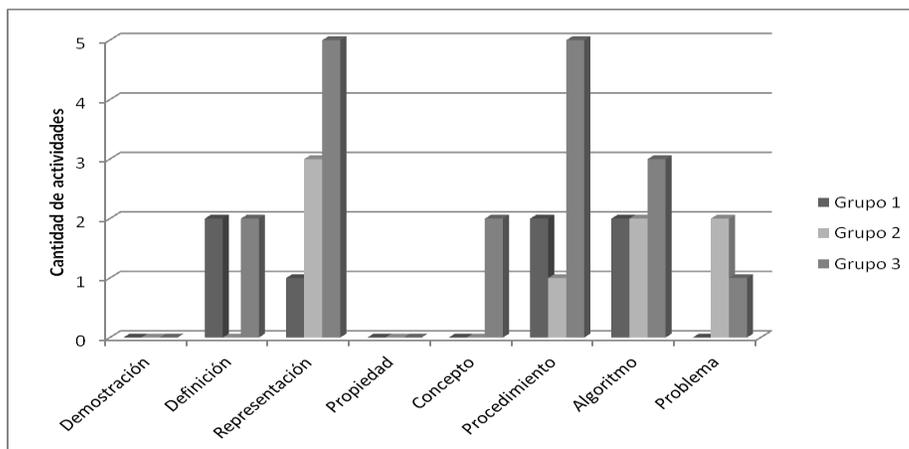


Figura 5.3. Subcategoría: Por el tipo de conocimiento matemático o actividad matemática involucrada.
Fuente: elaboración propia.

Con respecto al tipo de actuación implicada (Fig. 5.4), no se ha encontrado en ninguna de las propuestas de enseñanza alguna actividad referida a la *Comunicación* si bien este trabajo puede estar vinculado a otras actuaciones como la de *Justificación*, donde dos de los tres grupos incluyeron tareas que hacen hincapié en que los alumnos que las resuelven puedan fundamentar los procesos realizados o las respuestas dadas, que podría incluir también una comunicación del razonamiento o del procedimiento realizado. Se incluyeron además en dos de las tres propuestas actividades relativas a la *Explicación* que también pueden suponer cierta comunicación.

En los Grupos 1 y 3 predominaron las actividades centradas en la *Aplicación* si bien el Grupo 3 también ha tenido una gran cantidad de tareas del tipo *Construcción*. En el Grupo 2, de las actuaciones que se han considerado, se ha observado una distribución más uniforme de sus tipos dentro de las actividades que se han incluido.

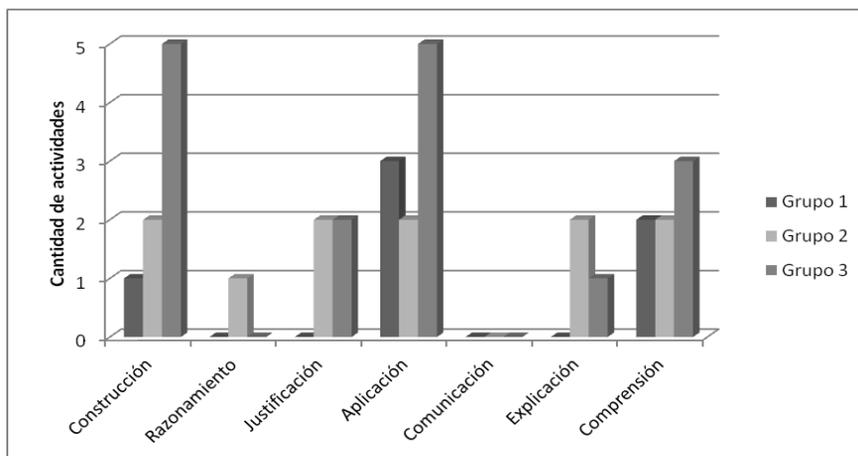


Figura 5.4. Subcategoría: Por el tipo de actuación implicada. Fuente: elaboración propia.

Los tres grupos utilizaron en sus propuestas de enseñanza todas las herramientas para llevar a cabo las tareas, consideradas en el diseño del instrumento de análisis (Fig. 5.5). Lo hicieron de una manera relativamente uniforme en cuanto a la distribución y cantidad de actividades en relación con dichas herramientas.

Puede mencionarse que en todos los casos se ha observado una menor cantidad de tareas que requieran la utilización de elementos de Geometría; en relación con el contenido Función Cuadrática esta herramienta aparece vinculada en la construcción de gráficos con lápiz y papel, y en las propuestas diseñadas se ha utilizado el software GeoGebra en la mayoría de las actividades relativas a la realización de dichos gráficos.

Tal como se ha descrito en el apartado 4.5 la utilización de la calculadora como herramienta se ha considerado como parte de ese análisis para aquellas actividades que pudieran requerirla pero en ningún caso algún grupo mencionó su uso de manera explícita.

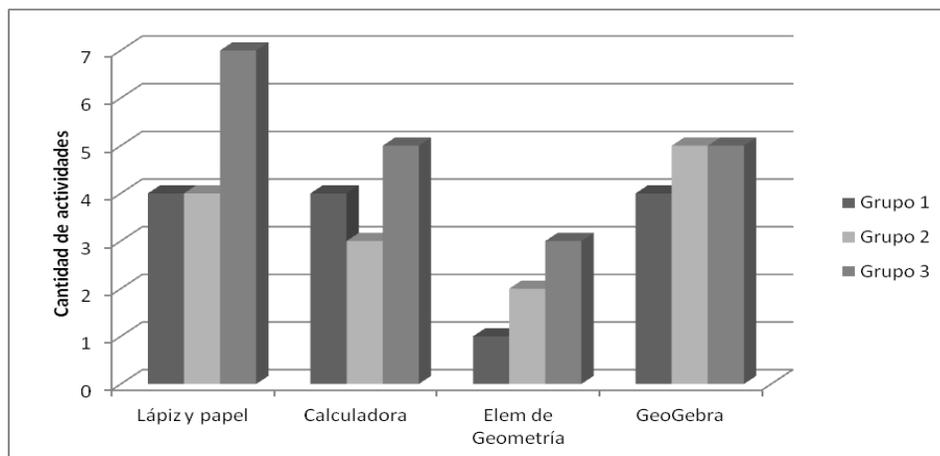


Figura 5.5. Categoría: Herramientas para llevar a cabo las actividades. Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta las categorías que Gómez (2001) agrupa en lo que denomina análisis didáctico, las tres propuestas de enseñanza diseñadas por los grupos presentaron solo la categoría referida al análisis de contenido. De acuerdo con lo detallado en el apartado 2.5.2 el autor considera que se identifican en ese análisis de contenido los conceptos y procedimientos involucrados en las actividades, mostrando una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático como es en este caso Función Cuadrática.

Si bien se les había sugerido a cada uno de los grupos algunas cuestiones que se podrían considerar dentro de la propuesta de enseñanza, no incluyeron lo relativo al análisis cognitivo como por ejemplo identificar y describir las posibles dificultades que podrían enfrentar los alumnos de Nivel Secundario a los que está dirigida la misma o los posibles errores que ellos podrían llegar a cometer al realizar las actividades que la componen.

5.2 Análisis comparativo acerca de los registros de representación

En todas las actividades que se han incluido en las tres propuestas de enseñanza diseñadas aparecieron las fórmulas o ecuaciones como registros de representación (Fig. 5.6). En

efecto, predomina este registro en todas las propuestas que se han diseñado. También se involucra el registro gráfico en la mayoría de las tareas que se han considerado.

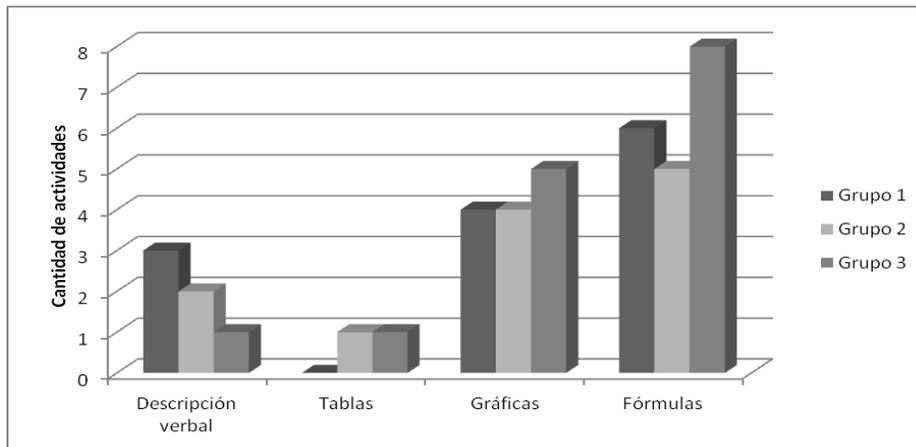


Figura 5.6. Categoría: Formas de representación empleadas. Fuente: elaboración propia.

Resultó menor la cantidad de actividades relativas al registro de representación de descripción verbal. Y en todos los grupos resultó menor aún la cantidad de actividades que utilizan la tabla como registro; incluso en el Grupo 1 no se han incluido actividades que se vinculen con él.

Esta falta de diversidad en las representaciones sobre un mismo objeto es una cuestión que se debe considerar en los estudiantes del Profesorado para sus futuras prácticas docentes. Si bien como alumnos del primer año de la carrera se podía prever esta limitación, se destaca a partir de este trabajo la dedicación que se debe reservar durante la etapa de formación inicial al cuidado de este análisis. De acuerdo con lo indicado en apartado 2.4, no son los mismos aspectos de un contenido los que son representados de un registro a otro, por lo que es importante que un objeto matemático sea presentado en diferentes tipos de representaciones (Duval, 1993). Resulta significativo que los estudiantes del Profesorado consideren necesaria la inclusión de esta diversidad de representaciones de un mismo

objeto en el diseño de actividades como así también la reflexión acerca del tipo de tareas que pueden abarcar estas diferentes representaciones.

Respecto de los procesos de traslación de un registro a otro que demanda la resolución de cada actividad (Tabla 5.1), se pudo observar en las propuestas de enseñanza diseñadas que no aparecieron involucradas algunas de esas posibles traslaciones dada la poca cantidad de tareas que se relacionan con algunos de los registros de representación (Fig. 5.6) o la escasa diversidad en los aspectos involucrados en la resolución de las actividades.

Tabla 5.1. Subcategoría: Proceso de traslación

Proceso de traslación				
A De	Situación, descripción verbal	Tablas	Gráficas	Fórmula, expresión algebraica
Situación, descripción verbal	Sin actividades en las propuestas	Sin actividades en las propuestas	Sin actividades en las propuestas	
Tablas	Sin actividades en las propuestas	Sin actividades en las propuestas		Sin actividades en las propuestas
Gráficas	Sin actividades en las propuestas	Sin actividades en las propuestas		Sin actividades en las propuestas
Fórmula, expresión algebraica	Sin actividades en las propuestas			

Fuente: elaboración propia.

Respecto del registro de representación relativo a la situación o descripción verbal solo se incluyeron actividades que, partiendo de este registro, se involucra un proceso de traslación hacia el registro de fórmula o expresión algebraica. Es decir, en ninguna de las tres propuestas de enseñanza diseñadas se han incluido actividades que realicen un proceso de traslación de la situación o descripción verbal a otra situación equivalente o a los registros de tablas o de gráficas.

Algo similar sucede con el registro de representación de tabla, ya que solo se han incluido actividades que requieren un proceso de traslación al registro gráfico. No se han incluido en ninguna de las tres propuestas de enseñanza actividades que requieran un proceso de

traslación del registro de tablas al mismo registro o de este a situación o descripción verbal o a fórmula o expresión algebraica.

Una sola actividad correspondiente a una de las propuestas se vincula con el proceso de traslación del registro de representación gráfico al mismo registro. En ninguna de las propuestas que se han diseñado se han incluido actividades que se relacionen con el proceso de traslación del registro gráfico al de situación o descripción verbal ni al de tablas ni al de fórmula o expresión algebraica.

Coinciden las tres propuestas de enseñanza que se han diseñado en un predominio de actividades que se centraron en un proceso de traslación desde el registro de representación de fórmula o expresión algebraica a los otros. Solo en la propuesta del Grupo 3 hubo una mayor cantidad de actividades vinculadas con el proceso de traslación del registro de fórmula o expresión algebraica al mismo registro. Pero en general, tanto en este grupo como en los otros dos, se puede mencionar una preponderancia de actividades que se corresponden con un proceso de traslación desde el registro de representación de fórmula o expresión algebraica al gráfico.

Lo analizado se resume en la Fig. 5.7.

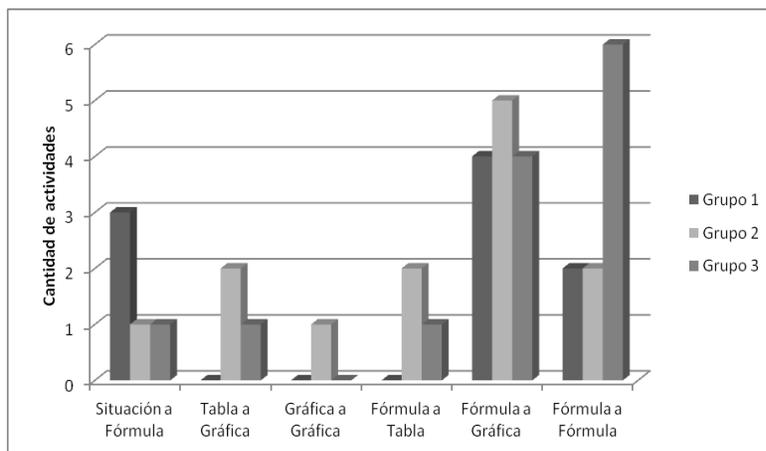


Figura 5.7. Subcategoría: Proceso de traslación. Fuente: elaboración propia.

En relación con los tipos de conversiones entre los registros de representación, hay un predominio de actividades que plantearon una conversión indirecta. Entre las de este tipo, solo aparecieron en las tres propuestas de enseñanza diseñadas actividades que involucran la conversión del registro de fórmula o ecuación al gráfico. Dentro de estas conversiones indirectas también podrían haberse incluido actividades que plantearan un pasaje del registro de tabla al de fórmula o ecuación como así también del gráfico al de fórmula o ecuación, pero no se han registrado ninguna de ellas.

Tal como se ha indicado en el apartado 2.4 esa conversión del registro de fórmula o ecuación al gráfico requiere un proceso ecuación – tabla – gráfica que no ha sido analizado al menos en forma explícita por los estudiantes del Profesorado sino que quizás consideraron que puede realizarse de manera directa. De acuerdo con Janvier (1987, citado en Cortés, 2005) esa conversión puede efectuarse sin la necesidad de construir una tabla cuando se logran identificar las unidades significativas propias de la escritura algebraica y el modo en el que estas influyen en la gráfica.

Se ha observado también en las propuestas una escasa cantidad de actividades involucradas con el tipo de conversión directa. Ninguna de las tareas incluidas en la propuesta de enseñanza diseñada por el Grupo 1 se ha correspondido con las de este tipo. Los otros dos grupos presentaron una o dos actividades, cada uno de ellas vinculadas con estas conversiones directas, relativas al pasaje del registro de representación de fórmula o ecuación al de tabla y de esta a gráfica. Es decir, ninguna de las propuestas de enseñanza diseñadas ha presentado alguna actividad relativa a la conversión del registro gráfico al de tabla.

Esta ausencia de algunos tipos de conversión entre los registros de representación de un mismo objeto matemático se relaciona con el análisis realizado respecto de la escasa diversidad de formas de representación que se han identificado en las actividades diseñadas por los estudiantes del Profesorado. Se agrega ahora el análisis acerca de las conversiones que se definen para pasar de un modo de representación a otro y la riqueza que cada una de ellas aporta a la construcción del concepto que se esté desarrollando. Como se ha señalado, se espera a partir de esta investigación que se identifique la importancia de incluir el análisis de estos aspectos en la formación de los futuros docentes.

5.3 Síntesis de los resultados

En el apartado 1.1 se han incluido las preguntas que interesan responder a través del presente trabajo:

¿Qué componentes del conocimiento aparecen involucrados en los estudiantes del Profesorado en Matemática al analizar y elaborar actividades respecto del contenido Función Cuadrática? ¿Cómo se manifiesta el conocimiento tecnológico en esas tareas?

Con respecto a los componentes del conocimiento, el disciplinar o curricular aparece involucrado en relación con los conceptos relativos al contenido Función Cuadrática que se han desarrollado en las propuestas de enseñanza, los enfoques sobre el tratamiento de esos conceptos y las redes que permiten explicarlos, organizarlos y conectarlos.

En cuanto a los aspectos relativos a ese conocimiento disciplinar o curricular en algunas de las actividades incluidas en las propuestas y en sus enfoques puede señalarse cierta influencia de la secuencia de actividades extraída del portal educativo educ.ar que los

estudiantes habían analizado previamente respecto de las propuestas que diseñaron luego, ya que en algunos casos resultaron tareas muy similares aunque con otros ejemplos o cálculos a resolver.

Respecto de este componente disciplinar o curricular del conocimiento y de los aspectos que involucra, dos de las tres propuestas diseñadas por los estudiantes del Profesorado en Matemática presentan una organización de los conceptos relativos al contenido Función Cuadrática similar a la secuencia extraída del portal, iniciando la misma con una definición general de este tipo de funciones y de sus elementos principales, para luego ser aplicado a ejemplos y actividades dadas.

Resultaron también similares algunos de los conceptos desarrollados relativos a estas funciones (gráficos, elementos principales, fórmula o expresión de una función a partir de algunos de sus elementos) si bien en las propuestas diseñadas por los estudiantes del Profesorado se incluyeron otros que no habían sido considerados en la secuencia extraída de educ.ar (desplazamientos del gráfico, formas de expresar una función cuadrática, situaciones que pueden modelizarse a través de una expresión cuadrática).

