Tesis

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Orientación: Matemática

La enseñanza y aprendizaje de la Función Afín aplicada a problemas sobre la Oferta y la Demanda en el marco de los Modelos Teóricos Locales

Autor: Norma Elizabeth Nuñez

Directora: Mgter. Adriana Gabriela Duarte

Co-Directora: Dra. Adriana Giuliani

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Comahue

Julio de 2022

“No hay rama de la matemática,

por abstracta que sea, que no pueda

aplicarse algún día a los

fenómenos del mundo real”

Nikolái Lobachevsky (1792-1856).

RESUMEN

Esta tesis se propone indagar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Función Afín aplicada a problemas sobre la Oferta y la Demanda, y así entender más sobre las relaciones entre las variables económicas involucradas y los conocimientos matemáticos que funcionan como herramienta en la resolución de dichos problemas.

Enfocados en esta problemática, surgen ciertos planteos, como ser: Qué competencias matemáticas y competencias en el campo de la economía son necesarias para enfrentar este tipo de problemas, cuáles son los procesos de pensamiento de los estudiantes en sus actuaciones al resolver tareas de función afín, si influyen o no en estos procesos las diferentes representaciones del objeto función, cómo se producen los intercambios de información al resolver tareas que impliquen la relación entre oferta y demanda con la función afín, o qué tipo de procesos aparecen en el diseño de los textos matemáticos o secuencias didácticas referidos a la matematización de la oferta y la demanda.

El estudio se sitúa en el marco teórico y metodológico del Modelo Teórico Local, donde a partir de los elementos de sus componentes se organiza favorablemente la información de situaciones de enseñanza y aprendizaje. La definición de un Modelo de Competencias, a partir del análisis e interpretación de las soluciones de ese tipo de problemas por parte de un resolutor ideal, puso en evidencia competencias -entendidas como *lo que hay que saber* y *lo que hay que saber hacer con lo que se sabe*- tanto matemáticas como económicas, necesarias en las soluciones de los problemas. Los elementos de un Modelo de Enseñanza y de Comunicación surgieron a través del análisis de libros de textos y de secuencias de enseñanza, por medio de una herramienta del Enfoque Ontosemiótico, hallando que las configuraciones epistémicas del objeto función más relacionadas son la Analítica y la Gráfica, y en menor medida la Conjuntista. Para un Modelo de Actuación, las interpretaciones de las resoluciones de problemas de función afín aplicados a oferta y demanda, posibilitó determinar que los procesos cognitivos que ponen en juego los resolutores reales pueden relacionarse de manera parcial con las competencias matemáticas y económicas que forman parte del modelo de competencias.

Palabras clave: Enseñanza y aprendizaje de la Función afín. Problemas de Oferta y Demanda. Modelo Teórico Local.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate the teaching and learning processes of the Affine Function applied to Supply and Demand problems, in order to understand more about the relationships between the economic variables involved and the mathematical knowledge that functions as a tool in the resolution of these problems.

Focusing on this problem, certain questions arise, such as: What mathematical competences and competences in the field of economics are necessary to face this type of problem, what are the students' thought processes in their actions when solving affine function tasks, whether or not the different representations of the function object influence these processes, how information exchanges are produced when solving tasks that involve the relationship between supply and demand with the affine function, or what type of processes appear in the design of mathematical texts or didactic sequences referring to the mathematicalisation of supply and demand.

The study is situated in the theoretical and methodological framework of the Local Theoretical Model, where the information of teaching and learning situations is favourably organised on the basis of the elements of its components. The definition of a Competence Model, based on the analysis and interpretation of the solutions of this type of problem by an ideal solver, revealed competences - understood as what one has to know and what one has to know how to do with what one knows - both mathematical and economic, which are necessary in the solutions to the problems. The elements of a Teaching and Communication Model emerged through the analysis of textbooks and teaching sequences, by means of an Ontosemiotic Approach tool, finding that the epistemic configurations of the object function most related are the Analytic and the Graphical, and to a lesser extent the Conjunctive. For a Performance Model, the interpretations of affine function problem solving applied to supply and demand made it possible to determine that the cognitive processes that real solvers put into play can be partially related to the mathematical and economic competences that form part of the competence model.

Keywords: Teaching and learning the affine function. Supply and Demand Problems. Local Theoretical Model.

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mi Sr. Padre, don Alem Aristóbulo Nuñez, quien me enseñó a perseguir mis sueños y no decaer hasta alcanzarlos. Fue un ejemplo de lucha y persistencia, siempre positivo y con una sonrisa, en las buenas y en las malas, y que calló su enfermedad para que pueda dar este paso en mi carrera profesional.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero agradecer principalmente a mi directora, Mgter. Adriana Gabriela Duarte, por aceptar acompañarme en este camino, por abrirme las puertas de su casa, sacrificar sus fines de semana y sus vacaciones para hacer posible mi llegada a esta la instancia. Gracias Adriana por confiar en mí, por compartir tus conocimientos y enseñarme con tanta paciencia.

También, le agradezco a mi codirectora, Dra. Adriana Guiliani por aceptar formar parte de esta etapa profesional de mi carrera como docente y, desde la distancia, no dejó de estar pendiente realizando sus aportes.

No quiero dejar de agradecerle a Liliana Pagnoni, mi amiga incondicional y hermana de la vida, que estuvo constantemente alentándome en los momentos en que sentí que no iba a lograr llegar a esta instancia.

Tampoco me olvido de los profesores de la maestría que, a pesar de la distancia, pudimos estar cerca día a día gracias a la tecnología. Gracias a todos por estar y alentarnos a seguir siempre firmes hasta lograr nuestra meta.

Así también le agradezco a Dios y a mi familia por la contención y el apoyo en todo momento.

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

En carreras de nivel universitario en Ciencias Económicas encontramos a la matemática como una ciencia básica para la formación de los futuros profesionales. En ella se ofrecen conocimientos que funcionan, en gran medida, como herramientas para la comprensión de los fenómenos relacionados con la disciplina.

En la enseñanza de la matemática, es habitual que el docente incluya en sus propuestas didácticas aplicaciones sencillas del entorno económico, por ejemplo, referidas a la compra de productos en el supermercado, o bien, en el estudio de los precios de materiales para la construcción de viviendas.

Por este motivo, cuando el docente propone estrategias para que el alumno se enfrente a este tipo de situaciones, supone que el hecho de plantear y resolver problemas que representan situaciones aplicadas están dando un sentido a los conceptos matemáticos y hacen posible una relación interdisciplinaria. No obstante, en la mayoría de los casos, queda en los estudiantes la responsabilidad de establecer dicha relación, recurriendo a su intuición o a sus conocimientos previos. Son numerosos los inconvenientes detectados en estudiantes en las cátedras del área matemática (Álgebra y Análisis Matemático), sobre todo en situaciones en las que están presentes la resolución de problemas, en este caso, de oferta y demanda, donde la función afín surge como la herramienta apropiada para un primer acercamiento a los conceptos extramatemáticos que son objeto de estudio en la presente investigación.

Como un comentario al margen, destacamos que, durante el dictado del Ciclo de Nivelación, área Matemática, en el ámbito de las Facultad de Ciencias Económicas de la UNaM, se retoman contenidos que se suponen han desarrollado en el Nivel Secundario, y los egresados de escuelas con orientación en Economía no siempre demuestran conocer el tema de estudio propuesto en esta tesis.

Por otra parte, creemos que en el aprendizaje de la Oferta y la Demanda no estarían solamente en juego los contenidos disciplinares, sino también otras áreas científicas como la matemática, la cual tiene una fuerte relación con el campo de la Economía y actúa como soporte ya que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de Oferta y Demanda, ciertas competencias de la mencionada área específica (matemática) aportan los conocimientos necesarios para tal fin. Por esta razón, es preciso y necesario que el docente indague sobre el conjunto de elementos (operaciones aritméticas, expresiones algebraicas o fórmulas y representaciones gráficas o tabulares) involucrados en la Oferta y la Demanda para lograr que el aprendizaje sea significativo, centrado en l*a enseñanza y aprendizaje de la Función afín aplicada a problemas sobre la Oferta y la Demanda.*

En el presente trabajo se plantea la posibilidad de estudiar la complejidad que se presenta para el aprendizaje de objetos matemáticos y su aplicación en el campo de las Ciencias Económicas, más precisamente en la comprensión y contextualización de los significados de la oferta y la demanda como funciones que relacionan dos variables en particular: cantidad y precio, exceptuando el análisis del punto de equilibrio de mercado, bajo el siguiente objetivo general de *Elaborar un modelo teórico local sobre las leyes de la oferta y la demanda para resignificar la enseñanza y aprendizaje de la función afín.*

Dado que el tema a abordar es muy amplio, se lo va a estudiar bajo la condición de ceteris paribus, centrándonos en analizar y describir las competencias matemáticas que se necesitan para resolver problemas de Oferta y Demanda mediante la elaboración de un Modelo de Competencias Matemáticas, Identificar los inconvenientes que manifiestan los estudiantes al aplicar funciones en la resolución de problemas sobre la Oferta y la Demanda, para determinar elementos de un Modelo de Actuación o Cognición y reconocer los elementos que intervienen en la enseñanza para que la función afín sea modelo matemático óptimo para el estudio de las leyes de la oferta y la demanda.

Este trabajo se inscribe en el estudio de las relaciones que se dan entre la enseñanza de la matemática y la economía. La Economía se ocupa básicamente del análisis y el estudio de las cuestiones relacionadas a la satisfacción de las necesidades de los individuos y de la sociedad en general. Se concibe como una Ciencia Social con énfasis en las actividades diarias de la vida humana. Las personas toman decisiones de carácter económico, es decir decisiones sobre el modo de utilizar los recursos disponibles para satisfacer sus deseos y necesidades. Los problemas económicos involucran muchas variables, y es aquí que la matemática se convierte en una disciplina que posibilita el planteo y resolución de los mismos a través de modelos, justificando así la incorporación de la misma al currículo de la formación universitaria de los futuros profesionales en el área de las ciencias económicas. El objetivo de matematizar algunos conceptos económicos es imprimirle una lógica en el razonamiento de los mismos (propuesto por Marshall y desarrollado en el Capítulo 2), tomando casos reales para dar un significado a las situaciones problemáticas sin dejar de lado los conceptos, esquemas y relaciones matemáticas.

Esta investigación se circunscribe al paradigma interpretativo, con la utilización de métodos cualitativos.

> Como marco teórico – metodológico de trabajo nos situamos en el enfoque del Modelo Teórico Local, que es un método adecuado para investigaciones educativas en las que se pretende dar cuenta de fenómenos que se producen en situaciones locales de enseñanza y aprendizaje, y que propone analizar, de manera

> localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa (Lagraña, 2019, pp. 2 – 3).

En cuanto a los aportes del MTL, sus cuatro componentes nos permitieron organizar las actividades a ser desarrolladas para el estudio matemático de la oferta y demanda.

Esta presentación consta de tres partes, contando con seis capítulos y siete anexos, los que describimos a continuación:

En la Primera Parte, se presentan los marcos teóricos, conceptual y metodológico, que guían la investigación. Se menciona el carácter interpretativo, se enumeran las hipótesis planteadas, la metodología que, según el diseño de la investigación, requiere el seguimiento continuo, completo y detallado de los sujetos durante su actividad para un correcto estudio de casos. Con respecto al tipo de investigación, expresamos que será aplicado, descriptivo y explicativo. Además, se exponen los antecedentes de trabajos (tesis de maestría, de doctorado, ponencias en congresos, bibliografías afines con los temas a estudiar) sobre la enseñanza y aprendizaje de la función lineal aplicada a las funciones de la Oferta y de la Demanda, como así también una reseña sobre los Modelos Teóricos Locales y el Enfoque Ontosemiótico en los cuales se delimitan los objetos intra-matemáticos (función afín y función inversa), como el extra-matemático (acerca de la Oferta y la Demanda) (Capítulos 1 y 2).

En la segunda parte, denominada Análisis e Interpretaciones, para la elaboración de un Modelo de Competencia, realizamos una revisión del contenido formal del tema de estudio como saber “sabio” en el campo de la Microeconomía para las funciones de Oferta y Demanda, pero desde un punto de vista matemático (Capítulo 3). Así mismo, el análisis de libros de textos y secuencias de enseñanza, nos permitió determinar un Modelo de Enseñanza y Comunicación de la Función afín aplicada a la Oferta y la Demanda (Capítulo 4). Luego presentamos el análisis y la interpretación de las resoluciones, para analizar la actuación de los resolutores reales, además de las resoluciones de los problemas para delimitar un Modelo de Actuación o Cognición (Capítulo 5); hemos tenido en cuenta la entrevista mediante la cual indagamos acerca de sus saberes tanto en el campo de la matemática, como así también de la economía (dominio de conceptos y relaciones funcionales entre las variables precio unitario y cantidad de producto en la oferta y la demanda).

En la tercera parte, presentamos las conclusiones generales, reflexiones finales y cuestiones para seguir investigando (Capítulo 6).

El contenido de los anexos, lo detallamos como sigue:

El Anexo I, contiene el protocolo de resolución de los problemas realizados por un resolutor ideal respecto del campo de problemas seleccionados. El Anexo II, incluye el análisis de las resoluciones del resolutor ideal mediante el esquema de las fases. En el Anexo III, se expone el protocolo de los de las Actividades Matemáticas presentes en los tres Libros de Textos, sobre Matemáticas Aplicadas a los Negocios, de Matemáticas Básicas para Administradores y además Matemáticas: Conceptos previos al Cálculo. Aplicaciones a Ingeniería y Ciencias Económicas, desde la Matemática y en el Anexo IV, el protocolo de los análisis de las Actividades Aplicadas a la Economía en los mencionados Libros de Textos. En el Anexo V se presenta el protocolo de soluciones de los problemas realizadas por los estudiantes. En el Anexo VI se presenta el protocolo de Entrevistas realizadas a los estudiantes y en el Anexo VII, se muestra el protocolo de las interpretaciones de las Actuaciones o Competencias de Cognición de los resolutores reales.

PRIMERA PARTE

Marco Teórico y Metodológico

CAPÍTULO 1

Marco de Referencia y

Planteamiento de la Investigación

CAPÍTULO 1

Marco de Referencia y Planteamiento de la Investigación

En este capítulo se describen los elementos relevantes que permiten exponer la problemática y la forma en que ésta se manifiesta. Al final del planteamiento del problema se encuentran los antecedentes que consisten en el rastreo de investigaciones que se centran en el estudio de las relaciones que se dan entre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y su aplicación a la economía, y de las dificultades que evidencian los estudiantes en el uso de conceptos matemáticos (función afín) en situaciones donde estén presentes problemas económicos (oferta y demanda). Desde allí, se plantea la pregunta la cual orientará el presente trabajo. Posteriormente se explicitan las preguntas que motivan la investigación y los objetivos. Por último, se plantean las hipótesis formuladas a raíz del planteo del problema.

1 – A. Planteamiento del problema

Ciertos estudios en la rama del álgebra, permiten desarrollar el razonamiento crítico mediante la algebrización de la Aritmética y su aplicación en situaciones problemáticas reales (vida cotidiana). Uno de los objetivos de la mencionada algebrización es la transformación de la estructura de pensamiento de los estudiantes, logrando redescubrir sus saberes previos e incorporar nuevos conocimientos para lograr la comprensión, interpretación y articulación de la Matemática con otras ciencias (interdisciplinariedad). Así, es usual que dentro del álgebra se estudien sus aplicaciones a situaciones relacionadas con la economía, como ser las funciones de Oferta y Demanda.

Los problemas económicos referidos a estos dos conceptos, se plantean de tal manera que puedan responderse matemáticamente, y que dichas respuestas puedan generalizarse (modelizarse) dentro de un determinado ámbito. La complejidad que presenta su estudio se debe a los diversos factores que influyen y afectan: las dimensiones del mercado, la elevación de los precios, factores personales, factores externos, la tecnología, etc. Por ello, las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico.

La cantidad q de cualquier artículo que será adquirido por los consumidores depende del precio unitario p en que el mismo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, es la ley de la demanda.

Por otra parte, la cantidad de un artículo determinado que los proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio unitario al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo q que los fabricantes o vendedores puedan colocar en el mercado a varios precios p, es una ley de la oferta (Ayra, J. y Lardner, 2002, pp. 145-146).

Ahora bien, desde el punto de vista matemático, ambas leyes se modelizan mediante funciones. Es cierto que en las situaciones económicas de oferta y demanda existen numerosas variables en juego. No obstante, para un tratamiento más simplificado es usual reducir la cantidad de variables y pueden ser representadas por funciones más simples, por medio de las denominadas funciones afín.

Una función afín es aquella que, a cualquier valor x definido en $\mathbb{R}$ (conjunto de números reales), asocia el número a.x + b, siendo a la pendiente de la recta y b la ordenada al origen. En términos simbólicos algebraicos, su expresión es $f(x) = a.x + b$. La condición $b \neq 0$ es necesaria ya que, si dicho parámetro es nulo, se estaría haciendo referencia a una función lineal.

En términos económicos, y teniendo en cuenta las variables puestas en juego en las funciones de Oferta y Demanda, la relación es $p = a.\ q + b$. siendo q la cantidad y p el precio unitario.

Tanto los problemas económicos de oferta y demanda como las funciones antes mencionados, son conocimientos que forman parte de dos campos disciplinares bastante diferentes, los primeros, a la Economía que es una ciencia social y el segundo a la Matemática, considerada una ciencia exacta. Ambas disciplinas confluyen en situaciones de aprendizaje y enseñanza que se proponen tanto en el nivel medio como en los estudios universitarios. En particular, formación de profesionales como ser, licenciados en economía, contadores o licenciados en administración de empresas. De hecho, los planes de estudios de estas carreras de formación proponen entre sus materias el estudio de áreas de la matemática, como ser Álgebra, Cálculo o Estadística.

Es en este contexto que se sitúa la **problemática a abordar**:

Es frecuente encontrar en libros de texto y apuntes de cátedra de cursos de matemática el tratamiento de las funciones lineal y afín como modelos de aplicación a la economía y se establecen relaciones únicamente entre la cantidad de producto y el precio de los mismos para el análisis matemático - económico de las mismas. No obstante, son numerosos los inconvenientes detectados en estudiantes en situaciones donde estén presentes problemas de oferta y demanda, sobresaliendo la dificultad para la instrumentación de las herramientas matemáticas que refieran a la función afín.

En la búsqueda de la solución de un problema y del planteo que realizan para hallarla, es frecuente que cometan errores, lo cual no significaría que no saben matemática o que desconocen los conceptos básicos de ciertas áreas.

Posiblemente esos errores podrían ser obstáculos en el sentido de Brousseau (1983). Para este autor, el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, su validez, pero que en otro dominio se revela falso, o simplemente inadaptado. Este conocimiento funciona como obstáculo, ya que un determinado modelo utilizado en la resolución de un problema, no se adecúa a otras situaciones problemáticas, lo cual produce en los estudiantes una sensación de frustración y provoca el error. Pueden tener origen ontogenético siendo aquellos que cuando surgen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en el momento de su desarrollo, origen epistemológico son los que no se pueden ni se deben escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento y origen didáctico, cuando parecen depender solamente de la elección didáctica o del proyecto del sistema educativo.

También, los errores podrían proceder de la imposibilidad de reconocer a los conceptos matemáticos como herramientas útiles en la resolución de estos problemas.

En la planificación que realiza el docente para el desarrollo de la asignatura, es habitual la introducción al estudio de las funciones de Oferta y Demanda luego del desarrollo del tema funciones lineal y afín. No obstante, debido al escaso tiempo generalmente disponible, no siempre es posible profundizar en las aplicaciones que involucren dichos conceptos. Queda así en manos del estudiante la responsabilidad de establecer la conexión existente entre estas leyes y las funciones.

Además, si bien, durante el Ciclo de Nivelación de la Universidad se retoman contenidos matemáticos y económicos que se suponen han sido desarrollados en el Nivel Secundario, no siempre se logra que los estudiantes resuelvan con éxito los problemas propuestos, ni siendo egresados de escuelas con orientación en Economía, quienes debieran estar en mejores condiciones sobre el dominio de los temas.

Por otra parte, en ocasión de un curso a distancia[1] dirigido a profesionales y comerciantes que abordaba problemas sobre los conceptos económicos involucrados, fueron numerosas las consultas realizadas por los participantes sobre sus resoluciones, donde claramente evidenciaban dificultades para vincular el estudio de la oferta y la demanda con las herramientas matemáticas correspondientes.

A lo expuesto, se agrega que, en la bibliografía existente para el tratamiento de la Matemática aplicada a las Ciencias Económicas, las actividades se presentan frecuentemente como una guía de ejercicios rutinarios siguiendo una misma estructura, con frecuencia, situaciones alejadas a la realidad cotidiana, lo que podría llevar a los estudiantes a resolverlos mecánicamente, sin necesidad de reflexionar sobre lo realizado.

Ante la situación expuesta precedentemente, surge la necesidad de indagar sobre las cuestiones que influyen en la enseñanza y aprendizaje de la función afín aplicada al contexto de las Ciencias Económicas. Así también, poder entender las relaciones que se suscitan entre las variables económicas puestas en juego en situaciones de oferta y demanda donde los conocimientos matemáticos funcionen como herramienta en la resolución de los problemas de esta temática.

[1] Curso dictado por docentes de la FCE de la UNaM, entre 1996 y 2010.

1 – B. Antecedentes

De acuerdo a las lecturas realizadas sobre esta problemática (ponencias, tesinas, tesis de maestría o doctorales), encontramos que la enseñanza de las funciones de Oferta y Demanda generalmente se realiza bajo la mirada del Análisis matemático, más precisamente, como aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden y de las ecuaciones en diferencia.

En esta línea, es pertinente destacar estudios realizados a nivel nacional, por ejemplo, los llevado a cabo por un grupo de docentes de la Universidad Nacional de Entre Ríos quienes han decidido implementar la interdisciplinariedad incorporando conceptos económicos. El objetivo fue permitir a los estudiantes comprometerse con su propio aprendizaje y así “adquirir destrezas de demostración matemática en problemas aplicados a la Economía y favorecer el intercambio entre ellos, ya que los trabajos pueden plantearse en forma grupal” (Padrós S, Facello S, 2018, pp. 105-114). La conclusión a la que han llegado los mencionados docentes, se centra en la importancia de buscar estrategias y metodologías de enseñanza cuya función sea la de actuar como disparadores de la atención e interés en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, pero que, además, su finalidad sea la de integrar los saberes adquiridos para salvar la disparidad de conocimientos con la que los estudiantes ingresan a las carreras correspondientes a las Ciencias Económicas, de tal manera de lograr mejorar el rendimiento desde la satisfacción y el interés de éstos.

Asimismo, estudios realizados por Rodríguez Cortez (2014) se enfocan en el estudio de la conceptualización de la función afín en la Economía, teniendo en cuenta las definiciones de las funciones Demanda y Oferta y sus representaciones gráficas. Su estudio tiene un tenor histórico, exploratorio y descriptivo ya que el punto de partida son los problemas que la originaron, desde su forma simple hasta su formato actual, con el propósito de “identificar los diferentes campos de problemas, procedimientos, lenguaje y otros elementos que muestran la evolución del significado de la formulación matemática de la función afín en los mencionados conceptos económicos” (p.4).

Esta autora concluye que el estudio y análisis tanto histórico como epistemológico de la conceptualización de la función afín aplicada a la Economía pueden ayudar a entender los métodos para arribar a un concepto matemático, a través del conocimiento de la evolución del mismo. Asegura que conocer la evolución histórica de los conceptos que son objeto de estudio pueden permitir al docente diseñar problemas que incluyan actividades e interrogantes que despierten el interés de los alumnos, que le permitan al docente interpretar los resultados de los problemas a los que arriban los alumnos, quienes también pueden plantear sus dudas o curiosidades mediante preguntas. Cree, además, que esta metodología podría ayudar a que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y sus aplicaciones resulte más efectivo.

En una investigación de campo llevada a cabo en la FCEyS de la Universidad de Carabobo (Venezuela), de carácter evaluativo en cuanto a la metodología de evaluación de los programas de matemática, se les presentó a los alumnos el diseño de situaciones problemas de oferta y demanda para que éstos los resuelvan y modelen mediante la función lineal, recurriendo a la representación geométrica, además de las tablas de valores y de la calculadora gráfica (CG). Los estudiantes debían aplicar sus conocimientos para adquirir gradualmente las habilidades necesarias para resolverlos con el fin de desarrollar las competencias matemáticas vinculadas a las funciones reales (Medina Orellán J. y Ortiz Buitrago J., 2013).

Luego de analizar los resultados de las actividades sobre el aprendizaje de funciones reales por parte de los alumnos, los investigadores concluyeron que, en general, los estudiantes han sido capaces de determinar cuándo una relación era o no una función utilizando la tabla de valores y pares ordenados en situaciones problemas que hacían alusión a situaciones cotidianas presentes en la guía de trabajo. También fueron capaces de distinguir el dominio y codominio de aquellas relaciones que eran funciones utilizando la representación gráfica realizada en la calculadora (CG). Los gráficos les permitieron distinguir de qué tipo de función se trataba y el comportamiento de éstas cuando agregaban valores en la tabla que habían utilizado al inicio de la actividad propuesta. De esta manera, los investigadores han detectado las competencias y habilidades de los estudiantes en cada etapa del proceso de modelización, en las cuales éstos han planteado hipótesis, interpretando datos de la realidad para expresarlos matemáticamente, hecho que los llevó a distinguir las variables dependientes de las independientes para asociar las funciones lineales con modelos matemáticos válidos y así resolver los problemas, lo cual les facilitaría hallar las relaciones asociadas al crecimiento y decrecimiento de las funciones de oferta y demanda respectivamente. También afirman que los estudiantes fueron capaces de hacer buen uso del lenguaje formal para hallar las funciones reales y su correcto uso como modelo matemático demostrando habilidad para aplicarlo tanto en el contexto intramatemático como en el extra-matemático presentes en los problemas de aplicación sobre oferta y demanda. Destacan los investigadores que, en las representaciones de dichas funciones, detectaron que algunos estudiantes han tenido inconvenientes a la hora de establecer la escala para cada eje coordenado como así también que poseen el concepto de que los puntos son discretos de un segmento de recta o en la recta misma. Otra dificultad detectada da cuenta de la dificultad para expresar coloquialmente el argumento de sus respuestas y la verificación de los resultados hallados, más allá de que sí han demostrado que son capaces de extraer e interpretar la información desde la representación gráfica de la situación problema relacionada con el objeto de estudio.

1 – C. Preguntas de investigación y objetivos

En función a los antecedentes y a la problemática planteada surgen los siguientes interrogantes que guiaron la investigación, para los que intentaremos encontrar una respuesta:

¿Cuáles son los procesos de pensamiento de los estudiantes en sus actuaciones al resolver tareas de función afín? ¿Influyen en estos procesos los diferentes tipos de representación de las funciones? ¿qué genera en el estudiante la necesidad de intercambios de información al resolver tareas que impliquen relacionar oferta y demanda con la función afín? ¿De qué manera este objeto matemático facilita la comprensión de los problemas que involucran a la oferta y la demanda? ¿Cuáles son las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje que se emplean para el diseño de los textos matemáticos o secuencias didácticas referidos a la matematización de la oferta y la demanda? ¿Qué competencias matemáticas y competencias en el campo de la economía son necesarias para enfrentar este tipo de problemas?

Estas cuestiones nos llevaron a establecer como un objetivo principal de la investigación, la de entender y profundizar los significados de la enseñanza y aprendizaje de la Función afín aplicada a problemas sobre la Oferta y la Demanda, a través de la elaboración de un modelo teórico local.

Además, entre otras cuestiones, poder:

- Explicitar las competencias matemáticas que se requieren para poder hallar solución a problemas planteados en un contexto económico.

- Reconocer los elementos que hacen a la función afín un modelo matemático óptimo para el estudio de las leyes de la oferta y la demanda.
- Identificar los inconvenientes que manifiestan los estudiantes al aplicar funciones en la resolución de problemas sobre la Oferta y la Demanda.