Tal como se ha indicado en el Capítulo 4 y en los dos primeros apartados del presente a partir del análisis comparativo realizado, en relación con los aspectos relativos a ese conocimiento disciplinar o curricular los estudiantes del Profesorado en Matemática han distinguido y mencionado en sus propuestas como conocimientos previos: polinomios, funciones, confección de tablas y gráficos de funciones, función lineal, ceros de una función, crecimiento y decrecimiento de una función. Y han desarrollado como contenidos relativos a Función Cuadrática a través de dichas propuestas: gráfico de la función a través de sus elementos principales (coeficiente principal, raíces o ceros, vértice, ordenada al

origen, eje de simetría), desplazamientos del gráfico, formas de expresión de la fórmula correspondiente a una función cuadrática, análisis del gráfico (intervalos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, conjunto imagen), situaciones que pueden modelizarse a través de una expresión cuadrática.

Solo uno de los grupos incluyó en su propuesta a modo de Actividad Optativa la resolución de un sistema de ecuaciones que involucraba una función lineal y otra cuadrática, sin alguna indicación acerca del modo en que este se podría resolver excepto su vinculación con los gráficos de ambas funciones.

También en una sola de las propuestas se plantearon situaciones problemáticas cuya interpretación y resolución requiere la utilización de los conceptos relativos a las funciones cuadráticas, en una de las actividades, y la modelización de lo planteado a través de una expresión cuadrática, en otra actividad. En este último caso la situación planteada también se vinculó con contenidos geométricos, que son otros ejemplos de actividades y de conceptos que se podían contemplar.

Considerando este componente disciplinar o curricular del contenido se puede observar que hay una cierta selección de los conceptos y enfoques relativos al contenido Función Cuadrática que se han atendido por sobre otros. No se han considerado algunos otros conceptos que se desprenden de los vistos como pueden ser:

- Resolución de ecuaciones donde interviene alguna expresión cuadrática, como por

ejemplo $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x} = \frac{6}{x^2-9}$; $\sqrt{x-3} = x-5$

- Resolución de ecuaciones bicuadradas $(x^2 + 6)^2 - 17 \cdot (x^2 + 6) + 70 = 0$

- Inecuaciones de segundo grado $x^2 - 4x + 3 > 0$ si bien se podría haber relacionado con los intervalos de positividad y de negatividad que en alguna propuesta fueron incluidos pero se los indicaba a partir de los gráficos realizados.
- Sistema de inecuaciones $\begin{cases} y \leq -x \\ y \leq x^2 + 5x \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq -x^2 + 4 \\ y \geq x^2 \end{cases}$
- Obtención de la fórmula de una función cuadrática o gráfico de una parábola conociendo tres puntos que están contenidos en ella.

Si bien no se habían delimitado previamente o a través de alguna consigna los conceptos a desarrollar dentro del contenido indicado ni se había mencionado la cantidad de clases que se podían destinar al desarrollo de los temas, respecto del conocimiento disciplinar como componente del conocimiento se puede observar en las propuestas de enseñanza diseñadas por los grupos una vinculación directa del contenido Función Cuadrática a todo lo relativo con el concepto de función, su relación con otras funciones vistas, sus características gráficas, pero solo en alguna actividad aislada de alguna propuesta se pudo observar la vinculación del contenido a otros conceptos y áreas.

Respecto del conocimiento pedagógico como componente del conocimiento pudo observarse el enfoque que cada grupo planteó en relación con las prácticas y los métodos de enseñanza y de aprendizaje, especialmente durante las etapas correspondientes a la implementación y a la exposición de sus propuestas de enseñanza.

Este trabajo de investigación, de acuerdo con el problema y objetivos planteados, se involucra en la formación inicial del docente y las situaciones que pueden experimentar los estudiantes del Profesorado en Matemática para construir este conocimiento. Trabajando

con alumnos del primer año de la carrera se suponía un escaso conocimiento pedagógico acerca del contenido a desarrollar y se pudo observar que estas experiencias constituyen una herramienta para la construcción de este conocimiento, a través de la investigación en libros de texto de Nivel Secundario sobre los conceptos relativos a Función Cuadrática, el análisis de otras propuestas de enseñanza acerca de este contenido y la presentación un diseño propio a modo de propuesta de enseñanza. Son experiencias que fomentan y colaboran en la construcción del conocimiento pedagógico de los estudiantes del Profesorado como futuros docentes acerca de cómo desarrollar estrategias cognitivas y una adecuada motivación hacia el aprendizaje, como así también la comprensión acerca de cómo el alumno de Nivel Secundario construye el conocimiento y adquiere competencias.

Respecto de dichas propuestas, se explicitaron en ellas pocas cuestiones relativas a este conocimiento pedagógico, respecto de los procesos, prácticas, estrategias didácticas y métodos de enseñanza, tal como se mencionó acerca de la categoría correspondiente al análisis didáctico en el primer apartado de este capítulo. Los trabajos presentados hicieron hincapié en el análisis de contenido por sobre el análisis cognitivo.

En relación con algunos de los aspectos contemplados en el marco teórico respecto de este componente pedagógico del conocimiento, los estudiantes del Profesorado incluyeron los objetivos generales que se persiguen como metas a través de las actividades seleccionadas, los destinatarios identificándolos como alumnos de Nivel Secundario en una edad promedio de 14 años y una correcta planificación de los conceptos a desarrollar a partir de dichas tareas.

Respecto del conocimiento tecnológico, atendiendo también lo expuesto en el marco teórico como componente del conocimiento, se considera en este las tecnologías

tradicionales como libros, tiza, pizarrón; también, las tecnologías más recientes, como Internet, dispositivos digitales, etc.

En cuanto a las tradicionales, se pudo observar especialmente en la etapa relativa a la exposición que han realizado los grupos que prevalece la utilización del pizarrón por sobre todos los otros recursos.

Respecto de las tecnologías más recientes, cabe mencionar que en la consigna dada a los estudiantes del Profesorado se especificó la incorporación y la utilización de un software como GeoGebra en el diseño de la propuesta y en el desarrollo de las actividades, por lo que se sobreentiende la elección de este programa y la computadora como dispositivo digital que se ha incluido en todos los casos.

Puede observarse que de todos modos no se explicitó en dicha consigna la utilización de este software como la única forma o medio de incluir la tecnología. En consecuencia, no surgió en ningún caso la posibilidad de incluir otras herramientas, como puede ser la utilización de Internet o correo electrónico, entre las más conocidas. En la secuencia de actividades extraída del portal educ.ar y resuelta por los estudiantes del Profesorado en la segunda etapa del presente trabajo, se incluía una actividad que hacía referencia a través de un link al acceso a una página Web desde la cual se iniciaba el desarrollo de la tarea. Si bien los grupos consideraron, en algunos casos, esa secuencia a modo de ejemplo y les ha servido de base o idea para el diseño de sus propias propuestas de enseñanza, respecto de la utilización de Internet ninguno de los grupos lo ha incluido como una herramienta tecnológica.

Con respecto al conocimiento de la tecnología y de la pedagogía o conocimiento tecnológico pedagógico como componente del conocimiento se puede mencionar que, de

manera similar a lo descrito acerca del análisis didáctico centrado en el análisis de contenido en lugar de ser complementado con el cognitivo, la explicitación por parte de los integrantes de los grupos dentro de sus producciones acerca de la utilización de GeoGebra en contextos de enseñanza y de aprendizaje ha sido muy limitada.

En general, los estudiantes del Profesorado en Matemática incluyeron la utilización de GeoGebra en algunas de las actividades propuestas pero no mencionaron de manera explícita si consideran que el uso de este software tiene algún potencial por sobre los recursos tradicionales, por ejemplo, o si consideran que de algún modo esto contribuye a una mejor comprensión del contenido y de los conceptos involucrados.

Los tres grupos presentaron su propuesta y sus actividades sin incluir ninguna mención acerca del modo en el que relacionan la utilización de GeoGebra con los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Solo en uno de los ítems del enunciado de una actividad el Grupo 1 escribió un comentario acerca de la utilización del software:

“Ahora pueden cambiarse los valores de ‘a’, ‘b’ y ‘c’ por cualquiera que esté entre sus valores determinados como mínimos y máximos, ahorrándonos el tiempo de crear un gráfico para cada función que queramos analizar”.

Los integrantes del Grupo 2 han incluido a modo de aclaración o análisis algunos comentarios acerca de las actividades seleccionadas y respecto de la Actividad 2 indicaron:

“Con la ayuda de GeoGebra la idea de esta actividad es que se puedan graficar muchos ejemplos y ver la variación del gráfico según los valores de cada deslizador”.

El Grupo 3 escribió al final de la propuesta de enseñanza:

“La inclusión del programa GeoGebra en algunas de las actividades nos pareció una excelente idea ya que actualiza los recursos de estudio, los alumnos en esta época utilizan la computadora como herramienta principal para todo y a su vez también ayuda a ver los gráficos más exactos, prolijos y rápidamente”.

En los párrafos citados, que se corresponden con la única mención explícita acerca de la incorporación de GeoGebra en el desarrollo de las actividades dentro de las propuestas de enseñanza diseñadas, pueden diferenciarse entre los grupos el modo en el que cada uno de ellos considera la inclusión de este software. Así, en el comentario incluido por el Grupo 1 se observa una visión reduccionista acerca de la utilidad del programa, donde solo se hace referencia al ahorro del tiempo utilizado en la construcción de distintos gráficos. El comentario realizado por el Grupo 2 involucra un concepto más dinámico acerca de la utilización del software y de la potencialidad del mismo, mientras que el Grupo 3 hace referencia a la motivación que su incorporación puede ocasionar en los alumnos de Nivel Secundario en la actualidad, como así también la precisión en las representaciones gráficas. Puede reconocerse, por un lado, cierto conocimiento acerca de la existencia de herramientas tecnológicas para realizar determinadas tareas y la posibilidad de reformular los propósitos técnicos de un software a finalidades educativas específicas, pero por otro lado, hay poca explicitación acerca del análisis didáctico que se ha realizado sobre el modo en el que su utilización influye o modifica la enseñanza y el aprendizaje en lo relativo al contenido Función Cuadrática.

Esto se relaciona también con el conocimiento de la tecnología y del contenido curricular o conocimiento tecnológico disciplinar ya que, tal como se ha mencionado en el marco teórico, este posibilita la construcción de nuevas y variadas representaciones. Los estudiantes del Profesorado coincidieron en hacer hincapié en que las nuevas herramientas tecnológicas pueden proporcionar un mayor grado de flexibilidad a través de estas representaciones y vincularon la utilización de GeoGebra con el modo en el que las representaciones gráficas, en este caso respecto del contenido disciplinar Función

Cuadrática, son transformadas por la aplicación de esta tecnología. Pero, tal como se ha indicado, el análisis por parte de los estudiantes de esa transformación resulta algo limitada, circunscribiéndolo al tiempo (cuando se destaca la rapidez en que el software realiza uno o varios gráficos) o a la precisión (cuando se menciona la exactitud y prolijidad).

La integración de todos estos conocimientos en el conocimiento de la pedagogía, el contenido curricular y la tecnología o conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar está influenciado por todos los aspectos que se han mencionado.

En sus propuestas de enseñanza, los estudiantes del Profesorado en Matemática mencionan los conocimientos que consideran preexistentes en los alumnos de Nivel Secundario para desarrollar los nuevos contenidos a partir de ellos, aunque es algo restringida la idea o hipótesis acerca de cómo la tecnología puede ser utilizada para construir ese conocimiento disciplinar reduciéndolo en muchos casos solo a la utilización del software para la representación gráfica de las funciones cuadráticas y el carácter dinámico de GeoGebra para la visualización de los desplazamientos de dichas representaciones.

Los estudiantes del Profesorado en Matemática no manifiestan de manera explícita en sus propuestas de enseñanza un análisis sobre qué hace fácil o difícil la comprensión de los conceptos relativos al contenido Función Cuadrática y cómo la tecnología puede contribuir a compensar o reparar esas dificultades de aprendizaje que enfrentan los alumnos de Nivel Secundario, que son algunos de los aspectos relativos a este componente del conocimiento.

Esto también se identificó y reconoció desde la segunda etapa de esta investigación, en relación con la puesta en común del análisis realizado acerca de las actividades extraídas del portal educ.ar luego de su resolución (apartado 4.2.2).

Los estudiantes del Profesorado en Matemática evidenciaron allí algunas de sus concepciones, como por ejemplo: hicieron un enfoque acerca de la utilización del software GeoGebra centrado en su aplicación sólo a modo de graficador; consideraron importante que primero sea el docente el que realice una demostración acerca de su uso para que luego sean los alumnos del Nivel Medio los que repitan el procedimiento; indicaron al momento de introducir el contenido Función Cuadrática, que primero se realice un gráfico con lápiz y papel y que luego se utilice el software; mencionaron el uso de GeoGebra sólo a modo de recurso de autoevaluación, que corrobore los resultados obtenidos cuando los gráficos se realizan a través de una tabla de valores.

Al tratarse en este caso de estudiantes del Profesorado en el inicio de su trayecto formativo, era previsible alguna de estas concepciones, influenciadas por sus experiencias como alumnos en lugar de posicionarse como docentes. Repiten, en general, el mismo procedimiento en que a ellos se les han presentado y desarrollado los contenidos y tienen hasta el momento pocas herramientas didácticas que les permitan realizar un análisis más significativo y crítico. Esto es justamente lo que tiene que servir como punto de partida en la revisión de un nuevo modelo de formación docente.

Se espera contribuir a través de este tipo de trabajos en la construcción de ese conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar, lo cual se relaciona con otra de las preguntas que dieron lugar a la presente investigación acerca de los tipos de experiencias que pueden incluirse en la formación inicial del docente para construir ese conocimiento.

5.4 Reflexiones finales

La formación inicial del docente, en la mayoría de los casos, se ha centrado hasta la actualidad en el componente disciplinar o curricular del conocimiento del profesor, complementado con algunas asignaturas relativas a su componente pedagógico. Si se considera el diseño de la carrera de Profesor en Matemática en los Institutos de Formación Docente es notoriamente inferior la trascendencia que se otorga al componente tecnológico del conocimiento.

Solo una asignatura, previa a la práctica docente que se realiza durante esa formación inicial, tiene por objeto la relación entre esos componentes: considera lo referido a la integración entre el conocimiento disciplinar y el pedagógico, contribuyendo así a la configuración del conocimiento pedagógico disciplinar, dejando relegado a consideración del docente a cargo de esa asignatura el modo en el que integra y relaciona el conocimiento tecnológico a los otros componentes.

El enfoque teórico presentado en el Capítulo 2 de esta investigación que considera no solo las dimensiones disciplinar, pedagógica y tecnológica del conocimiento del profesor sino también la articulación de las relaciones entre esos componentes, constituye un nuevo modelo de formación docente que contempla la complejidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, reconociéndolos como una actividad dinámica que precisa la configuración de muchos tipos de conocimiento.

El abordaje de esta formación inicial debe considerar estos tres componentes y, en particular, se debe replantear los tipos de experiencias que contribuyen al desarrollo de los conocimientos hasta ahora no abordados por los planes actuales: el conocimiento

tecnológico pedagógico y el tecnológico disciplinar como así también la integración de las tres dimensiones en el conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar.

Un ejemplo de ese tipo de experiencias lo constituyen las actividades relativas a la presente investigación ya que los procesos de analizar y de diseñar la planificación de una propuesta de enseñanza permiten a los estudiantes del Profesorado en Matemática reflexionar acerca de los conceptos disciplinares a desarrollar como así también de los enfoques sobre cómo hacerlo, su organización y sus relaciones.

Además, que esa actividad esté complementada con una hipotética implementación: contribuye a que los futuros docentes puedan fundamentar los diseños de las actividades y reflexionen sobre los diferentes procedimientos de resolución que involucra cada tarea; favorece la anticipación y el tratamiento de los errores posibles y de las dificultades que se pudiesen presentar; permite deliberar acerca de los tipos de intervenciones a realizar durante la gestión de una clase. Los estudiantes del Profesorado en Matemática reconocen y vivencian de este modo la importancia de la retroalimentación entre grupos y la socialización entre pares.

Al mismo tiempo, este tipo de experiencias contribuye a la configuración del conocimiento tecnológico y de su relación con los otros componentes del conocimiento, en tanto invita a los estudiantes del Profesorado a reflexionar acerca de la incorporación de las TIC en la enseñanza de la Matemática con el objeto de promover una mejor comprensión de los conceptos y la construcción de nuevas y variadas representaciones de objetos matemáticos. En particular, la posibilidad de incluir un software como GeoGebra a modo de mediador en el desarrollo de conceptos, implica una revisión de las prácticas actuales y una adecuación

de este recurso en función de los objetivos, los contenidos y los grupos a quienes está destinada la propuesta de enseñanza.

Las actividades que se implementaron en el desarrollo del presente trabajo de investigación, que requirieron por parte de los estudiantes del Profesorado en Matemática tanto el análisis como la selección de actividades para el tratamiento de un contenido, colaboraron en los futuros docentes en su comprensión acerca de cómo cambian los procesos de enseñanza y de aprendizaje cuando se utilizan determinadas tecnologías, sin ignorar ni simplificar la complejidad de las relaciones entre los componentes del conocimiento. Integrar las TIC en las clases no solamente implica conocer la herramienta, como puede haber sido en este caso la utilización de GeoGebra, sino también rever los conocimientos pedagógicos y disciplinares cuando se incluye la tecnología.

En este nuevo modelo de formación docente se deben considerar además los procesos y niveles de evolución por los que transitan los estudiantes del Profesorado, para que este tipo de experiencias que se proponen sean acordes a ellos y permitan evidenciar también el correspondiente progreso.