Así también, lograr

1. Generar prácticas docentes significativas de la función afín que se ajusten a contextos extramatemáticos.

2. Producir aportes para la didáctica de la matemática, vinculada a problemas de contexto económico.

3. Ampliar el campo de conocimientos sobre un MTL aplicado al estudio de la Matemática en la interdisciplina con la Economía.

1 – D. Hipótesis

Teniendo en cuenta que entendemos por hipótesis al conjunto de supuestos que funcionan como motor de la investigación y que, según Ruiz Higueras, “deben ser entendidas como expectativas sobre los resultados, y no como hipótesis en el sentido estadístico” (en Etchegaray, S. (2000), p.25), hemos planteado las siguientes hipótesis:

H1: Es posible recurrir a un modelo que permita organizar la información para facilitar el análisis de problemas sobre Oferta y Demanda que requieran la aplicación de la matemática.

H2: Los problemas que involucren las leyes de oferta y demanda podrían aportar significado al trabajo matemático con funciones por parte de los estudiantes.

H3: El conocimiento y el uso de la función afín facilita considerablemente la interpretación económica de los problemas relacionados con la oferta y la demanda.

CAPÍTULO 2

Marcos Teórico, Conceptual y Metodológico

CAPÍTULO 2

Marcos Teórico, Conceptual y Metodológico

Así como fuera expuesto en el capítulo anterior, esta investigación se ocupa del estudio de las relaciones que se dan entre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la economía y de las evidentes dificultades en los estudiantes del uso de herramientas matemáticas, en este caso, la función afín, en situaciones donde estén presentes problemas de oferta y demanda. En este capítulo exponemos sintéticamente los marcos teóricos que guían el trabajo, así como la presentación del marco conceptual de las cuestiones estudiadas tanto del campo matemático como del económico, y describimos el encuadre metodológico considerado.

2 – A. Marcos teórico y conceptual

2 – A. 1. Paradigma de investigación

Este trabajo se desarrolla bajo la perspectiva del paradigma de investigación interpretativo. En investigación educativa la idea de paradigma remite a un "marco general de referencia y categoría organizadora de los principios, postulados y valores" (Arnal et al., 1992, p.38) y es entendido, según Alvira ((1983) como "el conjunto de creencias y actitudes, como una visión del mundo «compartida» por un grupo de científicos que implica, específicamente, una metodología determinada (en Arnal et al., 1992, p.38)". Varios autores sugieren la definición de tres grandes paradigmas o enfoques: el positivista, el interpretativo y el sociocrítico.

En el planteo interpretativo (también denominado naturalista, humanista o etnográfico) el interés se centra, según lo expresado por Erickson, "en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social" (Arnal et al., 1992, p.51). Más precisamente, la metodología de investigación educativa de perspectiva humanística – interpretativa se orienta a describir e interpretar los fenómenos educativos y se interesa por el estudio de los significados e intenciones de las acciones humanas desde la perspectiva de los propios agentes sociales. Desde este punto de vista, se aborda el mundo personal de los sujetos, no observable directamente ni susceptible de experimentación. El punto central es la descripción y comprensión de lo que es único y particular del sujeto más que en lo generalizable.

Esta metodología predispone al uso de métodos «cualitativos» que constituyen una alternativa válida a la hora de analizar procesos educativos. La realidad se puede estudiar recurriendo a puntos de vistas de los sujetos implicados difícilmente cuantificables, con enfoques más flexibles y personales y resultan convenientes para analizar aspectos como las intenciones, las acciones o los significados.

2 – A. 2. Introducción al estudio sobre Modelos Teóricos Locales (MTL)

Un grupo de investigadores de la década de los 80´s encabezado por Filloy, de diversas instituciones, de España y México, ha desarrollado investigaciones (Filloy et al., 1999), (Filloy y Rojano, 1984), (Rojano, 1985) (Kieran y Filloy, 1989), (Puig, 1994), (Puig, 2008) hasta la actualidad. Fruto de ellas fue la conformación de una propuesta teórica y metodológica denominada Modelos Teóricos locales para llevar a cabo investigación en Matemática Educativa.

Dichos resultados son tomados como base teórica antecedentes para el diseño y la implementación de la presente investigación. Tuvimos en cuenta las bondades del MTL, porque reconocemos que este modelo teórico-metodológico, creado como ya dijimos, para la investigación en Matemática Educativa, puede ser adaptado y aplicado al estudio de objetos que provienen de otras áreas disciplinares, en este caso de las Ciencias Económicas, más precisamente, en el dominio de la Oferta y la Demanda.

Un MTL es lo que se elabora tanto para organizar una investigación como para organizar los resultados de la misma. Al referirse a que el modelo es de carácter local, en Puig (2008), se precisa que:

> El modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos y sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados (p. 88).

Por otra parte, el carácter de modelo:

> Viene dado, entre otras cosas por el hecho de que no se hace la afirmación fuerte de que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito (Puig, 2008, p.88).

Por esto, Puig (2008) manifiesta que: “el modelo tiene pues carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera (mediante otro modelo)” (p. 88). Es importante esta afirmación dado que hace una distinción entre lo que es la elaboración de un modelo a la de una teoría, dado que, de aparecer una nueva teoría sobre los mismos fenómenos, se la combatiría como errónea.

En el ámbito de los sistemas escolares, el MTL interpreta las situaciones de enseñanza y aprendizaje como fases de comunicación y de producción de sentido de un determinado objeto de estudio. Además, como es preciso tener presente, en toda situación de enseñanza y aprendizaje de matemática, la presencia del profesor, de alumnos y de la matemática, conduce a considerar dentro del marco teórico del MTL a cuatro componentes: el de competencias, el de enseñanza, de actuación o de procesos cognitivos y el de comunicación. Estos componentes, que Puig también da en llamar modelos, se definen a continuación.

La componente o modelo de competencia formal simula actuación competente de un usuario ideal; por ello se centra en la actuación de este sujeto y su competencia respecto al conocimiento matemático en cuestión. En este sentido, Filloy (1998) opina que, a partir de una mirada sustentada por investigadores dedicados a la resolución de problemas, cercanos a la psicología cognitiva, "se podría inferir que, para descodificar una situación problemática, los expertos proceden según un proceso sintético, esto es, de los datos a lo desconocido" (p.4).

No obstante, según Filloy, si bien ese esquema también lo puede usar un novato, la competencia del experto que hace descodificar el problema estaría más bien condicionada por la capacidad de realizar un esbozo lógico semiótico (que incluye estrategias de análisis/síntesis) de la situación a resolver. Este esbozo lógico permite poner en juego mecanismos cognitivos que le permite anticipar tanto las relaciones centrales del problema como "decidir bosquejar todos los pasos de la resolución, pasando luego a un proceso de análisis/síntesis, con el que obtiene finalmente la descodificación de la situación problemática" (Filloy, 1998, p.5).

En las investigaciones sobre este tema y mencionado en Puig (2008), habiendo delimitado el conjunto de problemas que iban a estudiar, para elaborar el modelo de competencia, se ha considerado describir qué debe poner en juego un resolutor ideal para resolver esos problemas. Han utilizado dos fuentes que le permitieron caracterizar la competencia, una la del estilo heurístico, estudiado por Polya, entendiendo que un elemento del modelo de competencia es una descripción de la conducta de un resolutor ideal. La otra, la que proviene de la interpretación de las componentes del conocimiento y la conducta, introducidos pro Schoenfeld (1985) para dar cuenta de las conductas observadas en resolutores reales. Así, "el resultado de los elementos que conforman el modelo de competencia es un conjunto de lo que sabe, sabe hacer, sabe que sabe, sabe que sabe hacer, sabe que ha de hacer, etc. el resolutor ideal" (Puig, 2008, p.100).

Por ende, podemos decir que frente a la resolución de una situación problema, el resolutor ideal es aquel que posee el conocimiento del objeto de estudio correspondiente al dominio, en este caso matemático formal, como así también las aplicaciones de dichos conceptos en el campo extra-matemático y, en función a ello, elabora las actividades pertinentes, selecciona los textos y analiza los resultados.

En tanto que el resolutor real es aquel que pone en evidencia lo que sabe o no sabe cuándo debe desarrollar las actividades que le son presentadas, y apela a estrategias para dar solución a las mismas.

La componente o modelo de enseñanza se relaciona con el modelo de competencia y conduce la actuación teniendo en cuenta los distintos elementos del mismo; establece el modo de enseñanza del objeto matemático a ser estudiado, teniendo como figura al sujeto que enseña.

En un modelo de enseñanza se agrupan aquellos elementos que permiten identificar cuál es la intencionalidad pedagógica referida respecto a los marcos legales y que se ven reflejados en la práctica o ejercicio de la enseñanza de conceptos. Además, entra en juego el por qué, el cómo y el para qué, de unas actividades dentro de una enseñanza guiada o controlada.

Relacionado a este modelo, dentro del MTL se tiene la componente de comunicación, que tiene por objetivo determinar la manera en que se realiza el intercambio, producción y decodificación de mensajes durante los procesos de enseñanza.

Y, por último, la componente o modelo de cognición o actuación, se basa en las actuaciones del resolutor real. Según Butto Zarzar y Rojano (2010):

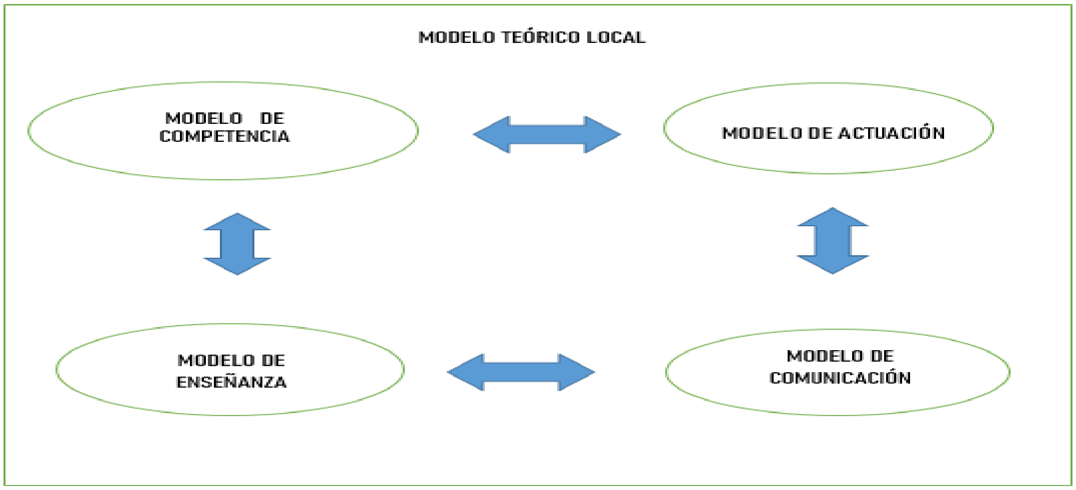
> Para estudiar los procesos cognoscitivos se tienen en cuenta los procesos de pensamiento que ocurren cuando el estudiante transita por la ruta trazada por el modelo de enseñanza. Aquí se describen las acciones de los sujetos observados al realizar tareas relacionadas con el contenido matemático tratado en el estudio (p.62)

Para determinar elementos de la componente de actuación o cognición se realiza el análisis las dificultades que aparecen durante el aprendizaje del objeto de estudio, es decir que se enfoca en la manera que el alumno aprende.

En resumen, el MTL apunta a realizar un análisis localizado y específico de los componentes de los fenómenos de la matemática educativa, siendo estos, Componente de competencia o formal, Componente de enseñanza, Componente de comunicación y Componente de actuación o de los procesos de cognición, los cuales se encuentran interrelacionados, constituyendo una estructura.

Figura 1

Relaciones entre componentes de un MTL



Nota. Figura de autoría propia. Idea tomada de Lagraña (2019, p.29)

Básicamente los componentes de actuación o cognición y comunicación intervienen en la elaboración del marco de referencia, al realizar el estudio de la propuesta de enseñanza del tema tanto en la bibliografía como en el material de cátedra, para organizar el campo de problemas. El componente de enseñanza también está presente en dicho estudio, así como las actuaciones de los sujetos reales también pueden explicarse mediante la elaboración de modelos de actuación.

Cabe aclarar que en esta tesis se utilizará el MTL para el análisis completo y riguroso de los fenómenos en estudio dentro del campo matemático en el dominio Función afín, y dentro del campo de las Ciencias Económicas en el dominio Oferta y Demanda.

2 – A. 3. Introducción al Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), según Godino (2002) se configura en torno a tres modelos teóricos: Teoría de los significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994:1998), Teoría de las funciones semióticas (Godino y Recio, 1998) y la Teoría de las Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006).

El EOS es un marco teórico amplio que organiza, unifica y clarifica nociones de otras teorías, enfoques y modelos con el fin de describir e investigar, de forma holística, los procesos de aprender y enseñar matemáticas. Se ha gestado desde los años ochenta bajo el liderazgo del Dr. Juan D. Godino, en la Universidad de Granada, y al presente ha sido aplicado para investigar los procesos didácticos en diversos temas de matemáticas.

Este enfoque comienza enunciando la ontología de los objetos matemáticos y para ello distingue tres particularidades: la matemática como actividad socialmente conformada de resolución de problemas, la matemática como lenguaje simbólico, y la matemática como sistema conceptual lógicamente organizado.

El EOS es un sistema teórico modular e inclusivo para la investigación y la práctica en Educación Matemática a partir de pre-supuestos antropológicos y semióticos sobre la matemática y su enseñanza. Parafraseando a Godino et al. (2007), éste afirma que:

> Este modelo procura aportar herramientas teóricas para analizar, en forma conjunta, el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo, y tiene en cuenta aspectos del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. (Como se citó en Pochulu y Rodríguez (p.65).

De las tres teorías, en este trabajo, nos centraremos en la primera de las mencionadas, la denominada Teoría de Significados Sistémicos (TSS).

Inicialmente (Godino y Batanero, 1994) se presenta un sistema de nociones para tratar de dar respuesta a lo relacionado con el significado de los conceptos matemáticos. Al respecto, encontramos en Godino y Font (2007), quienes expresan:

> Tomando como primitiva la noción de situación – problema se introducen las nociones de sistema de prácticas (matemáticas), objetos emergentes de los sistemas de prácticas y significado de un objeto (conceptual) matemático, entendido en términos de los sistemas de prácticas que un sujeto (persona o institución) pone en juego en las cuales el objeto desempeña un papel relevante. (p.1)

A este conjunto de nociones, los autores lo designan como un sistema y conforman la Teoría de los Significados Sistémicos.

En cuanto al significado de un objeto matemático, para el EOS, se hace alusión a todo lo que se puede especificarse concretamente en Matemática, desde su definición o concepto, su simbología, sus propiedades, procedimientos y representaciones.

Siguiendo a Chevallard (1991, p.8), se define objeto matemático como:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de los gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.) es decir registro de lo escrito (como se citó en Godino y Batanero, 1994, p.332).

En cuanto a la noción de práctica, al respecto, y desde el contexto matemático, Godino y Batanero (1994,) definen “práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, valida la solución y generalizarla a otros contextos o problemas" (p.334).

Para estos autores, el significado de un objeto queda formado por el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338). Además, "el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos" (p.340), y agregan que es preciso diferenciar una dimensión institucional y personal de estos significados. Dentro de la TSS se reconocen significados institucionales y significados personales que se despliegan a propósito de un sistema de prácticas.

Dentro de la EOS se considera una tipología de los objetos matemáticos primarios, identificados como lenguaje, situaciones problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

El lenguaje, contempla los términos, expresiones, notaciones, gráficos, que, a su vez, se presentan como registros (escrito, oral, gestual, etc.); las situaciones – problemas, presentadas como actividades, ejercicios o tareas, tanto en el contexto intra- matemático, como en el extra – matemático; los conceptos – definición, son elementos o construcciones introducidos a través de definiciones o descripciones de un objeto; las proposiciones, son afirmaciones o enunciados referidos a los conceptos, los procedimientos, comprenden a algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modo de ejecutar ciertas acciones y los argumentos, están conformados por enunciados y razonamientos que han sido utilizados para validar (de manera intuitiva o de otro tipo), explicar o justificar las proposiciones y procedimientos, o la solución de un problema.

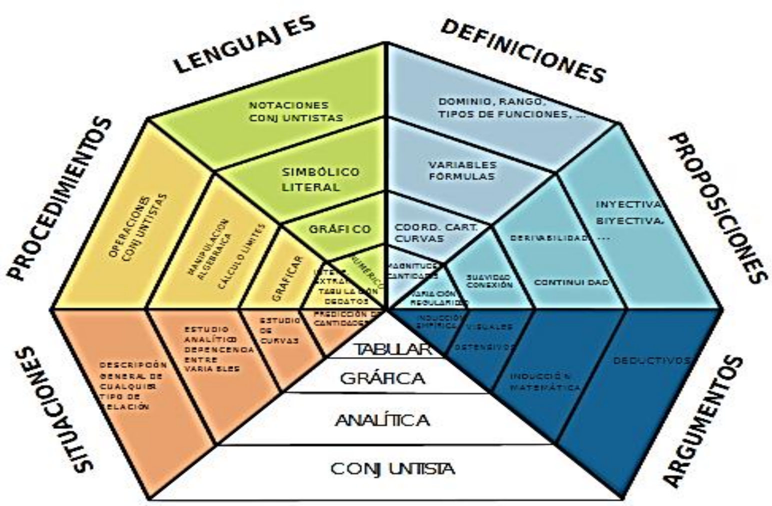
Además, los seis objetos primarios se organizan en entidades más complejas, formado configuraciones. Estas se entienden como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático” (Pochulu y Rodríguez, 2012, p.69).

En especial, se menciona aquí la configuración epistémica del objeto matemático función desarrollada por los investigadores Godino, Font, Wilhelmi y Bencomo (2014) quienes interpretan las concepciones epistemológicas del objeto función en términos de subsistemas de prácticas institucionales ligadas a contextos de uso particulares y de objetos emergentes (siendo estos los objetos primarios citados precedentemente).

Estas configuraciones epistémicas y sus prácticas asociadas sirven, según los autores, como modelos del objeto función y explicitan ciertos elementos que pueden intervenir en la configuración global de la noción de función, detallados en la siguiente figura:

Figura 2

Configuraciones epistémicas asociadas al concepto de función



Nota. Fuente: Godino et al. (2014, p.10)

En la siguiente tabla, plasmamos la lista de algunos elementos que los autores mencionados consideran como característicos para cada configuración de las funciones:

Tabla 1

Elementos de las Configuraciones epistémicas sobre el objeto función para cada objeto primario

Objetos primarios	Configuración epistémica conjuntista	Configuración epistémica analítica	Configuración epistémica gráfica	Configuración epistémica tabular
Lenguaje	Notaciones conjuntistas	Simbólico – literal	Gráfico	Numérico
Situaciones-Problemas	Descripción general de cualquier tipo de relación	Estudio analítico de definiciones entre variables	Estudio de curvas	Predicción de cantidades
Conceptos – Definición	Dominio. Rango. Tipos de funciones	Variables y fórmulas	Coordenadas cartesianas. Curvas	Magnitudes y cantidades
Propiedades - Proposiciones	Inyectiva. Biyectiva	Derivabilidad. Continuidad	Suavidad. Conexión	Variación. Regularidad
Acciones - Procedimientos	Operaciones conjuntistas	Manipulación algebraica. Cálculo de límites	Graficar	Interpretar. Extrapolar datos
Argumentos	Deductivos	Inducción matemática	Visuales ostensivas	Inducción empírica

Nota. Tabla de elaboración propia. Fuente: Godino et al. (2014, p.10)

2 – A. 4. Enseñanza y aprendizaje de la matemática

Acerca del enfoque de la enseñanza, podemos decir que es aquel que describe la manera en que los docentes llevan a cabo la función de enseñar, basados en las estrategias que proponen, las cuales responden al tipo de intención de éstos, sus creencias y propósitos. Así también, constituyen las bases sobre las cuales un investigador lleva a cabo su proyecto de investigación.

El marco teórico general sobre el cual nos situamos se sustenta en las teorías que toman como objeto de estudio a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en especial aquellas que sostienen que el aprendizaje de esta ciencia requiere que sea pensado más como un proceso de pensamiento que como mera acumulación de resultados, contribuyendo a la formación y estructuración del mismo.

Entendemos que este tipo de actividad se puede justificar desde una postura constructivista del aprendizaje, donde la experiencia de hacer matemática en cualquier nivel de escolaridad permite a los alumnos acercarse al conocimiento matemático y ser actores en la construcción de los objetos matemáticos y su evolución.

Basada en el constructivismo y en el modelo epistemológico de Piaget, se entiende que el conocimiento no resulta de una simple recepción pasiva de datos, más bien proviene de un proceso muy complejo, que consiste en construir, a partir de las que ya se dispone, nuevas estructuras cognitivas, a través de la acción física e intelectual sobre los objetos de conocimiento y de la reflexión sobre dichas acciones.

Por otra parte, desde una sólida concepción psicopedagógica, se plantea el modelo de Ausubel, con una clara distinción entre aprendizaje por recepción, aprendizaje repetitivo y aprendizaje significativo. Para que el aprendizaje sea significativo:

La materia de aprendizaje debe relacionarse, de manera sustancial, no arbitraria, con lo que el alumno ya sabe, siendo necesario para ello que la materia sea potencialmente significativa, es decir coherente en su estructura con la estructura cognoscitiva y lógica previa de los alumnos, y siendo necesaria también, como cuestión básica, la predisposición hacia ese aprendizaje por parte de los alumnos (Martínez Recio et al.,1989, p.25).

Desde este punto de vista, encontramos relación con un posicionamiento sobre lo que representa saber matemática. En este sentido, Chevallard et al. (1997), citan a Brousseau, quien afirma:

> Saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos es, “ocuparse de problemas” en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad. (pp.213, 214)

En cuanto a una postura acerca de la enseñanza de la matemática, estando íntimamente relacionada con la asumida sobre el aprendizaje de la matemática, se parte de un posicionamiento que sostiene que lo primero que hay que analizar es el conocimiento matemático, porque a partir de ese conocimiento hay distintas reformulaciones, reconstrucciones posibles, que son necesarias conocer para poder interpretar qué es lo que pasa con el aprendizaje, además de decidir qué actividades propone el docente para que sean coherentes con este aprendizaje.

Este enfoque de la didáctica de la matemática, principalmente desarrollada en Francia “presenta caracteres diferenciales respecto a otros enfoques: Concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la Matemática y a teorías específica de aprendizaje y búsqueda de paradigmas propios de investigación, en una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos" (Godino et al., 1991, p.131).

Justamente, la Didáctica de la Matemática se ocupa de los procesos de enseñanza y/o aprendizaje de los saberes matemáticos. Busca indagar metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos. Así también, "tiene como objeto delimitar y estudiar los fenómenos que se presentan durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático" (Rico, Sierra, & Castro, 2000, pp. 353-354, citado en Rico, 2012, p.44).

Por ese motivo, Brousseau expresa que:

> Enseñar un conocimiento matemático concreto, (por ejemplo, los números decimales) es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad matemática en el sentido anterior. El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos (p. 214).

En cuanto al significado atribuido a estudiar matemática, esto es apropiarse del conocimiento otorgándole un significado, un sentido, lo que implica reconocer en qué situaciones es útil ese conocimiento y cuáles son los límites de su utilización; en qué situaciones es una herramienta, un instrumento eficaz para resolverlas. Por ello, la escuela necesita trabajar contenidos que se constituyan en instrumentos útiles también fuera de ella, que permitan a los alumnos reconocerlos más allá de sus muros.

En síntesis, aprender Matemática es construir el sentido de los conocimientos y la actividad matemática esencial es la resolución de problemas y la reflexión alrededor de los mismos.

2 – A. 5. Sobre resolución de problema y modelización

Asociada a la postura asumida sobre la enseñanza de la matemática, será posible plantear la idea que se asume sobre la resolución de problemas.

De hecho, la Didáctica de la Matemática se ocupa, en primer término, de un conjunto de problemas que proceden de un campo de fenómenos que surgen de la actividad humana, cuyo estudio da lugar a una disciplina organizada. “En los últimos 50 años ha sido constante destacar aquellos problemas que la disciplina aborda y resuelve en el trabajo de comités, encuentros de especialistas y debates de expertos en Didáctica de la Matemática” (Rico, 2012, p.48), aunque el desarrollo reciente de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica avala su consideración como actividad de resolución de problemas.

Según Godino (2010), el trabajo seminal de Polya (1945) sobre cómo resolver problemas, proporcionó un empuje para numerosas investigaciones que incluyeron entre sus estudios cuestiones como la resolución de problemas simulada con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias y heurísticas de resolución de problemas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas. Se destaca en Polya (1945) su trabajo que expone cuatro fases para resolver un problema, consistentes en comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Los educadores matemáticos valoraron positivamente el libro de Polya, al considerarlo un recurso importante para mejorar las habilidades de los estudiantes, para resolver problemas no rutinarios y como recurso para afrontar la cuestión usual.

Desde otra perspectiva, los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal, en tanto que los trabajos de Schoenfeld (1985) tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas. Así, Schoenfeld (1992) recomienda que la investigación y la enseñanza de la resolución de problemas debería:

> a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un amplio repertorio de estrategias más específicas de resolución de problemas que se relacionen más estrechamente con clases de problemas específicos; b) favorecer estrategias metacognitivas (auto-regulación y control) de manera que los estudiantes aprendan a usar sus estrategias de resolución de problemas y el conocimiento del contenido; c) desarrollar modos de mejorar las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas y sus propias competencias personales. (Citado en Godino, 2010, p.20).

En este sentido, se considera la postura de Puig (1996), para quien una descripción de los elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas tendrá que contener algoritmos y rutinas utilizadas, de los cuáles se sabe que conducen a la solución, y que son elementos que utilizan los resolutores ideales para resolver los problemas de un dominio determinado. También hay que considerar los modos al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos, que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución.

Parafraseando a Godino (2010), no sería la resolución de problemas el único fin de la enseñanza de las matemáticas, pero si, se considera un medio esencial para lograr el aprendizaje. “Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo” (p.20).

Actualmente, en los currículos y en la investigación educativa se da importancia a la resolución de problemas siendo el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas que considera que su esencia es precisamente la resolución de problemas.

Del mismo modo, la modelación matemática y las aplicaciones se han consolidado tanto como un dominio para la investigación, como para su incorporación en el currículo de matemática de la enseñanza de los diferentes niveles educativos. Siguiendo a Londoño Orrego y Muñoz Mesa (2011), expresan que:

> Al respecto, Blum y sus colaboradores (2007), fundamentan que la modelación debe estar en forma explícita en los planes de estudio, pues esta es una forma de vincular a los estudiantes desmotivados a la actividad matemática. Además, las situaciones extra-matemáticas que se pueden utilizar, son las responsables de la creación de significado para los objetos matemáticos inmersos en la modelación (p. 48).

En general, la modelación puede pensarse como un proceso en el cual se construyen modelos para describir situaciones de contextos reales. Se puede considerar como

Desde esta perspectiva, la modelación se puede considerar como todas aquellas relaciones establecidas entre el mundo real y las matemáticas, “que influyen en un proceso de matematización para la creación de modelos que describan una situación, y a su vez será punto de partida para la toma de decisiones frente a un determinado problema.” (Londoño Orrego y Muñoz Mesa, 2011, p. 49)

Las autoras mencionadas también agregan que, “en el sentido de Blum et al. (2007), el proceso de modelación parte de la relación del mundo extra-matemático hacia el mundo matemático” (p. 51). De esta forma, es un proceso de matematización para la producción de modelos que explicitan matemáticamente, lo que se quiere comprender de la situación real.

Otros autores, (Berry, J. y Davies, A., 1996, Crouch y Haines, 2004, Blum y Borromeo, 2009), consideran a este proceso como un ciclo que comprende la declaración del problema en el mundo real, la formulación de un modelo, la solución matemática, una interpretación de los resultados, la evaluación de la solución, el refinamiento del modelo y, nuevamente, la declaración del problema en el mundo real.