En los planes actuales de la carrera de Profesorado en Matemática las actividades relativas a analizar y diseñar una propuesta de enseñanza acerca de un contenido están incluidas en asignaturas correspondientes al último período de su formación. En algunos casos estas tareas resultan propias del período de la práctica docente, que en general se lleva a cabo luego de haber cursado el resto de las asignaturas de la carrera.

Las actividades que se implementaron en esta investigación, cuando se realizan de manera progresiva desde el comienzo de la formación docente, contribuyen a que los estudiantes del Profesorado en Matemática efectúen: un adecuado análisis didáctico de las propuestas

de enseñanza que diseñan, que no considere solo el análisis de contenido sino que se vea complementado por el cognitivo; una apropiada selección de actividades, que incluya diversidad en las formas de representación empleadas para su resolución y en los registros de representación que se presentan respecto de un objeto matemático, como así también variedad en los procesos de traslación y de conversión de esos registros que aparecen involucrados en la resolución de las tareas elegidas.

De acuerdo con los resultados obtenidos durante la presente investigación, este tipo de experiencias contribuye desde el inicio de la formación del profesor en Matemática a una configuración de su conocimiento que atienda tanto sus componentes disciplinar, pedagógico y tecnológico como la interrelación entre ellos.

5.5 Perspectivas abiertas por este trabajo de tesis

A partir del desarrollo del presente trabajo de investigación, se espera poder continuar con esta metodología y este tipo de actividades que contribuyen a la configuración del conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar en la formación de profesores en Matemática.

Un trabajo similar al realizado puede extenderse a otras asignaturas de la carrera, tanto del primer año de ese trayecto formativo como así también en asignaturas que se correspondan con estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática. De acuerdo con lo analizado en esta investigación, esto se haría atendiendo el nivel acorde a cada etapa de la formación pero siguiendo al mismo tiempo el progreso evidenciado.

Sería enriquecedor además el intercambio y la socialización de los resultados de esas experiencias entre los docentes del Profesorado, a través de foros o encuentros periódicos, a fin de contar con mayor información acerca de los estudiantes y del mencionado progreso.

También se puede replantear la incorporación de las TIC en el aula respecto de las asignaturas de la carrera del Profesorado en Matemática: evaluar el modo en que estas se incorporan en el desarrollo de los contenidos propios de cada materia del Profesorado y así poder analizar junto a los estudiantes, cuando los contenidos se adecúen, la forma en que las TIC pueden ser llevadas a las aulas del Nivel Secundario.

BIBLIOGRAFÍA

6.1 Referencias bibliográficas

- Aguilar, A., Luzardo, M. y Jaimes, L. (2015). Adopción de TIC en la Universidad Pontificia Bolivariana. *Educere*, 19, 157-168.
- Aguilar, A., Muñoz, C., Carrillo, J. y Rodríguez, J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13 (1), 41-61.
- Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y técnicas de investigación social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*. Buenos Aires, Lumen.
- Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). *El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque*. International Journal of Computers for Mathematical Learning. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 15-25.
- Ball, D. (2010). *Learning to do mathematics as a teacher*. Conferencia presentada en “National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) Annual Conference”. San Diego, Abril.
- Ball, D. y Bass, H. (2009). *With an eye on the Mathematical Horizon: knowing Mathematics for teaching to learner’s mathematical futures*. Conferencia presentada en “The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference”. Los Ángeles, Febrero.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

- Barros, V. y Martínez, M. (2018). Aula invertida en la enseñanza de Álgebra en la educación superior. *Espirales, Revista Multidisciplinaria de Investigación*, 2 (13), 12-23.
- Borges, J. y Montes de Oca, L. (2014). Las formas de trabajo y de pensamiento de la Matemática en los recursos de un software educativo. *Atenas, Revista Científico Pedagógica*, 26 (2), 91-100.
- Borsari, V., Coll, P., Escayola, R., López, E. y Urretabizcaya, J. (2012). Iniciando el camino con GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 1 (1), 205-215.
- Cabero, J. (2010). Los retos de la integración de las TICs en los procesos educativos. Límites y posibilidades. *Perspectiva Educacional*, 49 (1), 32-61.
- Cabero, J. (2014). *La formación del profesorado en TIC: modelo TPACK*. Sevilla: Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías de la Universidad de Sevilla.
- Carnevale, M. (2006). Reflexiones epistemológicas acerca de la didáctica. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 2 (1), 93-113.
- Cejas, R., Navío, A. y Barroso, J. (2016). Las competencias del profesorado universitario desde el modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico y Pedagógico Del Contenido). *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 49, 105-119.
- Contreras, D. (1994). *Enseñanza, currículum y profesorado*. Madrid, Akal.
- Cortés, J. (2005). Ambiente Informático Interactivo para el aprendizaje de las cónicas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 3, 3-14.

- Darias, S. (2005). La Estadística y la Multimedia. Una actividad de aula. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4, 127-136.
- Diseño Curricular del Ciclo Básico de la NES. Formación General. Emprendedores del aprendizaje para la vida 2015. Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en <http://www.buenosaires.gob.ar/educacion/docentes/diseño-curricular-del-ciclo-basico-de-la-nes>.
- Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis, lecturas en didáctica de las matemáticas*. México, SME-Cinvestav, 118-144.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.
- García, M. y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma, Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, 18, 13-23.
- García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza–aprendizaje*. Sevilla: Kronos-GIEM.
- Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. Perales, A. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico y J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258). Granada: Grupo Editorial Universitario.

- González, J. (2014). Currículo de Matemáticas en ESO y Bachillerato. Universidad de Málaga. Disponible en:
http://www.gonzalezmari.es/DOC_2.1_ACTIVIDAD_MATEMATICA_Y_EDUCACION_MATEMATICA.pdf
- Hernández, C. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 82, 115-129.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México, Mc Graw Hill.
- Hill, H y Ball, D. (2004). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (5), 330-351.
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.
- Hitt, F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, DME-Cinvestav, 43-55.
- Illuzi, A. y Sessa, C. (2014). Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado. *Serie Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

- Koehler, M. y Mishra, P. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108 (6), 1017-1054.
- Koehler, M. y Mishra, P. (2008). Introducing TPACK. En AACTE (ed.) *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators*. New York, Routledge, 3-30.
- Koehler, M., Mishra, P. y Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 10 (6), 9-23.
- Loaiza, R. (2018). *Tecnología e innovación + Ciencia e innovación en América Latina*. Colombia, Corporación CIMTED.
- Magadán, C. (2012). Clase 3. Las TIC en acción: para (re)inventar prácticas y estrategias. Enseñar y aprender con TIC. *Especialización docente de nivel superior en educación y TIC*. Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Nación.
- Martí, J. y Valdeolivas, M. (2016). *TIC, hacia la educación 3.0*. Castellón, Universitat Jaume.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach*. San Francisco, Jossey-Bass.
- Nagel, M. y Montenegro, F. (2012). GeoGebra en la Escuela Secundaria. Relato de experiencia de formación a distancia con profesores del nivel. *Premisa*, 55, 32-45.
- National Research Council (1999). *Being Fluent with Information Technology*. Washington, D.C.: National Academic Press.
- Noriega, M. y Rosillo, L. (2011). Traducción del lenguaje verbal al lenguaje gráfico y simbólico con ayuda de GeoGebra. En Guerrero, M. (Coord.). *Uso de tecnología en*

educación matemática. Investigaciones y propuestas 2011. Morelia, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática, 155-162.

Paredes, Z., Iglesias, M. y Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de Matemática. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 7 (1), 85-102.

Posadas, P. y Godino, J. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, 1, 77-96.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Sevilla, Aljibe.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (1), 151-165.

Santos, L. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6 (8), 35-54.

Sgreccia, N. (2012). *La geometría del espacio en el Profesorado en Matemática: la generación de puentes entre la formación disciplinar y didáctica*. Tesis de doctorado. Facultad de Humanidades y Artes, Universidad Nacional de Rosario.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

- Shulman, L. (1997). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En Wittrock, M. (Comp.). *La investigación de la enseñanza I*. Barcelona, Paidós, 9-91.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (2), 1-30.
- Téliz, F. (2015). Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas. Estudio de las opiniones y concepciones de docentes de educación secundaria en el departamento de Artigas. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 6 (2), 13-31.
- Valverde, J., Garrido, M. y Fernández, R. (2010). Enseñar y aprender con tecnologías: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. *Teoría de la Educación, Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 11 (3), 203-229.
- Yin, R. (1989). *Case Study Research. Design and Methods*. Londres, Sage.

6.2 Bibliografía consultada

- Acosta, M. (2005). *La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías*. Primer Congreso Internacional de TAD. Baeza, España.
- Aguilar, A., Luzardo, M. y Jaimes, L. (2015). Adopción de TIC en la Universidad Pontificia Bolivariana. *Educere*, 19, 157-168.
- Aguilar, A., Muñoz, C., Carrillo, J. y Rodríguez, J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13 (1), 41-61.

- Almirón, M. E. y Porro, S. (2014). Las TIC en la enseñanza: un análisis de casos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16 (2), 152-160.
- Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y técnicas de investigación social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*. Buenos Aires, Lumen.
- Angeli, C. y Valanides, N. (2009). Epistemological and mythological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT-TPCK: Advances in technological pedagogical content knowledge (TPCK). *Computers & Education*, 52, 154-168.
- Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). *El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque*. International Journal of Computers for Mathematical Learning. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 15-25.
- Azcárate, P. (1998). La formación inicial del profesor de Matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 129-142.
- Ball, D. (2010). *Learning to do mathematics as a teacher*. Conferencia presentada en “National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) Annual Conference”. San Diego, Abril.
- Ball, D. y Bass, H. (2009). *With an eye on the Mathematical Horizon: knowing Mathematics for teaching to learner’s mathematical futures*. Conferencia presentada en “The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference”. Los Ángeles, Febrero.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

- Barros, V. y Martínez, M. (2018). Aula invertida en la enseñanza de Álgebra en la educación superior. *Espirales, Revista Multidisciplinaria de Investigación*, 2 (13), 12-23.
- Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D. y Bohórquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 73 - 93.
- Borges, J. y Montes de Oca, L. (2014). Las formas de trabajo y de pensamiento de la Matemática en los recursos de un software educativo. *Atenas, Revista Científico Pedagógica*, 26 (2), 91-100.
- Borsari, V., Coll, P., Escayola, R., López, E. y Urretabizcaya, J. (2012). Iniciando el camino con GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 1 (1), 205-215.
- Burrell, F. (2006). Uso del ordenador en un entorno sin algoritmos. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5, 3-8.
- Bustos, A. y Román, M. (2011). La importancia de evaluar la incorporación y el uso de las TIC en educación. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 4 (2), 1-7.
- Cabero, J. (2010). Los retos de la integración de las TICs en los procesos educativos. Límites y posibilidades. *Perspectiva Educativa*, 49 (1), 32-61.
- Cabero, J. (2014). *La formación del profesorado en TIC: modelo TPACK*. Sevilla: Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías de la Universidad de Sevilla.

- Cabero, J., y Marín, V. (2012). ICT training of university teachers in a personal learning environment. *Journal of New Approaches In Educational Research*, 1 (1), 2-6.
- Carnevale, M. (2006). Reflexiones epistemológicas acerca de la didáctica. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 2 (1), 93-113.
- Carrillo, A. (2005). Matemáticas a través de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 3, 101-102.
- Carrillo, A. (2006). Interpretación matemática con calculadora gráfica. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7, 99-105.
- Casanova, J. (2007). Desafíos a la formación inicial del profesorado: buenas prácticas educativas en el contexto de la innovación con TIC. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 6 (2), 109-125.
- Cejas, R., Navío, A. y Barroso, J. (2016). Las competencias del profesorado universitario desde el modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico y Pedagógico Del Contenido). *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 49, 105-119.
- Centro del Profesorado La Laguna. Gobierno de Canarias. Materiales para el Asesoramiento en Competencias Básicas. Estructura de tareas en la competencia matemática. Disponible en: http://programaccbb.files.wordpress.com/2008/02/matriz-de-tareas_matematicas.pdf
- Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2, 29-38.
- Chiappe, A. y Sánchez, J. O. (2014). Informática educativa: naturaleza y perspectivas de una interdisciplina. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16 (2), 135-151
- Contreras, D. (1994). *Enseñanza, currículum y profesorado*. Madrid, Akal.

- Cortés, J. (2005). Ambiente Informático Interactivo para el aprendizaje de las cónicas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 3, 3-14.
- Darias, S. (2005). La Estadística y la Multimedia. Una actividad de aula. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4, 127-136.
- Daza, M., Orozco, E. y Pérez, J. (2017). Porqué la renuencia de los docentes ante la incorporación de las TICS al currículo y su aplicación en las prácticas de aula. *Gestión, Competitividad e Innovación*, 144-153.
- De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, 10 (1), 1-24.
- De Pablos, J. y Jiménez, R. (2007). Buenas prácticas con TIC apoyadas en las Políticas Educativas: claves conceptuales y derivaciones para la formación en competencias ECTS. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 6 (2), 15-28.
- Díaz, A. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, 10 (4), 3-21.
- Diseño Curricular del Ciclo Básico de la NES. Formación General. Emprendedores del aprendizaje para la vida 2015. Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en <http://www.buenosaires.gob.ar/educacion/docentes/diseño-curricular-del-ciclo-basico-de-la-nes>.
- Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis, lecturas en didáctica de las matemáticas*. México, SME-Cinvestav, 118-144.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201.

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.
- Escudero, D., Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10 (1), 53-77.
- Espinel, M. y Noda, J. (2012). Gasta sólo lo que puedas gastar. Una herramienta de optimización con alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 71-85.
- Etcheverry, N., Reid, M. y Botta, R. (2011). Pensando en la formación de los futuros profesores de Matemática. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 28, 165-176.
- Figueiredo, C. y Contreras, L. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 45-68.
- García, M. y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma, Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, 18, 13-23.
- García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: Kronos-GIEM.
- Godino, J., Recio, A., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 64, 1-14.
- Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. Perales, A. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L.

- Rico y J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de Matemática. Retos de la formación de docentes para el siglo XXI. *Paradigma*, 21 (1), 1-20.
- González, J. (2014). Currículo de Matemáticas en ESO y Bachillerato. Universidad de Málaga. Disponible en:
http://www.gonzalezmari.es/DOC_2.1_ACTIVIDAD_MATEMATICA_Y_EDUCACION_MATEMATICA.pdf
- Gros, B. (2016). Retos y tendencias sobre el futuro de la investigación acerca del aprendizaje con tecnologías digitales. *RED Revista de Educación a Distancia*, 50. Disponible en <http://www.um.es/ead/red/50/gros.pdf>
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en Geometría. *AIEM, Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 5-22.
- Hernández, C. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 82, 115-129.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México, Mc Graw Hill.
- Hill, H y Ball, D. (2004). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (5), 330-351.

- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.
- Hitt, F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, DME-Cinvestav, 43-55.
- Hitt, F. y Chavez, H. (1992). Visualización Relacionada a Conceptos de Cálculo con Microcomputadora. *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (2). UAEM, Mexico, 30-35.
- Illuzi, A. y Sessa, C. (2014). Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado. *Serie Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
- Koehler, M. y Mishra, P. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108 (6), 1017-1054.
- Koehler, M. y Mishra, P. (2008). Introducing TPCK. En AACTE (ed.) *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators*. New York, Routledge, 3-30.
- Koehler, M., Mishra, P. y Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)?. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 10 (6), 9-23.

- Leiria, A., González, M. y Pinto, J. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. *PNA*, 10 (1), 25-52.
- León, J. y Flores, J. (2015). *Instrumentalización de la elipse utilizando GeoGebra*. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México.
- Loaiza, R. (2018). *Tecnología e innovación + Ciencia e innovación en América Latina*. Colombia, Corporación CIMTED.
- Magadán, C. (2012). Clase 3. Las TIC en acción: para (re)inventar prácticas y estrategias. Enseñar y aprender con TIC. *Especialización docente de nivel superior en educación y TIC*. Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Nación.
- Martí, J. y Valdeolivas, M. (2016). *TIC, hacia la educación 3.0*. Castellón, Universitat Jaume.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach*. San Francisco, Jossey-Bass.
- Montero, L. (1997). Conocimiento de los profesores y aprendizaje de la enseñanza: investigación y práctica. *Innovación educativa*, 7, 69-77.
- Nagel, M. y Montenegro, F. (2012). GeoGebra en la Escuela Secundaria. Relato de experiencia de formación a distancia con profesores del nivel. *Premisa*, 55, 32-45.
- National Research Council (1999). *Being Fluent with Information Technology*. Washington, D.C.: National Academic Press.
- Noriega, M. y Rosillo, L. (2011). Traducción del lenguaje verbal al lenguaje gráfico y simbólico con ayuda de GeoGebra. En Guerrero, M. (Coord.). *Uso de tecnología en educación matemática. Investigaciones y propuestas 2011*. Morelia, Asociación

Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática, 155-162.

Olivier, O., Díaz, J. y Alonso, L. (2016). Modelo didáctico de la dinámica de la Matemática con el uso de las TIC. *Didasc@lia Didáctica y Educación*, 7 (3), 23-34.

Panizza, M. (2015). Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Disponible en: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Paredes, Z., Iglesias, M. y Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de Matemática. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 7 (1), 85-102.

Pascal, O., Címpoli, O., Minnaard, C. y Comoglio, M. (2011). Impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en los docentes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Lomas de Zamora. *Premisa*, 53, 23-34.

Pérez, M., Roa, C., Vargas, A. y Isaza, L. (2014). ¿Qué caracteriza a un docente destacado? Rasgos de la práctica en los primeros grados de la escolaridad. *Revista Colombiana de Educación*, 67, 171-200.