Una parte del proceso de modelación, se encuentra en la construcción de modelos matemáticos. Esta construcción se realiza partiendo de fenómenos o situaciones particulares de diversos contextos, llamados mundo extramatemático o mundo real, situaciones en una esfera distinta a la de las matemáticas.

Siguiendo a Londoño Orrego y Muñoz Mesa (2011), consideramos que, un modelo constituye un conjunto de elementos relacionados, que cumplen una función de representar y describir mediante relaciones matemáticas algún aspecto de una situación o fenómeno que se está estudiando.

Así también, “un modelo es la traducción de un objeto o fenómeno del mundo real a un objeto o fenómeno del mundo matemático. En cualquier uso de las matemáticas un modelo matemático está implicado, explícitamente o implícitamente.” (Blum et al. 2007, citado en Londoño Orrego y Muñoz Mesa (2011, p.54).

En esta tesis, el mundo real comprende a los fenómenos que se dan en la Economía y en su traducción se obtiene lo que denominamos modelo matemático de la situación, el que permite expresar las relaciones observadas en el contexto económico, manteniendo las propiedades de las variables relacionadas en este campo, por lo que las observaciones que se pueden realizar sobre ella estarán limitadas por el contexto. Por ejemplo, al considerar el dominio de la función Demanda, debe corresponde al conjunto de los números reales positivos.

En tanto que denominamos modelo matemático independiente a aquel que utiliza expresiones matemáticas para representar la relación entre distintas variables, parámetros y restricciones, completamente abstraídos del mundo real pero íntimamente relacionado al modelo real matematizado, pudiendo observarse cuestiones matemáticas no limitadas por el contexto.

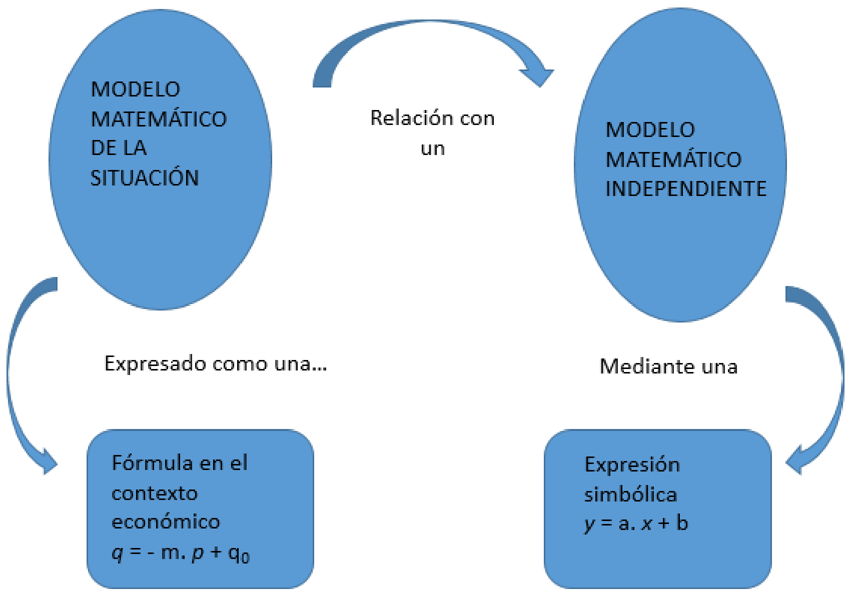
Nos interesan más específicamente, los modelos matematizados mediante fórmulas, entendiendo que:

> Una fórmula es una expresión matemática que relaciona magnitudes, que pueden ser medidas, para calcular el valor de otras de muy difícil o de imposible medida. En un contexto general, nos suministran una solución matemática para un problema del mundo real (Lagraña, 2019, p.41).

y, en particular, los modelos asociados con funciones y los conceptos económicos de oferta y demanda. Se ilustra en la siguiente figura la correspondencia entre los modelos mencionados, donde se brinda un ejemplo de una posible relación entre una formula del contexto económico (q = -m. p + q_0) con su correspondiente fórmula simbólica matemática (y = a.x + b):

Figura 3

Diferenciación entre modelos asociadas al concepto de función



Nota. Correspondencia entre modelos. Fuente: elaboración propia

2 – A. 6. Delimitación del saber disciplinar matemático: Funciones lineal y afín

Teniendo en cuenta la evolución histórica del concepto de función y su epistemología, la cual será desarrollada en el capítulo siguiente, resulta necesario delimitar los conocimientos matemáticos que se involucran en el tratamiento de este tema.

Comenzamos con especificar la noción de función. Goles (1993, p.) define este concepto de la siguiente forma:

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función $f: A \rightarrow B$ es un subconjunto *f* de A × B tal que:

a) Para todo elemento a en A existe un elemento b en B con *(a, b) en f* (postulado de existencia); y

b) si (a, b) y (a, b') son elementos de *f*, entonces $b = b'$ (postulado de unicidad),

Donde la notación utilizada es la siguiente:

x $\mathscr{R}$ y o bien $y = f(x); f: A \rightarrow B; x \rightarrow f(x)$

En el lenguaje coloquial, lo expuesto simbólicamente se interpreta como una regla de correspondencia, es decir, que a cada elemento de un conjunto no vacío *A* le corresponde un único elemento en otro conjunto no vacío *B*. Así mismo, los conceptos elementales de la Teoría de Conjuntos y de relaciones se vinculan con el objeto matemático mencionado.

Dentro del campo de las funciones interesa centrarnos en un tipo particular de ellas, las llamadas algebraicas, más específicamente, las polinómicas de grado uno. Su representación simbólica viene dada por la expresión: $f(x) = a.x$, para la función lineal y $f(x) = a.x + b$, para la función afín.

Por ello, la función lineal y la función afín se consideran casos particulares dentro del mundo de las funciones, dado que su dominio y codominio son conjuntos numéricos (reales, racionales, etc.) y dicha particularidad se centra en que, considerada como casos particulares de las aplicaciones lineales, la función afín no cumple las propiedades de adición y de producto por un escalar, que sí se observan en la función lineal, y ambas conforman la propiedad de linealidad.

O sea, la función lineal $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = a.x$, cumple con las propiedades:

1) f (u + v) = f(u) + f(v); 2) f (k.u) = k. f(u) y 3) f (0) = 0. En efecto:

f (u + v) = a. (u + v) = a.u + a.v = f(u) + f(v); f (k.u) = a. (k.u) = k. (a.u) = k. f(u);

f (0) = a.0 = 0;

En cambio, para la función $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = a.x + b$,

f (u + v) = a. (u + v) + b = a. u + a.v + b = f(u) + f(v) + b ≠ f(u) + f(v); además:

f (k.u) = a. (k.u) + b = k. (a.u) + b = k. f(u) + b ≠ k. f(u) y f(0) = a.0 + b ≠ 0;

con lo que se demuestra que la función afín no verifica las propiedades.

Más allá de las citadas diferencias, la representación gráfica de ambas funciones es una recta con características similares: las pendientes son iguales, definida ésta desde la Geometría Analítica, como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje positivo de abscisas, aunque su intersección con el eje de ordenadas no es el mismo. Para una función lineal, la intersección es un punto del plano (x; y) de coordenadas (0;0) y para la función afín la intersección es el punto de coordenadas (0; b), de ahí que b recibe el nombre de "ordenada al origen".

Por lo expuesto, creemos necesario realizar someramente el estudio de la ecuación de la recta, especificando sus características y así establecer una conexión con la representación de la función lineal afín.

En cuanto a la representación tabular de una función lineal, tiene la particularidad de que podemos obtener una cantidad finita de pares ordenados, donde la primera componente se ubica en la primer columna de la tabla y la segunda componente en la segunda columna. En este tipo de representación, resulta sencillo ver o analizar el cumplimiento de las propiedades destacadas precedentemente, mediante acciones de suma o productos con los elementos de la tabla. En caso de tratarse de una tabla de valores para una función afín, no resulta sencillo analizar estas propiedades.

La recta, desde el punto de vista geométrico, se define como conjunto de infinitos puntos alineados, de un plano o del espacio. También la recta es el lugar geométrico, de los puntos tales que, tomados dos cualesquiera del lugar geométrico, el valor de la pendiente siempre resulta constante.

Esta última expresión permite encontrar una expresión para hallar la pendiente de una recta teniendo las coordenadas de dos puntos de la misma. En símbolos:

$(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$, entonces, la pendiente es el cociente incremental o cociente de incrementos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta relación se verifica para cualquier par de puntos de la recta, también cuando un punto se considere *genérico* (x; y), representando a cualquier punto que forma parte del lugar geométrico, por lo tanto, el cociente incremental seguirá dando como resultado la constante “m”:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

De esta expresión se deducen las ecuaciones de la recta:

$y - y_1 = m\,.(x - x_1),$ habitualmente denominada punto-pendiente, o $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, conocida comúnmente como recta que pasa por dos puntos.

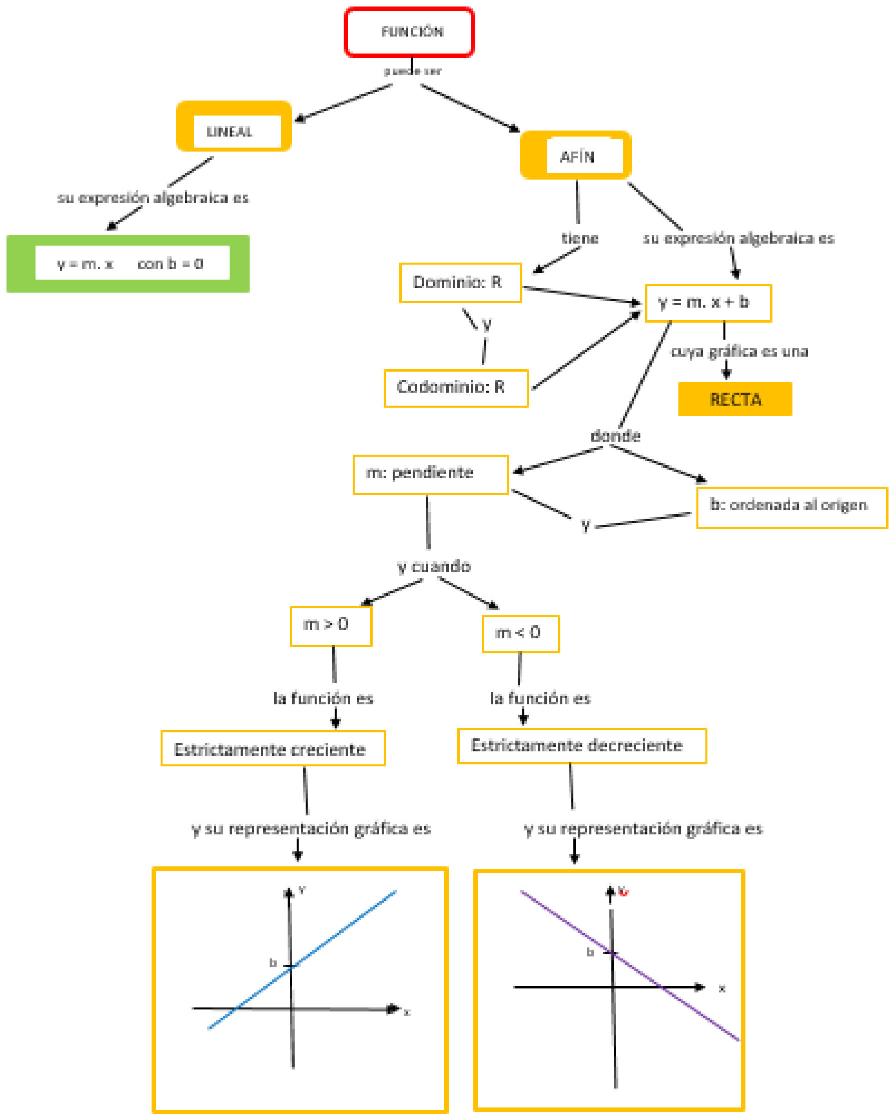
La particularidad del concepto función es que admiten diversas representaciones: mediante una expresión simbólica o ecuación, por medio de un gráfico en un sistema de ejes cartesianos, por una tabla numérica o forma tabular o mediante una descripción verbal.

Hoy las funciones son fundamentales en el estudio del cálculo y constituyen una herramienta para describir el mundo real en términos matemáticos. En la vida cotidiana, las funciones matemáticas pueden representarse como modelos de diversas situaciones, como la temperatura a la cual hierve el agua versus la altitud sobre el nivel del mar, el interés que se paga por una inversión en función al tiempo que ésta permanezca depositada, el área de un círculo versus la medida de su radio o la distancia recorrida por un objeto a una velocidad constante a lo largo de una trayectoria recta versus el tiempo transcurrido, por citar algunas.

En el siguiente esquema se sintetizan las relaciones entre los diferentes conceptos involucrados para el estudio de funciones:

Figura 4

Esquema conceptual sobre estudio de las funciones



Nota. Autoría propia

2 – A. 7. Delimitación del saber disciplinar económico: Oferta y Demanda

En las Ciencias Económicas se recurre con frecuencia a conceptos y modelos matemáticos debido a que éstos constituyen un instrumento elemental para el análisis, la cuantificación y la modelización de los fenómenos económicos, aportando un orden lógico y metódico que posibilita el estudio de las relaciones cuantitativas.

Con el fin de fundamentar la delimitación el objeto de estudio, nos parece pertinente situar a la Oferta y la Demanda como campo de estudio.

Éstas se enmarcan dentro de la Microeconomía, que es una rama de la Economía, y se encarga de analizar el comportamiento económico de empresas, hogares e individuos y su interacción con los mercados.

Siendo más precisos, la Microeconomía estudia y evalúa el impacto de los cambios de precios tanto en los consumidores (demanda) como en los productores (oferta).

Además, desarrolla modelos matemáticos para el estudio del comportamiento de los individuos ante los cambios mencionados el en párrafo anterior, que se cumplen solamente bajo ciertos supuestos.

Actualmente en Economía, se define la Oferta como la cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a vender a los consumidores bajo determinadas condiciones de mercado. Cuando éstas se caracterizan por el precio en conjunto de todos los pares de precios de mercado se forma la denominada curva de la Oferta. Hay que diferenciar entonces dicha curva respecto de una cantidad actual u ofrecida que, en general, sería un punto concreto de dicha oferta que hace referencia a la cantidad que los productores están dispuestos a vender a un determinado precio.

En tanto, la Demanda se define como la cantidad de bienes o servicios que son adquiridos por consumidores a diferentes precios en una unidad de tiempo específica, ya que sin un parámetro temporal no podemos decir si una cantidad de demanda crece o decrece. Cuando una persona elige comprar algún bien para cubrir sus necesidades, lo hace de manera consciente en base a sus criterios tanto objetivos como subjetivos. Estas condiciones se modifican de acuerdo al nivel educativo y socio-económico entre otros.

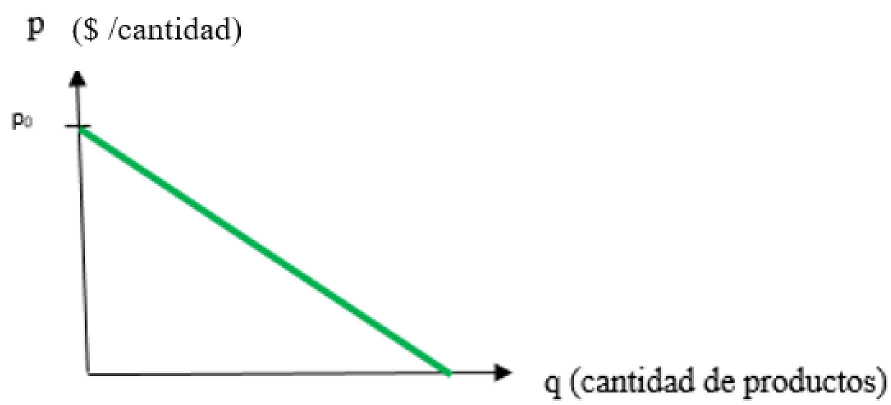
La ley de demanda es una relación inversa entre el precio unitario y la cantidad de bienes o servicios. Establece que, si el precio unitario de un bien o servicio aumenta, la cantidad demandada será menor y, por el contrario, cuando el precio unitario disminuye, aumenta la cantidad demandada del producto o servicio. Excepciones de esta ley la constituyen, por ejemplo, la demanda de servicios de primera necesidad como ser el agua, la energía eléctrica, o de medicamentos oncológicos, para diabéticos, hipertensos, entre otros.

La relación que vincula la forma en que varía la cantidad requerida de un bien, según el precio unitario que tenga en el mercado, aplicando la condición de “ceteris paribus” (Marshall, s/f) que significa “todo lo demás no cambia” (Marshall, s/f), da origen a la función reducida, la cual se expresa simbólicamente como $q = f(p)$, o también desde la ecuación de la recta punto - pendiente $q - q_0 = m. (p - p_0)$, donde $m < 0$.

La representación gráfica de la función demanda es un segmento de recta decreciente[2], la misma se sitúa en el primer cuadrante del sistema de ejes cartesianos como sigue:

Figura 5

Gráfica de la función demanda



Nota. Autoría propia

La ley de oferta es una relación directa entre el precio unitario y la cantidad de bienes o servicios. Establece que, si el precio unitario de un bien o servicio aumenta, la cantidad ofrecida será mayor y, por el contrario, cuando el precio unitario disminuye, también lo hace la cantidad ofrecida u ofertada del producto o servicio en un determinado momento. Excepciones de esta ley se presentan, por ejemplo, cuando los precios son muy bajos, tanto que los productores no ofrecen sus productos debido a que no se cubren los costos de producción.

La relación que vincula la forma en que varía la cantidad ofrecida de un bien, según el precio del mismo en el mercado y aplicando la condición de *ceteris paribus*, da origen a la

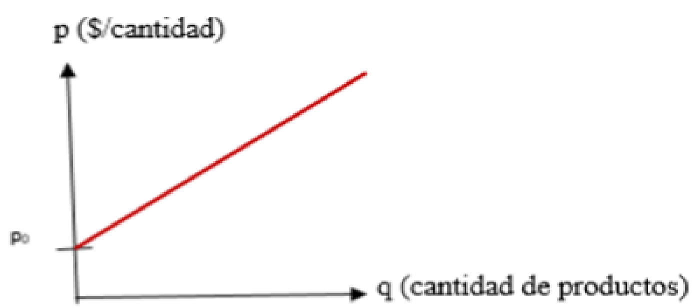
[2] Salvando el hecho de dibujar una línea continua, a pesar de que el dominio de la variable económica sea un subconjunto de R.

función reducida, la cual se expresa simbólicamente como $q = f(p)$, o también desde la ecuación de la recta punto – pendiente $q - q_0 = m. (p - p_0)$, donde $m > 0$.

La representación gráfica de la función oferta es una semirrecta creciente, y la misma se sitúa en el primer cuadrante del sistema de ejes cartesianos como sigue:

Figura 6

Gráfica de la función oferta



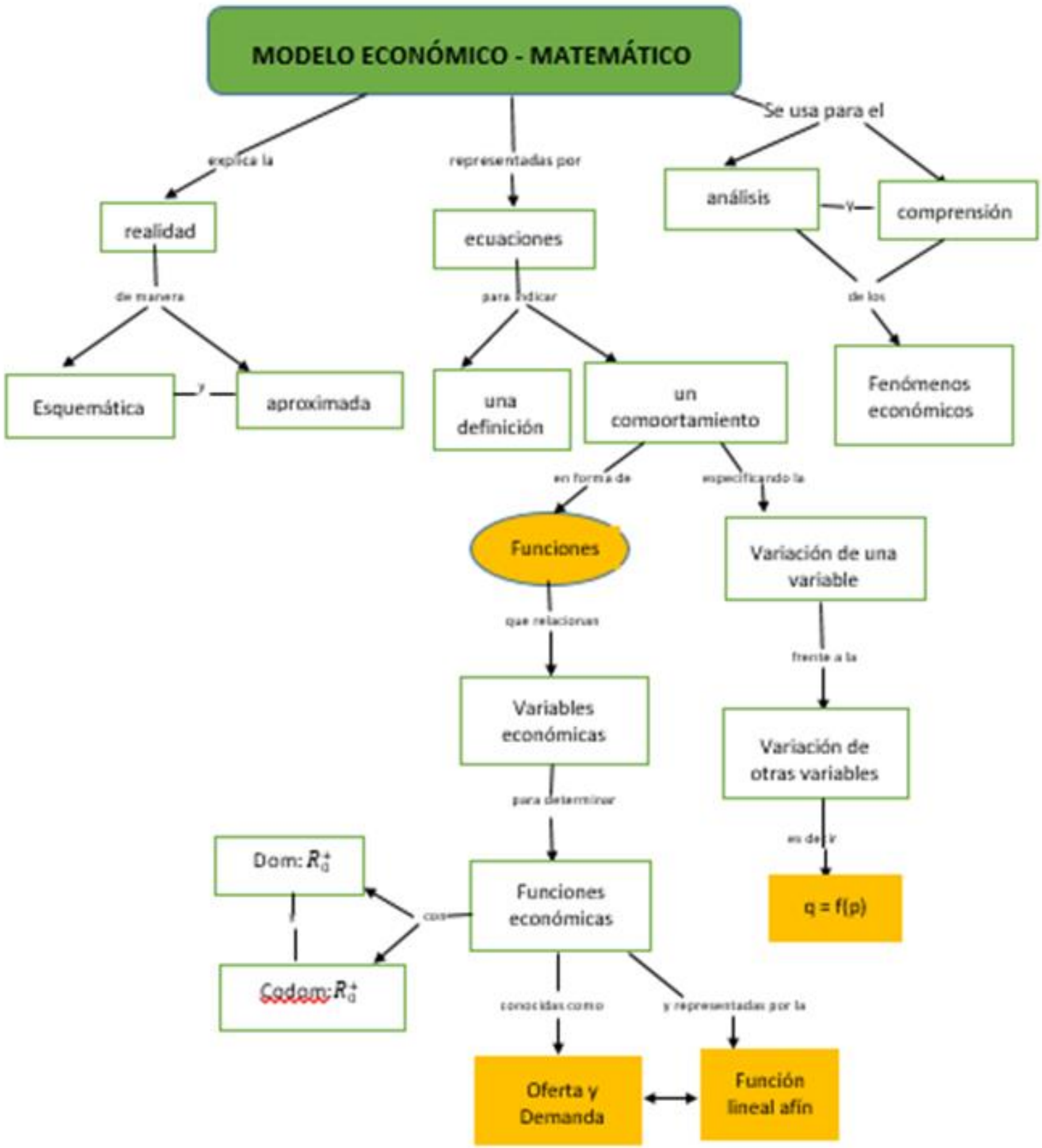
Nota. Autoría propia

Desde la Economía, la variable independiente p se mide en el eje vertical, mientras que la variable dependiente q se mide en el eje horizontal.

Lo expresado, se resume en un esquema que se representa en la siguiente figura:

Figura 7

Esquema conceptual del modelo estudio matemático – económico de las funciones oferta y demanda



Nota. Autoría propia

2 – B. Enfoque metodológico

2 – B. 1. Método

Con la intensión de buscar respuestas a las hipótesis planteadas en el Capítulo 1, y siendo coherentes con el paradigma interpretativo al cual adherimos, basamos el análisis de la información en una metodología cualitativa, que como dijimos en apartado anterior, es una alternativa adecuada en los estudios de procesos educativos.

Así mismo, recurrimos a la aplicación del método que ofrece el Modelo Teórico Local (MTL), constituido también como marco teórico ampliamente desarrollado en el apartado precedente. Esta metodología surgió, como ya se dijo, para dar respuestas a investigaciones en la matemática educativa y ofrece la posibilidad de subdividir el estudio para obtener cuatro componentes o subsistemas del MTL, concentrando el análisis en procesos que se dan lugar al abordar un objeto de estudio devenido en objeto de enseñanza y aprendizaje: la enseñanza, el aprendizaje, la comunicación y el objeto de conocimiento.

Para poder encontrar los elementos de cada componente, hubo necesidad de hacer un seguimiento continuo y detallado de los intervinientes del mundo observado, por ello optamos el método conocido como estudio de casos. De acuerdo con Gutiérrez Rodríguez,

El hecho de que sea necesario un análisis profundo de la situación hace casi imprescindible centrarnos en muy pocos individuos…es un diseño de investigación apropiado para estudiar un caso o situación con cierta intensidad en un período de tiempo corto, tiene como característica diferenciadora que la obtención de la información y de las conclusiones se basan en la observación de un número reducido de individuos (a veces uno o dos solamente) (Godino et al., 1991, p.168.

En relación al estudio de casos, también hacen sus aportes los autores Hamilton y Delamont (1974), quienes expresan que este método permite afrontar la realidad mediante un análisis detallado de sus elementos y la interacción de estos con el contexto. Esto permite llegar a la búsqueda del significado y la toma de decisión sobre el caso mediante un proceso de síntesis. "El estudio detallado permite clarificar relaciones, descubrir los procesos críticos subyacentes e identificar fenómenos comunes" (como se cita en Arnal et al., 1992, p.107).

2 – B. 2. Diseño

A continuación, realizamos una breve descripción del diseño metodológico que fue implementado para llevar a cabo la recogida de los datos y los análisis de la información para cada uno de las componentes del MTL.

2 – B. 2. 1. Para la componente de competencias o formal (en el Capítulo 3).

Para la Recogida de datos, utilizamos como técnica la Resolución de problemas mediante Cuestionarios con enunciados de problemas a resolver

Sobre los problemas: Los problemas seleccionados son representantes de una diversidad que presentan enunciados similares, y para los cuales se requiere el uso de los conocimientos disciplinares en estudio: función lineal y afín, desde la Matemática, y Leyes de Oferta y Demanda, desde la Economía. Luego de indagar en diversas publicaciones o libros de textos disponible, fueron seleccionados los problemas desde el Anexo de la publicación de una investigación didáctica (nivel universitario), denominada Enseñanza de ecuaciones lineales en contexto, siendo sus autores Galagovsky, L. y Cittadini, P. (2008), y también del capítulo 3, pág. 63, del libro Economía con aplicaciones en Latinoamérica de Samuelson P. (19ª. Edición, 2010).

Uno de los criterios de selección de los problemas fue que éstos sean representativos entre una diversidad que presentan enunciados similares, y para los cuales se requiere el uso de los conocimientos disciplinares en estudio: función afín, desde la Matemática, y Leyes de Oferta y Demanda, desde la Economía. Otro criterio considerado ha sido el tipo de representación de una función: el problema 1 tienen un enunciado con solamente texto, el problema 2, brinda en su enunciado la información en forma tabular y el problema 3 propone en su enunciado la representación gráfica de la función.

Por los criterios enunciados, los enunciados verdaderos fueron adaptados a esta investigación, por ejemplo, dejando sin considerar los ítems que referían a otros conceptos diferentes a los de oferta o demanda.

Cabe aclarar que enunciados similares a los seleccionados se encuentran con frecuencia en los textos universitarios de Matemática para Economía, donde aparecen generalmente como problemas de aplicación de algún conocimiento matemático que se está desarrollando.

Estrategia de Análisis: consideramos los Protocolos de análisis, tomando como base las resoluciones del resolutor ideal y organizando los datos en tablas, en las cuales fuimos considerando las categorías de análisis definidas.