Pluvillage, F. (2011). Usos de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza del cálculo. En Guerrero, M. (Coord.). *Uso de tecnología en educación matemática. Investigaciones y propuestas 2011*. Morelia, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática, 23-34.

Ponte, J. P., Quaresma, M. y Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 65-86.

- Posadas, P. y Godino, J. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, 1, 77-96.
- Raposo, M., Fuentes, E. y González, M. (2006). Desarrollo de competencias tecnológicas en la formación inicial de maestros, *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 5 (2), 525-537.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid, Ice-Horsori.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Sevilla, Aljibe.
- Roig, R. y Flores, C. (2014). Conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinario del profesorado: el caso de un centro educativo inteligente. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 47, 1-17.
- Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (1), 151-165.
- Rosero, J., Jaramillo, D., Maigua, K. y Zavala, J. (2017). Aplicación de las TICS en la educación superior. *Revista Científica Mundo de la Investigación y el Conocimiento*, 1 (1), 18-28.
- Sadovsky, P. (2005). La teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 13-68). Buenos Aires, Libros del Zorzal.

- Salinas, J. (2004). Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *Revista Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 1 (1). Disponible en: <http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/salinas1104.pdf>
- Salinas, M. (2010). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. *Revista Q. Educación, comunicación y tecnología*, 5 (9). Disponible en: <http://revistaq.upb.edu.co>
- Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado el profesor para la utilización de Geogebra en el aula de Matemáticas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 88, 75-91.
- Santos, L. (2007). *La educación matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales*. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Querétaro, México.
- Santos, L. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6 (8), 35-54.
- Schön, D. (1998). *El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan*. Barcelona, Paidós.
- Sgreccia, N. (2012). *La geometría del espacio en el Profesorado en Matemática: la generación de puentes entre la formación disciplinar y didáctica*. Tesis de doctorado. Facultad de Humanidades y Artes, Universidad Nacional de Rosario.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.
- Shulman, L. (1997). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En Wittrock, M. (Comp.). *La investigación de la enseñanza I*. Barcelona, Paidós, 9-91.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (2), 1-30.
- Silva, A. y De La Torre, E. La herramienta arrastre en funciones usando GeoGebra. Disponible en: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3731339.pdf
- Téliz, F. (2015). Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas. Estudio de las opiniones y concepciones de docentes de ecuación secundaria en el departamento de Artigas. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 6 (2), 13-31.
- Trouche, L. (2009). *Recursos para procesar, aprender y enseñar el Cálculo: nuevos modos de concepción y de difusión*. Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo. Saltillo, México.
- Valverde, J. (2002). Formación del profesorado para el uso educativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 1 (2), 9-28.
- Valverde, J., Garrido, M. y Fernández, R. (2010). Enseñar y aprender con tecnologías: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. *Teoría de la Educación, Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 11 (3), 203-229.
- Yin, R. (1989). *Case Study Research. Design and Methods*. Londres, Sage.

ANEXO 1

SECUENCIAS DIDÁCTICAS DEL SITIO EDUC.AR REFERIDAS AL CONTENIDO “FUNCIÓN CUADRÁTICA”

7.1 Secuencia “Aplicaciones de la función cuadrática”

Fecha de publicación: 24/05/2012

Aparece en su resumen al inicio de la página: “El plan de esta actividad es que se familiaricen con el uso y valor numérico de la función cuadrática, y que también descubran la importancia de la aplicación de esta función al contexto que los rodea”.

Se indican luego los propósitos generales de la propuesta:

- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación.

Se realiza una “Introducción a las actividades” indicando:

“Actividades para descubrir la aplicación de la función cuadrática en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

El plan de esta secuencia es que los alumnos se familiaricen con el uso y valor numérico de la función cuadrática, y que descubran la importancia de la aplicación de esta función en el contexto que los rodea”.

Se indican luego los objetivos de las actividades:

- Aplicar los conocimientos adquiridos en Matemática a situaciones cotidianas.
- Investigar y trabajar sobre la vinculación de las ciencias exactas con situaciones problemáticas reales.
- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el uso de software aplicativo en las clases de Matemática.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes.

Y por último, bajo el título “Objetivos pedagógicos” aparecen las actividades propuestas:

Actividad 1: Aplicación de la función cuadrática

Llamamos función cuadrática a toda función de la forma $f(x) = ax^2 + b \cdot x + c$ donde los coeficientes **a**, **b** y **c** son números reales, siendo **a** distinta de cero. El dominio de la función son todos los números reales.

Término cuadrático: ax^2

Término lineal: bx

Término independiente: c

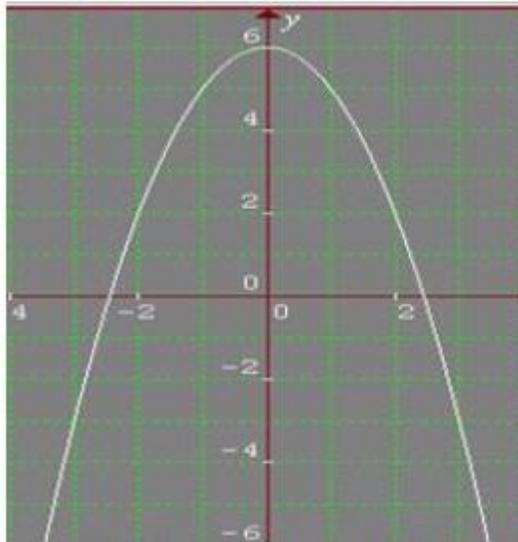


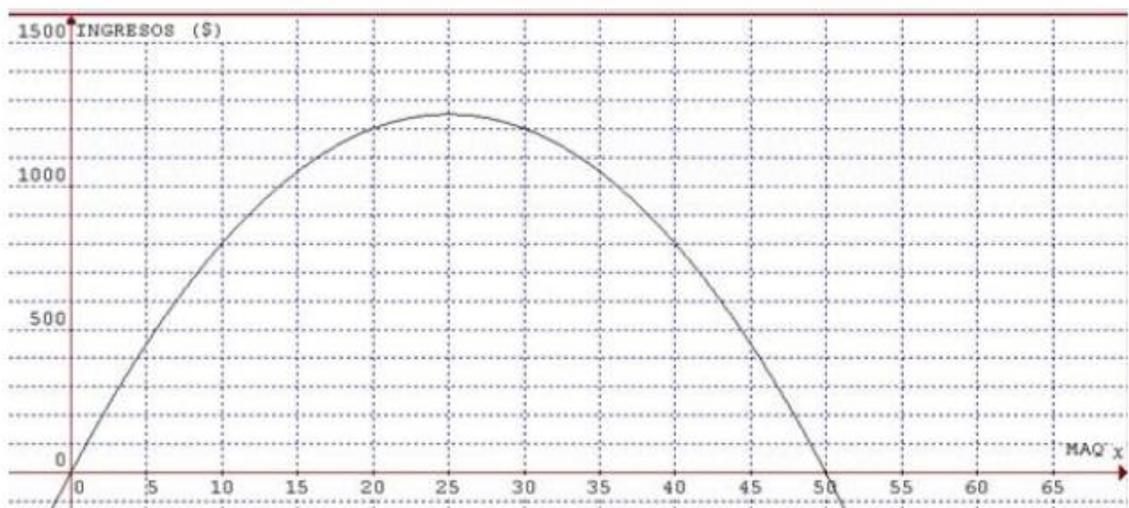
Gráfico de función cuadrática, llamado **parábola**.

Para empezar, propónganles a sus alumnos que busquen información sobre los conceptos **costo** y **ganancia**. Pueden hacerlo en Internet o en otros medios. Luego, propónganles que resuelvan la siguiente situación problemática:

1) Los ingresos mensuales de un empresario de máquinas electromecánicas están dados por la función:

$$f(x) = 100 \cdot x - 2x^2, \text{ donde } x \text{ es la cantidad de máquinas que se fabrican en el mes.}$$

2) Observen el gráfico y respondan:



- a) ¿Cuántas máquinas se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
- b) Si decimos que la ganancia fue de mil pesos aproximadamente, ¿cuántas máquinas se fabricaron?
- c) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican cinco máquinas?
- d) ¿A partir de qué cantidad máquinas se comienza a tener pérdidas?

Actividad 2: Aplicación de distintos programas para graficar y analizar la función cuadrática

1) Luego de responder las preguntas anteriores, grafiquen las siguientes funciones cuadráticas en la carpeta de forma tradicional y verifiquen los gráficos realizados utilizando el programa para graficar funciones y cálculos matemáticos (Graphmática). Tengan en cuenta que el dominio es el conjunto los números reales.

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = 4x^2 - 2x - 3$

Actividad 3

1) A continuación, les proponemos realizar una tabla indicando los datos del análisis de las funciones anteriores. Para hacerla, pueden utilizar el procesador de textos o la hoja de cálculos, ambos disponibles en sus equipos portátiles.

La tabla puede ser similar a la siguiente:

Función	$f(x): x^2 - 4$
Raíces o ceros	
Vértice	
Intervalo de crecimiento	
Intervalo de decrecimiento	
Mínimo	
Imagen	
Intervalo de positividad	
Intervalo de negatividad	

2) También pueden obtener la fórmula de una función observando su gráfico. Esto es muy sencillo de realizar con el programa para graficar funciones y cálculos matemáticos (Graphmática).

7.2 Secuencia “Función cuadrática”

Fecha de publicación: 24/05/2012

Aparece en su resumen al inicio de la página: “En esta sección estudiaremos los diferentes elementos que componen el gráfico de una función cuadrática como lo son el eje de simetría, el vértice y sus raíces. En las actividades los alumnos graficarán diferentes funciones cuadráticas utilizando el programa GeoGebra, y deberán reconocer el eje de simetría, el vértice y las raíces de diferentes funciones”.

Se indican luego los propósitos generales de la propuesta:

- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación.

Se visualiza una “Introducción a las actividades”:

“En esta secuencia estudiaremos los diferentes elementos que componen el gráfico de una función cuadrática. En las actividades los alumnos tendrán que graficar diferentes funciones cuadráticas utilizando el programa GeoGebra y deberán reconocer el eje de simetría, el vértice y las raíces de diferentes funciones. También deberán calcular estos elementos, de forma analítica, utilizando las expresiones matemáticas correspondientes”.

Se indican los objetivos de las actividades:

- Identificar y reconocer las partes de la función cuadrática (eje de simetría, vértices, raíces) mirando gráficos.
- Estudiar y calcular gráfica y analíticamente las raíces y el vértice de funciones cuadráticas.

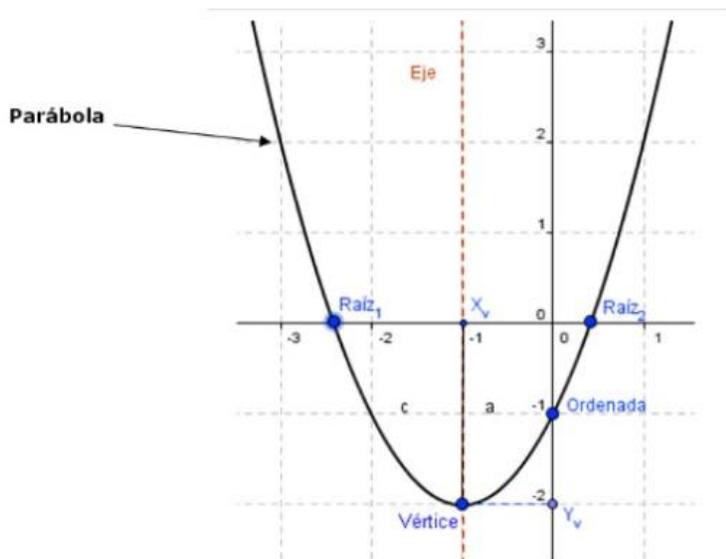
Y se incluyen a continuación las actividades propuestas:

Actividad 1

1) Antes de comenzar, analicen junto con el docente la siguiente información sobre la función cuadrática:

- Toda función cuadrática se puede expresar de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$. Esta forma de escribir a la función cuadrática se denomina **polinómica**.

- El gráfico de una función cuadrática está formado por puntos que pertenecen a una curva llamada **parábola**. Miren el gráfico y vean los elementos que se distinguen en él:



Raíces (raíz₁ y raíz₂): las raíces o ceros de la función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0. Gráficamente, las raíces corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x .

Podemos determinar las raíces de una función cuadrática igualando a cero la función $f(x) = 0$, y así obtendremos la siguiente ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para calcular las raíces se utiliza la siguiente fórmula:

Eje de simetría (eje): representa la recta vertical simétrica con respecto a la parábola.

El eje de simetría de una parábola puede determinarse mediante la siguiente expresión:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

donde x_1 y x_2 son las raíces de la función cuadrática.

Vértice (vértice): el vértice de la parábola está ubicado sobre el eje de simetría y es el único punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. A la coordenada x de este punto la llamaremos x_v y a la y , y_v . El vértice de la parábola vendrá dado por las siguientes coordenadas: $V = (x_v; y_v)$.

Las coordenadas del vértice también pueden hallarse analíticamente por las siguientes expresiones:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

El valor x_v se obtiene con la misma expresión que el eje de simetría:

Una vez obtenido el valor x_v podemos determinar y_v evaluando la función cuadrática $y_v = f(x_v)$.

2) A partir de lo analizado anteriormente, contesten las siguientes preguntas:

- ¿Una función cuadrática tendrá siempre dos raíces?
- ¿El gráfico de la función cuadrática será siempre una parábola cóncava (con las ramas hacia arriba), como se muestra en el gráfico?

Para contestar estas preguntas, ingresen al siguiente link, que les será de gran ayuda para profundizar este tema.

Características de la función cuadrática

Aclaración: este último link llevaba a una página en Internet pero aparece un mensaje de error. La página ya no estaba disponible en el momento en el que se realizó el presente trabajo.

Actividad 2

1) ¿Cuáles de las siguientes son funciones cuadráticas?

a) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5(2x + 3) + 8x(3 - 2x)$

b) $g(x) = 4x^2 - 3(x - 6) - (2x - 3)^2 + 5x - 8$

c) $h(x) = 6x - 3x(x+5) - 2(x - 1)(3 - x) + 6$

d) $t(x) = 2(x-1)^2 - 2x(x + 2) + 5$

Utilizando el programa Geogebra, instalado en sus equipos portátiles, grafiquen las funciones cuadráticas encontradas. Luego señalen las raíces, el vértice y su eje de simetría.

2) Grafiquen las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

A partir de los gráficos realizados anteriormente, contesten:

a) ¿Existe diferencia entre los gráficos? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuántas raíces tiene cada función?

c) ¿Se puede encontrar el vértice sobre la recta x en alguna de las funciones?

d) ¿Alguna de las funciones no corta en el eje x ? De ser así, indiquen cuánto valen sus raíces.

Actividad 3

1) Utilizando el programa Geogebra, grafiquen las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = 1/2 x^2 + 3x - 1$

2) Una vez graficadas, determinen gráfica y analíticamente los siguientes elementos: raíces de la función, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen de las funciones.

a) ¿Cuál es el punto de intersección entre las funciones? ¿Cómo podrían calcularlo analíticamente?

3) Hallen la expresión de la función cuadrática que cumpla con los siguientes requisitos:

a) Su gráfico pasa por el punto $(3, -1)$ y su vértice es el punto $V = (-2, 3)$

b) Su gráfico interseca al eje y en $(0, 7)$ y su vértice es el punto $V = (3, 2)$

Actividad de cierre

1) Reunidos en grupos de dos o tres alumnos, investiguen en Internet o en otras fuentes la biografía del matemático Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi.

2) Analicen en qué consiste el método utilizado por este matemático para resolver ecuaciones cuadráticas. Discutan con sus compañeros y el docente la forma en que se obtienen las raíces de la ecuación cuadrática.

3) Consideren la siguiente función cuadrática: $y = 3x^2 - 2x - 1$. Encuentren sus raíces, según el método investigado, y luego hallen el vértice y la ordenada al origen. Con estos datos realicen en papel un gráfico aproximado.

Enlaces de interés y utilidad para el trabajo

[Función cuadrática. Características](#)

[Funciones cuadráticas](#)

[Al-Khwarizmi](#)

El primero de estos últimos tres links es el mismo ya incluido anteriormente en las actividades y del que ya se mencionó que no llevaba a una página disponible al momento del presente trabajo.

El segundo link lleva a la página:

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/maticas/materiales/4eso/funciones/teoriafuncioncuadratica/teoriafunciones.htm>

Y el tercero, lleva a la página:

<http://www.arrakis.es/~mcj/alkhwa.htm>

7.3 Secuencia “Estudio de la función cuadrática”

Fecha de publicación: 05/01/2012

Indica en su resumen al inicio de la página: “Esta secuencia didáctica abordará la interpretación de la función cuadrática, a través de sus distintas formas de expresión, como lo son su forma polinómica, factorizada y canónica. Para ello se proponen diferentes actividades en las cuales los alumnos trabajarán con el pasaje de una expresión a otra, y analizarán en qué casos conviene utilizar una expresión y no otra”.

Se indican luego los propósitos generales de la propuesta:

- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación

Se realiza una “Introducción a las actividades” indicando:

“En esta secuencia, se estudiará la interpretación de la función cuadrática a través de sus distintas formas de expresión: formas polinómicas, formas factorizadas y formas canónicas. Para ello, se proponen diferentes actividades en las cuales los alumnos trabajarán con el pasaje de una expresión a otra, y analizarán en qué casos conviene utilizar cada expresión”.

Se indican luego los objetivos de las actividades:

- Reconocer la función cuadrática, que se puede expresar de diferentes formas.
- Expresar la función cuadrática en formas canónicas, factorizadas y polinómicas.
- Representar gráficamente las distintas formas de la función cuadrática.

Bajo el título “Objetivos pedagógicos” se incluyen a continuación las actividades propuestas:

Actividad 1

En general, las funciones cuadráticas se expresan de la siguiente manera: $y = ax^2 - bx - c$, con $a \neq 0$. Pero esta ecuación se puede expresar de distintas formas según el tipo de análisis que necesitemos realizar.

1) Para aprender cómo pasar de una forma de expresión a otra, visiten los siguientes links:

[Análisis matemático - Diferentes ecuaciones para una sola parábola](#)

[Análisis de una función cuadrática](#)

El primer link se vincula con la página:

<https://www.youtube.com/watch?v=jIsKGk8OIuQ>

Y el segundo:

http://www.soko.com.ar/matem/matematica/06_funcion_cuadratica_analisis.htm

2) Luego de ver los videos, realicen un resumen con la información obtenida y respondan a las preguntas que se presentan a continuación:

- a) Expresen de manera algebraica las distintas formas de escritura de una función cuadrática.
- b) ¿Qué datos se obtienen en cada una de las expresiones anteriores?
- c) ¿En qué casos conviene utilizar cada expresión?

Actividad 2

1) Analicen la siguiente situación y respondan a las preguntas:

Los meteorólogos de la provincia de San Luis determinaron que la temperatura media en el mes de agosto viene dada por la siguiente expresión:

$$T(t) = -\frac{1}{10}(t - 12)^2 + 20$$

T es la temperatura media en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$) y t representa la hora del día.

- a) Utilizando el programa graficador GeoGebra, representen la expresión anterior.
- b) ¿Cuál fue la temperatura máxima en el mes de agosto? ¿A qué hora del día se registró?
- c) ¿Qué temperatura se registró a las 3 de la tarde?
- d) ¿Hubo temperatura por debajo de los 0°C ? ¿A qué hora?
- e) Expresen la ecuación dada por los meteorólogos, para la temperatura media de una forma diferente.

Actividad 3

1) Utilizando algunos de los programas graficadores (GeoGebra, Winplot o Graphmatica), grafiquen las funciones y completen los datos de cada columna:

Función	Raíces	Eje de simetría	Ordenada al origen	Vértice
$y = x^2 - 4x - 5$				
$y = -(x - 3)^2 + 1$				
$y = x(x + 4)$				
$y = -(x - 1)(x - 1)$				
$y = -x^2 + 2x - 4$				

Actividad de cierre

1) Reunidos de a dos o de a tres alumnos, y utilizando el procesador de textos, disponible en sus equipos portátiles, construyan una tabla como la que se presenta a continuación:

Forma	Expresión de la función	Parámetro	Fórmulas para obtener raíces y vértices
Polinómicas o generales	$y = ax^2 + bx + c ;$ $a \neq 0$		
Factorizadas			$X_v = (X_1 + X_2)/2 ;$ $Y_v = f(X_v)$
Canónicas		$a; (X_v ; Y_v)$	

Enlaces de interés y utilidad para el trabajo

[Función cuadrática, en Wikipedia](#)

[Función cuadrática, en Fatela pre universitarios](#)

[Características de la función cuadrática](#)

[Función cuadrática: forma canónica](#)

El primer y segundo link se vinculan, respectivamente, con las páginas:

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_cuadr%C3%A1tica

<http://es.scribd.com/doc/17504821/10-Funcion-cuadratica>

Los últimos dos links daban un mensaje de error con las páginas que se intentaban vincular.

7.4 Secuencia “Función cuadrática en el básquet”

Fecha de publicación: 24/05/2012

Aparece en su resumen al inicio de la página: “Este recurso aborda los siguientes temas:

Aplicación de las funciones cuadráticas a la ecuación de la trayectoria de una pelota de básquet en un tiro libre (ideal). Interpretación de los parámetros que intervienen en la fórmula de la función”.

Se indican luego los propósitos generales de la propuesta:

- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación.

Se realiza luego una “Introducción a las actividades”:

“Esta secuencia permite el abordaje de los siguientes temas: Aplicación de las funciones cuadráticas a la ecuación de la trayectoria de una pelota de básquet en un tiro libre (ideal), e interpretación de los parámetros que intervienen en la fórmula de la función.

Para poder realizar las actividades presentadas a continuación, es necesario que los alumnos manejen las relaciones trigonométricas y la fórmula de la función cuadrática”.

Y se incluyen a continuación las actividades propuestas:

Actividad 1: Presentación de la función e identificación de los parámetros

Se trabajará con base en la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Sin embargo, atendiendo a las condiciones iniciales del tiro libre de básquet –que corresponde a un tiro oblicuo–, debe considerarse que:

A se relaciona con la aceleración de la gravedad, la velocidad inicial y el ángulo de tiro –medido respecto de la horizontal–;

B se relaciona con el ángulo de tiro;

C representa la altura desde la que parte la pelota –que depende de la altura del basquetbolista–.

En estas condiciones, la ecuación de la trayectoria de la pelota de básquet en el tiro libre es:

$$y = y_0 + tg(\alpha_0) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha_0)} x^2$$

–Se puede aproximar la

gravedad a 10 m/s^2 –.

- 1) Dentro de esta fórmula, identifiquen los parámetros **A**, **B** y **C**.
- 2) ¿Qué parámetros de la ecuación cuadrática varían al modificar la velocidad de tiro al momento del lanzamiento? ¿Y si se modifica la altura de tiro? ¿Y si ahora cambia el ángulo de tiro?

Si trabajan en coordinación con un docente de Física, él podrá darles el enfoque y la interpretación correspondiente a su asignatura. En tal caso, puede analizarse la descomposición de la velocidad en sus componentes rectangulares mediante las relaciones trigonométricas.

Actividad 2: Visualización de la trayectoria y de los cambios físicos que se producen al variar los parámetros

Para realizar esta actividad, deben descargar el archivo de GeoGebra, al que pueden acceder haciendo clic [aquí](#).

El origen de las coordenadas se ubicó en el punto en el que se para el jugador para ejecutar el tiro libre, y las medidas respetan aproximadamente a las medidas reales.

Sus alumnos podrán variar las condiciones iniciales del tiro libre de básquet (altura, velocidad y ángulo de tiro) y visualizar cómo varía la trayectoria en función de ellos.

Después de variar las condiciones iniciales, y antes de iniciar el lanzamiento, es conveniente mover el deslizador "Pelota", de manera que la pelota se ubique en el punto de partida (como se observa en la imagen). Ahora sí, activen la pelota con el botón , que se encuentra en el extremo inferior izquierdo de la pantalla.

Pueden ensayar varios tiros hasta lograr el enceste (pueden estimar las posiciones iniciales, considerando qué parámetros pueden variar si necesitan, por ejemplo, que la curva sea más "cerrada", o si es preciso que la pelota alcance mayor altura, etcétera).

Si quieren borrar las trayectorias anteriores, alcanza con presionar Ctrl + F.

También pueden buscar en Internet la altura de algunos basquetbolistas famosos e intentar distintas velocidades y ángulos de tiro hasta encestar. Además, podrían indicarles distintas condiciones iniciales y pedirles que hallen la posición de la pelota al alcanzar la altura máxima en ese tiro, o el alcance de ella, en el caso de no encestar. Se muestran dos ejemplos:

Si la pelota parte desde una altura de 2,05 m con un ángulo de 50° y una velocidad de 7,30 m/s, ¿cuál será la posición de la pelota al alcanzar la altura máxima?

Si ahora la pelota parte desde una altura de 2,30 m con un ángulo de 60° y una velocidad de 6,8 m/s, ¿a qué distancia del jugador la pelota tocará el piso (a esta distancia se la llama alcance)?

Para verificar las soluciones obtenidas, sus alumnos podrán ubicar los deslizadores según las condiciones del problema y tildar las casillas correspondientes en el mismo archivo. Los deslizadores también pueden usarse haciendo clic sobre cada uno y moviéndolos con las flechas del teclado.

Igualmente pueden incluirse problemas en los que se dan algunas de las posiciones iniciales y se buscan otras, como: en el último partido, Juan lanzó un tiro libre y la pelota alcanzó la máxima altura al ubicarse en el $(2,83; 4)$. Cuando realizó el lanzamiento, Juan soltó la pelota a 1,90 m del piso y con un ángulo de tiro de 56° . ¿Con qué velocidad lanzó la pelota?

Como en los problemas anteriores, la respuesta puede verificarse en el mismo archivo, pero esta vez se deberán mover los deslizadores hasta los valores que se dieron como dato y hasta la velocidad obtenida, y verificar el punto donde se alcanza la altura máxima. (Es aconsejable trabajar con todos los decimales de la calculadora para no propagar errores, y redondear los centésimos solo en la respuesta).

7.5 Secuencia “Función cuadrática, parte I”

Fecha de publicación: 24/05/2012

Se indica en su resumen al inicio de la página: “En este recurso les proponemos que interpreten el papel que desempeñan los parámetros de la fórmula de una función cuadrática”.

Los propósitos generales de la propuesta que se muestran en la página son:

- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación

Se realiza luego una “Introducción a las actividades”:

“En esta secuencia se abordarán los siguientes temas: interpretación de los coeficientes que intervienen en la fórmula polinómica de una función cuadrática; interpretación de los parámetros que intervienen en la fórmula de una función cuadrática dada en forma canónica y el uso del programa graficador GeoGebra”.

Se indican luego los objetivos de las actividades:

- Promover la discusión y el intercambio de diversas estrategias entre pares.
- Promover el trabajo colaborativo, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.

Y se incluyen a continuación las actividades propuestas:

Actividad 1

Los ítems señalados con letras (a, b, c, etc.) son las preguntas que los alumnos deberán responder en el procesador de textos.

Pídanles a sus alumnos que se reúnan de a dos para discutir ideas, aunque cada integrante trabajará con su equipo portátil (si el número de alumnos es impar, puede haber un grupo de tres).

Coméntenles que para realizar la actividad deben utilizar el programa graficador GeoGebra y el procesador de textos –para responder las preguntas que se formulan–, y que es necesario que tengan los dos programas abiertos. La idea es que trabajen con el programa graficador y que vayan contestando las preguntas en el procesador de textos a medida que avanzan, de modo que al finalizar la actividad ya tengan todo respondido.

- 1) Abran el programa graficador y el procesador de textos.
- 2) Estudien cómo se modifica el gráfico de una función cuadrática al variar los coeficientes de su fórmula escrita en forma polinómica:

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

Para ello utilicen la herramienta  , llamada **deslizador**. Esta herramienta permite modificar el valor de un número. Coloquen tres deslizadores llamados **a**, **b** y **c**, respectivamente. Hagan que varíen, por ejemplo, desde -5 hasta 5.

- 3) Escriban la fórmula de la función $f(x) = a * x ^ 2 + b * x + c$, en el campo de entrada. Inmediatamente aparecerá el gráfico que corresponde a los valores de **a**, **b** y **c** que figuran en los deslizadores. Hagan que se vea la fórmula de la función junto al gráfico. Para ello, en la pestaña Básico / Propiedades, activen Muestra Objeto y Muestra Rótulo con la opción Nombre y Valor, como se muestra a continuación.



En la misma ventana hagan clic en la pestaña Color y elijan uno de su agrado para el gráfico de la función. Si hacen clic en la pestaña Estilo podrán modificar el grosor y el estilo del trazo.

4) Hagan clic en Vista y activen Ejes, Cuadrícula y Vista Algebraica.



5) Ahora hagan que aparezca el eje de simetría de la parábola. Para ello, escriban en el campo de entrada la ecuación de la recta $x = -b / (2 * a)$. Luego cámbienle el nombre (llámenla Eje) y elijan un color y un estilo de línea punteada que les guste. En este momento, ya están en condiciones de analizar qué papel juegan los coeficientes **a**, **b** y **c**.

6) Pongan en uno los tres deslizadores.

7) Muevan el punto sobre el deslizador de **a** sin tocar los otros dos deslizadores; observen qué ocurre con el gráfico y respondan.

Utilizando el procesador de textos, disponible en sus equipos portátiles, respondan:

- ¿Qué sucede a medida que el valor de **a** crece en valor absoluto?
- ¿Cómo se relaciona el signo de **a** con la forma del gráfico?

8) Muevan el punto sobre el deslizador de **b** sin tocar los otros dos deslizadores; observen y respondan:

c) ¿Qué sucede al variar el valor de **b**?

9) Muevan el punto sobre el deslizador de **c** sin tocar los otros dos; observen y respondan:

d) ¿Qué ocurre al variar el valor de **c**?

Cierre de la actividad

1) Coloquen los deslizadores de forma tal que el gráfico de la función cumpla estas tres condiciones:

- las ramas van hacia abajo;
- corta ambos ejes en 3;
- su eje de simetría es $-1,25$.

2) Guarden el archivo de GeoGebra con el nombre "Cierre actividad 1", y el del procesador de textos como "Respuestas actividad 1".

Actividad 2

Los ítems señalados con letras (a, b, c, etc.) son las preguntas que los alumnos deberán responder en el procesador de textos.

1) Abran el programa graficador GeoGebra y el procesador de textos, disponibles en sus equipos portátiles.

2) Van a estudiar cómo se modifica el gráfico de una función cuadrática al variar los parámetros de su fórmula escrita de la forma:

$$f(x) = a(x - b)^2 + c$$

Para ello, van a utilizar **deslizadores**. Coloquen tres deslizadores llamados **a**, **b** y **c**, respectivamente. Hagan que varíen, por ejemplo, desde -5 hasta 5 .

3) Escriban la fórmula de la función $f(x) = a * (x - b) ^ 2 + c$, en el campo de entrada. Hagan que se vea la fórmula de la función junto al gráfico y elijan un color que les guste.

4) Activen Ejes, Cuadrícula y Vista Algebraica.

5) Pongan en uno los tres deslizadores.

6) Muevan el punto sobre el deslizador de **a** sin tocar los otros dos deslizadores, observen qué ocurre con el gráfico y respondan:

a) ¿Qué sucede a medida que el valor de **a** crece en valor absoluto?

b) ¿Cómo se relaciona el signo de **a** con la forma del gráfico?

7) Muevan el punto sobre el deslizador de **b** sin tocar los otros dos deslizadores; observen y respondan:

c) ¿Qué sucede al variar el valor de **b** ?

8) Muevan el punto sobre el deslizador de **c** sin tocar los otros dos; observen y respondan:

d) ¿Qué ocurre al variar el valor de **c**?

e) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de la parábola?

f) ¿Cómo se relacionan las coordenadas del vértice de la parábola con los parámetros **a**, **b** y **c**?

9) Para comprobar si respondieron correctamente las preguntas **e** y **f**, escriban en el campo de entrada la ecuación del eje de simetría que propusieron.

10) Renombren esa recta (llámenla Eje), elijan un color y un trazo con línea punteada.

11) Usen la herramienta  para marcar el punto de intersección entre la parábola y la recta Eje.

12) Renombren ese punto (llámenlo V), elijan un color que lo destaque y hagan que muestre su nombre y su valor.

13) Muevan el punto del deslizador **a**. ¿Se modifican las coordenadas del vértice?

14) Muevan el punto del deslizador **b**. ¿Con qué coordenada del vértice se relaciona? ¿Y si mueve el punto del deslizador **c**?

g) ¿Qué nombre recibe la forma en que está escrita la fórmula de la función?

Cierre de la actividad

1) Coloquen los deslizadores de manera que el gráfico de la función cumpla estas dos condiciones:

- su vértice es el punto $(-3, 4)$;
- corta el eje de las ordenadas en -14 .

2) Guarden el archivo de GeoGebra con el nombre "Cierre actividad 2", y el del procesador de textos como "Respuestas actividad 2".

Sitios de interés y utilidad para el trabajo

[Función cuadrática](#)

[Función cuadrática 2](#)

[Función cuadrática. Parábolas. Actividad 1](#)

[Función cuadrática. Parábolas. Actividad 2](#)

De los links que se proponen, en todos aparecen mensajes de error por tratarse de páginas que ya no están disponibles.

7.6 Secuencia “Función cuadrática, Parte II”

Fecha de publicación: 24/05/2012

Se menciona en su resumen al inicio de la página: “En este recurso les proponemos que realicen una simulación animada de un fenómeno físico como aplicación de la función cuadrática”.

Se indican luego los propósitos generales de la propuesta:

- Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación

Se realiza luego una “Introducción a las actividades”:

“En esta secuencia se abordarán los siguientes temas: aplicación de la función cuadrática; modelos matemáticos de fenómenos físicos (tiro vertical) y el uso del programa Modellus para representar un fenómeno físico mediante una animación.

Las funciones cuadráticas intervienen en diversas situaciones que nos rodean, por ejemplo, cuando se arroja un objeto hacia arriba en forma vertical.

En esta secuencia les proponemos abordar el tema aprovechando las ventajas de los programas que permiten hacer simulaciones con animaciones; en este caso, la aplicación Modellus”.

Se indican luego los objetivos de las actividades:

- Promover la discusión y el intercambio de diversas estrategias entre pares.
- Promover el trabajo colaborativo, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.

Bajo el título “Objetivos pedagógicos” se incluyen a continuación las actividades propuestas:

Actividad 1

Pídanles a sus alumnos que formen grupos de a dos para discutir ideas, aunque cada integrante trabajará de manera individual con su equipo portátil (si el número de alumnos es impar, puede haber un grupo de tres).

Indíquenles que para realizar la actividad usarán el programa Modellus.

- 1) Abran el programa Modellus, que permite realizar gráficos, generar tablas de valores y producir simulaciones de modelos físicos.
- 2) Lo primero que van a hacer es escribir la fórmula de la función que define el siguiente fenómeno:

- Se lanza una manzana hacia arriba, en forma vertical, con una velocidad inicial de 10 m/s. La manzana sale despedida a 1 m del piso.