Así mismo, para analizar las resoluciones de los problemas, decidimos tener en cuenta las orientaciones de Lagraña (2019) en cuanto a utilizar un esquema de tres fases: (1) de formulación, (2) de resolución matemática y (3) de interpretación y según esta autora:

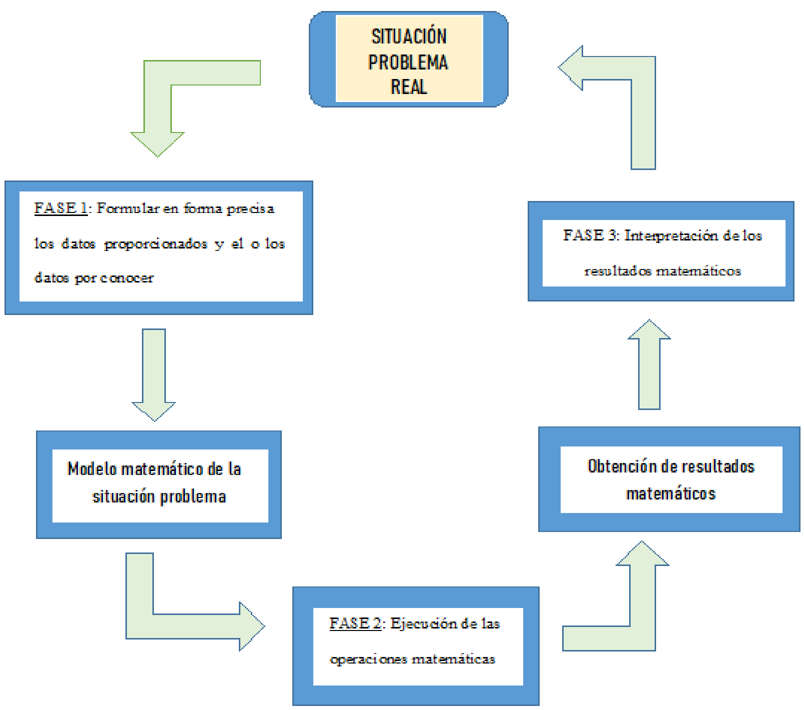
> Para éste diseño se tomaron como referencia los trabajos realizados por Polya (1965, en Alfaro, 2006, p. 2 - 3), Mason, (1989, en Villamil Camelo, sf, p. 4), Bransford y Stein (1993, en Cañadas Santiago *y col*., 2002, p. 2) sobre la resolución de problemas

matemáticos y lo expresado por Blum y Niss (1991), respecto a que la forma de describir la "modelización y las aplicaciones" en dicho proceso, y para el cual, estos autores acuerdan en considerar el establecimiento de una serie de pasos (en García, 2005, p. 46). (Lagraña, C. 2019, p.72).

A continuación, describimos el proceso que se lleva a cabo y cuyo esquema se visualiza en la siguiente figura:

Figura 8

Fases en la resolución de problemas



Nota. Figura de autoría propia. Idea tomada de Lagraña (2019, p.73)

En la *fase de formulación* se vincula al problema concreto con el proceso de formulación de un modelo matemático. De la lectura del problema, contextualizado en la disciplina (en este caso la Economía), el resolutor ideal extrae información la que se asocia a lo que él ya sabe, realiza una interpretación por medio de una asociación con sus conocimientos previos, tanto de la disciplina como sus saberes de la Matemática, debiendo separar entre información conocida y datos por conocer, lo que lo lleva a la búsqueda de un modelo que le permita encontrar lo desconocido. Ese modelo puede ser ya existente o debe ser creado para la situación dada.

En esta fase, básicamente anclado en el mundo de la Economía, como categorías de análisis se consideraron:

a) El Reconocimiento de la información presente en el enunciado de un problema: se procede a identificar el o los datos identificados en el enunciado del problema (expresados como símbolos, lenguaje coloquial o tabular) para establecer la relación existente en el contexto al que pertenece. Se debe poner en práctica una habilidad que hace conectar con ciertos saberes previos y relacionarlos con la información. Por ejemplo, el reconocimiento del término "Demanda" conecta al resolutor con los saberes previos que tienen relación con el mencionado término, como ser: su definición, las variables y parámetros involucrados en la misma, su significado, etc.
b) Las Relaciones entre las componentes de la información, dadas desde la disciplina: esta acción se lleva a cabo una vez reconocida la información proporcionada por el problema a resolver. Se comienza a establecer las relaciones entre la información explícita proporcionada y la aludida apelando a los saberes previos con los que se cuenta.

Por ejemplo, si la información específica es precio unitario de pantalones, los saberes involucrados son el precio unitario, expresado en unidades monetarias por cada pantalón, la cantidad de pantalones y el cociente entre estas dos magnitudes.

c) La identificación del método, modos, medios y procedimientos: Para hallar la solución del problema, el resolutor debe formular un plan teniendo en cuenta la información identificada y las relaciones existentes entre ellas. Por ejemplo, si reconoce que existe más de un método para llegar al resultado, puede preguntarse ¿cuál es el que mejor se ajusta a la situación? o bien, ¿cuál es el que posibilita el uso de toda la información proporcionada? Una vez identificado el método, se opta por uno o más modelos matemáticos particulares (fórmula) para resolver problemas pertenecientes únicamente a este campo.

En la *fase de resolución matemática*, se descontextualiza el saber disciplinar del mundo de la economía, o bien modelo matemático aplicado, y se lo relaciona con el modelo matemático independiente; en este caso el modelo representa al objeto matemático específico función afín y los demás relacionados a él. Es la etapa de realización de cálculos operacionales que presenta el modelo (habitualmente una fórmula), aplicación de propiedades matemáticas, etcétera, siendo un proceso totalmente descontextualizado del marco disciplinar económico.

En esta fase, teniendo en cuenta un aspecto mencionado en el marco teórico sobre los MTL (desarrollados en el apartado 2:A.2) donde se expresa que para encontrar los elementos del modelo de competencias se considera lo que el resolutor sabe, sabe que hacer, sabe que sabe, etc., con el objetivo de hacer visibles las competencias matemáticas que el experto pone en funcionamiento en sus actuaciones, lo cual nos permitiría construir un modelo posible de competencia formales, consideramos las siguientes categorías de análisis:

a) Reconocimiento de lo que el resolutor *debe saber*, es decir, conjunto de saberes (conceptos, propiedades, etc.) tanto de la Economía como los que se relacionan con la Matemática) y

b) Reconocimiento de lo que *debe saber hacer* con el conjunto de esos conocimientos involucrados en el problema., considerando lo propuesto en Puig (2008).

La *fase de interpretación*, es una instancia donde los resultados de los problemas resueltos desde el campo matemático (con modelos ya existentes en cuanto a fórmulas, como así también utilizando datos tabulados o presentes en un gráfico) se adaptan al lenguaje simbólico que se maneja en el campo de la Economía, los cuales cobran un significado exclusivo de este campo de conocimiento, y dichos resultados deben ser minuciosamente controlados por el experto para cobrar sentido en el contexto de la economía. Es decir, a partir de los resultados obtenidos en la fase anterior, el resolutor ideal los pone en contexto, es decir, le asigna al producto del proceso anterior una interpretación dentro del encuadre disciplinar original del problema, asignándole un sentido dentro de la disciplina, y así hallar la solución del problema planteado.

Es necesario aclarar que, para un experto, el recorrido por las tres fases mencionadas, no se realiza necesariamente de manera lineal, es decir, puede por momentos retroceder a la fase anterior y luego continuar, repitiendo varias veces este esquema de idas y vueltas.

A partir de los datos que arrojan las tablas, en primer lugar, se identifican elementos del modelo, para luego desde ellos constituir el listado de las competencias, tanto matemáticas como de la Economía.

2 – B. 2. 2. Para las componentes de enseñanza y comunicación (en el Capítulo 4)

Para la Recogida de datos, se realizó a partir de la lectura de libros de textos seleccionados para su estudio. De la literatura disponible para la enseñanza de la Matemática en nivel universitario, específicamente, la enseñanza del Álgebra y del Cálculo en carreras de las Ciencias Económicas tanto de nuestro país como de otras universidades tales como las de México, Colombia, Perú, Ecuador, entre otras, en un principio se consideraron siete libros de textos, de los cuales finalmente sólo se aislaron tres para su análisis.

El criterio para tal selección se basó en que los libros no seleccionados presentaban al objeto matemático función lineal y función afín con aplicaciones a la economía tales como ingreso, costo fijo, costo variable y costo total, que no son objeto del estudio de esta tesis.

Estrategia de Análisis: consideramos los protocolos utilizando como técnica el análisis de textos. Como instrumentos, la confección de tablas de doble entrada (se consignan en los Anexos III y IV).

Utilizamos como herramienta teórica la noción de configuración epistémica. Como lo hemos descripto en el Capítulo 2, estas configuraciones son el resultado de la articulación de seis objetos particulares o primarios: Las situaciones-problemas, las acciones-procedimientos, el lenguaje, conceptos o definiciones, propiedades-proposiciones y argumentos, las que consideramos como categorías de análisis.

Específicamente, nos basamos en la configuración epistémica del objeto matemático función desarrollada por los investigadores Godino, Font, Wilhelmi y Bencomo (ya mencionado en el apartado anterior, y mencionadas en la Tabla 1): 1) Configuración epistémica conjuntista, 2) Configuración epistémica analítica, 3) Configuración epistémica gráfica, 4) Configuración epistémica tabular

Así también, designamos dos categorías de análisis más, las actividades matemáticas (considerada en las tablas del Anexo III) y las actividades aplicadas a la Economía (consideradas en el Anexo IV), y como recurso, se han denotando entre corchetes los diferentes comentarios y/o desarrollos extraídos de cada libro de texto y que consideramos pertinente como fuente de información.

La ventaja de utilizar el EOS, tanto para la adecuada selección de libros de texto con el fin de seleccionar situaciones acordes a lo que planteamos como objeto de estudio en este trabajo, como así también indagar sobre los elementos que intervienen en la configuración epistémica que muestra la figura 4, es orientar a los resolutores reales durante el proceso de actuación de los mismos.

2 – B. 2. 3. Para la componente de actuación o cognición (en el Capítulo 5)

Para la Recogida de datos, utilizamos como técnica la Resolución de problemas mediante Cuestionarios con enunciados de problemas, que van a ser resueltos por resolutores reales, específicamente, estudiantes universitarios.

Se tomaron los tres problemas seleccionados inicialmente que fueron utilizados para determinar las competencias por medio del resolutor ideal.

Para el estudio de casos, consideramos realizar el análisis tomando las actuaciones de dos estudiantes que ya superaron el primer año de estudios: El caso “José” (distinguido como Resolutor 1), alumno de la carrera de Contador Público y el caso “Leo” (distinguido como Resolutor 2), alumno de la Licenciatura en Administración de Empresas, ambos de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Misiones. En una primera instancia, la experiencia se llevó a cabo solicitando a tres alumnos que resuelvan los problemas del cuestionario; luego, analizando las actuaciones, seleccionando a dos de los tres resolutores reales, dado que dichas resoluciones mostraron mucha similitud entre el resolutor 1 y el resolutor 3. Los protocolos de las soluciones se exponen en el Anexo V.

Otra técnica aplicada para obtener datos fueron las Entrevistas: Se ha optado por realizar, a los estudiantes, entrevistas, que consistieron en preguntas realizadas a los sujetos con diálogo continuo entre estos y el investigador, con el objetivo de indagar acerca de la lectura e interpretación de los datos proporcionados por los problemas, como también sobre los procedimientos y conocimientos matemáticos y económicos implícitos en el contexto de los mismos

Las entrevistas sucedieron en instancias posteriores a la resolución de los cuestionarios y fueron grabadas utilizando recursos multimediales. Cada oración del discurso de la entrevista se denotó mediante numeración correlativa entre corchetes. De la desgrabación resultaron los protocolos de las entrevistas consignadas en el Anexo VI.

Estrategia de Análisis: consideramos los protocolos utilizando como técnica el análisis de textos. Como instrumentos, la confección de tablas de doble entrada (se consignan en el Anexo VII). En esta instancia, hemos considerado las soluciones de los estudiantes. Por último, para las interpretaciones y obtención de los elementos de actuación, se cruzaron a modo de "rejillas", los análisis realizados, los comentarios de las entrevistas y el conjunto de competencias del modelo hallado en el Capítulo 3.

SEGUNDA PARTE

Análisis e Interpretación

CAPÍTULO 3

Constitución de un Modelo de Competencias o Modelo Formal sobre la Función Afín, sobre Oferta y Demanda

CAPÍTULO 3

Constitución de un Modelo de Competencias o Modelo Formal sobre Función Afín, Sobre Oferta y Demanda

Desde nuestra perspectiva y como ha sido planteado en el Capítulo 2, para comprender la relación entre la enseñanza y aprendizaje de un conocimiento matemático y su aplicación a problemas de otras disciplinas, recurrimos a la metodología de la conformación de un modelo teórico local, siendo el modelo de competencias o formal uno de sus componentes.

En este capítulo, para la constitución de un modelo de competencia o formal, hemos realizado, en primer lugar, el análisis histórico – epistemológico sobre función y sobre los conceptos económicos de Oferta y Demanda, y, en segundo lugar, encontrar los elementos que conforman el modelo. a partir del análisis de las resoluciones de problemas realizadas por un resolutor ideal, experto en la materia, que involucren estos conocimientos,

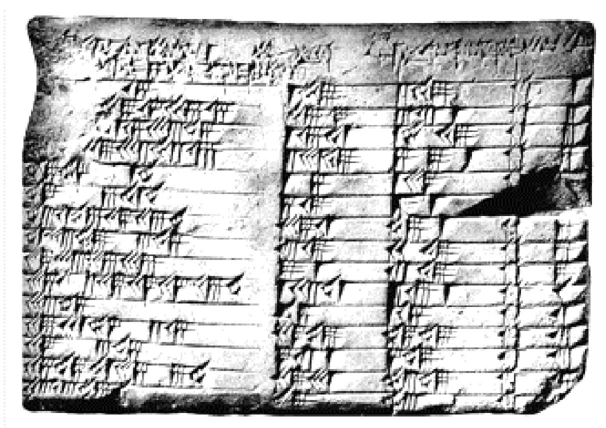
3 – A.1. Estudio histórico – epistemológico sobre funciones

El concepto de función, tal como hoy se lo conoce, se ha ido modificando por un período largo, sufriendo una evolución en su conceptualización.

Comenzando en la antigua Mesopotamia, hacia el año 1500 a.C., a la función se la conocía como "la organización de la información" (Bell, 1945, p.4). Sin formalizarla, la utilizaban en actividades tales como la agricultura, la astronomía, el calendario y en economía. Se encontraron registros de la misma en tablillas de arcilla. La más destacada es la denominada Tabla de Plimpton 322 (se ilustra en la siguiente figura) que dan cuenta de cuán cerca estuvieron sobre las relaciones funcionales, en este caso, las trigonométricas:

Figura 9

Tabla de Plimpton 322



Nota. Imagen tomada de http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446- 03/pl322/pl322.html

Si bien no tenían la noción de función, sí se encontraba la búsqueda de regularidad y predicción, que son características importantes de las funciones (Bell, 1945, p.4). Aunque se realizaban generalizaciones, se estudiaban valores específicos mediante el recurso de la "tabla de valores", es decir que “durante la antigüedad prehelénica se estudiaron diferentes casos de dependencia entre dos o más magnitudes y se expresaron a través de tablas numéricas” (Sánchez Fernández & Valdés Castro, 2007, p. 24-25).

Más adelante, desde el año 500 al 300 a.C., en el pensamiento griego estaban las "ideas de cambio" y la relación entre magnitudes variables, aunque no desde el área de las matemáticas sino de la física, ya que la primera era considerada estática. Así, “su relación con el origen del concepto de función se tiene principalmente en la aparición de la inconmensurabilidad y la proporcionalidad (Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet, 1996, en Roldán Cruz, 2013, p. 7).

Muchos siglos más adelante, a finales de la Edad Media, a pesar del escaso desarrollo científico – académico, surge Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, por su famosa serie. Así también, encontramos con Nicolás Oresme, una manera de graficar velocidades, por medio de una representación geométrica que realizó en un plano mediante dos coordenadas rectangulares para mostrar la manera en que se iban generando figuras o configuraciones (curvas) de dicho fenómeno. Y en economía, afirmó que el dinero es un producto originario del mercado y no del estado. Utilizó expresiones como latitud y longitud para representar geométricamente esas variaciones. A la longitud la representaba como una línea horizontal y tomaba como altura las latitudes representando así la variación de estos fenómenos. Es así como aparece la representación gráfica de cómo varía el fenómeno a través de una curva.

En el año 1484, Chuquet publica las relaciones que se encuentran entre dos progresiones geométricas mediante la suma y la multiplicación, pero es Stifel (1544) el que termina la idea de Chuquet expresando estos resultados en base a esas relaciones y las denomina "logaritmo" que será el origen de la idea de correspondencia entre variables dependientes e independientes, en tanto que Napier (1614) introduce los logaritmos mediante el estudio de funciones continuas y construye la primera tabla de logaritmos.

Desde el año 1500 al 1600, la idea de una variable en función de otra se comienza a analizar con mayor profundidad utilizando métodos para la investigación cuantitativa de los diferentes procesos de cambio, movimientos y dependencia de una magnitud respecto a otra. Descartes (1596) es quien muestra el camino para la introducción a la noción de función con el método de coordenadas, principal conector entre el lenguaje geométrico casi experimental y el lenguaje algebraico: se comienza a relacionar una expresión con una curva formada por dos puntos cuyas coordenadas fuesen soluciones de la ecuación.

Desde el año 1600 al 1700, aparece la representación algebraica junto con desarrollos de la geometría analítica y el cálculo. Se comienza a expresar la idea de la dependencia entre dos variables de manera algebraica, donde al modificar valores de una de ellas, se modifican los valores de la otra variable. Si bien la idea de función aún no se trabajaba como en la actualidad, éstas aparecen como expresiones algebraicas (ecuación).

Alrededor del 1600, en los estudios de Galileo Galilei, se encuentran dos aspectos muy relevantes que se aproximan a dicha idea. Uno de ellos se relaciona con la física como ciencia, contexto y origen del concepto de función, y la otra se relaciona con una nueva mirada en cuanto al movimiento de un cuerpo, la representación de su trayectoria y la formulación de relaciones matemáticas entre las magnitudes que están en juego en dicho fenómeno.

En cuanto a la búsqueda de un lenguaje apropiado adecuado a las nociones matemáticas, por ejemplo, las referidas a variable y parámetro (dentro de una ecuación) y la diferencia que existe entre sus conceptos o significados, encontramos a François Viète centrado en ello. Advierte que, otra forma de representar a lo que en ese momento aún era una noción de función, era a través de una ecuación, además de poder hacerlo en forma tabular o mediante un esquema.

Tomando estos resultados, en el libro Geométrie de René Descartes, este fue el primero que vinculó el álgebra con la geometría. Según Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996, p. 47):

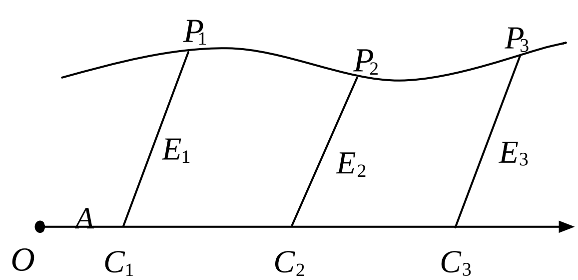
> Aparece por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra (citado en Roldán Cruz, 2013, p. 15).

Posteriormente Pierre Fermat continuó con la obra de Descartes, desarrollando con más profundidad la geometría analítica tal y como hoy la estudiamos. Presenta el principio fundamental de la geometría analítica que dice: *"*Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva.*"* (Collette, 1998, Vol. 2, p. 23 citado en Roldán Cruz, 2013, p. 16), introduciendo la idea de variable algebraica. Fermat llega a afirmar que todas las ecuaciones de primer grado van a representar líneas rectas, y utilizando la notación hallada por Viète, la forma más simple de expresar la ecuación lineal que se corresponde con una recta que pasa por el origen es Dx = By (sin considerar los valores negativos), y su expresión más general tiene la forma ax + by = c^2.

Además, no emplea ejes cartesianos, de hecho, las representaciones son oblicuas.

Figura 10

Representación de coordenadas según Pierre Fermat



Nota. Imagen tomada de bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf

En tanto Isaac Newton, hacia el año 1673, enfocado en el estudio de la trayectoria que describía un punto móvil formando una curva, propone que todo movimiento se puede descomponer en otros dos: uno horizontal y otro vertical que actúan como un sistema de ejes que permiten establecer las coordenadas del punto (posición) en cada instante. Designa como fluente a las variables dependientes del tiempo, es decir, los fluentes serían las funciones.

En el mismo período, en 1673, Gottfried Wilhelm Leibnitz utiliza por primera vez el término función para referirse a los objetos matemáticos que están presentes en una fórmula, más precisamente, cuando trata un problema referido a la ordenada mientras estudiaba las tangentes, denotando cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Según Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996), Leibnitz:

> Se dio cuenta que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abcisas (sic) cuando estas tienden a cero, así como el cálculo de áreas depende de la suma de las ordenadas o de los rectángulos cuya abcisa (sic) tiende a cero y que ambos son problemas inversos (citado en Roldán Cruz, 2013, p. 19).

También introdujo los términos constante, variable, parámetro y coordenada, tal como se los conocen en la actualidad.

Se comienza a considerar la idea de variable asociada a cualquier conjunto numérico y, todo lo desarrollado sobre el concepto de función en el campo del cálculo infinitesimal, hasta ese momento, contribuyó a indagar más acerca de las variables dependientes en el estudio de otro tipo de curvas.

Desde el año 1700 al 1800 aparece la noción de función como expresión analítica o bien, simbólica. Bernoulli, Euler y Lagrange fueron autores que consideraron la función como expresión de cálculo, es decir una expresión algebraica que contenía un valor variable y constante combinada con operaciones matemáticas, disciplina que hoy se conoce como Análisis matemático.

Bernoulli introduce el concepto de función como función analítica, redefinida por Euler como una expresión analítica, compuesta por una variable y una constante; Euler, además, las clasifica de acuerdo a sus composiciones y la designa función algorítmica. Por su parte Lagrange, la consideraba como una función de cálculo.

Luego, en el año 1755, Euler redefine función como una correspondencia arbitraria, aunque con esa forma de concebir la función no se lograba corresponder con la noción de expresión algebraica que presentó conjuntamente con Bernoulli como conceptos de funciones diferentes. En este sentido, Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996), expresan que "una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes" (citado en Roldán Cruz, 2013, p. 21).

Para Euler el término expresión analítica está constituido por operaciones algebraicas y trascendentes. Pero en su nueva definición, que dista mucho de la segunda, ya no menciona la frase expresión analítica y la reemplaza por correspondencia entre variables, en las que éstas son elementos de un conjunto y si una de ellas cambia, también lo hace la otra, es decir: "si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél [x] se llama una función de dicha variable" (Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet, 1996, p. 51 citado por Roldán Cruz, 2013, p.21).

A partir de Euler, surge la notación hoy utilizada y simbolizada como *f(x)* donde a "x" la denomina argumento y *f* es la función aplicada sobre ésta. Más adelante Euler también empleó la palabra función para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes y así introdujo la notación hoy conocida: y = f(x). Realizó un estudio ordenado y gradual de la geometría analítica, iniciado con la recta, siguiendo con las cónicas, luego con las curvas de tercer grado, y las de mayor grado. Este estudio metódico y estructurado reafirma la existencia de una correspondencia entre ecuaciones y curvas, donde Sánchez Fernández & Valdés Castro (2007, p. 117) en este sentido expresan que: *"*dada una función, puede trazarse la curva correspondiente y señala que cada función de x dará una línea recta o curva, cuya naturaleza dependerá de la función y*"* (como se cita en Roldán Cruz, 2013, p.21).

Entre los años 1820 y 1830, se comienza a considerar a la función como una correspondencia. Cauchy define la variable independiente como una variable que toma distintos valores, mientras que Lobachewsky afirma que una función de "x" es un número que varía cuando "x" varía, y este valor de la función puede ser expresado analíticamente o por una condición. La dependencia puede existir o ser desconocida.

Aunando los planteos de Euler, Lagrange y Bernoulli sobre el concepto de función, en el año 1822, Joseph Fourier la estudió como serie trigonométrica y llegó a la siguiente definición, como la expresan Sánchez Fernández & Valdés Castro (2007):

> Ante todo, debe notarse que la función f(x) para la cual esta prueba se presenta, es enteramente arbitraria, y no está sujeta a una ley de continuidad… En general, la función f(x) representa una sucesión de valores dados para las abcisas (sic) x… No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden una a la otra de cualquier manera, y cada una de ellas está dada como si fuera una sola igualdad (en Roldán Cruz, 2013, p.23).

Fourier amplía la definición de función al considerar que la expresión f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas arbitrarias. Explica que dados una infinidad de valores a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x) sin suponer que éstas están sujetas a una expresión analítica o ley común, alejándose así de la noción de expresión algebraica.

Mencionado por Youschkevitch (1976, p.32), Cauchy deja en claro la existencia de correspondencia entre las variables dependiente e independiente, hecho que hará posible su incorporación en el concepto de función cuando plantea que:

> Cuando hay cantidades variables, de tal modo vinculadas entre sí, que estando dado el valor de una de ellas se pueden determinar los valores de todas las demás, por lo común se concibe a estas diversas cantidades como expresadas por medio de una de entre ellas, que entonces toma el nombre de variable independiente; y las demás cantidades expresadas por medio de la variable independiente son lo que se denomina las funciones de esa variable (citado en Roldán Cruz, 2013, p.25).

Así mismo, siguiendo a Sánchez Fernández & Valdés Castro (2007), mencionan que es a Peter Gustav Lejeune Dirichlet a quien se le atribuye la definición formal moderna de una función. En el año 1837, propone llamar "y" a la variable que se relaciona con otra variable "x" de tal manera que cada vez que "x" toma un valor, por una regla determinada, habrá un único valor de "y". Esta última se dice que es una función de "x" y se la expresa como f(x). Pero, en ningún momento notó la necesidad de que la función tenga asociada una expresión algebraica o fórmula. Su definición más formal dice:

> Designemos por a y b dos valores fijos y por x una magnitud variable, situada entre a y b. Si a todo x corresponde un valor finito y = f(x) que varía de manera continua cuando x

> varía también de manera continua de a a b, diremos que y es una función continua para este intervalo. Aquí no es en absoluto necesario que y se exprese en función de x según una misma ley sobre todo el intervalo; no es necesario incluso que se posea una expresión algebraica explicita entre x e y (en Roldán Cruz, 2013, p.25).

A Goerg Cantor (1845 - 1918) se lo conoce como el precursor de la Teoría de conjuntos, la cual permitió mirar, desde otra perspectiva, a las definiciones de función dadas hasta esa fecha. Ésta teoría permitió que las correspondencias de las que se hablaba cuando daban un concepto de función, dejen de considerarse arbitrarias y les imprimió más rigurosidad en el sentido de que necesariamente deben cumplir con la propiedad o condición de unicidad. Es decir, una función considerada como representación unívoca, que no es otra cosa que la aplicación entre dos conjuntos A y B. Se puede afirmar entonces que, una función es una ley que hace corresponder a cada elemento del conjunto de partida A con uno y solo un elemento del conjunto de llegada B.

Dado que las definiciones dadas por Dedekind y Cantor provocaron un conflicto por los términos que utilizaron para dar una definición de conjunto, en 1911 aparece Giuseppe Peano (1858 - 1932), quien da a conocer su definición sobre producto cartesiano entre conjuntos, concepto que descarta toda definición de conjunto dado hasta ese momento. Peano toma dos conjuntos X e Y y los elementos x e y, expresando al producto cartesiano como $X \times Y = \{(x;y): x \in X, y \in Y\}$. Seguidamente, introduce el concepto de “relación R” como subconjunto de $X \times Y$ y finaliza enunciando que una relación es función “si dos pares ordenados (x,y) y (x,z) con el mismo primer elemento están en relación funcional f entonces necesariamente y = z*”* (Sánchez Fernández & Valdés Castro, 2007, p. 163 como se cita en Roldán Cruz, 2013, p.27).

En consecuencia, el carácter abstracto del concepto de función en términos conjuntistas deriva de la utilización de variables numéricas que son elementos de conjuntos arbitrarios, ya que los mismos no se consideran como pertenecientes a un conjunto especifico de números (reales o complejos).

Sin embargo, en 1939, algunos matemáticos integrantes del grupo conocido como Nicolás Bourbaki, introdujeron una nueva definición de función tomando como eje central los conceptos dados por Dirichlet y Cantor que se relacionan con la correspondencia conjuntista, la cual sigue vigente en el siglo XXI. La misma dice:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F, el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que “y” es el valor de la función en el elemento “x”, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función (Sastre Vázquez, Rey, & Boubée, 2008, p.152 citado en Roldán Cruz, 2013, p.27).