Lo que se busca es averiguar a qué altura del piso está la manzana en cada instante. La fórmula que permite saberlo corresponde a una función cuadrática y es:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t + 0,5 \cdot a \cdot t^2$$

- donde **h** es la altura a la que se encuentra la manzana;
- **h₀** es la altura inicial desde la que fue lanzada;
- **v₀** es la velocidad inicial con la que se lanzó la manzana;
- **a** es la aceleración constante con la que se mueve (en este caso, es la aceleración de la gravedad, conocida como **g**, que se tomará como 10 m/s² y con signo negativo, ya que se considerará positivo el sentido contrario);
- y **t** es el tiempo en segundos.

¿Cuál es, entonces, la fórmula que se ajusta al enunciado?

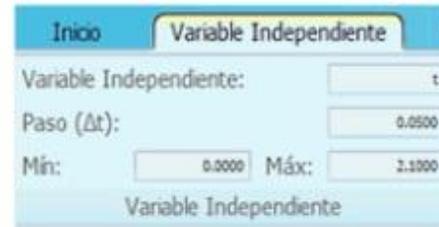
$$h(t) = 1 + 10 \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2 \rightarrow \boxed{h(t) = 1 + 10 \cdot t - 5 \cdot t^2}$$

Escriban la fórmula de la función **h** en la ventana **Modelo Matemático**. Para ello, no dejen espacios, usen * como símbolo de multiplicar y ^ para los exponentes, o sea:

$$h=1+10*t-5*t^2$$



- Hagan clic en la pestaña **Variable Independiente**, establezcan que esa variable es **t**, que el **Paso** sea 0.05 y los valores **Mín** y **Máx** que se muestran.



- Hagan clic en la pestaña **Gráfico** y chequeen que figure **t** en el eje horizontal y **h** en el vertical. Conviene tildar por una vez la opción **Escala Automática**, apretar el botón  para que se realice el gráfico y luego destildar esa opción. Así quedará fijada la mejor escala posible para el gráfico.



Pueden cambiar el tamaño de la ventana del gráfico tirando desde una de sus esquinas. Dentro de la ventana, también pueden modificar la posición del gráfico y la escala de cada eje. Para lograrlo, basta con ubicar el cursor sobre cada objeto y arrastrarlo.

- Ahora van a animar el modelo matemático. Para ello, hagan clic en la pestaña **Objetos**. Una vez allí, hagan clic en **Partícula** y después, en alguna zona en blanco de la ventana. Verán que aparece un dibujo y la pestaña **Animación**.

En **Apariencia** elijan la imagen de la partícula (una manzana en este caso).

En la misma pestaña de **Animación** elijan **0** para la coordenada Horizontal y **h** para la Vertical. Es conveniente aumentar la escala vertical, por ejemplo, a 20. Pueden tildar las demás opciones como se ve en la imagen siguiente.



Para ver la animación y la construcción del gráfico, usen el botón .

Para reiniciarla, aprieten  (o  para que la animación sea continua).

Además pueden observar cómo se genera en forma automática la **tabla de valores** correspondiente. Una opción interesante es tildar **Barras** y elegir un color para cada variable; de esa manera, a medida que se construye el gráfico, en la tabla de valores van apareciendo unas barras horizontales que muestran el comportamiento de las variables.



- Hagan clic en la pestaña **Notas** y escriban el enunciado de la situación que se está graficando y animando. Agreguen cuál es la altura máxima que alcanza la manzana, en qué momento la alcanza y cuánto tarda en volver a la mano de quien la arrojó, o en caer al piso si no la atajara (redondeen los valores).
- Guarden el archivo con el nombre "Tiro libre manzana".

Actividad 2

Indíquenles a sus alumnos que van a trabajar de manera similar a como lo hicieron en la actividad 1. Pueden agruparse de la misma forma.

- 1) Accedan el programa Modellus.
- 2) Abran el archivo que guardaron al finalizar la actividad 1, y llámenlo "Tiro libre general".
- 3) Van a realizar las modificaciones necesarias para que la animación corresponda al caso general del tiro libre de un objeto en forma vertical, que responde a la fórmula:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t + 0,5 \cdot a \cdot t^2$$

Para ello, en la ventana **Modelo Matemático** cambien la fórmula de la función por:

$$h = h_0 + v_0 * t + 0,5 * a * t ^ 2$$

- En la pestaña **Parámetros** coloquen valores para h_0 y v_0 que sean razonables y establezcan -10 para el parámetro a (que es g , como se dijo antes).

Analicen distintos casos.

Por ejemplo, pueden probar con estos valores:

Inicio	Variable Independiente			Modelo	Parámetros		
$h_0 =$	1.00	0.50	1.20	0.00	0.00	0.00	
$v_0 =$	10.00	12.00	8.00	0.00	0.00	0.00	
$a =$	-10.00	-10.00	-10.00	0.00	0.00	0.00	

Caso 1	Caso 2	Caso 3
--------	--------	--------

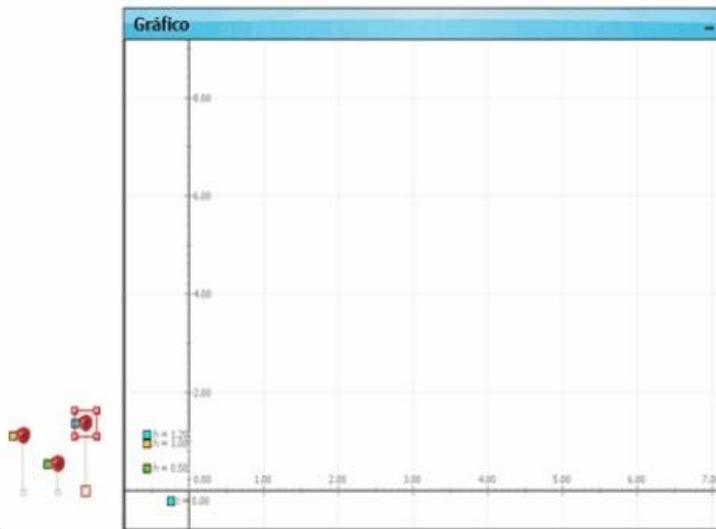
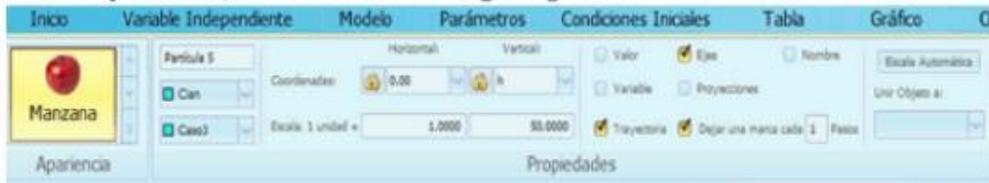
El caso 1 es el mismo de la Actividad 1. En el caso 2 la manzana sale despedida medio metro más abajo y con una velocidad inicial de 12 m/s en lugar de 10 m/s. En el caso 3, parte 20 cm más arriba que en el caso 1, pero con menor velocidad inicial.

- En la pestaña **Gráfico** hagan que figure t en el eje horizontal y h en el vertical en todos los casos y establezcan el color que quieran para el gráfico de cada uno.

Por ejemplo, acá se eligió Naranja, Verde y Cian.



- En la pestaña **Objetos** introduzcan uno para cada caso. Pueden cambiar la manzana por otro cuerpo; por ejemplo, una pelota de básquet o de fútbol, pero elijan el mismo para todos los casos que analicen y ubíquenlos de modo que los orígenes queden alineados. Junto a cada uno aparecerá un cuadradito con el color del caso correspondiente, como se ve en la imagen siguiente.



Tengan presente que con el deslizador pueden ir revisando valores en la tabla y recorrer cada gráfico.



- Presionen el botón para ver la animación. De ser necesario, en la pestaña **Variable Independiente** cambien el valor **Máx** por uno que se ajuste.
- Para que aparezcan todos los casos en la tabla, indiquen en cada caso que la variable independiente es **t** y la dependiente es **h**, y establezcan los colores con que se visualizarán las barras. Por ejemplo:



- Pueden agregar otros casos para analizar, o cambiar los parámetros de los que ya tienen.

- En algún procesador de textos describan qué sucede con la altura máxima que alcanza el objeto, el momento en que la alcanza y el tiempo que tarda en regresar a la mano de quien lo arrojó (o en caer al piso si no lo atajara) al modificar h_0 y v_0 en la fórmula, haciendo una comparación con el caso de la Actividad 1. Por ejemplo, si h_0 es menor que 1, pero v_0 es mayor que 10; si h_0 es mayor que 1 y v_0 es menor que 10; etcétera.

Además, relacionen las distintas situaciones con lo que estudiaron en la Actividad 1 del recurso Función cuadrática (Parte I), es decir, con los cambios que se producen al modificar los coeficientes de la fórmula de la función cuando está escrita en forma polinómica.

- Guarden los dos archivos (el de Modellus y el del procesador de textos) con el nombre "Tiro libre general".

7.7 Secuencia "De crecimientos y trayectorias"

Fecha de publicación: 24/08/2007

No presenta el mismo formato de las propuestas anteriores.

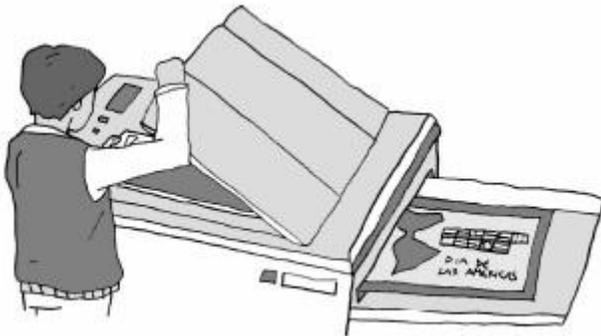
Se indica a modo de subtítulo "Problemas para trabajar con funciones cuadráticas.

(Actividad para alumnos de Polimodal)"

A través de un link se puede descargar la misma imagen que estaba visible en la página, que incluye las actividades:

<p>Area: Matemática Nivel: Polimodal Contenido: Funciones</p>	<h3>Función cuadrática</h3> <h4>De crecimientos y trayectorias</h4>
<p>ACTIVIDAD 1</p> <p>Matias recuerda una discusión mantenida en clase el año anterior, antes del debate abierto que organizaron para el Día de las Américas. Tenían que encargar los afiches para pegar en las paredes, e intentaban determinar cual debía ser la ampliación que debían encargar de unas postales cuadradas, pequeñas pero muy adecuadas.</p>	

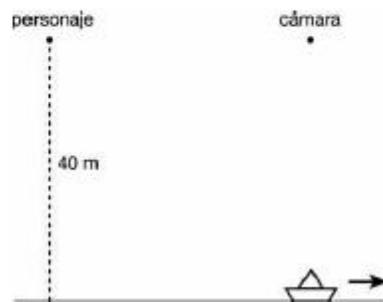
- Expresen el crecimiento del área ocupada por el afiche cuando se encargan fotocopias ampliadas y realicen un gráfico que les permita encontrar rápidamente el valor del área para cualquier ampliación que deseen. (Recuerden que la ampliación al 20%, por ejemplo, significa que el largo, el ancho, la diagonal... resultarán de una longitud mayor en un 20%).
- Comparen el crecimiento del área del afiche y el crecimiento de su contorno, en relación con la ampliación del lado de la postal.
- Expresen mediante fórmulas ambos crecimientos y realicen las gráficas cartesianas correspondientes. ¿Cómo se comportan? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?



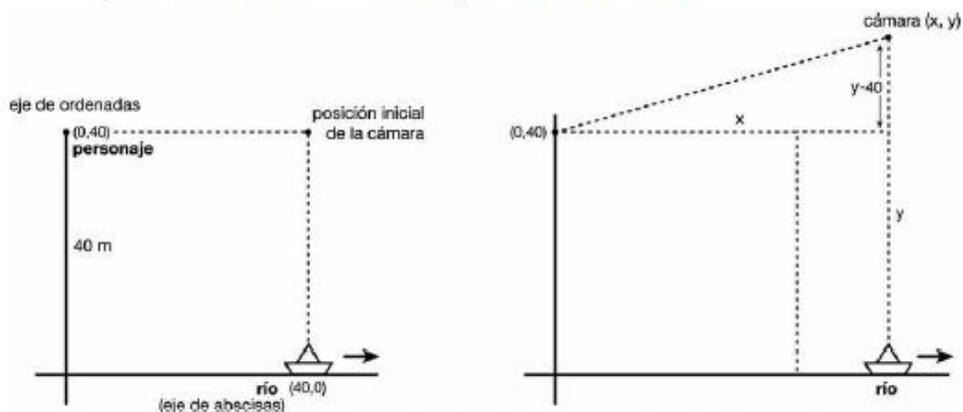
ACTIVIDAD 2

Un director de cine quiere rodar la última escena de la película del siguiente modo: un personaje inmóvil ve marchar un barco a lo largo de un río que corre en línea recta y a 40 m de la persona.

- El director proyecta hacer un largo travelling, manteniendo igualmente enfocados al barco y al personaje, es decir, teniendo siempre a ambos equidistantes de la cámara.



- b. Dibujen aproximadamente la trayectoria. Para poder dibujar la trayectoria con precisión, se puede buscar su ecuación usando el siguiente sistema de referencia.



Encuentren la ecuación y dibujen la gráfica, destacando la parte que corresponde al problema.

- c. Comparen la gráfica con la realizada en a.
- d. Si se piensa en la trayectoria de la cámara como un conjunto de puntos ¿Qué condiciones verifican estos últimos? ¿A qué curva conocida pueden asociar la gráfica?

Reflexión

Las funciones consideradas en las actividades anteriores solo tienen sentido para valores positivos de la variable independiente. ¿Por qué?

En estos casos, han representado "partes" de funciones cuadráticas.

Es posible construir gráficas "completas", independizándose de los contextos en que han sido planteadas. Representen esas funciones y puntualicen semejanzas y diferencias entre ellas, analizando las gráficas.

Para investigar

En distintas disciplinas, es posible identificar fenómenos en los que algunas variables se relacionen mediante la función cuadrática.

En Física, por ejemplo, Galileo descubrió que la expresión que relaciona la distancia d que recorre un cuerpo en caída libre en un tiempo t es cuadrática.

Averigüen cuál es dicha expresión y dibujen su gráfica.



No se explicitan por ejemplo los objetivos de cada actividad, a diferencia de las secuencias anteriormente detalladas.

ANEXO 2

ANÁLISIS DE LOS ESTUDIANTES DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA DE LA SECUENCIA “FUNCIÓN CUADRÁTICA” DEL SITIO EDUC.AR

8.1 Análisis de la secuencia Función Cuadrática – Grupo 1

La introducción nos parece bien, pero agregaríamos algunos ejemplos más de distintos gráficos, con coeficiente principal negativo y parábolas que no son funciones.

Los conocimientos previos que nos parece que el alumno tendría que tener para entender la secuencia didáctica son: polinomios, función lineal y gráficos en ejes cartesianos ya que en el desarrollo de los ejercicios y explicaciones de los mismos se nombra por ejemplo: abscisa, ordenada, raíces de la función, intersección con los ejes.

Dentro de las actividades propuestas agregaríamos la resolución analítica de distintos tipos de funciones cuadráticas y expresarla en sus distintas formas como la implícita, canónica y factorizada.

La inclusión de un software como GeoGebra permite abordar los contenidos desde otra forma, pero creemos que el manejo sin la ayuda de un docente se le dificultaría al alumno para la resolución de los ejercicios.

Además sería importante la demostración del manejo del software por parte de un docente para sacar más provecho y poder mostrar mediante deslizadores cómo varían las gráficas de las funciones cuadráticas según sus coeficientes.

Esto presentaría una gran ventaja para los alumnos en comparación con la resolución en lápiz y papel.

No observamos un resumen de la unidad, salvo distintos tipos de ejercicios que van mostrando las distintas funciones que puede haber y sus aplicaciones.

En cuanto a la utilización de otro tipo de materiales o recursos didácticos, creemos que ayudaría mucho dar algunos ejemplos de funciones cuadráticas y relacionarlos con situaciones reales para captar la atención del alumno y despertar mayor interés por el tema.

Se incluyen también ciertos ejercicios que evaluarían los conocimientos adquiridos por los alumnos, pero por ejemplo el ejercicio que dice:

Hallen la expresión que cumpla con los siguientes requisitos:

Su gráfico pasa por el punto $(3; -1)$ y su vértice es el punto $V = (-2; 3)$

Su gráfico interseca al eje y en $(0; 7)$ y su vértice es el punto $V = (3; 2)$

Podría presentar demasiada dificultad para alguien que empieza a ver el tema.

8.2 Análisis de la secuencia Función Cuadrática – Grupo 2

La secuencia didáctica desarrolla actividades diversas sobre la función cuadrática. Para introducir el tema, la secuencia detalla la sintaxis de la función, haciendo hincapié en que el coeficiente principal (cuadrático) debe ser distinto de cero para que exista tal función.

También nombra al gráfico e indica algunos de sus elementos: nombre del gráfico, ceros o raíces, vértice, ejes...

Para trabajar dicha función, creemos que se deben conocer previamente los siguientes temas/conceptos (o al menos tener una noción acerca de ellos):

- Ecuaciones.
- Función lineal.
- Potencia y raíz.
- Ejes cartesianos.
- Graficar en ejes cartesianos.
- Resolución de cálculos combinados.
- Elementos básicos de GeoGebra.

La primera actividad de la secuencia es de comprensión, donde el estudiante debe contestar dos preguntas basadas en la teoría desarrollada previamente.

La segunda actividad consiste en analizar algebraicamente una serie de funciones y determinar cuáles de ellas son cuadráticas, debido a que hay algunas en que se cancela el coeficiente principal y queda una ecuación lineal. Este ejercicio requiere que el estudiante haya comprendido que es necesario que el término cuadrático exista para que haya una función cuadrática.

En la segunda parte de esta actividad, se propone al estudiante graficar tres funciones en GeoGebra y a partir de ellas analizar la posición de los gráficos. El propósito de esta actividad es reflejar las diferencias gráficas a partir de las diferencias en la ecuación de la función.

La tercera actividad plantea la resolución analítica y gráfica de dos ecuaciones y el análisis posterior de sus elementos: vértice, ejes, raíces...

La actividad de cierre, requiere de la búsqueda en Internet como recurso pedagógico para establecer una relación entre el método utilizado por el matemático Al-Khwarizmi y el cálculo analítico de las raíces de la función.

Las actividades son diversas dado que algunas de ellas permiten múltiples respuestas, como en el caso de aquella que requería contestar la diferencia entre gráficos; y también hay otras actividades que tienen respuestas únicas y determinadas, en cuanto piden cálculos de raíces, vértices, etcétera, que son respuestas pautadas.

Si bien todas estas actividades detallan y explican bien las distintas partes del gráfico, no indican cómo realizarlo manualmente, es decir, sin recurrir al software GeoGebra. Esto puede deberse a que se considera un conocimiento previo el graficar una función mediante tablas, que permitan obtener la imagen de la función y luego trazar los puntos obtenidos en los ejes de coordenadas. No obstante, se aclara bien en la secuencia cómo obtener los puntos claves de la parábola como para poder graficarla sin necesidad de una tabla de valores: vértice, ordenada, raíces...

Con respecto a las definiciones otorgadas en la primera parte de la secuencia (actividad 1), son claras y concisas y otorgan los medios (ecuaciones en este caso) para hallar puntos importantes de la función.

Al ser actividades que requieren de la participación activa del estudiante para resolver la ejercitación, no incluyen demasiados gráficos a modo de demostración. Esto puede ser negativo si se ve el tema por primera vez, dado que da la posibilidad de que el estudiante realice los gráficos correspondientes de manera errónea. El único gráfico que se incluye en la secuencia (Actividad 1) indica las distintas partes de la parábola, pero no la hace

corresponder con ninguna función. Hubiera sido conveniente poner su expresión analítica para que el estudiante establezca la relación entre gráfica y función.

Por otro lado, se incluye la utilización del software GeoGebra, poderosísima herramienta dinámica de gráfico matemático. Esto aporta al esclarecimiento y resolución de la función cuadrática, sin lugar a dudas. Sin embargo, la secuencia lo plantea como tema ya sabido, sin detallar o aportar información suficiente acerca de su uso (por ejemplo, ingresar funciones, crear deslizadores).

Sería útil esta herramienta como recurso de autoevaluación para el estudiante en tanto comprobar sus propios gráficos hechos en lápiz y papel versus aquéllos hechos con la herramienta informática.

Para concluir, la secuencia es favorable para el aprendizaje de la función cuadrática para los estudiantes en tanto desarrolla los temas de manera clara y simple. No requiere de demasiados recursos más que de una computadora. No obstante, no alcanza para ser tomada como única guía de actividades, ya que carece de ciertos elementos que se han mencionado anteriormente.

8.3 Análisis de la secuencia Función Cuadrática – Grupo 3

La secuencia didáctica dada propone primero y principal la teoría básica y fundamental de función cuadrática para que los alumnos la analicen junto con el docente.

Se entiende que previamente los alumnos han visto y trabajado con los contenidos relativos a la función lineal, lo cual ya les permite saber que una función determina un gráfico; en el caso de la función lineal, como bien lo determina su nombre es una recta (línea). En la

teoría dada se introduce al alumno el concepto de nuevos términos (parábola, vértice, ordenada, raíz de la función) y se explica en detalle qué es cada uno, para qué sirve y cómo se obtiene.

Nos imaginamos que la idea de que el alumno sea quien pueda determinar qué tipo de “dibujo” determina en un par de ejes cartesianos la función cuadrática sería más conveniente para despertar su interés y su imaginación; aunque no nos parece mal que se oriente el tipo de resultado previo a que realice el gráfico y paralelamente la incorporación de GeoGebra creemos es importante.

La actividad 2 es fundamental si consideramos la secuencia establecida, ya que en ella vamos a ver qué de lo explicado realmente el estudiante pudo entenderlo. Especialmente porque observamos que los tipos de ejercicios propuestos van más allá de los conceptos básicos que se dieron como teoría.

Por otro lado, si consideramos que los estudiantes hoy por hoy manejan casi de forma intuitiva las herramientas informáticas y que lo que pueden buscar y encontrar en Internet es más interesante para ellos, la incorporación del programa GeoGebra así como la búsqueda de información es realmente útil y una excelente excusa para que vean que las computadoras también pueden servir para otros objetivos más que juegos y redes sociales.

Podría incluirse algún ejercicio que invite al alumno a que “juegue” con el programa y de esa manera descubra, por ejemplo, en qué varía que “a” sea negativo, o un número muy grande o un número muy cercano a 0.

Creemos que a modo de guía, la secuencia dada es bastante completa y precisa. Obviamente cada docente luego puede hacer énfasis en un tema más puntualmente si ve

que los alumnos de la clase no entienden lo que se explica, obviar o pasar por encima otro, utilizar otras clases de ejercicios, etc.

8.4 Análisis de la secuencia Función Cuadrática – Grupo 4

El contenido del tema está basado en la expresión de la función cuadrática y la información de la misma, dando por sobreentendido que los alumnos ya tienen conocimientos de polinomios, de funciones, y en particular, de la función lineal.

La expectativa de logro es llegar a la comprensión y conocimientos de cómo es una función cuadrática y la información que podemos extraer para su gráfico.

Actividad 1:

Proponemos iniciar con la Actividad 2, parte a, en la cual los alumnos pueden tomar conocimiento de cómo es una función cuadrática. Esto realizado en forma escrita aún sin GeoGebra ya que nos permitirá ver de mejor manera en qué estado de conocimiento se encuentra la clase.

Luego de esa actividad pasaríamos a la ecuación genérica de la parábola y agregaríamos un ejemplo numérico para que se vayan acostumbrando a graficar con valores.

Mediante GeoGebra les mostraríamos cómo comenzando con $f(x)=x^2$, la vamos desplazando y haciendo variar la forma hasta llegar a la ecuación completa.

Para la explicación de las raíces de la función, asociaríamos el concepto con la intersección con los ejes coordenados, basándonos en lo que ya conocen de función lineal, la presentación de la fórmula resolvente, y el cálculo de las raíces reales.

Explicaríamos primero el concepto de vértice y veríamos cómo se encuentran sus coordenadas utilizando la fórmula resolvente. Luego incorporaríamos la definición del eje de simetría. Les mostraríamos cómo calcular la coordenada “x” del vértice mediante la definición de punto medio entre las raíces.

Luego apoyándonos en la fórmula resolvente, explicaríamos que una función cuadrática puede tener raíces coincidentes, o no tener raíces. Introducimos el concepto del discriminante dentro de la raíz de la fórmula resolvente. Y la noción de concavidad.

Actividad 2:

Nos parece bien para que los alumnos vean las diferentes posiciones de la parábola en el plano. Podríamos agregar la pregunta: ¿qué sucede cuando multiplicamos toda la función por “menos 1”? y que lo grafiquen, para que vean cómo es una concavidad negativa.

Actividad 3:

Refrescaríamos la intersección entre funciones antes de comenzar la actividad.

Actividad de Cierre:

Después de la búsqueda y el análisis de lo encontrado realizaríamos una comparación con el método de completar cuadrados, que suponemos ya conocen.

Respecto de la utilización de GeoGebra, propondríamos que el alumno tenga total libertad de “jugar” con la función (variando los valores) de manera que sean ellos mismos quienes interactúan y exploran, formando así los primeros conceptos y pudiendo predecir futuras situaciones, aproximándose a un modelo de base empírica.

De esta manera el alumno está en condiciones de introducir el vocabulario específico y formalizar los conceptos: raíces, eje de simetría y vértice.

Luego se busca obtener un modelo matemático que represente lo sucedido en la práctica para finalmente asociarlo a la función cuadrática. El docente guiará la actividad por medio de la formulación de enunciados acompañando un razonamiento lógico.

Los alumnos deberán enunciar las conclusiones de la práctica y traducir al modelo matemático de la misma, obtener las hipótesis derivadas ejemplificando alguna de ellas, y reconocer las consecuencias observables que luego permitan corroborar o refutar las afirmaciones realizadas. La experiencia en conjunto mediante un emprendimiento grupal de trabajo socializa la clase, pero el aprendizaje es siempre individual.

Las conclusiones y la evaluación se realizarán con las determinaciones teóricas y los informes grupales.

ANEXO 3

DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA ACERCA DEL CONTENIDO “FUNCIÓN CUADRÁTICA” UTILIZANDO GEOGEBRA

9.1 Diseño de una propuesta de enseñanza acerca del contenido “Función Cuadrática” – Grupo 1



Dirigido a: estudiantes de segundo año (13 – 14 años)

Objetivos:

- El estudiante deberá reconocer la función cuadrática en sus distintas formas y poder identificar los puntos importantes para poder graficarla.

- Poder analizar el gráfico de una función cuadrática y sacar conclusiones.

Conocimientos previos: Polinomios y función lineal.

Desarrollo:

Definición de función cuadrática: En matemática, una función cuadrática o función de segundo grado, es una función polinómica de segundo grado definida como:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son números reales y a es distinto de 0 (cero)

a: *Coficiente principal*, donde:

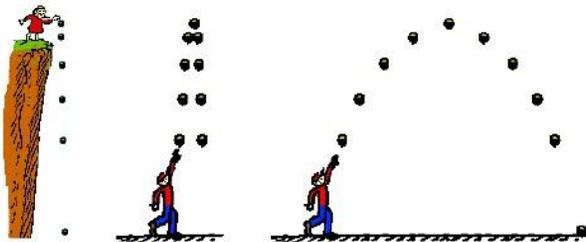
si $a > 0$ (es positiva) la parábola se abre hacia arriba

si $a < 0$ (es negativa) la parábola se abre hacia abajo

b: *Coficiente del término lineal*.

c: *Ordenada al origen*.

Su gráfica es una parábola y lo podemos apreciar en efectos o construcciones de nuestra vida cotidiana.



La Parábola

Presencia de la parábola en la arquitectura

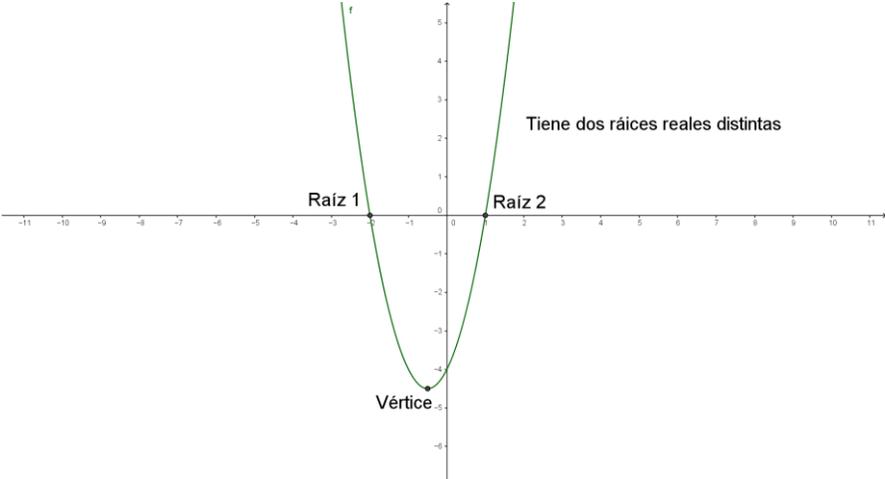
En algunas construcciones arquitectónicas se utilizan cables o estructuras con forma de parábola, ya que estas distribuyen de manera uniforme el peso al que son sometidas.

 A diagram of a suspension bridge. Two tall vertical towers support two cables that curve downwards in a parabolic shape. The cables are connected to a horizontal deck. Labels include 'Tirante' pointing to one of the cables and 'Tablero' pointing to the deck.

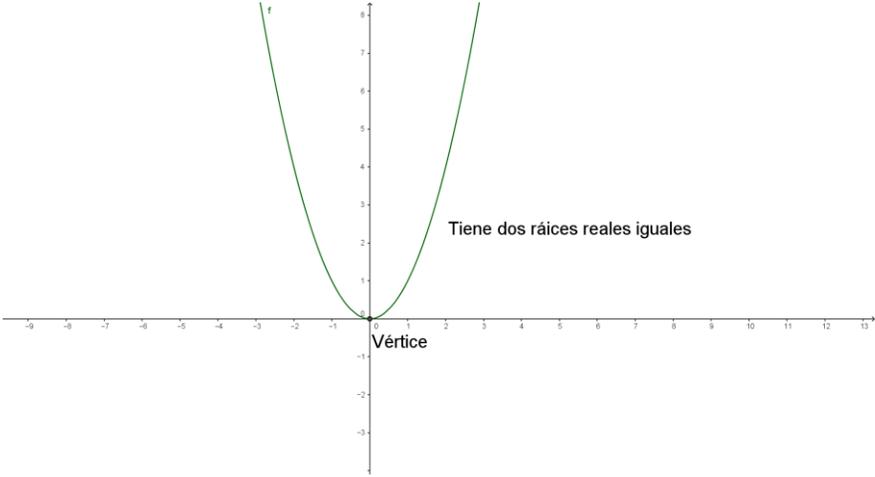


Ejemplos de funciones cuadráticas y sus respectivos gráficos:

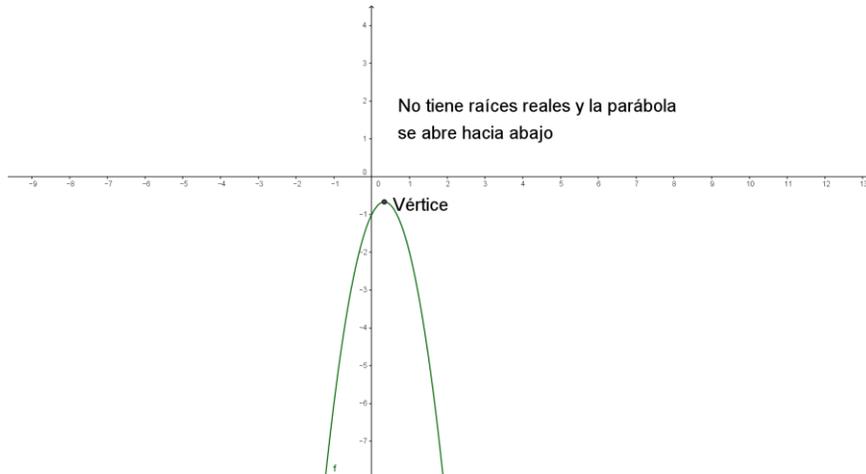
- $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$



- $f(x) = x^2$



- $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$



Elementos que la componen:

- **Ordenada al origen:** Es el punto de intersección de la parábola con el eje Y.

- **Raíz:** Se llama así al punto de intersección de la parábola con el eje X.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una función cuadrática puede tener 2,1 ó ninguna raíz real.

- **Eje de simetría:** Toda parábola es una curva simétrica con respecto a una recta vertical llamada EJE DE SIMETRIA

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- **Vértice:** Es el punto de intersección entre la parábola y el EJE DE SIMETRIA.

Mediante el uso de un software (GeoGebra) veremos cómo varía una función de acuerdo a como varían sus elementos:

1. Una vez abierto el GeoGebra, buscar en la barra de herramientas la opción 'Deslizador' (es la anteúltima).
2. Utilizando esa herramienta, hacer click cerca de alguna esquina de la vista gráfica: Esto abrirá una ventana donde se podrá poner nombre al deslizador, elegir el valor numérico máximo y mínimo que puede alcanzar, entre otras cosas. Por el momento, dejemos el nombre como 'a', y el intervalo entre '-5' y '5', tal y como está. Aceptar, esto creará el deslizador.
3. Repetir este paso dos veces, creando los deslizadores 'b' y 'c'.
4. Ahora copiar en la barra de entradas: ' $f(x)=a.x^2+b.x+c$ ' (sin las comillas) y presionar enter.
5. Esto creará el gráfico de la función cuadrática donde 'a' es el coeficiente principal, 'b' es el coeficiente del término lineal, y 'c' es la ordenada al origen.
6. Ahora pueden cambiarse los valores de 'a', 'b', y 'c' por cualquiera que esté entre sus valores determinados como mínimos y máximos, ahorrándonos el tiempo de crear un gráfico para cada función que queramos analizar.
7. Ejemplo: Para graficar la función: ' $f(x)=x^2+3x+4$ ', debemos colocar a 'a' en la posición '1', 'b' en '3', y 'c' valdrá '4'. Para la función ' $f(x)=2x^2-2$ ', $a=2$, $b=0$, $c=(-2)$.
En cada caso, ¿cuáles son las coordenadas del vértice y de las raíces?

Distintas formas de expresar la función cuadrática:

- **La forma desarrollada o polinómica** de una función cuadrática corresponde a la del polinomio de segundo grado, escrito convencionalmente. Esta forma nos permite identificar rápidamente la ordenada al origen.

$$y = ax^2 + bx + c$$

- **La forma canónica** puede quedar expresada mediante el cuadrado de un binomio. Nos permite visualizar las coordenadas del vértice = $(x_v; y_v)$.

$$y = (x - x_v)^2 + y_v$$

- Toda función cuadrática se puede escribir en función de sus raíces, la llamamos **forma factorizada**. De esta manera podemos visualizar las raíces.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(Donde a es el coeficiente principal; x_1 y x_2 son las raíces)

He aquí unos ejemplos de cómo pasar la expresión de una función de una forma a otra:

- a) Pasar una función de expresión de **forma polinómica** a **forma canónica**.
- b) Pasar una función de expresión de **forma factorizada** a **forma polinómica**.

a) Forma **polinómica**: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Para pasar esta función a forma **canónica**, veremos arriba que la forma **canónica** muestra las **coordenadas del vértice** de la función. Entonces buscamos estos datos:

La coordenada 'x' del vértice se calcula: $-b/2a$

En este caso $b=4$ y $a=1$:

$$-4/2 \cdot 1 = -4/2 = -2$$

$$x_v = -2$$

Y la coordenada y del vértice y_v será el resultado de reemplazar x por x_v en la función:

$$f(x_v) = x_v^2 + 4x_v + 3$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3$$

$$f(-2) = 4^2 - 8 + 3$$

$$f(-2) = 16 - 8 + 3$$

$$f(-2) = 11$$

11 es el valor de y_v .