En la actualidad, predomina la definición conjuntista de una función, ya presentada en el capítulo precedente, como un subconjunto de un producto cartesiano entre elementos de dos conjuntos A y B, tal que: a) Para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f (postulado de existencia); y b) si (a, b) y (a, b') son elementos de f, entonces $b = b'$ (postulado de unicidad).

3 – A.2. Estudio histórico – epistemológico de las funciones Oferta y Demanda

En la Edad Antigua, el desarrollo de una economía comercial y de mercado se debe a los sumerios, quienes utilizaron el shekel (unidad de medida del peso de la cebada) como moneda, en tanto que los babilonios confeccionaron el primer sistema de precios basándose en “una métrica de varios productos”, apareciendo así los primeros códigos de ley financiera escrita que aún hoy permanecen vigentes.

No se han hallado escritos que den testimonio de un avance en el estudio sobre la economía como ciencia, pero el hallazgo de la obra del chino Guan Zhong (725–645 a.C.), sugiere que en esta misma época realizaron análisis de las actividades económicas en otras regiones, centrados principalmente en la administración pública desde un enfoque ético más que científico.

A pesar de ello, en sus estudios comienza a vislumbrarse una idea que denominó, en un principio, la teoría de “lo ligero y lo pesado”, que sienta precedentes para lo que luego se conocería como la teoría de la oferta y la demanda. Según Landreth y Colander, (2006), afirmaba que cuando en el mercado “un bien era abundante, se volvía ligero y su precio bajaba. Cuando se guardaba bajo llave, se volvía pesado y su precio subía. Había movimientos de entrada y salida de bienes de los mercados dependiendo de su peso y una tendencia clara hacia un único precio: el equilibrio” (p. 28).

Estos autores agregan que esta teoría le condujo a otra a la que denominó Teoría cuantitativa del dinero, sosteniendo que “Cuando el dinero era pesado, su precio subía (los precios de los bienes bajaban) y cuando era ligero, su precio bajaba (los precios de los bienes subían)” (Landreth y Colander, 2006, p. 28). En otras palabras, las ideas de Guan Zhong no son otra cosa que la teoría o ley de la oferta y la demanda, tal como hoy se la conoce.

Con la aparición de las primeras monedas de oro y plata acuñadas por los sirios alrededor de los años 650 al 600 a.C., las transacciones comerciales se monetizaron, dejando atrás las unidades de medida o “métricas” utilizadas. Hacia finales del siglo VIII a.C. y hasta el siglo VII a.C., Hesiodo, quien fue agricultor, hace mención en sus escritos Obras y Días a la Teoría fundamental de la escasez de recursos, y por esta razón se lo conoce como el primer economista.

Cuatro siglos después de Hesíodo, Jenofonte (431 a.C. – 354 a.C.) logró aplicar el concepto estudiado por Hesíodo, no sólo a la producción y al hogar, sino también al ejército y a la administración pública, hecho que facilitó u optimizó la división del trabajo, y despertó el interés de autores griegos como Aristóteles y otros pertenecientes a la escuela escolástica.

Los aportes económicos realizados por Aristóteles (364a.C. – 322a.C.) se centraron en el intercambio de mercancías y la utilización del dinero para tal fin. Opinaba que:

> Cuando se producen bienes para venderlos en un mercado, puede ser difícil saber si esta actividad satisface necesidades o deseos desmesurados, pero suponía que, si un intercambio de mercado se realiza mediante un trueque, se realiza para satisfacer necesidades naturales y no se pretende obtener ningún beneficio económico (Landreth y Colander, 2006, p. 30).

Durante la Edad Media, encontramos varios autores que continuaron con estudios económicos de acuerdo a las actividades diversas que se comenzaban a desarrollar. Los autores de origen árabe – islámicos, en un principio, han tenido muy presente las actividades desarrolladas por la población sin dejar de lado los efectos de las mismas, centrándose en gran medida en el estudio del aspecto económico dentro de un contexto religioso, hecho que impidió la formulación de un modelo analítico.

Se cree que los avances en el estudio de ciertos temas económicos, como la tributación entre otras, llegaron gracias a dos autores árabe-islámicos: Abu Hamid al-Ghazali e Ibn Khaldun.

A Al-Ghazali (1058–1111) se lo reconoce como uno de los eruditos del medioevo islámico. Su estudio detalla la manera en que los mercados progresaron gracias al canje o permuta de productos como así también la coordinación existente en todas las actividades económicas gracias a la división del trabajo.

En cambio, Ibn Khaldun (1332–1406) realizó un estudio más general. Según Landreth y Colander (2006) "Se puede afirmar que este autor examinó muchos temas "económicos": la población, los beneficios, la oferta, la demanda, los precios, los bienes de lujo, los excedentes agregados y la formación de capital" (p. 32).

Los autores denominados escolásticos, establecieron algunas normas religiosas con el fin de calificar las actividades económicas, que por cierto eran escasas y muy básicas.

Entre los años 1600 y 1750, en Europa Occidental aparece el mercantilismo y las actividades económicas se incrementaron, hecho que dejó de lado las teorías que se manejaban hasta el momento para dar paso a nuevas leyes sobre las interrelaciones económicas. Autores ingleses y franceses realizaron sus aportes que resultaron ser las más representativas y los comerciantes pasaron a ser los protagonistas. Adam Smith (1723 – 1790) es uno de los autores que realiza aportes sobre crecimiento económico, libre competencia, liberalismo y economía política, desde una mirada analítica objetiva, siendo considerado el Padre de la Economía Clásica.

Por último, aproximadamente en el siglo XVIII, comienza la matematización de la economía. El primero en utilizar el lenguaje matemático fue el ingeniero Giovani Ceva (1647 - 1734), quien en el año 1711 realizó algunos aportes sobre aplicaciones elementales de la matemática a la economía en su obra llamada De re Nummaria, Quoad Fieri Potuit Geometrice Tractata.

Así mismo, la obra de A. N. Isnard (1748 – 1803) denominada Tratado de la Riqueza (1781), en la que trata el análisis o modelo del equilibrio general de mercado desde el punto de vista matemático mediante el planteo de sistemas de ecuaciones. Seguidamente, León Walras (1834 – 1910) retoma los aportes de Isnard y enuncia el principio o Teoría general del equilibrio, el cual establece que la suma de la demanda debe ser igual a la oferta, teniéndose en cuenta siempre el precio convenido por el demandante y el oferente. Sin embargo, fue Antoine Augustin Cournot (1801 – 1877) el matemático que introdujo la sistematización formal de la ciencia económica proponiendo la utilización de funciones matemáticas para describir conceptos económicos, tales como, demanda y oferta, entre otras.

Por otra parte, Alfred Marshall (1890, citado en Landreth y Colander, 2006, pp. 280 - 281) fue uno de los primeros economistas en introducir el tiempo en la economía. Trató de diseñar un modelo analítico, el "equilibrio parcial", con el objeto de aislar el comportamiento de un determinado aspecto económico (variable), suponiendo que todos los demás factores no varían. De esa manera surge el concepto *ceteris paribus*, que en la actualidad es ampliamente utilizado en la economía para reflejar o explicar, en un análisis estático y a corto plazo, que todo el resto permanece constante.

La sistematización formal de la ciencia económica a partir de Cournot (1838, citado en Landreth y Colander, 2006, p. 308) asocia, principalmente a conceptos tales como la oferta y la demanda, aplicaciones de funciones polinómicas, haciendo énfasis en el análisis de los procesos seguidos y en la interpretación de los resultados obtenidos.

Una consideración especial requiere el uso de representaciones gráficas de las funciones de Oferta y Demanda. En Matemática y en la mayoría de las ciencias, en un gráfico cartesiano se representa a la variable independiente de una función sobre el eje horizontal y la variable dependiente sobre el eje vertical, mientras que en Economía se invierten estas representaciones: en un gráfico "típico" de oferta y demanda, se representan las cantidades del producto sobre el eje horizontal y el precio unitario del producto sobre el eje vertical.

Esto se debe a que Marshall, que fue uno de los que sistematizó la Economía y que unió en un solo libro todos los conceptos que estaban saliendo a la luz en esa época, graficó y fue uno de los primeros economistas en representar la curva de la oferta y de la demanda en un mismo sistema de ejes cartesianos, y ubicó el precio en el eje de ordenadas. La razón de esta decisión se ajusta a las necesidades de la época, dado que los economistas comenzaron a estudiar cómo cambiaba el precio de un bien o servicio en el mercado dependiendo de la cantidad que se estaba ofertando en el día, en ese mercado en particular. Es decir, a qué precio se lo ofrecería, dada la cantidad de un producto q existente en el mercado. Así, se estaría considerando a la cantidad como variable independiente y al precio como variable dependiente.

3 – B. Elementos del Modelo Formal o de Competencias

En este apartado procedemos a presentar los resultados de los análisis e interpretaciones de las actuaciones de un resolutor ideal, llevadas a cabo para resolver un conjunto de problemas relacionados con Oferta y Demanda, con el fin de obtener los elementos que conforman un modelo de competencias matemáticas o formal para las actividades propuestas.

3 – B.1. Delimitación del espacio de problemas y método para el análisis de los mismos

Como se expresa en el Capítulo 2, para elaborar el modelo formal o de Competencias de un Modelo Teórico Local, inicialmente se debe delimitar el espacio de problemas, a partir de los cuales se pueda investigar las actuaciones de un resolutor ideal considerado experto en la materia. Por ese motivo, realizamos una indagación exhaustiva del material bibliográfico disponible como texto para la enseñanza del nivel universitario, seleccionando finalmente los problemas propuestos sobre el tratamiento de la función afín relacionados con los conceptos económicos de oferta y demanda, cuyos enunciados se presentan a continuación:

Problema N° 1: Después de dos meses de trabajo, María hace un estudio de mercado. Los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo que ella fabrica. Si el precio es de $35 puede vender 30 pantalones mensualmente, pero si lo lleva a $30 podría vender 60 pantalones. A medida que disminuye el precio, podría aumentar la demanda siguiendo un comportamiento lineal.

a) Hallar la ecuación que representa la situación planteada.

b) Según la tendencia implícita en los datos, un cliente estaría dispuesto a comprar 90 pantalones por mes: ¿A qué precio debería María venderle sus pantalones?

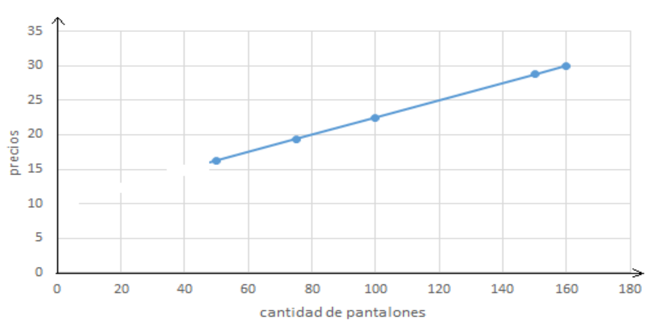
Problema N° 2: Un restaurante tiene una promoción de pizzas para un determinado día de la semana. La siguiente tabla proporciona la información sobre el precio unitario y la cantidad de pizzas.

Precio ($/unidad)	*Cantidad de pizzas*
10	*0*
8	*10*
6	*20*
4	*30*

a) Encuentre la expresión que modeliza la situación.

b) Determine si la relación hallada refleja a la oferta o a la demanda.

Problema N° 3: Dos amigas realizan un estudio de mercado y observaron que los precios que pagan los consumidores varían según los meses del año, es decir que encontraron que, en verano, difícilmente el público compre pantalones que cuesten más de $20. En cambio, en invierno están dispuestos a pagar hasta $30. Con estos datos, realizaron el siguiente gráfico, pensando en la cantidad de pantalones que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellos en cada época.



Hallar la forma algebraica de la función representada.

Una vez que estos problemas fueron resueltos por el experto (los protocolos de actuaciones se exponen en el Anexo I), se procedió al análisis de los datos, adoptando un esquema, diseñado y utilizado por Lagraña (2019, pp. 81 -82), que ya fue explicado en el Capítulo 2 y explicitado en el Anexo II.

3 – B.2. Resultados encontrados

3 – B.2.1. Actuaciones en la Fase de Formulación

A partir de considerar las categorías de análisis correspondientes a esta fase, detalladas en el inciso 2.B. de esta tesis, dentro del contexto de la Economía la información proporcionada en los problemas, conlleva a que las actuaciones de un resolutor ideal requieran saber, comprender y poner en juego las definiciones sobre:

Estudio de mercado, compra, venta, precio a pagar, consumidores, artículo, precio unitario del artículo, cantidad de artículo, demanda y oferta, unidades de medida del precio unitario y de la cantidad de productos, comportamiento lineal, tabla de precios unitarios y cantidades, tipo de producto, precio de venta y precio de compra, modelo de la situación, consumidores, cantidades de artículos a producir, variación de precios unitarios, variación de cantidades de producto.

En cuanto a las definiciones matemáticas, debe disponer las siguientes:

Expresión matemática de la variación, segmento de recta, pendiente, sistemas de ejes cartesianos, abscisas y ordenas, coordenadas, cuadrantes, variables independientes y dependientes, funciones, función afín, función creciente, forma algebraica y ecuaciones.

Así mismo, poner en juego su habilidad para:

Realizar la lectura e interpretación de tablas y gráficos, y desde estos, reconocer la información sobre precios que se pagan, con sus correspondientes unidades monetarias y cantidades de productos, comportamiento lineal, que puede expresarse en términos matemáticos, segmento de recta con pendiente positiva, expresada en términos geométricos.

Luego de reconocer la información y establecer relaciones entre las componentes de la misma, analizamos lo relacionado a la categoría de análisis Identificación del método, modos, medios y procedimientos. A modo de ejemplos, presentamos los siguientes procedimientos posibles:

Ejemplo 1) Como desde la forma textual del enunciado se destaca que se trata de la demanda de pantalones de acuerdo al precio unitario de los mismos y que el comportamiento de la misma es lineal, reconocida la relación de dependencia $q = f(p)$, lleva al planteo del cociente de las variaciones de las variables q y p, sabiendo que éste cociente debe ser constante para cualquier par de valores (p; q) y su valor numérico representa a la pendiente "m". Por ejemplo, para el Problema 1, en forma simbólica:

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \Rightarrow m = \left[\frac{(60-30)\,pant}{(30-35)\$/pant}\right] \Rightarrow m = \frac{30\ pant}{-5\ \$/pant} \Rightarrow m = -\frac{6\,pant}{1\frac{\$}{pant}} = -6\,\frac{pant}{\frac{\$}{pant}}.$$

Por la condición de linealidad, el parámetro "m" se mantiene como razón entre las variaciones de cualquier par de valores (p_i; q_i), como así también para pares ordenados genéricos (p; q) y lo dicho es expresado en símbolos como sigue : $\frac{q-q_1}{p-p_1} = m$ Por último, se sabe que existe un modelo o ecuación de demanda, expresada en símbolos como sigue:

$$q - q_1 - m.(p - p_1) = 0 \text{ , o bien : } q + m\,.p = q_0\,.$$

Ejemplo 2) Otro método o procedimiento de resolución del problema seleccionado: el resolutor toma la información que hace referencia al comportamiento lineal de la demanda y reconoce una relación del tipo $p = g\ (\ q)$, reforzada ésta dependencia para el caso de que el enunciado se presenta con un gráfico (por ejemplo, el Problema 3), para la cual se obtiene en símbolos el modelo matemático de la situación:

$p - \ p_1 \ - m.(q - \ q_1\ ) = 0$, o bien : $\ p + m\ .q = \ p_0$.

Una vez realizado este mismo trabajo sobre los protocolos de resolución de los tres problemas por el resolutor ideal, logramos individualizar aquellos modelos matemáticos aplicados a la economía, que fueron necesarios emplear para encontrar la solución del problema. Esta acción tuvo como finalidad detectar esos modelos para poder avanzar, en la fase siguiente, sobre el análisis de la relación entre los modelos matemáticos aplicados con los modelos matemáticos independientes que se corresponden.

3 – B.2.2. Actuaciones en la Fase de Resolución Matemática

Como expresamos antes, para el análisis se descontextualiza el saber disciplinar del mundo de la economía, o bien modelo matemático aplicado, y se lo relaciona con el modelo matemático independiente, considerando como categorías de análisis lo que el resolutor ideal debe saber y, además, lo que debe saber hacer.

Para la individualización de los modelos que se corresponden (del mundo de la economía con los del mundo de la matemática no aplicada), la presentación a través de tablas sirvió como herramienta para establecer el paralelo. Así también, se consideraron dos columnas para las categorías de análisis definidas: Lo que debe saber y Lo que debe saber hacer.

A continuación, se muestran algunos de los resultados más relevantes de esta fase:

Tabla 2

Ejemplo 1: Análisis de lo realizado por el resolutor ideal en el Problema 1

Modelo matemático de la situación (en Economía)	Modelo matemático independiente	
	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
Ecuación de Demanda u Oferta Considerando la dependencia $q = f\ (p)$: $q - q_1 - m_1.\ (p - p_1) = 0$; o bien: Considerando la dependencia $p = g\ (q)$: $p - p_1 - m_2.\ (q - q_1) = 0$	1- Dependencia entre variables. $y = f(x)$	* Determinar variable independiente y variable dependiente.
	2- Concepto de par ordenado: (x ; y)	* Lectura e identificación de las componentes del par ordenado.
	3- Conceptos de ecuación de primer grado con dos variables y concepto de parámetro: $y - y_1 = m.\ (x - x_1)$	* Encontrar la expresión simbólica algebraica a partir de los datos. * Cálculo de coeficientes numéricos (parámetros) * Reemplazar los valores, aplicar propiedades de la igualdad y encontrar la ecuación.

Nota. Recorte de la tabla de análisis ubicada en Anexo II (pp.183 -184) Autoría propia.

Desde el modelo de la situación, que involucra a las ecuaciones de Demanda u Oferta, se las relacionó, en el modelo matemático independiente, con las correspondientes ecuaciones de primer grado con dos variables, los saberes acerca de variables, dependencia de variables, parámetros o coeficientes, par ordenado. De manera paralela, se consideró el saber hacer, relacionado a cada saber, como, por ejemplo, determinar en un enunciado qué variable es independiente y qué variable depende de la primera, o bien, proceder algebraicamente con un par de pares ordenados para encontrar una ecuación como modelo de la situación.

Tabla 3

Ejemplo 2: Análisis de lo realizado por el resolutor ideal en el Problema 1

Modelo matemático de la situación (en Economía)	Modelo matemático independiente	
	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
El comportamiento es lineal ⇒ la razón entre la variación de la cantidad q y la variación del precio p será constante, pudiendo designar a dicha constante como “m”. En símbolos: $\frac{\Delta q}{\Delta p} = k = m$	4- Variación: es la diferencia entre dos valores de la variable: $\Delta y = y_2 - y_1$ ó $\Delta x = x_2 - x_1$ 5- Razón: cociente entre dos cantidades. $a = \frac{b}{c}$ 6- Pendiente: cociente de dos incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$	* Realizar el cálculo (diferencia) de dos valores de una variable. * Encontrar el resultado del cociente de incrementos, utilizando los valores de dos pares ordenados conocidos de la función. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$
	7- En una función lineal la razón de incrementos o bien cociente incremental, es igual al mismo número, para cualquier par de puntos: $\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} = \frac{\Delta q_3}{\Delta p_3} =$.= k	* Considerar un par de valores de un par ordenado genérico (x; y) que representa a cualquiera de la función. $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Nota. Recorte de la tabla de análisis ubicada en Anexo II (p.184). Autoría propia.

Desde el modelo de la situación, que involucra comprender que, cuando el comportamiento es lineal, se plantea una razón constante entre variaciones de cantidad de productos y variaciones del precio unitario, se relacionó, en el modelo matemático independiente, con definiciones de variación, razón y pendiente de una recta; y en concordancia con éstos, encontrar el resultado numérico de una razón o realizar el cálculo de la pendiente de una recta, aplicando diferencias y cocientes como operaciones aritméticas, como un saber hacer en cada caso.

Tabla 4

Ejemplo 3: Análisis de lo realizado por el resolutor ideal en el Problema 1

Modelo matemático de la situación (en Economía)	Modelo matemático independiente	
	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
Ecuación de Demanda u Oferta $q - q_1 - m_1. (p - p_1) = 0$ ó: $q + m.p = q_0$	8- Ecuación de la recta "punto-pendiente): $y - y_1 = m. (x - x_1)$,	* Reemplazar los datos: m y $(x_1; y_1)$
	9- Ecuación de la recta "por dos puntos": $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right). (x - x_1)$	* Reemplazar los datos: $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$
	10- Ecuación del tipo $y + m. x = y_0$	* Reemplazar los datos: m y $(x_0; y_0)$, siendo $x_0 = 0$ e y_o la "ordenada al origen"

Nota. Recorte de la tabla de análisis ubicada en Anexo II (p.183 - 184). Autoría propia.

Desde el modelo de la situación, que involucra a las ecuaciones de Demanda u Oferta, mediante información brindada a través de tablas o gráficos cartesianos, se las relacionó, en el modelo matemático independiente, con las correspondientes ecuaciones de una recta y las diversas formas según los datos: dados dos puntos del plano diferentes, dados un punto del plano y la pendiente, o la ecuación general del tipo A. x + B. y + C = 0. En estos casos, el saber hacer implica considerar leer e interpretar las coordenadas de puntos y manipular algebraicamente sobre el modelo.

Tabla 5

Ejemplo 4: Análisis de lo realizado por el resolutor ideal en el Problema 2

Modelo matemático de la situación (en Economía)	Modelo matemático independiente	
	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
Función Demanda D: q = - m. p + q_0, ó D: p = - m. q + p_0 Función Oferta O: q = m. p + q_0, ó O: p = m. q + p_0	11- Dependencia entre variables.	* Determinar variable independiente y variable dependiente. * Lectura e identificación de las componentes del par ordenado.
	12- Ecuación explícita de la "Función afín": y = m. x + y_0	* Reemplazar los datos: m y (x_0; y_0), siendo x_0 = 0 e y_o la "ordenada al origen"

Nota. Recorte de la tabla de análisis ubicada en Anexo II (p.188). Autoría propia.

Desde el modelo de la situación, que involucra a las funciones de Demanda u Oferta, se las relacionó, en el modelo matemático independiente, con el saber sobre dependencia entre variables y modelo o forma explícita de una función afín y en concordancia con éstos, encontrar a partir de los datos (componentes de pares ordenados, obtenidos de la lectura de una tabla o de la lectura de puntos del gráfico de una recta) los parámetros m (pendiente) e y_0 (ordenada al origen) la expresión simbólica de la función.

Tabla 6

Ejemplo 5: Análisis de lo realizado por el resolutor ideal en el Problema 2

Modelo matemático de la situación (en Economía)	Modelo matemático independiente	
	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
Representación de la situación mediante una tabla de valores.	13- Valores de la tabla como Pares ordenados $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$; etc.	* Considerar segunda componente del par ordenado en función a la primera componente.

Nota. Recorte de la tabla de análisis ubicada en Anexo II (p.188). Autoría propia.

Desde el modelo de la situación, que involucra en el enunciado del problema, la representación por medio de una tabla de valores, se las relacionó, en el modelo matemático independiente, con la idea que en una tabla se representan pares ordenadas que pertenecen a una función dada y saber hacer una interpretación de las componentes del par ordenado como variables independiente y dependiente.

Tabla 7

Ejemplo 6: Análisis de lo realizado por el resolutor ideal en el Problema 3

Modelo matemático de la situación (en Economía)	Modelo matemático independiente	
	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
Representación de la situación mediante un gráfico cartesiano.	13- Segmento de recta con pendiente positiva	* Considerar segunda componente del par ordenado en función a la primera componente.
	14- Pendiente de la recta: cociente entre las variaciones de la variable dependiente "y" y de la variable de la variable independiente "x": $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ m.	* Calcular la pendiente con las coordenadas de puntos.

	15- Inclinación de la recta, función creciente o decreciente	* Interpretar la inclinación con el signo de la pendiente de la recta.
	16- Sistema cartesiano de coordenadas, ejes cartesianos, cuadrantes.	* Leer coordenadas de puntos. $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$; etc.

Nota. Recorte de la tabla de análisis ubicada en Anexo II (pp. 192 - 193). Autoría propia.

Desde el modelo de la situación, que involucra en el enunciado del problema, la representación por medio de un gráfico cartesiano, se relacionó, en el modelo matemático independiente, con los saberes: gráfica de un segmento de recta o de recta, pendiente, inclinación asociada a la pendiente de la recta y ésta, asociada con crecimiento o decrecimiento de una función; su correspondencia con leer coordenadas de puntos, calcular pendiente utilizando las coordenadas, e interpretar la inclinación con el signo de la pendiente de la recta.

3 – B.2.3. En la Fase de Interpretación

Tanto en esta fase como en la de formulación, siguen interactuando competencias correspondientes a ambos campos: el de la matemática propiamente dicha y el de aplicación, o sea la economía. Aquí, en la fase de interpretación, se da lugar a la aplicación del modelo matemático a la situación particular presentada en el problema, mediante un proceso racional de adecuación al contexto, por parte del resolutor ideal. Es decir, desde el lenguaje matemático realizar la interpretación al lenguaje económico.

Por ejemplo, al hacer referencia a la expresión simbólica de la función afín $y = mx + b$, para interpretar la pendiente "m" analizando su valor numérico y su signo desde el dominio matemático, el experto comprende que se trata de un cociente de variaciones de dos variables "x" e “y”, las cuales son coordenadas (valores numéricos) de dos puntos pertenecientes a la recta que representa a dicha función, y que el signo del resultado de ese cociente indica el comportamiento (creciente o decreciente) de la recta.

En tanto, en la interpretación correspondiente en el contexto económico, el experto dio un significado a la variación de variables del numerador y del denominador; no se trata sólo de un valor numérico, sin sentido, sino que representan variaciones de precios unitarios de un producto respecto de la variación de cantidades del mismo producto, y el signo de la magnitud resultante del cociente de variaciones también tiene un significado, determinando si se trata de la función Oferta o la función Demanda.

El análisis matemático del resultado de un problema desde el enunciado del mismo también es relevante. Por ejemplo, al hallar la ecuación $y - y_1 = \mathrm{m}.\ (x - x_1)$, matemáticamente representa la ecuación de la recta punto – pendiente, se interpreta económicamente como $p - p_0 = m.\ (q - q_0)$, y dentro del contexto del problema dicha ecuación queda expresada como sigue,

$$p - 35\ \$/\mathrm{pant} = -\frac{1\ \$/pant}{6\ pant}.(q - 30\ pant).$$

donde queda claro que 30 y 35 son componentes de un par, que se corresponden mediante la función, que, además, las letras q y p son componentes de otro par que representa a infinitos pares de la función y que gráficamente, los valores de esos pares son coordenadas de un punto, interpretación valiosa si se quiere hacer la representación gráfica. También se otorga significado al signo negativo de la pendiente, interpretando que es una ecuación que representa a una situación de Demanda.

Otra particularidad que se tuvo en cuenta en esta fase es la elección de la unidad de medida y su aplicación a la hora de formular la solución del problema. Es así que, por ejemplo, en la expresión matemática $y + m. x = y_0$, siendo $y_0 = 240$ y $m = 6$, la interpretación en el modelo económico implica contextualizar a las variables "x" e "y", como "p" y "q" respectivamente. En esta fase, tanto las variables p y q como los parámetros "m" y "q_0" se expresan con determinadas unidades de medida, siendo m = 6 ($/pant /pant) y q_0 = 240 pant, hallándose, de esta manera, la ecuación buscada:

$$q + 6\ (\$/\text{pant})\ /\text{pant}).\ p = 240\ \text{pant}$$

Por otra parte, es parte de la interpretación decidir sobre algunos valores posibles. Por ejemplo, si la cantidad demandada fuera $q = 240$ pantalones, al hacer el cálculo, correspondería a un valor $p = 0$, hecho que carece de sentido en el contexto económico, pues esto significa que tal cantidad de pantalones se estaría "regalando". Por esta razón, para un experto será necesario aclarar que, a la expresión que da solución al problema, se le debe imponer la condición de que p debe ser estrictamente positivo, es decir que $p > 0$. Esto obliga al resolutor del problema a reflexionar sobre cómo definir el dominio de las variables en juego para que tengan sentido en el campo disciplinar específico.