Reemplazando estos valores en la forma canónica:

$$y = (x - x_v)^2 + y_v$$

$$y = (x - (-2))^2 + 11$$

$$y = (x + 2)^2 + 11$$

Se ha realizado el pasaje de forma polinómica a forma canónica.

b) Forma **factorizada**: $g(x) = 2(x-2)(x+3)$

Pasar esta función a **forma polinómica** es fácil: Se aplica la **propiedad distributiva**.

$$g(x) = 2(x-2)(x+3)$$

$$g(x) = 2(x^2 + 3x - 2x - 6)$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x - 12$$

Análisis de una función cuadrática:

Vamos a analizar la función: $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Se incluye su gráfico al final.

Dominio: Son todos los valores que puede tomar 'x'. Como no existen valores posibles de 'x' para los cuales la función no pudiese resolverse, el **dominio** serán **todos los números**

reales: $(-\infty; +\infty)$

Imagen: Son todos los valores que puede tomar la función $f(x)$, o 'y', teniendo en cuenta todos los valores del **dominio**.

Si observamos el gráfico más abajo, veremos que la función toma su valor **mínimo** en el punto

$(-2;-1)$ y luego se extiende hacia arriba infinitamente. Por lo tanto su **imagen comprenderá**

al número (-1) y todos sus mayores: $[-1,+\infty)$

Sus **raíces** son los puntos en que $f(x)=0$.

Entonces:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Usando la fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = -2 \pm 1$$

$$x_1 = -2 + 1 = -1$$

$$x_2 = -2 - 1 = -3$$

Las raíces se encuentran en $(-1;0)$ y $(-3;0)$.

El **eje de simetría** es la recta que divide al gráfico de la parábola en dos partes iguales.

Su ecuación corresponde a la siguiente forma:

$$x = x_y$$

En este caso, el valor 'x' del vértice de la función es (-2). Entonces el **eje de simetría** será la recta vertical: $x = -2$.

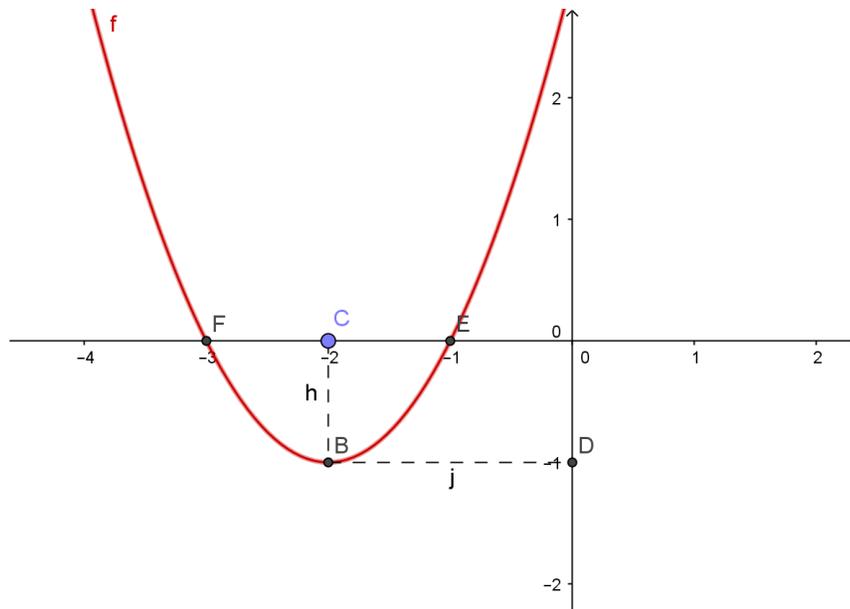
Intervalo de crecimiento: Es la parte de la función en la cual su valor 'y' incrementa al incrementar su valor 'x', y se expresa en el **dominio**, o sea sus valores 'x': $(-2; +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: Análogamente, es la parte de la función en que uno de 'x' o 'y' crece, y el otro decrece: $(-\infty; -2)$

Intervalo de positividad: Es la parte de la función en donde sus valores 'y' son positivos.

En este caso, todos los valores del **dominio** menores a (-3) y los más grandes que (-1): $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Intervalo de negatividad: $(-3; -1)$. Notar que estos intervalos están separados por las **raíces**.



Ejercicio Integrador:

Forma Factorizada:

$$g(x) = a(x-x_1) \cdot (x-x_2)$$

$$g(x) = (-1) \cdot (x-3) \cdot (x-1)$$

Forma Polinómica:

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Forma Canónica:

$$g(x) = (x - x_v)^2 + y_v$$

$$g(x) = -(x-2)^2 - 1 \quad *$$

* Cálculo de la forma canónica:

$$g(x) = -1x^2 + 4x - 3$$

a b c

$$g(x) = -1 \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

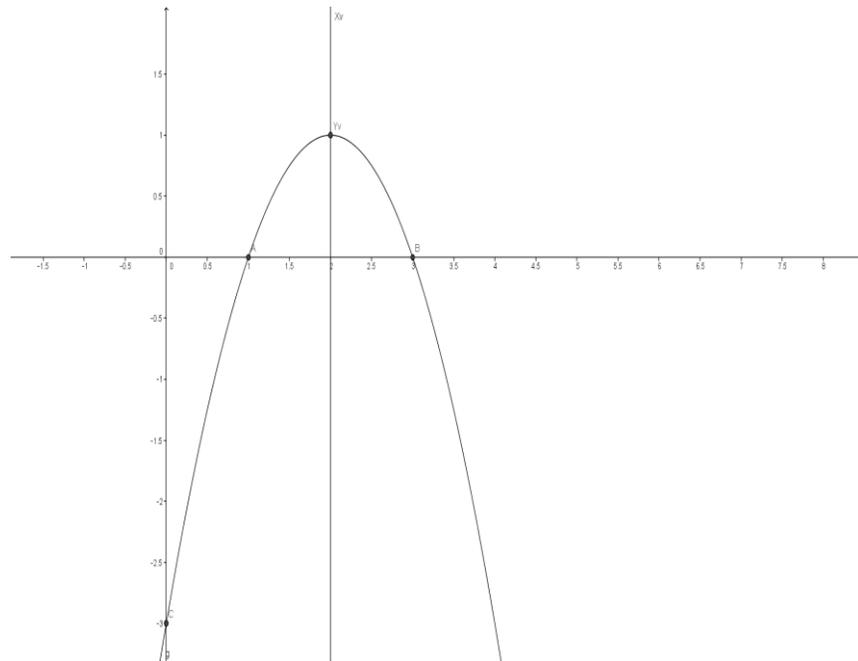
a

$$g(x) = -1 \cdot (x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 + 3)$$

$$g(x) = -1 \cdot (x^2 - 4x + 4 - 4 + 3)$$

$$g(x) = -1 \cdot ((x-2)^2 - 1)$$

$$g(x) = -1 \cdot (x-2)^2 + 1$$



Dominio: todos los números reales

Vértice: en este caso es (2 ,1)

Imagen: $(-\infty; 1]$, ya que el $y_v=1$ y el valor de “a” es negativo pues “a” vale -1

Eje de simetría: $x= 2$

Ceros o Raíces: {1;3} estos son los valores de x_1 ; x_2 , respectivamente . Gráficamente son aquellos valores en el eje x, donde se corta tal eje. (A=1 ; B=3)

Intervalo de crecimiento: $(-\infty;2]$

Intervalo de decrecimiento: $[2; +\infty)$

Intervalo de positividad: (1; 3)

Intervalo de negatividad: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Ordenada al origen: “c”= -3

9.2 Diseño de una propuesta de enseñanza acerca del contenido

“Función Cuadrática” – Grupo 2

Destinatarios: alumnos de 2° año de la Escuela Secundaria (14 – 15 años)

Objetivos:

Que los alumnos puedan:

- Reconocer una función cuadrática y sus elementos principales, a través de expresiones algebraicas, tablas o gráficos.
- Utilizar funciones cuadráticas para modelizar situaciones.
- Expresar una función cuadrática de forma polinómica, canónica o factorizada.
- Utilizar el programa GeoGebra como una herramienta para la representación gráfica.

Actividades:

- 1) La distancia en km a la que se encuentra un camión respecto de la empresa para la que trabaja, desde que sale hasta que vuelve, en función del tiempo (expresado en horas) está dado por la fórmula: $f(t) = t \cdot (8 - t)$
 - a) ¿Cuántas horas tarda el camión en volver a la empresa?
 - b) Si el camión salió a las 7:00 hs, ¿a qué hora se encuentra más lejos de la empresa y a qué distancia está?

Esta primera actividad se utiliza para introducir el contenido Función Cuadrática. Se necesitan como contenidos previos: Función, Gráfico de funciones a través de una tabla de valores, Ceros de una función, Crecimiento y decrecimiento de una función. Como los alumnos ya conocen la fórmula de una función (y trabajaron con funciones lineales) pueden

realizar un gráfico aproximado de la situación e interpretar el problema dado, construyendo una tabla.

Se les puede indicar luego que grafiquen la función en GeoGebra y que comparen los resultados.

A partir de esta actividad, se ve con los alumnos que $f(t) = t \cdot (8 - t) = -t^2 + 8t$ y se define entonces la función cuadrática a partir de un polinomio de 2° grado:

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

Se definen luego algunos elementos principales: los ceros o raíces, el vértice, y el eje de simetría.

2) Graficar en GeoGebra la función $f(x) = x^2$

a) Definir un deslizador, por ejemplo llamado a , y modificar la función anterior:

$$f(x) = a x^2$$

¿Qué sucede si a varía entre 0,5 y 3? ¿Y si varía entre -2 y 2?

b) Definir un deslizador, por ejemplo llamado c , y modificar la función anterior:

$$f(x) = x^2 + c$$

¿Qué sucede si c varía entre -3 y 3?

c) Definir un deslizador, por ejemplo llamado b , y modificar la función anterior:

$$f(x) = (x - b)^2$$

¿Qué sucede si b varía entre -3 y 3?

Con la ayuda de GeoGebra la idea de esta actividad es que se puedan graficar muchos ejemplos y ver la variación del gráfico, según los valores de cada deslizador.

Si identifican los elementos principales en cada caso, pueden ver que el vértice está relacionado con la expresión $f(x) = (x-b)^2$ y $f(x) = x^2 + c$. Se define a partir de eso la expresión canónica de la función cuadrática $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$.

3) Graficar en GeoGebra las siguientes funciones e identificar en cada caso sus raíces, el eje de simetría y el vértice:

$$f(x) = 3x^2 + 9x - 12$$

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$h(x) = 4x^2 - 4x + 7$$

Luego de la actividad 1 y habiendo definido los elementos principales de una función cuadrática, se espera que puedan reconocer la cantidad de ceros que puede tener una función de este tipo.

Se les dará a los alumnos la fórmula que permite calcular las raíces de una función

cuadrática: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

4) Graficar en GeoGebra las siguientes funciones e identificar sus elementos principales:

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$

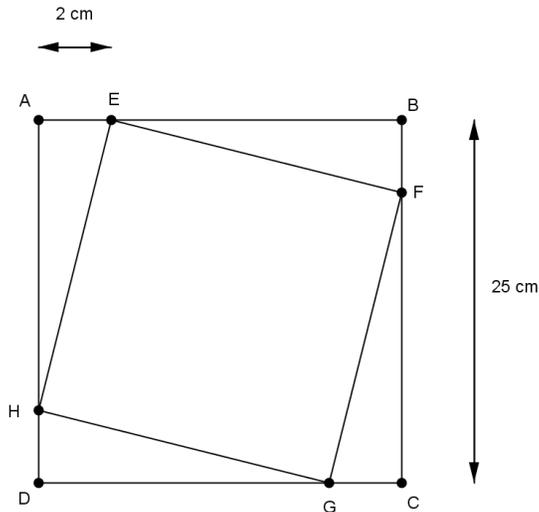
$$g(x) = 2 \cdot (x+3) \cdot (x-1)$$

$$h(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 8$$

Con esta actividad se espera que los alumnos reconozcan que es la misma función, expresada de distintas maneras. Se define la expresión polinómica, factorizada y canónica de una función cuadrática. Para corroborar analíticamente que se trata de la misma función, se puede mostrar cómo se pasa de una expresión a otra.

Actividad de cierre:

Dado un cuadrado ABCD de 25 cm de lado, se considera el cuadrado EFGH cuyos vértices están a una misma distancia de los vértices del cuadrado original, como se indica en la figura:



- ¿Cuál es la superficie de EFGH cuando la distancia de E a A es de 2 cm?
- ¿Y si la distancia fuera de 3 cm?
- ¿Qué función representa la superficie del cuadrado EFGH cuando la distancia de E a A es de x cm?
- ¿Cuál es el cuadrado EFGH cuya superficie sea la menor posible?

9.3 Diseño de una propuesta de enseñanza acerca del contenido

“Función Cuadrática” – Grupo 3

Objetivos:

Que el alumno sea capaz de:

- Identificar una función cuadrática y sus elementos principales.
- Graficar funciones cuadráticas.
- Resolver sistemas de ecuaciones.

Actividades y desarrollo de la clase:

- Iniciamos a los alumnos en función cuadrática dándole 2 funciones para que armen una tabla de valores

○ Dados: $f(x) = x^2$ $g(x) = -x^2$

Hallar los valores de las funciones cuando X toma los valores:

-2, -1, 0, 1, 2.

Ubicar esos puntos en una par de ejes cartesianos y unir los puntos.

Con esta actividad acercamos al alumno al gráfico de una parábola, ya que se considera que previamente sólo relacionaba la palabra función solamente a funciones lineales.

- Ingresamos la función “ $f(x) = ax^2$ ” en GeoGebra, estableciendo un deslizador a para que tome valores comprendidos entre -3 y 3.

De esta manera mostramos la variación en la amplitud de la parábola y vemos la diferencia entre valores de “a” positivos y negativos y luego damos el siguiente ejercicio.

- Copiamos en el pizarrón la forma polinómica de la función cuadrática $[f(x) = ax^2+bx+c]$, hacemos énfasis en la diferencia entre esta fórmula y la fórmula de la función lineal.

Luego nos enfocamos en los coeficientes, cuadrático, lineal e independiente.

- ¿Cuáles de las siguientes funciones cuadráticas tienen sus “ramas” hacia arriba y cuáles hacia abajo?

A) $f(x) = 3x^2-4x-2$

B) $g(x) = -0.25x^2+4$

C) $h(x) = 999x^2-888x+777$

D) $i(x) = -(x+2)(x+3)$

- Indicar cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas y cuáles no. Justificar

A) $f(x) = 0.1x^2-3+5X$

B) $g(x) = (-x+5)^2+4$

C) $h(x) = (-3x+1)^2+14x-9x^2-3$

D) $i(x) = -4x^2-3x^3+5x+3$

- “Damos” la fórmula resolvente para que puedan hallar las raíces de una función cuadrática.

- Hallar las raíces de las siguientes funciones

A(x) = $-2x^2+2x+2$ (dos raíces reales distintas)

B(x) = $3x^2-6x+3$ (raíz real doble)

C(x) = x^2-x+1 (sin raíces reales)

Trabajamos analíticamente en la fórmula resolvente para que vean qué ocurre cuando el discriminante es mayor, menor o igual a 0.

- Escribimos la fórmula para que puedan hallar el vértice y el eje de simetría de la parábola.

- Graficar la siguiente función indicando sus raíces, su eje de simetría y su vértice

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 10$$

- Insertar en GeoGebra la función graficada y corroborar si el gráfico hallado es idéntico.

- Presentamos las otras formas de expresión de la función cuadrática (canónica y factorizada) y explicamos cuál es la diferencia entre cada una. Una vez explicado esto con ejemplos en el pizarrón, damos un ejercicio relacionado al tema:

- Expresar en cada caso la función cuadrática en sus 3 formas:

A) El vértice es (-3;-2) y el coeficiente principal es -2.

B) Las raíces de la función son $x=-4$ y $x=2$ y su coeficiente principal es -1.

C) El vértice es (-3;-1) y pasa por el punto (0;1).

Este ejercicio ayuda a los alumnos a memorizar las diferentes formas de expresión de la función cuadrática y a utilizar de acuerdo a los datos dados la que más convenga.

- Como actividad final e integradora:

- A partir de la siguiente función cuadrática $y=-3x^2+x+2$, marcar los coeficientes de los términos, el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces. Graficar en GeoGebra.

- Actividad optativa:

Teniendo en cuenta los conocimientos de los alumnos sobre la función lineal, hacemos una actividad que vincula a ambas funciones e integra el tema de sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

- Hallar la o las intersecciones de ambas funciones y graficar en GeoGebra.

$$f(x)= x^2 - x - 2$$

$$g(x)= 3x - 1$$

Esta secuencia está presentada para alumnos de 14 años.

El orden en las actividades seleccionadas tiene la idea de ir incrementando la complejidad, ya que es necesario comenzar con ejercicios más simples introductorios al tema.

La inclusión del programa GeoGebra en alguna de las actividades, nos pareció una excelente idea, ya que actualiza los recursos de estudio, los alumnos en esta época utilizan la computadora como herramienta principal para todo; a su vez también ayuda a ver los gráficos más exactos, prolijos y rápidamente.