De esta manera, desde esta fase se han encontrado como elementos de competencia: la adecuación de la forma simbólica de la ecuación de la recta al contexto del problema, luego de realizar los reemplazos y cálculos para dar respuesta al mismo, como así también el control sobre los valores posibles que pueden tomar las variables y los parámetros y que tienen sentido en el contexto del problema, y la determinación correcta de las unidades de medida para cada variable y cada parámetro involucrados.

3 – C. Conclusiones: Modelo Formal o de Competencias para la resolución de problemas de Oferta y Demanda

El estudio histórico – epistemológico sobre los objetos función, función afín, oferta y demanda, presentado en el apartado 3.A, han echado luz al momento de establecer las relaciones existentes entre los datos de una situación – problema que, en esta tesis, estamos estudiando.

En primer lugar, nos brindó el entendimiento de la evolución que surgió el concepto, desde sus inicios hasta aproximadamente la mitad del siglo XX. Se logró la certidumbre que constituye un conocimiento complejo, que ha sufrido numerosas y diferentes transformaciones hasta ser un concepto tal como se reconoce en la actualidad: de gran aplicabilidad y uso en otras áreas de la matemática, con diversas formas de representación y numerosas aplicaciones en otros campos disciplinares.

En segundo lugar, el recorrido histórico-epistemológicos sobre los conceptos Oferta y Demanda, arrojó entendimiento sobre la dimensión de su evolución dentro de la Economía. Ayudó a comprender que, desde un tratamiento intuitivo por los chinos hasta su matematización, iniciada por Marshall, estos conocimientos han ido relacionándose a un comportamiento funcional. Si bien su adaptación a situaciones reales, donde existen otros factores y varias variables que se ponen en juego a la hora de operar en el mercado, conducen a relacionarlos con conocimientos superiores del cálculo diferencial, una forma simplificada ha sido lograda por el citado Marshall, quien pudo realizar una introducción al estudio de la oferta y la demanda, considerando su comportamiento lineal, cuando propone lo conocido como *ceteris paribus* cuyo significado es "si todo lo demás no cambia" haciendo referencia a impuestos, rentas, intervención del gobierno, para dejar como únicas variables al precio unitario de un artículo y sus respectivas cantidades.

Así mismo, en el último apartado, el análisis e interpretación de las resoluciones de problemas sobre Oferta y Demanda realizadas por un resolutor ideal, nos ha permitido detallar un conjunto de competencias, tanto matemáticas como económicas, que debieran ponerse en acción para encontrar respuestas a dichos problemas. En cuanto a los resultados en el dominio matemático, las competencias pudieron catalogarse tomando como referencia las áreas tradicionales de la Matemática, a las que corresponden los conocimientos involucrados, como ser, Aritmética, Geometría Analítica y Álgebra.

A continuación, se ilustran en los siguientes cuadros los resultados de la interpretación de los elementos de competencias que dieron lugar a las competencias encontradas:

Figura 11

Cuadro 1. Competencias generadas por los elementos en el área Funciones

Funciones	Competencias
Establecer la dependencia entre las variables intervinientes y determinar la variable independiente y la variable dependiente de la situación. Reconocer las representaciones de la función (simbólica, tabular y gráfica). Encontrar la expresión simbólica de la función afín a partir de los datos. Conocer la expresión de la ecuación explícita de la función afín y encontrar la misma reemplazando los parámetros ("m" e y_0). Identificar una función creciente o decreciente, mediante una fórmula o en forma textual. Realizar la lectura de los datos que proporciona el gráfico de una función. Leer e interpretar tablas y gráficos de una función afín y su inversa. Realizar el Cociente entre variaciones de dos cantidades (cociente incremental).	• Conocimiento de modelos matemáticos para una función afín o su inversa. • Uso y aplicación del concepto función afín y de su inversa en la resolución de un problema. • Entendimiento de las características presentes en el comportamiento de la función afín desde sus diferentes representaciones. • Lectura e interpretación de distintas representaciones de una función afín, como ser tabular, gráficas o simbólica algebraica.

Nota. Autoría propia.

Figura 12

Cuadro 2. Competencias generadas por los elementos en el área Algebra y ecuaciones

Algebra_ Ecuaciones	Competencias
Disponer el Concepto de par ordenado y Leer e identificar las componentes de un par ordenado. Disponer el Concepto de ecuación de primer grado con dos variables y noción de parámetros. Reconocer expresiones simbólicas (fórmulas y ecuaciones) y saber hallar la expresión algebraica a partir de los datos particulares. Aplicar propiedades de la igualdad para hallar la expresión de la ecuación. Conocer la relevancia de los símbolos en una ecuación lineal (variables, magnitudes y parámetros).	• Conocimiento de símbolos aritméticos o algebraicos que denotan operaciones, variables o parámetros en el contexto tanto matemático como económico. • Reconocimiento y utilización de operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones. • Dominio y empleo de procedimientos algebraicos para encontrar una ecuación • Distinción entre diferentes modelos de una ecuación.

Nota. Autoría propia.

Figura 13

Cuadro 3. Competencias generadas por los elementos en el área Geometría Analítica

Geometría Analítica	Competencias
Concepto de recta como lugar geométrico Interpretar que el valor hallado del cociente incremental es constante para cualquier par de puntos que pertenezcan al segmento de recta que representa la situación planteada. Reemplazar parámetros y las coordenadas de un punto para hallar: La expresión de la ecuación de la recta punto – pendiente, La expresión de la ecuación de la recta punto – punto o La expresión general de la ecuación de primer grado con una y dos incógnitas. Concepto de raíz y ordenada al origen de una recta y transponer términos para calcular la ordenada al origen.	• Aplicación de la noción de recta como lugar geométrico, de coordenadas de puntos y de su simbolización (cociente incremental y pares ordenados). • Identificación del medio de resolución del problema desde la geometría analítica (ecuación de la recta punto – pendiente y punto – punto).

Nota. Autoría propia.

Figura 14

Cuadro 4. Competencias generadas por los elementos en el área Aritmética

Aritmética	Competencias
Definición de variación y de razón Calcular coeficientes numéricos (parámetros), realizando operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división. Encontrar la suma, la resta, el producto y el cociente de dos números. Aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma	• Conocimiento de símbolos aritméticos o algebraicos que denotan operaciones, variables o parámetros en el contexto tanto matemático como económico. • Reconocimiento de operaciones y propiedades aritméticas que evocan los conceptos. • Dominio de los resultados viables al realizar operaciones matemáticas. • Dominio y empleo de herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones.

Nota. Autoría propia.

Figura 15

Cuadro 5. Competencias generadas por los elementos en Economía

Economía	Competencias
Conocer las definiciones de los siguientes conceptos: Estudio de mercado, Consumidores, Precio unitario de venta, Cantidad de producto, Demanda y Oferta, Unidades de medida del precio unitario y de la cantidad de productos, Comportamiento lineal, Tabla de precios unitarios y cantidades, Tipo de producto, Compra y Venta, Variación de precios unitarios y Variación de cantidades de producto. Realizar la Lectura e interpretación de tablas y gráficos, y desde ésta, reconocer la información sobre Precios que se pagan, con sus correspondientes unidades monetarias y Cantidades de productos. Comprender que el Comportamiento es lineal, que puede expresarse en términos matemáticos o presentado como un Segmento de recta con pendiente positiva o negativa.	• Reconocimiento de la relación funcional entre las variables precio unitario y cantidad de productos, determinación del Dominio de validez de las variables y uso de los términos relacionados a la Economía. • Interpretación del comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre las variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema, sea en forma textual, tabular o gráfica. • Elección pertinente de la unidad de medida de las magnitudes presentes en la expresión para una acertada interpretación de la información que se quiere conocer en el contexto del problema. • Traducción del lenguaje textual al lenguaje simbólico matemático en el contexto del problema y, luego de la realización de los cálculos, interpretación de resultados en el contexto del problema.

Nota. Autoría propia.

En síntesis, lo que ha de poner en juego un resolutor ideal para resolver problemas de Oferta y Demanda queda plasmando en lo que consideramos un Modelo formal o de Competencias Inicial, constituido por competencias tanto matemáticas como económicas, las que se enuncian seguidamente:

a) Uso y aplicación del concepto de función afín y de su inversa y de sus modelos matemáticos en la resolución de un problema.

b) Entendimiento de las características presentes en el comportamiento de la función afín desde sus diferentes representaciones.

c) Lectura e interpretación de distintas representaciones de una función afín, como ser tabular, gráfica~~s~~ o simbólica algebraica.

d) Conocimiento de símbolos aritméticos o algebraicos que denotan operaciones, variables o parámetros en el contexto tanto matemático como económico.

e) Reconocimiento y utilización de operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones.

f) Dominio y empleo de procedimientos algebraicos para encontrar una ecuación.

g) Distinción entre diferentes modelos matemáticos que representen una recta.

h) Identificación de términos y símbolos de la geometría analítica (lugar geométrico, recta, puntos, segmento de recta).

i) Aplicación de la noción de recta como lugar geométrico, de coordenadas de puntos y de su simbolización (cociente incremental y pares ordenados).

j) Lectura e interpretación de la información obtenida del enunciado textual, de una tabla o desde un gráfico cartesiano, y organización de los datos mediante el uso de estos recursos.

k) Reconocimiento de operaciones y propiedades aritméticas que evocan los conceptos.

l) Control o verificación de los resultados encontrados al realizar operaciones matemáticas, o bien, utilizando los datos en diferentes representaciones de una función.

m) Dominio y empleo de herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones.

n) Reconocimiento de la relación funcional entre las variables precio unitario y cantidad de productos, determinación del dominio de validez de las variables y uso de los términos relacionados a la Economía.

o) Interpretación del comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema, sea en forma textual, tabular o gráfica.

p) Elección y uso pertinente de la unidad de medida de las magnitudes presentes en la expresión para una acertada interpretación de la información que se quiere conocer en el contexto del problema.

q) Traducción del lenguaje textual al lenguaje simbólico matemático y luego de la realización de los cálculos, interpretación de resultados en el contexto del problema.

Retomando lo expresado por Puig (2006) quien considera que la competencia proporciona una descripción de la conducta del sujeto epistémico de las matemáticas, el conjunto de competencias encontradas estaría dando esa descripción de cómo actuaría un resolutor experto puesto en situación de encontrar resultados a problemas sobre función afín cuando se aplican para el tratamiento de los conceptos económicos oferta y demanda.

Las competencias halladas predicen las actuaciones posibles frente a problemas de este tipo, siendo factible tener dominio no sólo de lo que sabe y sabe hacer en relación a las funciones, sino también a las demás áreas de la matemática que, se pusieron en evidencia, son necesarias a la hora de encarar la solución a problemas con estas características.

Desde el marco funcional, no sólo saber definiciones sino poder identificar la situación como representativa de una relación funcional, y su comportamiento lineal. Así también, reconocer sus diferentes representaciones y saber qué hacer con ellas, la conveniencia de sus usos, y el pasaje de una a otra, de manera pertinente.

Relacionando con el marco teórico adoptado, a partir de la mirada de una configuración epistémica analítica, considerar su notación algebraica, y su relación con las nociones de ecuaciones y rectas, ofrecidas por la matemática en sus áreas álgebra y geometría analítica.

Desde una configuración conjuntista, considerar no sólo sus definiciones sino aquellas propiedades que la distinguen de una relación no funcional. Considerando la configuración gráfica, poder realizar la lectura e interpretación de la función representada gráficamente, fuertemente vinculada con los conceptos de geometría analítica sobre ejes, planos cartesianos, coordenadas, etc. Así mismo, las características que ofrece una configuración tabular, proporciona al resolutor la posibilidad de leer, comprender y estimar el tipo de comportamiento de la función y en particular su linealidad.

Desde el marco de la economía, el resolutor necesita, en primer lugar, comprender el fenómeno, es decir, tener el dominio de las relaciones que deben satisfacer para que una situación sea catalogada como una situación de oferta o de demanda, y en segundo lugar, reconocer los modelos que se podrían utilizar para poder obtener un resultado, y poseer también recursos como para anticipar si el resultado es factible, coherente con la situación, así como los valores numéricos y las cantidades de las magnitudes halladas.

CAPÍTULO 4

Elaboración de un Modelo de Enseñanza y Comunicación de la Función Afín aplicada a la Oferta y la Demanda

CAPÍTULO 4

Elaboración de un Modelo de Enseñanza y Comunicación de la Función Afín Aplicada a la Oferta y la Demanda

En el capítulo 3 se ha propuesto un modelo de competencias o modelo formal, el que nos ha permitido obtener determinados elementos que constituyen competencias que dispone un resolutor experto para la resolución de problemas de aplicación de la función afín en el contexto de la Oferta y la Demanda. En el presente apartado se focaliza en la elaboración de elementos que forman parte de un Modelo de Enseñanza y de Comunicación.

4 – A. Elementos de Enseñanza de la Función afín y su relación con la Oferta y la Demanda

Para ciertos autores, un modelo de enseñanza es un repertorio o secuencia de textos. En esta investigación se analizan libros de textos, entendidos éstos como libros estándar en cualquier rama de estudio (en este caso, matemática aplicada a economía) y corresponden a recursos didácticos de tipo impreso que sirven como material de apoyo a las estrategias metodológicas del docente y enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

4 – A.1. Análisis de libros de texto

Tanto en el proceso de enseñanza como en el de aprendizaje, uno de los recursos didácticos para apropiarse de los conocimientos, no solo matemáticos sino de cualquier disciplina científica, son los libros de textos. Los contenidos de los mismos tienen un alto grado de representatividad, son avalados por la comunidad científica y educativa y dan cuenta de la evolución histórica de los conocimientos. Para Font y Godino (2006, p.68) “Los manuales escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores, y en cierta medida, los resultados de la investigación”.

En este apartado, se presenta el análisis de los libros de textos utilizados para la enseñanza de la matemática en nivel universitario en carreras de Ciencias Económicas de la UNaM. Como lo hemos descripto en el Capítulo 2, basamos este análisis en la noción de configuración epistémica, las que son resultado de la articulación de seis objetos particulares o primarios: Las situaciones-problemas, las acciones-procedimientos, el lenguaje, conceptos o definiciones, propiedades-proposiciones y argumentos. Para Font y Godino (2006) “El análisis de las configuraciones epistémicas nos informa de la “anatomía de un texto matemático” (p.68).

Como ya se dijo en capítulo 2, de la literatura disponible para la enseñanza de la Matemática en nivel universitario, hemos seleccionado para ser analizados tres libros de textos destinados a la enseñanza del Álgebra y del Cálculo en carreras de las Ciencias Económicas tanto de nuestro país como así también de otras universidades tales como las de México, Colombia, Perú, Ecuador, entre otras.

En la siguiente tabla se detallan los datos relevantes de los mismos:

Tabla 8

Referencias de los libros de textos utilizados para el análisis

Código Libro	Título	Autores	Editorial Año Edición y Origen	Ubicación de los contenidos analizados
T1	Matemáticas Aplicadas a los Negocios	Rodríguez Franco, J., Pierdant Rodríguez A. I. y Rodríguez Jiménez, E.	Grupo Editorial Patria. 2018. México	Capítulo 6 La recta (p.211) 6.1 Ecuaciones de la recta (p.215), 6.2 Modelo de costo lineal y la función de ingreso (p.218) , 6.3 Función de oferta y demanda (p.226), 6.4 Aplicación de la recta en diferentes áreas de negocios (p.232)

		C.,		
T2	Matemáticas Básicas para Administradores	Curo Cubas, A. y Martínez Miraval, M.	3ra. Edición. Fondo Editorial Agosto 2016. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC).	Unidad 3: Gráfica de ecuaciones en el plano (p.189), 3.1. Sistema de coordenadas rectangulares (p.191), 3.2. Ecuación de la recta (p.198), 3.3. Aplicaciones de rectas (p.213), Unidad 4: Funciones reales de variable real (p.251), 4.1. Funciones (p.252), 4.2. Gráfica de funciones (p.263), 4.3. Lectura de gráficas (p.276), 4.4. Transformaciones gráficas de funciones (p.290), 4.5. Aplicaciones de la función lineal y las transformaciones de gráficas (p.306), 4.8. Aplicaciones de funciones polinomiales (p.335), 4.11. Aplicaciones: Elasticidad, precio de la demanda (p.362), 4.14. Aplicaciones de las operaciones con funciones (p.395), 4.15. Función inversa. Relación implícita (p.402), 4.16. Aplicaciones de la función inversa y la relación implícita (p.405)
T3	Matemáticas. Conceptos previos al Cálculo. Aplicaciones a Ingeniería y Ciencias Económicas.	Soler Fajardo, F., Rojas Cortés, L. y Rojas Cárdenas, L.	Ecomes Editores. Primera Edición. 2012. Bogotá	Capítulo 4: Funciones y modelos funcionales (p.193), Dominio de una función (p.197), Casos para hallar el dominio de una función (p.199), Restricción del dominio (p.203), Construcción de funciones (p.205), Gráfica de una función (p.210), Función par e impar (p.216), Álgebra de funciones (p.223), Composición de funciones (p.226), Función inyectiva o uno a uno (p.229), Criterio de la línea vertical y la línea horizontal (p.232), Función inversa (p.234), Tipos de funciones (p.240), Asíntotas verticales y horizontales (p.245), Transformaciones de funciones (p.252), Función lineal (p.254) Capítulo 6 Geometría analítica bidimensional (p.433), Plano cartesiano (p.434), Distancia entre dos puntos (p.436), Punto medio (p.442), Pendiente e inclinación de una recta (p.444), Ecuación de la recta (p.449), Ecuación de una recta horizontal (p.450), Ecuación de una recta vertical (p.451),

				Ecuación de la recta en forma general (p.452), Rectas paralelas (p.454), Rectas perpendiculares (p.456), Problemas de aplicación (p.460).

Nota. Autoría propia.

Como lo hemos explicitado en el Capítulo 2, para el estudio tomamos como referencia los elementos constitutivos de cada configuración epistémica y poder, de esa manera, encontrar rasgos de ellas, a los que denominamos enfoques: enfoque conjuntista, enfoque analítico, enfoque gráfico y enfoque tabular. Para el análisis se tomó como base lo consignado en las tablas que se muestran en los Anexos III y IV.

4 – A.1.1. Acerca de las actividades matemáticas

Libro de texto de Rodríguez Franco et. al. (2018), código T1

Análisis global: el tema se encuentra en el Capítulo 6 denominado La Recta, donde se reconoce el tratamiento de las ecuaciones y de aplicaciones; define Función Oferta y Demanda y propone aplicaciones de recta a otras áreas de la Economía. Esto se condice con que la obra tiene como título Matemáticas Aplicadas a los Negocios.

En cuanto a las situaciones o problemas que presenta, se proponen ejercicios con la ecuación general de la recta y se solicita que se grafique en un sistema de ejes coordenados cartesianos utilizando las coordenadas de un punto. O también situaciones en donde tengan que analizar si la pendiente de la recta es positiva o negativa y su valor.

En cuanto a las acciones o procedimientos que realiza el autor, escribe la ecuación general de la recta y procede a despejar la variable “y”. Para ello realiza operaciones algebraicas y halla la ecuación ordinaria correspondiente señalando el valor de la pendiente y de la ordenada al origen, o bien, en la recta numérica o recta graduada entera, representa algunos números enteros en la que éstos se encuentran ordenados y separados con la misma distancia.

Desde el tipo de Lenguaje utilizado, encontramos que abundan expresiones como: Ecuaciones de la recta. Modelo lineal. Forma ordinaria. Forma general. Forma punto – pendiente. Forma punto – punto (p. 228) [3], o bien expresiones simbólicas del tipo: $Y = m X + b$, $Ax + By + C = 0$ (A, B y C coeficientes), o bien $F(x, y) = 0$, $m. X – Y + b = 0$ (p. 217) [4].

Así mismo, expresiones que muestran el uso de un lenguaje gráfico como, por ejemplo, rectas que se cortan formando ángulos agudos, obtusos y rectos (90 grados). Sistema de ejes coordenados rectangulares, sistema rectangular de coordenadas cartesianas. Gráficos con ejes rectangulares, abscisas, ordenadas, plano, cuadrantes. Pares ordenados. Inclinación. Pendiente (letra "m"). Ordenada al origen. Recta en forma ordinaria. Recta ascendente. Recta descendente (pp. 213 – 216) [2].

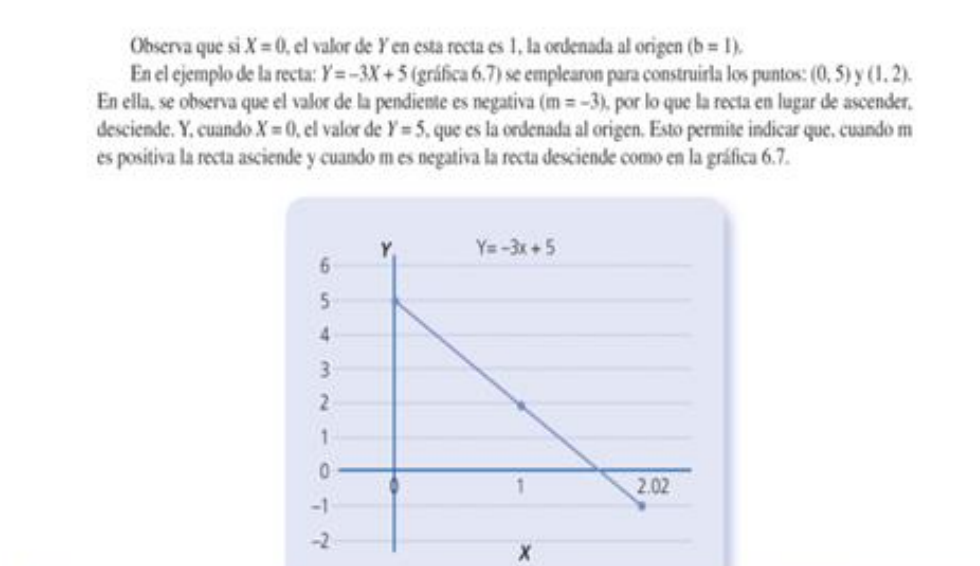
En cuanto a los conceptos o definiciones presentes, las referencias a las variables o fórmulas, por ejemplo, "Si una línea recta se expresa mediante una ecuación empleando la pendiente y la ordenada al origen, se dice que la recta se expresa en forma ordinaria" (T1, p.216) [9], o bien, "Si la ecuación de la forma ordinaria se iguala a cero, se obtiene la forma general de la recta" (T1, p.217) [10], claramente refieren a un enfoque Analítico. Así mismo, aparecen conceptos que hacen referencia a un enfoque gráfico, cuando se expresa, por ejemplo, "La inclinación de la recta con respecto al eje "x" se conoce con el nombre de pendiente" (T1, 213) [7], o también: "El punto donde la recta corta al eje "Y" se llama ordenada al origen" (T1, 214) [8].

Las propiedades o proposiciones que se enuncian, están marcadas por referencias a lo gráfico, como ser: “La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional o línea recta…se extiende sin límite en dos sentidos, no comenzando ni terminando en un punto específico. Se la emplea para representar, gráficamente, los números como puntos especialmente marcados” (p. 212) [11], como también a lo analítico, cuando por ejemplo se asegura: “Todas las líneas rectas se pueden expresar en forma matemática mediante una ecuación. Para definir la ecuación se emplean la pendiente y la ordenada al origen” (p. 216) [12]. No obstante, cuando dice “la cual contiene todos los números reales, ya sea mediante una correspondencia biunívoca o una aplicación biyectiva” (p. 212), se detecta cierta referencia a un enfoque conjuntista.

Los argumentos son inductivos y hay énfasis de lo visual ostensivo, tal como se observa en el texto analizado y que se muestra en la siguiente figura:

Figura 16

Representación de la ecuación ordinaria de la recta



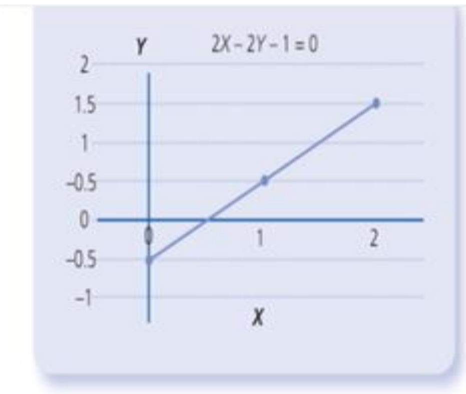
Observa que si $X = 0$, el valor de Y en esta recta es 1, la ordenada al origen ($b = 1$).

En el ejemplo de la recta: $Y = -3X + 5$ (gráfica 6.7) se emplearon para construirla los puntos: (0, 5) y (1, 2). En ella, se observa que el valor de la pendiente es negativa ($m = -3$), por lo que la recta en lugar de ascender, desciende. Y, cuando $X = 0$, el valor de $Y = 5$, que es la ordenada al origen. Esto permite indicar que, cuando m es positiva la recta asciende y cuando m es negativa la recta desciende como en la gráfica 6.7.

Nota. Imagen tomada del T1. Fuente: Rodríguez Franco (2018, p.216)

Figura 17

Representación de la ecuación general de la recta



Nota. Imagen tomada del T1. Fuente: Rodríguez Franco (2018, p.217)

Libro de texto de Curo Cubas y Martínez Miraval (2013), código T2

Análisis global: El tema analizado aparece en dos unidades del libro de texto: la Unidad 3, claramente posicionada en Álgebra y Geometría Analítica, presentando a la recta y ecuaciones, y la Unidad 4, más orientado al área del Cálculo, donde se presenta el desarrollo teórico de las funciones y al final las aplicaciones de la función lineal a la Economía.

En relación a las situaciones o problemas presentados, se observa un predominio de descripciones generales, por ejemplo, al dar los elementos de los conjuntos A y B y designar como "f" a la regla de correspondencia, o cuando como dato inicial ofrece un conjunto de pares ordenados, sobre los cuales se solicita completar elementos del dominio y el rango de la función, o en el caso de proponer una serie de reglas de correspondencia y solicitar el análisis completo de las mismas. Se estarían proponiendo situaciones de un enfoque conjuntista y de estudio analíticos de las definiciones entre variables.

Entre las acciones, encontramos predominio de procedimientos basados en conjuntos, como ser, da un ejemplo donde se pide: “Representar gráficamente, mediante diagramas de Venn, la correspondencia entre los elementos de los conjuntos A y B, establecer el dominio y el conjunto imagen de f” (p. 253) [29].

En cuanto al Lenguaje, se presentan expresiones del tipo conjuntistas, como, por ejemplo: Funciones. Regla de correspondencia. Elemento de entrada. Conjunto. Elemento de salida. Dominio. Rango. Variable. Imagen. Pre imagen. Pares ordenados. Conjunto de valores, o también de tipo gráfico, por ejemplo, Eje horizontal. Eje vertical. Intervalo. Función creciente. Función decreciente. Función lineal afín. Rectas. Pendiente. Ordenada al origen (p. 200) [15], como así también expresiones simbólicas del tipo: Entrada “x” → Regla “f” → Salida “y”, y = f(x), f(x) = mx + b (p. 252) [16].

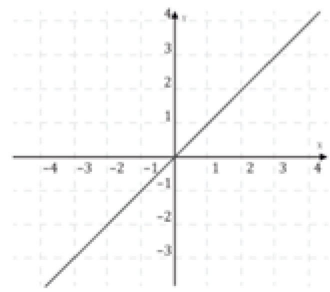
En cuanto a los conceptos y definiciones, claramente aparecen referencias a la función como una ley de correspondencia, por ejemplo:

> “Una función *f* es una regla en la que cada elemento de entrada *x* de un conjunto se le asigna un único elemento de salida *y*. Al conjunto de elementos de entrada se le denomina dominio de *f* y se denota *dom(f).* Al conjunto de elementos de salida, rango de *f*; se denota *ran(f)*” (p. 252) [22].

Así mismo, encontramos definiciones simbólicas como, por ejemplo: “Las funciones lineales son aquellas cuya regla de correspondencia puede escribirse de la forma $f(x) = mx + b$” (p. 293) [26], y referencias a su representación gráfica: “La gráfica de una función *f* es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Las gráficas de estas funciones son rectas” (p. 293). [26].

Figura 18

Representación de una función lineal creciente

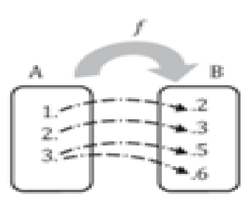


Nota. Imagen tomada del T2. Fuente: Curo Cubas (2013, p. 290)

De igual manera, se encuentran propiedades y proposiciones propias de un enfoque conjuntista: "El valor de la variable *y* depende del valor de la variable *x* mediante la regla *f*. Al valor de *f(x)* se le llama imagen de *x*, y a *x*, pre imagen de *f(x)*". (p. 252) [27], o bien, desde un enfoque gráfico: "Si la gráfica asciende, se dice que es creciente (mirando de izquierda a derecha) y si desciende es decreciente". (p. 270) [28].

Figura 19

Representación conjuntista de una función f que relaciona a los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto



Nota. Imagen tomada del T2. Fuente: Curo Cubas (2013, p. 253)

Libro de texto de Soler Fajardo et al. (2012), código T3

Análisis global: En el texto, los temas de análisis aparecen en el Capítulo 4, donde se presenta a las funciones, desde una postura más cerca, a su tratamiento en el Cálculo Infinitesimal y al Algebra, y más adelante, en el Capítulo 6, como parte de la Geometría Analítica, el estudio de las ecuaciones de la recta, para finalizar con aplicaciones.

Las situaciones o problemas se caracterizan por la realización de estudios analíticos, descontextualizados, a partir de datos, como, por ejemplo, a partir de un par de puntos encontrar la ecuación de la recta: "Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2;4) y (1;6)". "Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 2 y pasa por (2; 4)". "Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2;4) y (7;6)". "Halle la pendiente y el intersecto en la recta 2x + 3y – 1 = 0" (pp. 440 – 452). [37], [38], [39], [40].

Pero muy pocas situaciones del tipo gráfico, como ser: "Ubicar los puntos (1;3), (5;0), (-2;2), (-3; -2) y (2; 4) en el plano cartesiano" (p.435) [35], o bien: "Proporcionar la gráfica de la misma" (p. 453) [41].

En cuanto a las acciones en gran mayoría consisten en aplicaciones de definiciones o fórmulas, dando una descripción de procedimientos algebraicos a seguir para encontrar el resultado, por ejemplo: para comenzar, calcula la pendiente reemplazando en la fórmula las coordenadas de los puntos dados. Mediante operaciones algebraicas llega a que $m = \frac{2}{5}$. Para hallar la ecuación de la recta, reemplaza las variables "x" e "y" por las coordenadas de uno de los puntos dados, y operando algebraicamente obtiene $b = \frac{16}{5}$. Rearmando la ecuación de la recta queda $y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$ [58]. Despeja la variable "y" de la ecuación dada y obtiene la forma estándar $y = -\frac{2}{3}.x + \frac{1}{3}$ x donde $m = -\frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$ [59].

Así mismo, se encuentran indicaciones para obtener resultados mediante el gráfico: Para hallar la expresión de la distancia entre dos puntos, ubica en el plano cartesiano a dos puntos no colineales y procede a realizar las proyecciones de las coordenadas de los mismos sobre los ejes coordenados formándose así un triángulo rectángulo para determinar gráficamente la distancia entre los mismos en forma analítica. [54], o bien recurre a la representación gráfica de la recta en el sistema cartesiano. [56].

En relación al lenguaje, encontramos muy pocas expresiones que se refieran a un lenguaje conjuntista, como ser: Números reales. Conjunto de puntos definidos por expresiones en dos variables. Recta real [31], pero en gran mayoría utilizan términos referidos a la representación gráfica cartesiana, por ejemplo: Pares ordenados. Puntos del plano. Mapa o plano de una ciudad. Plano cartesiano. Par de rectas numéricas. Rectas que se cortan (perpendicular). Eje de abscisas. Eje de ordenadas. Origen. Coordenadas cartesianas. Cuadrantes. Proyección de las coordenadas de un punto en los ejes cartesianos. Cuadrantes. Recta vertical. Recta horizontal. Triángulo rectángulo. Vértices. Catetos. Distancias. Dibujo de la recta. Puntos colineales. Pendiente (letra "m"). Inclinación de la recta. Intersecto [32], o bien en forma simbólica o literal, por ejemplo: Ecuaciones de la recta. $|x_1 - x_2|$ y $|y_1 - y_2|$ (catetos). $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x} = \frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x}$ con $x_1 \neq x_2$. $y = m\,x + b$: forma estándar o común de la recta. $ax + by + c = 0$: ecuación general o implícita de la recta con "a" y "b" constantes y distintas de cero.

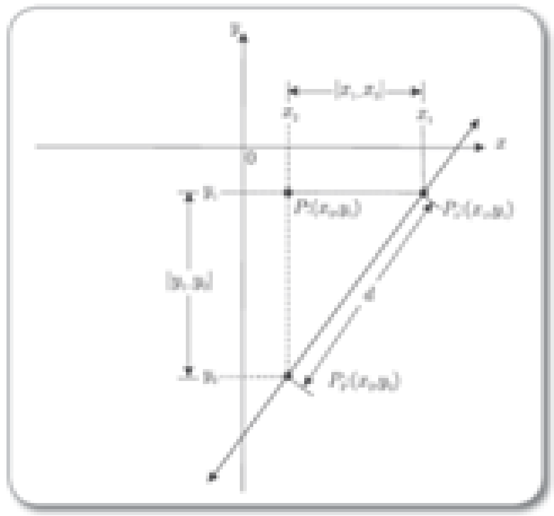
Ecuación explícita de la recta. Variable dependiente. Variable independiente. $y = -\frac{a}{b} . x - \frac{c}{b}$, donde $m = -\frac{a}{b}$ y el intersecto con el eje "y" es $b = -\frac{c}{b}$ [33].

En cuanto a los conceptos, predominan las referencias a variables, fórmulas, y a lo relacionado con las representaciones gráficas en sistema cartesiano, por ejemplo: El punto de corte de los ejes se lama "origen". Los ejes coordenados dividen al plano "xy" en cuatro regiones llamadas "cuadrantes" y se definen I, II, III y IV (primer cuadrante, segundo cuadrante y así sucesivamente) [44], [45].

Así mismo, las definiciones se sostienen con abundancia simbólica o desde observaciones de un gráfico, por ejemplo: "La distancia entre dos puntos cualesquiera *(x_1, y_1)* y *(x_2; y_2)* está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$" (p. 436) [46]. "La pendiente *m* de una recta es el incremento en *y* dividido por el incremento en *x*" (p.444). "A la recta expresada en forma general también se la conoce con el nombre de ecuación implícita, ya que la variable dependiente *y* no está expresada en términos de *x*" (p. 452) [47], [48]. "El punto de corte de los ejes se llama origen" (p. 435) [44].

Figura 20

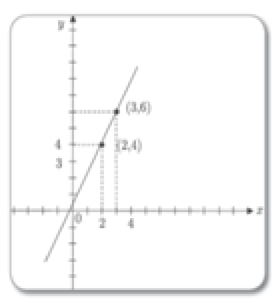
Representación de la distancia entre dos puntos



Nota. Imagen tomada del T3. Fuente: Soler Fajardo et al. (2012, p.437)

Figura 21

Representación de la recta utilizando la fórmula de la pendiente



Nota. Imagen tomada del T3. Fuente: Soler Fajardo et al. (2012, p.445)

Las propiedades se enuncian como condiciones gráficas que deben cumplir los objetos, como, por ejemplo, el de intersección de rectas: “Si escogemos un par de rectas numéricas que se cortan, podemos corresponder a cada punto del plano un par ordenado de números reales que nos permitan localizar un punto" (p. 434) [50], o bien proposiciones que se enuncian desde ubicaciones en la gráfica, por ejemplo: "Las coordenadas de un punto tienen signo positivo o negativo, dependiendo de la ubicación del cuadrante en que se encuentre" (p. 435) [52].

Si bien se encontraron en las situaciones el pedido de demostrar, fue en una sola oportunidad: "Demuestre que los tres puntos siguientes son colineales, es decir, están sobre la misma recta: A(-3;2), B(5;2) y C(9;4)" (p.440).[36], pero no bastaría para decir que los argumentos son deductivos, dado que en general son inductivos, desde lo algebraico como apoyados en lo visual a partir del gráfico.

4 – A.1.2. Acerca de las actividades aplicadas a la Economía

Libro de texto, código T1

Las situaciones para que resuelva el lector son similares a los ejemplos resueltos, donde primeramente se dan las fórmulas de función oferta y demanda para luego representarlas gráficamente.

En cuanto a los procedimientos que se proponen, sigue un esquema que comienza enunciando el problema, tanto de oferta o de demanda, escribe la fórmula de la función y realiza el gráfico cartesiano de la situación en el primer cuadrante.

En los gráficos representa en el eje de abscisas el número de productos (cantidad ofrecida o demandada) y en el eje de las ordenadas representa las ventas o el valor de las compras en pesos.

El lenguaje empleado se caracteriza por el uso de expresiones verbales y simbólicas, por ejemplo: "$Fo = p.X + p_o$, donde p_o es el precio de venta mínimo que el productor desea para el producto en el mercado o precio de partida; p es el precio de venta unitario; X es la cantidad de productos a elaborar (a ofrecer); p.X es la venta lograda" (p. 226)[65], "Fd = -p.X + POp_o , donde POp_o es el nivel de ventas no alcanzado por precio por unidad excesivo del producto; p es el precio por unidad; X es la cantidad de productos (a comprar)" (p. 228) [67]. Simboliza a la cantidad de productos con la letra X, utilizada frecuentemente en matemática, para indicar variable independiente en una función. Utiliza el modelo explícito de la función afín, para representar las funciones de oferta y de demanda.

Los conceptos mencionados son característicos del tratamiento del tema, por ejemplo: "precio de venta. Producto de mercado. Oferta. Función oferta. Demanda. Ecuación de oferta y ecuación de demanda. Cantidad de productos. Precio" (p. 239). [64].

En cuanto a las definiciones dadas, establecen las relaciones entre los conceptos antes mencionados, por ejemplo: "La función de oferta (Fo) tiene como objetivo determinar la cantidad de productos o servicios que un productor, fabricante o prestador de servicios está dispuesto a producir para un mercado específico con base en un precio por unidad de dicho producto o servicio" (p. 226) [70], o bien : "La función de demanda (Fd) tiene como objetivo determinar la cantidad de unidades X de un producto o servicio, que se vende a un precio (p), al que están dispuestos los consumidores a pagar y adquirir el bien o servicio en ese mercado"(p. 228) .[71]

Hay afirmaciones sobre la importancia de la recta y su representación dentro del campo económico, por ejemplo, expresa:

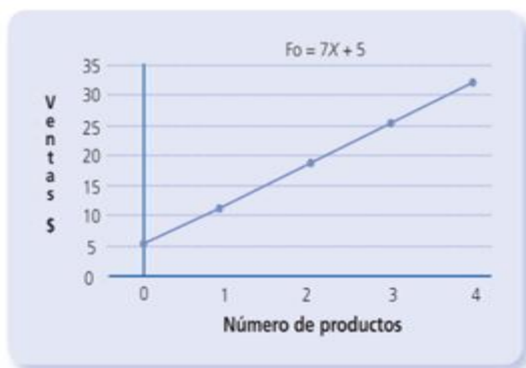
> La recta representa modelos de procedimientos que son de gran utilidad en la Administración. Permite observar el comportamiento de la oferta de un producto – la

promoción que hace una empresa sobre un celular, una computadora, un refresco, etc.- en el mercado, así como el comportamiento de su demanda, es decir, el comportamiento que se tiene como consumidor de esos productos en ese mercado (Rodríguez Franco et al., 2018, p.215)

Se da gran importancia a la visualización ostensiva a partir de la gráfica, por ejemplo, dada la representación gráfica de la oferta o demanda, explica el significado de cada punto representado en términos económicos (pp. 226 - 228) [76]

Figura 22

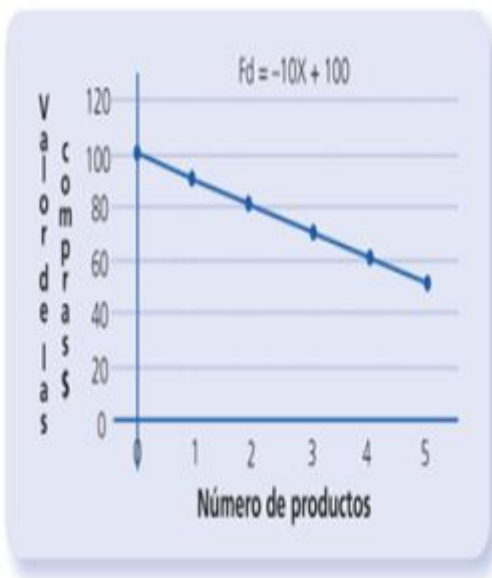
Representación del comportamiento de la función oferta



Nota. Imagen tomada del T1. Fuente: Rodríguez Franco (2018, p.227)

Figura 23

Representación del comportamiento de la función demanda



Nota. Imagen tomada del T1. Fuente: Rodríguez Franco (2018, p.228)

Libro de texto, código T2

En las situaciones que propone, podemos identificar que define una relación de dependencia entre las variables económicas: “La cantidad demandada *q* de un producto está relacionada con su precio *p*, es decir, la cantidad demandada de un artículo depende del precio unitario del mismo. Luego interroga: ¿Qué características debe tener la regla de correspondencia para que se refleje este comportamiento? (p. 252) [83]; o bien, luego de dar una función y solicitar que ponga en práctica las definiciones de función oferta o demanda, se pide identificar el dominio de la función.

Los problemas se caracterizan por comenzar dando como dato la función (de oferta o demanda) y a continuación encontrar valores de alguna de las variables precio o cantidades.

Además, situaciones donde se pide interpretación económica de la pendiente, o que la información se brinde por tablas o gráficos, son escasas (pp. 310 -314) [88], [89].

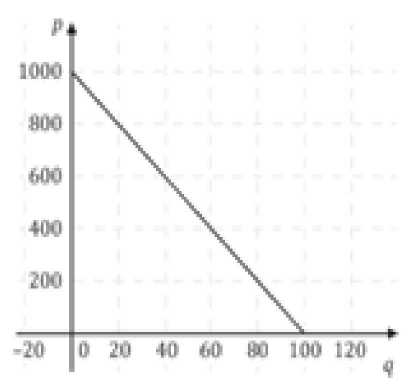
Las acciones predominantes consisten en hallar valores desconocidos a partir del modelo matemático de la función.

Nombra los conceptos y los términos relacionados al tema, designa oferta y demanda como función, e introduce algunos vocablos que caracteriza a un lenguaje conjuntista, como relación o dominio (pp. 307 - 308) [78]. También aparece lenguaje simbólico para los modelos de función demanda (p. 307) [79], y de lenguaje gráfico, con los términos segmento de recta o, escala adecuada (p. 313) [82].

Figura 24

Representación del comportamiento de la función demanda y datos tabulados para hallar la función oferta

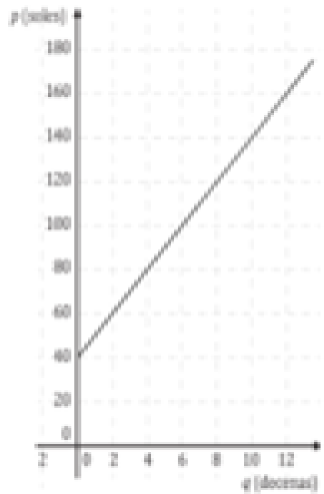
Nro. de cocinas	0	40
Precio por unidad (S/)	200	600



Nota. Imagen tomada del T2. Fuente: Curo Cubas (2013, p. 313)

Figura 25

Representación del comportamiento de la función oferta



Nota. Imagen tomada del T2. Fuente: Curo Cubas (2013, p. 313)

Libro de texto, código T3

Los problemas proponen inicialmente los modelos matemáticos de la situación: Dadas las ecuaciones p + q = 100 y p – q = 20, [98], para luego solicitar la identificación si corresponden a la oferta o a la demanda. Realización de reemplazos de valores particulares en el modelo y representación gráfica de las ecuaciones.

O bien situaciones donde a partir de ciertos datos obtener la ecuación y alguna otra incógnita presente, por ejemplo: hallar la ecuación de la demanda, el precio máximo que se está dispuesto a pagar, la cantidad demandada a un precio unitario de $4500, y el precio unitario por la demanda de 5250 unidades [99].

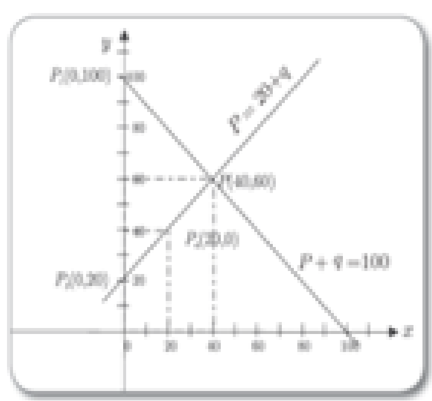
Procede mediante acciones algebraicas sobre las ecuaciones, explicitando las relaciones que tienen dentro del contexto económico, los valores hallados: halla que m = 1, $(0 \leq q > 100)$ y explica que, si la demanda aumenta en una unidad, el precio disminuye en una unidad (pp. 462 – 463) [102]. Utiliza la representación gráfica de la ecuación para explicitar valores, como, por ejemplo: El corte al eje “y” es (0; 20) y significa que es el precio mínimo con el cual se está dispuesto a ofrecer 20 unidades, (pp. 462 – 463) [102]. En la representación gráfica, en el eje “x” ubica las cantidades (unidades físicas) y en el eje “y” el precio unitario del producto (p. 463) [103].

El lenguaje utiliza términos que forman parte del estudio del tema, con referencias a expresiones simbólicas: Ecuación de la oferta: $p = m_1.x + b_1$, donde $m_1 > 0$ (p. 461) [95], o Ecuación de la demanda: $p = m_2.x + b_2$, donde $m_2 < 0$ (p. 461) [96].

Declara relaciones de aumento o disminución entre las variables económicas precio y cantidad, según se trate de una situación de oferta o de demanda, utilizando expresiones como crecimiento, o tiende a disminuir o a crecer (p. 461) [101].

Figura 26

Representación de las funciones oferta y demanda



Nota. Imagen tomada del T3. Fuente: Soler Fajardo et al. (2012, p.463)

4 – A.2. Interpretaciones realizadas

Del análisis realizado a partir de lo que se presentan en los libros de textos y mediante el uso de la herramienta de las configuraciones epistémicas, a través de los objetos primarios tomados como categorías de análisis, que hemos desarrollado sucintamente en el Capítulo 2, podemos interpretar que:

En el Libro de texto T1, en relación a las actividades matemáticas, éstas presentan características que corresponden a las configuraciones Analítica y Gráfica de las funciones.

En el Libro de texto T2, del análisis realizado, encontramos que se presentan características que corresponden en su gran mayoría a un Configuración Conjuntista de las funciones, con presencia así mismo, de elementos que caracterizan a las Configuraciones Analítica y Gráfica

En cuanto al Libro de texto T3, en relación a las actividades matemáticas, éstas presentan características que corresponden a las configuraciones Analítica y Gráfica de las funciones en partes equitativas.

Si bien las cuatro configuraciones epistémicas aportan modelos para analizar el tratamiento del objeto matemático función, hemos considerado oportuno tenerlas en cuenta, dentro de lo que sea posible y salvando las distancias disciplinares, para poder interpretar el análisis de las actividades aplicadas a la Economía.

En el Libro de texto T1, su presentación es coherente con las configuraciones que han sido preponderantes en el marco matemático. El estilo que prevalece es brindar definiciones sobre las funciones oferta y demanda, utilizando el lenguaje específico, pero queda en manos del lector reconocer, en dichas definiciones, las relaciones entre los objetos de ambas disciplinas. No se evidencia el tratamiento específico de la justificación de la linealidad en el contexto económico y parece que bastaría simplemente con mostrar el tema como una aplicación de la matemática, sin necesidad de comprender el porqué de ello.

En el Libro de texto T2, se ve claramente un tratamiento conjuntista de la función, pero aplicada al contexto económico. Las definiciones dadas sobre oferta o demanda refieren a las funciones como relaciones, manifestando una relación de dependencia (directa o inversa) entre las magnitudes involucradas (precio del artículo y cantidad). Así mismo, coincide con un enfoque analítico donde predomina el trabajo con fórmulas.

En el Libro de texto T3, claramente se extrapolan los conceptos matemáticos sobre funciones, por ejemplo, crecimiento, al contexto económico. Se caracteriza por abundante trabajo algebraico con expresiones contextualizadas al modelo de la economía o modelo de la situación. Desde el enfoque gráfico, se apoya en la lectura de los mismos para reafirmar los conceptos desarrollados.

No se ha encontrado, en ninguno de los textos analizados, el hecho de iniciar el tratamiento del tema Funciones con la presentación de una situación problemática desde el contexto económico, motivo que nos permite adecuarlo a los que Font y Ramos denominan “problemas contextualizados evocados de aplicación” (en Font y Godino, 2006, p. 93). Según estos autores, esta clasificación está relacionada con el momento en que se propone a los alumnos los problemas contextualizados. Estos se proponen a continuación de un proceso de instrucción en el que se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema. En este caso, el objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, para que los estudiantes puedan ver las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.

Otro hecho a destacar es no haber encontrado evidencias de iniciar la presentación de los problemas aplicados desde una representación tabular o representación gráfica de las funciones, siendo la representación simbólica algebraica de la función lineal la más utilizada.

4 – B. Conclusiones: Un modelo de enseñanza y de Comunicación de la función afín aplicada a la Oferta y la Demanda

El análisis de los libros de texto nos permitió encontrar elementos que describen cierto tipo de procesos para la enseñanza y consecuente aprendizaje que prevalecen para los objetos función, función afín y referidos a la matematización de la oferta y la demanda.

Bajo la óptica de las configuraciones epistémicas elaboradas desde el EOS para el objeto función y utilizadas como marco de referencia, las propuestas de enseñanza se encuadran en gran medida bajo configuraciones Analítica y Gráfica, y en menor medida Conjuntista.

En la configuración epistémica Analítica se destacan como situaciones el estudio analítico de la dependencia entre las variables, presentando propiedades de las funciones, abundante uso de fórmulas y notación y manipulación algebraica de ecuaciones, con argumentos en general de inducción matemática. Así mismo, el uso del lenguaje simbólico reduce el significado del objeto: la idea que queda es que la función es una fórmula, que la pendiente es un número, que la recta es una ecuación, que para aprender funciones hay que seguir un orden: se parte de la fórmula (la representación simbólica), y luego se sigue con la representación gráfica.

En la configuración epistémica Gráfica, aparecen como situaciones el estudio de las curvas, en este caso, de la gráfica de la recta, y menciona los conceptos como coordenadas cartesianas, ejes cartesianos. Como procedimientos, emerge el pedido de graficar la función lineal y como argumento, la visualización ostensiva desde la representación gráfica de las funciones que son objeto de estudio.

En el caso de la configuración epistémica Conjuntista, las situaciones vienen dadas por descripciones generales de cualquier tipo de relación, la función se define como relación entre conjuntos, utilizando la notación conjuntista, y como conjunto de pares ordenados que cumplen la relación R, uso de conceptos como dominio, imagen, propiedades inyectivas, biyectiva; los procedimientos apuntan a las operaciones entre conjuntos y se proponen, generalmente, argumentos deductivos.

De esta forma, creemos que no puede establecerse un único Modelo de enseñanza de los temas analizados, dado que los elementos que lo componen estarán imbricados por la postura epistemológica que sostienen los autores, sobre los significados de las funciones, y sobre el uso de las mismas en el estudio matematizado de ellas, aplicándolas al tratamiento de la oferta y la demanda.

De igual modo, lo expuesto anteriormente, influye en la posibilidad de determinar un único Modelo de comunicación, siendo que sus elementos surgen del modo en que se propone el texto, el discurso empleado, la secuenciación de las acciones de la propuesta y el tipo de representación de la función que se utiliza. Y estas cuestiones se relacionan con los posicionamientos epistemológico sobre el saber y sobre la enseñanza de las funciones y de la matemática aplicada a otros contextos disciplinares, tanto de los autores de los libros de textos como de los docentes que los utilizan.

CAPÍTULO 5

Modelo de Actuación o Cognición de los Resolutores Reales

CAPITULO 5

Modelo de Actuación o Cognición de los Resolutores reales

En el capítulo 3, elaboramos un modelo de competencias matemáticas y económicas, a partir de las actuaciones de un resolutor ideal para resolver problemas de Oferta y Demanda.

En el presente capítulo, exponemos el análisis de las resoluciones llevadas a cabo por resolutores reales de los mismos problemas, con el fin de encontrar elementos que conforman un modelo de actuación o cognición. Este análisis se realiza considerando el marco teórico y metodológico del MTL, como así también el de las configuraciones epistémicas del EOS, y nos parece oportuno mencionar a Butto Zarzar y Rojano (2010), quienes realizan su aporte en relación a este análisis, expresando que:

> Para estudiar los procesos cognoscitivos se tienen en cuenta los procesos de pensamiento que ocurren cuando el estudiante transita por la ruta trazada por el modelo de enseñanza. Aquí se describen las acciones de los sujetos observados al realizar tareas relacionadas con el contenido matemático tratado en el estudio (p.62).

Para profundizar más sobre estos procesos cognoscitivos de los estudiantes, completamos este análisis con el de unas entrevistas realizadas a los resolutores reales. Acompañamos este estudio considerando las competencias del modelo de competencias que fuera elaborado en el Capítulo 3[3], con el fin de determinar en qué medida las actuaciones de los estudiantes se comparan con las del experto en el tema.

[3] Las competencias se enfatizan en este texto con letra en formato cursiva.

5 – A. Análisis de resoluciones realizadas por estudiantes

En primer lugar, sobre el Problema N°1, enunciado en la siguiente figura:

Figura 27

Problema N°1

Después de dos meses de trabajo, María hace un estudio de mercado. Los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo que ella fabrica. Si el precio es de $35 puede vender 30 pantalones mensualmente, pero si lo lleva a $30 podría vender 60 pantalones. A medida que disminuye el precio, podría aumentar la demanda siguiendo un comportamiento lineal.

a) Hallar la ecuación que representa la situación planteada.

b) Según la tendencia implícita en los datos, un cliente estaría dispuesto a comprar 90 pantalones por mes: ¿A qué precio debería María venderle sus pantalones?

Fuente: Galagovsky y Cittadini (2008, p.367)

Resolutor 1 (Caso "José")

Luego de la lectura del enunciado, el alumno procede a ordenar los datos en una tabla, ubicando a la cantidad en la primera columna y al precio en la segunda columna, utilizando la representación simbólica de las mismas, pero no sus unidades de medida. No obstante, podemos observar que utiliza la simbología del campo económico, pero al obviar sus unidades, se posiciona en el contexto matemático. De hecho, en la entrevista al inicio del comentario [3], expresa: "Trabajé con las variables *x* e *y*"[4], lo cual indicaría que descontextualizó el problema.

Seguidamente, calcula "m" (pendiente) planteando el cociente de la variación de precios sobre la variación de las cantidades. Posiblemente realiza esta operación porque tiene en cuenta que el problema le informa acerca del comportamiento lineal de la situación. En el comentario [1] de la entrevista afirma: "Lo que hice fue identificar la información que me brinda el

[4] En el texto, se señala entre comillas el comentario del resolutor y entre corchetes se consigna como referencia el número que le corresponde, tal como fue indicado en el protocolo de entrevista (Anexo VI).

problema, que me dan las cantidades y precios asociados a esas cantidades, y armé la tabla. También decía que el comportamiento era lineal". Y en el comentario [2] expresa: "… armé los puntos y calculé la pendiente", lo cual implica que es capaz de realizar el *reconocimiento de operaciones y propiedades aritméticas que evocan conceptos* (Competencia (k)), como ser el cociente dentro del campo matemático.

Mientras que, desde lo económico, medianamente se pone en evidencia la *interpretación del comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor de la constante de la razón entre las variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema, sea en forma textual, tabular o gráfica* (Competencia (o)), ya que la frase "comportamiento lineal" informada en el texto del problema, es un desencadenante, pero no podemos afirmar que la misma le evoque al resolutor, que la razón entre las variaciones de las variables sea constante para cualquier par de valores, por ejemplo, para (90, 25) y otro punto informado.

Una vez calculada la pendiente, plantea una ecuación que deriva de la ecuación que define a la recta como lugar geométrico. Escribe la ecuación de la recta punto – pendiente, toma uno de los puntos y el valor de "m", y reemplaza en la mencionada ecuación. En esta acción, se reconoce que el alumno conoce y utiliza las propiedades de las ecuaciones, es decir que, es capaz de realizar la *distinción entre diferentes modelos matemáticos que representan a una recta* (Competencia (g)), lo cual se evidencia en el comentario [3] cuando afirma: "…utilicé la ecuación punto – pendiente. Ahí sustituí por los valores y encontré la fórmula…". También, a pesar de que en su resolución expresa el modelo como una función, en el mencionado comentario refuerza el hecho de que no pensó en una función. Además, según lo dicho por el entrevistado, en este comentario, nos permite confirmar que éste procede correctamente en cuanto a la *aplicación de la noción de recta como lugar geométrico, de coordenadas de puntos y de su simbolización (cociente incremental y pares ordenados)* (Competencia (i)).

En este mismo comentario, termina afirmando: "… le cambié por q y p", lo cual indica que, efectivamente, resolvió el problema situándose en el contexto matemático, para luego finalizarlo y dar respuesta, al apartado (a), desde el campo de la economía, evidenciando el *reconocimiento y utilización de operaciones y propiedades de las ecuaciones* (Competencia (e)).

Para dar respuesta a la pregunta b) del problema, procede al realizar el reemplazo de la cantidad 90 pantalones en la expresión hallada en el apartado anterior, para determinar el precio unitario de los mismos. Tal procedimiento se afirma en el comentario [5] cuando el entrevistado dice: "Lo que hice fue sustituir mi variable por la cantidad que me están dando, que cuando un cliente está dispuesto a comprar los 90 pantalones, María debería ofrecer o vender a $25 cada pantalón". Lo expresado en el comentario, no se evidencia en la tabla confeccionada por el resolutor, ya que no establece que los precios informados son unitarios.

Tampoco analiza, al hallar la expresión que modeliza la situación planteada, las unidades de medida en las que están expresadas las variables involucradas. Tal conjetura se afirma en el comentario [6], cuando el entrevistado expresa: "Tomé como que se vendía un combo de 30 pantalones a 35 pesos y el otro combo de 60 pantalones a 30 pesos. La verdad es que no lo pensé como el precio de cada pantalón. Evidentemente no razoné bien". Según esta respuesta, el resolutor demuestra medianamente tener la capacidad para la *elección y uso pertinente de la unidad de medida de las magnitudes presentes en la expresión para una acertada interpretación de la información que se quiere conocer en el contexto del problema* (Competencia (p)), como así también demuestra poseer *dominio y empleo de herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones* (Competencia (m)).

Consideramos importante destacar que no realiza el control de los resultados hallados. Al parecer, da por sentado que todo lo hizo bien, a pesar de que expresó, al final del comentario [6], que interpretó incorrectamente la información. Más allá de esto, podemos afirmar que, también medianamente, es capaz de realizar la *lectura e interpretación de la información obtenida del enunciado textual, de una tabla o desde un gráfico cartesiano, y organización de los datos utilizando estos recursos* (Competencia (j)).

Otro aspecto que nos parece relevante, es destacar la manera en que ordenó los datos en la tabla, ya que en la primera columna ubicó las cantidades de pantalones, y en la segunda, el precio unitario de los mismos, tal como se la confecciona en el contexto matemático, más allá de que no identifica las unidades. Pareciera que, debido a esto, el resolutor establece que la relación entre las variables es "precio depende de la cantidad", ya que, en función de dicha dependencia, calcula la pendiente, y también escribe el modelo.

Resolutor 2 (Caso "Leo")

Observamos que este alumno, luego de leer el problema, escribe la información en forma coloquial e inmediatamente los presenta como coordenadas de puntos, tomando como primera componente el precio y, como segunda, la cantidad de producto, es decir, que se ubica en el contexto económico tal lo expresado en la situación que se le presenta. Por esta manera de expresar las coordenadas, pareciera que el resolutor establece la relación funcional $q = f(p)$, pero no lo menciona, aunque realiza la *elección y uso pertinente de la unidad de medida de las magnitudes presentes en la expresión para una acertada interpretación de la información que se* *quiere conocer en el contexto del problema* (Competencia (p)), hecho que corrobora en [11]: “En el enunciado nos decía como información: dado un precio y una cantidad. Entonces lo que hice fue considerar los datos numéricos del precio: para vender a 35 pesos, 30 pantalones, y el precio de 30 pesos para vender 60 pantalones”.

También aclara, que dichos precios son por unidad de pantalones, tal como lo expresa en [12]: “Por cada uno”. Podemos afirmar que realiza la *“traducción del lenguaje textual al simbólico matemático* (Competencia (q)), y también aclara, en [21]: “Por lo que leí en el enunciado, entendía que la cantidad dependía del precio y no al revés”, afirmamos que realiza el *reconocimiento de la relación funcional entre las variables* precio unitario *y* cantidad de productos*, determinación del Dominio de validez de las variables y uso de los términos relacionados a la economía* (Competencia (n)).

Seguidamente, indicado en un subtítulo Datos, cambia las variables económicas “p” y “q” por las variables matemáticas “x” e “y”, es decir que las descontextualiza, y así lo afirma en [20] cuando expresa: “Descontextualicé el problema porque estoy acostumbrado a trabajar con esas dos variables en la mayoría de los problemas, “x” e “y” como variables genéricas y, a lo sumo, uno dice: bueno, en este caso, “x” puede representar cantidad e “y” puede representar precio, o al revés”, y lo resuelve utilizando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tal como lo expresa en el comentario [13]: “Entonces, a partir de ahí, consideré puntos coordenados pensando en que la información del problema me decía que era un modelo lineal. Entonces consideré una de las posibles herramientas matemáticas, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos”, es decir que realiza la *distinción entre diferentes modelos matemáticos que representan a una recta* (Competencia (g)). Esto también lo manifiesta más adelante, en la entrevista [27] cuando dice: “podría haber utilizado alguna otra ecuación, pero de igual manera hubiese llegado al resultado, como por ejemplo la paramétrica o vectorial”.

Así, comienza a resolver el problema reemplazando a las variables por los valores de las coordenadas de los puntos sin tener en cuenta las unidades de las mismas, ya que, como se dijo, las descontextualiza para posicionarse en el contexto puramente matemático. Realiza las operaciones correctamente, lo que nos permite asegurar que tiene *conocimiento de símbolos aritméticos que denotan operaciones* (Competencia (d)), *reconocimiento y utilización de operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones* (Competencia (e)), como así también *dominio y empleo de herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones* (Competencia (m)).

Una vez que halla la ecuación explícita de la recta, donde, en términos de función, la relación que representa es y = f(x). Aunque no contextualiza las variables en términos de la economía, procede a hallar la expresión inversa de dicha ecuación mediante la aplicación de la monotonía de la suma y el producto, pasando así a la relación funcional x = g(y), y lo justifica en el comentario [28] expresando que: “en economía nosotros tenemos o siempre consideramos que la cantidad va a depender del precio[5], y en este caso, como yo inicié el cálculo, lo que estaba llegando a obtener es una función en donde las variables estaban invertidas según los términos económicos. Tenía que la cantidad dependía del precio[6] y no el precio de la cantidad. Es por eso que calculé la función inversa teniendo, en este caso, la función de demanda”. Por esta razón, podemos decir que el resolutor *usa y aplica el concepto de función afín y de su inversa, y de sus modelos matemáticos en la resolución de un problema* Competencia (a)).

[5] El resolutor 2 evoca la ley de la oferta y la demanda.
[6] El resolutor 2 hace alusión a la expresión que halló al resolver el problema.

Si bien, al inicio de la entrevista, cuando menciona el marco teórico que le da el problema[7], comenta que se trata de la función económica de Oferta [11], al hallar la inversa hace mención de que lo que ésta representa es la función Demanda, y lo justifica en el comentario [29] cuando dice: “Porque la pendiente o el coeficiente principal es negativo, entonces estamos ante una función que es decreciente y la demanda es una función decreciente”.

Pareciera que sólo la expresión de la inversa de una ecuación o una función, le da la pauta del tipo de función económica que está encontrando, y tampoco parece darse cuenta que la ecuación explícita hallada representa a la Demanda, por el signo del cociente incremental, pero no podemos asegurar que sea así, pues en sus comentarios no se evidencia tal conjetura.

Por último, realiza el cálculo para dar respuesta al ítem b) del problema. Para ello, y en sus palabras, dice en [32]: “Tomé la función inversa y calculé, como tenía la cantidad, entonces obtenía el precio a través de calcular la imagen de la función de la cantidad de 90 pantalones”.

Si bien sus dichos denotan un lenguaje en términos de la economía, luego de hallar las expresiones que dan respuesta al problema, no realiza nuevamente el reemplazo de las variables “x” e “y” por sus correspondientes “q” y “p”, es decir que, luego de la realización de los cálculos, no expresa los resultados en el contexto del problema y, a pesar de que al inicio reconoció que los precios son unitarios, en la respuesta del apartado b) escribe “María debería vender los pantalones a un precio de $25”. En otras palabras, no realiza la fase de interpretación.

En segundo lugar, sobre el Problema N°2, enunciado en la siguiente figura:

[7] Suponemos que el resolutor 2 se refirió al contexto del problema.

Figura 28

Problema N°2

Un restaurante tiene una promoción de pizzas para un determinado día de la semana. La siguiente tabla proporciona la información sobre el precio unitario y la cantidad de pizzas.

Precio ($/unidad)	*Cantidad de pizzas*
10	*0*
8	*10*
6	*20*
4	*30*

a) Encuentre la expresión que modeliza la situación.
b) Determine si la relación hallada refleja a la oferta o a la demanda.

Fuente: Samuelson (año 2010, p.62)

Resolutor 1 (Caso "José")

Como en este problema se le proporciona los datos mediante una tabla, el resolutor real elige dos pares de valores para realizar el cálculo del parámetro "m". Tal actuación nos permite afirmar que realiza medianamente la *lectura e interpretación de la información obtenida del enunciado textual, de una tabla o desde un gráfico cartesiano* (Competencia (j)), lo cual se afirma cuando expresa, en el comentario [7]: "Al principio, pensé que se trataba de una oferta porque el problema hablaba de una promoción de pizzas".

Al parecer, inicia la resolución de este problema procediendo de la misma forma que el problema 1, lo cual se afirma al inicio del comentario [7] cuando expresa: "Ese problema hice como el de los pantalones". Aquí da a entender que utilizó las variables "x" e "y" inicialmente, para luego reemplazarlas por "q" y "p" respectivamente, para expresar la relación que modeliza la situación en términos del contexto del problema. Podemos afirmar así, que el alumno tiene *dominio y empleo de herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones* (Competencia (m)), y, además, realiza la *traducción del lenguaje textual al lenguaje simbólico matemático y, luego de la realización de los cálculos, interpretación de los resultados en el contexto del problema* (Competencia (q)).

Cuando analizamos el cociente que arma con los valores seleccionados para hallar la pendiente, del signo de la misma, y de la función económica que evoca según éste último, podemos precisar que el resolutor es capaz de realizar la *interpretación del comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor de la constante de la razón entre las variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema, sea en forma textual, tabular o gráfica* (competencia (o)), hecho que manifiesta en el comentario [7]: "…y por el signo que me dio de la pendiente me di cuenta de que se trataba de la demanda". De esta manera, da respuesta al apartado a) del problema, más allá de que el cálculo carece de unidades. Lo escribe como un número decimal adimensional.

Para hallar el modelo que representa la situación, arma una relación funcional, nuevamente, donde se observa que la misma responde a la forma p = f(q). Comparando con la expresión del Problema 1, donde, en el primer miembro escribe p(q), en el que estamos analizando escribe D(q), denotando con D la relación de demanda entre la cantidad de pizzas promocionadas y el precio unitario de las mismas.

Otro aspecto interesante de destacar es que, al parecer, no distingue entre ecuación y función, más allá de que encuentra la expresión explícita de la misma, que en la geometría analítica se denomina "ecuación explícita de la recta", ya que a dicha expresión no le asigna el dominio y codominio para que sea una función. Por esta razón, podemos advertir que, medianamente, el resolutor 1 puede realizar el *reconocimiento y utilización de operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones* (Competencia (e)), como así también realizar la *distinción entre diferentes modelos matemáticos que representan a una recta* (Competencia (g)), porque, aunque no lo menciona, pareciera que hace uso de la ecuación de la recta punto – pendiente. Tal y como se concluyó en el problema anterior, no se observa que el resolutor 1 haya procedido a realizar el control de los resultados, a pesar de tener la posibilidad de tomar otros pares de puntos.

Resaltamos también que, en este problema, la primera columna de la tabla representa los precios unitarios y la segunda, la cantidad de pizzas. Aun así, estableció la relación “precio en función de la cantidad”. Pareciera ser que tiene incorporado en su aprendizaje, el hecho de que debe graficar la situación, lo cual se realiza luego de hallar la expresión inversa de la Oferta o la Demanda.

Resolutor 2 (Caso “Leo”)

El alumno lee el problema, extrae solamente dos informaciones de las cuatro que le proporciona la tabla y realiza los productos entre el precio unitario y la cantidad de pizzas para los datos elegidos. Luego, “arma los puntos” escribiendo como primera coordenada al precio, y como segunda, al resultado de la multiplicación que realizó. Nuevamente, usa la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y reemplaza las coordenadas de los puntos en la misma. También hace uso de las variables “x” e “y”, hecho que nos permite asegurar que descontextualiza las variables económicas. Aun así, tiene *dominio y empleo de herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones* (Competencia (m)) y, además, da cuenta de que tiene conocimiento acerca de la función lineal y de la afín, tal como lo expresa en el comentario [36]:” A mí me pareció que era una función de proporcionalidad hasta que, al momento de encontrar la ecuación, me di cuenta que no era de proporcionalidad, porque, para ser de proporcionalidad, tenía que encontrar una función lineal, y lo que encontré fue una función afín, una función polinómica con el coeficiente o término independiente diferente de cero".

Luego de hallar la expresión de la ecuación, en su respuesta afirma: "La función es de oferta porque la pendiente m = 4 es positiva y la función es creciente".

Esta afirmación nos llevó a cuestionarle el motivo que lo llevó a realizar las multiplicaciones antes mencionadas, para luego diseñar los puntos, a lo que el resolutor responde, en [39]: "Porque para encontrar los puntos tenía que…consideré que, al tener ese precio unitario y yo necesitaba, para encontrar el modelo, la cantidad y el precio. El precio para 10 pizzas y el precio para 20 pizzas. Entonces lo que hice fue, para 10 pizzas, multipliqué por el precio unitario de esa "promo", para 20 pizzas multipliqué por el precio unitario de esa "promo", entonces consideré que el punto coordenado para 10 pizzas sería 10 pizzas, 80 pesos, 20 pizzas, 120 pesos. Consideré que esos serían los puntos". Seguidamente, se le pregunta si se dio cuenta de lo que halló al realizar esos productos, a lo que responde: [41] "La función ingreso. Ahora lo pienso. En su momento lo único que quise hacer fue mantener la lógica de los problemas anteriores y encontrar puntos coordenados y ahí entré en un error".

Podemos suponer que, al decir: "lo único que quise hacer fue mantener la lógica de los problemas anteriores y encontrar puntos coordenados", no supo interpretar los datos proporcionados por la tabla, es decir, que con los valores de precio unitario y cantidad de pizzas que seleccionó al inicio, era suficiente para establecer los dos puntos que utilizaría en el modelo elegido.

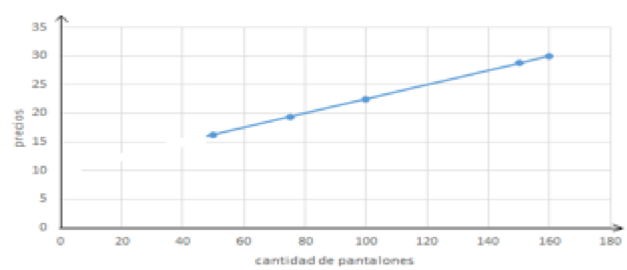
Otro aspecto interesante de destacar es que, en el enunciado del problema se menciona una promoción, que, al parecer, actuó como un distractor, y con respecto a esto, el alumno responde, en [45]: “Al leer la palabra promoción pensé en oferta[8], tengo que encontrar el modelo de oferta, una función creciente”, y reconoce que: [47] “Entonces en ese caso, lo que hice mal fue querer utilizar solamente dos valores particulares para los puntos coordenados. Tendría que haber analizado el cociente de variaciones o las variaciones a través de la tabla para aproximar el modelo de otra manera”. Esto último, nos lleva a conjeturar que no está familiarizado con problemas que debe resolver mediante la lectura e interpretación de los datos de una tabla.

En tercer lugar, sobre el Problema N°3, el que enunciamos seguidamente:

Figura 29

Problema N°3

Dos amigas realizan un estudio de mercado y observaron que los precios que pagan los consumidores varían según los meses del año, es decir que encontraron que, en verano, difícilmente el público compre pantalones que cuesten más de $20. En cambio, en invierno están dispuestos a pagar hasta $30. Con estos datos, realizaron el siguiente gráfico, pensando en la cantidad de pantalones que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellos en cada época.



Hallar la forma algebraica de la función representada

Fuente: Galagovsky y Cittadini (año 2008, p.267)

[8] Creemos que el resolutor 2 no analizó la información proporcionada en la tabla y se centró en el texto del problema.

Resolutor 1 (Caso "José")

Para dar respuesta a este problema, el resolutor 1 comienza confeccionando una tabla de valores donde, en la primera columna, ubica la cantidad, y en la segunda, los precios, sin establecer las unidades de las mismas. Lo dicho es expresado por el estudiante en el comentario [8]: "Armé la tabla como en los otros casos" haciendo referencia al problema 1. Los datos que volcó en la tabla surgen de la lectura del gráfico proporcionado. Esta conjetura se afirma al inicio del comentario [8], cuando el alumno dice: "tomé valores visibles del gráfico para armar los puntos. Uno de los que tomé fue por aproximación, que fue el que está entre los valores 60 y 40 en el eje "x", y supuse que sería 15 su imagen".

Advierte, además el comportamiento del segmento de recta y expresa, dentro del mismo comentario: "como la recta es creciente, me di cuenta de que la expresión que debía encontrar era de la demanda", afirmación que se contradice cuando realiza el cálculo de la pendiente, cuyo valor es positivo, mientras que el resolutor expresa en [8]: "Entonces calculé la pendiente, me dio un valor negativo". Al parecer, pensó en decir Oferta, y dijo Demanda, pero no lo podemos saber, pues en ningún momento de la entrevista se retracta.

En cuanto al modelo que utiliza, recurre nuevamente a la ecuación de la recta punto - pendiente, más allá de que la expresa como una relación funcional del tipo p = f(q). Lo dicho se evidencia en [8] cuando el resolutor dice: "Después reemplacé los valores en la ecuación punto - pendiente y encontré la función".

Aunque no lo dice al inicio de la entrevista, ni lo presenta en el desarrollo del problema, descontextualiza el problema utiliza las variables "x" e "y", es decir, lo resuelve desde el contexto matemático, para luego reemplazar dichas variables por las correspondientes "q" y "p" respectivamente, contextualizándolo económicamente. Lo dicho, se afirma en [8] por parte del resolutor al expresar: “Por último, cambié la “x” por “q”, la “y” por “p” y escribí la respuesta”.

Concluimos que, tal como en los problemas anteriores, no realiza las verificaciones de los resultados, sobre todo, porque toma un par de valores por aproximación, hace caso omiso del signo de la pendiente, y no utiliza las unidades de medida correspondientes a las variables económicas. Creemos que se centró en el gráfico ya que, como respuesta a la pregunta del comentario [9] expresa: “Si, yo creo que se puede, pero me pareció más práctico usar los datos del gráfico”.

En cuanto a la *lectura e interpretación de la información obtenida desde un gráfico cartesiano* (competencia (j)), en la resolución de este problema, hemos detectado que pone en juego las que ya se han detallado en las resoluciones de los problemas anteriores.

Resolutor 2 (Caso “Leo”)

Para resolver este problema, el resolutor 2 rescata afirmaciones generales que hacen referencia a las estaciones del año, hasta qué precio pagarían por los pantalones en verano y en invierno.

Luego, para hallar las coordenadas de los puntos, que expresó en términos económicos, el resolutor 2 expresa que utilizó los datos que se le proporcionaba al final del enunciado del problema. Pareciera ser que, el resolutor hace referencia al gráfico que acompaña al texto, lo cual se confirma en su entrevista [52] cuando responde: “en el gráfico”, lo cual nos permite afirmar que puede *realizar la lectura e interpretación de la información obtenida desde el enunciado textual, de una tabla o desde un gráfico cartesiano* (Competencia (j)). Y continúa expresando, en [53]: “se me facilitaba leer la información del gráfico. Desde esa representación podía leer mejor y determinar los puntos coordenados que son los que me iban a permitir encontrar, a través de alguna ecuación, la función que representa la solución", evocando aquí que realiza la *lectura e interpretación de distintas representaciones de la función afín, como ser tabular, gráficas o simbólica algebraica* (Competencia (c)).

Al armar los puntos, ubica a la cantidad (sin mencionar su unidad) como primera componente, y al precio, en pesos, como segunda componente, lo cual demuestra que el resolutor 2 realiza el *reconocimiento de la relación funcional entre las variables precio unitario y cantidad de productos* (Competencia (n)), no se evidencia el uso del término económico relacionado con el resultado hallado, que corresponde a la oferta".

Pero, al igual que en el Problema 1, en el apartado datos, descontextualiza las variables económicas "q" y "p" y las reemplaza por las variables "x" e "y" respectivamente, ubicándose en el contexto matemático para resolver el problema que se está analizando.

Según la ubicación de las componentes de las variables económicas en los puntos que definió al inicio, pareciera que estableció la relación funcional p = f(q), o bien, y = f(x).

Nuevamente, usa la expresión de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, lo cual nos permite decir que posee la habilidad para realizar la *distinción entre los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta* (Competencia (g)), y que el resolutor 2 lo expresa en [56] al afirmar: "Sí, era un segmento de recta, entonces, en ese caso, podía ver que el segmento de recta tenía pendiente positiva porque era un segmento creciente, lo que coincide con el valor hallado ya que la pendiente, en este caso, me dio positiva", es decir, que manifiesta *entender las características presentes en el comportamiento de una función afín desde sus diferentes representaciones* (Competencia (b)) como así también la habilidad de *aplicar la noción de recta* *como lugar geométrico, de coordenadas de puntos y de su simbolización (cociente incremental y pares ordenados)* (Competencia (i)).

En la mencionada expresión, realiza los reemplazos de las coordenadas de los puntos y, operando convenientemente, obtiene la expresión matemática de la ecuación explícita de la recta, evidenciando el *conocimiento de símbolos aritméticos que denotan operaciones (*Competencia (d)), el *reconocimiento y utilización de operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones* (Competencia (e)) y *dominio y empleo de procedimientos algebraicos para encontrar una ecuación* (Competencia (f)). Para llegar a la misma, denota que realiza correctamente el *uso y aplicación del concepto de función afín y de su inversa, y de sus modelos matemáticos en la resolución de un problema* (Competencia (a)).

Para finalizar, podemos observar que el resolutor 2 no escribe la expresión que representa a la situación en el contexto económico del problema, o sea que, solamente, realiza la *traducción del lenguaje textual al lenguaje simbólico matemático* (Competencia (q)), es decir que no presenta la fase de interpretación.

5 – B. Conclusiones

Como lo expresamos al inicio del capítulo, procedimos a realizar la interpretación de las actuaciones de los dos resolutores reales, de acuerdo al análisis de la resolución de los problemas y de las entrevistas realizadas a los mismos. Así, presentamos las conclusiones acerca de los *saberes* y *saber hacer*, que cada uno pone en evidencia, como así también, los que no se manifiestan en sus resoluciones, con el fin de determinar un modelo de actuación o cognición de ambos resolutores reales. Tomamos como referencia el catálogo de las competencias según las áreas de la Matemática como del campo de la Economía.

En el caso del resolutor 1, observamos que, desde el área de la Aritmética, es capaz de hallar coeficientes numéricos (parámetros), utilizar las operaciones básicas como la adición, sustracción, el producto y cociente entre dos números, y aplicar propiedades de los números reales como la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Desde el área del Álgebra, podemos destacar que conoce el concepto de ecuación de primer grado con dos variables, reconoce las expresiones simbólicas (fórmulas y ecuaciones) y posee dominio de los procedimientos algebraicos pertinentes para hallarlas.

En cuanto al área de la Geometría analítica, demuestra que interpreta que el valor hallado del cociente incremental es un parámetro, como así también los datos proporcionados en el enunciado de un problema y reconoce los distintos modelos matemáticos que representan a la recta (ecuación de la recta punto – pendiente y punto – punto).

Así mismo, desde el área de la Economía, el mencionado resolutor tendría conocimiento de los conceptos o leyes de la oferta y la demanda, serías capaz de interpretar el comportamiento lineal de dichas funciones desde el momento en que inicia los cálculos utilizando la expresión del cociente de las variaciones de las variables mediante la interpretación del signo del resultado del cociente, y continúa con los cálculos que lo llevan a hallar la ecuación que representa la situación planteada en cada caso.

También, se puede observar en la fase de resolución de los problemas que, para poder dar respuesta a los problemas, inicia organizando la información utilizando tablas para luego calcular la pendiente de la recta utilizando el cociente incremental cuyo signo del resultado de éste le permitió determinar si la situación respondía a una oferta o una demanda. Luego, al aplicar la ecuación de la recta punto – pendiente, y las operaciones y propiedades de los números reales, logra encontrar la expresión de las funciones económicas mencionadas.

En este sentido, cabe destacar que utilizó las variables económicas del precio unitario y la cantidad de producto en los tres problemas.

Más allá de que logró dar respuesta a las situaciones problema que le fue presentado, no se refleja en ellos la distinción entre una función lineal de la afín y de su inversa ya que solamente presentó las respuestas a los problemas desde la representación simbólica. Tampoco utilizó otros procedimientos algebraicos ni identificó términos y/o símbolos de la geometría analítica (ecuación de la recta punto – punto, coordenadas de un punto, recta, segmento de recta, semirrecta).

Otro aspecto importante de destacar es el hecho de que no corrobora los resultados hallados tomando otros pares de valores para verificar el valor constante o pendiente *m* ya sea en forma analítica o gráfica, ni analiza adecuadamente las unidades de medida de cada variable económica para lograr la correcta interpretación del resultado encontrado en el contexto del problema.

En el caso del resolutor 2, basándonos en las respuestas de su entrevista y en el análisis de las resoluciones de los problemas, hemos observado que el resolutor posee conocimientos de la simbología aritmética, utiliza las operaciones básicas (suma, resta producto y cociente) para relacionar variables y parámetros, y aplica adecuadamente las propiedades de los números reales (asociativa y distributiva de la suma respecto al producto) para obtener una ecuación.

Desde el área del álgebra, demuestra que es capaz de identificar las variables de las constantes o parámetros, interpreta la información presente en el enunciado de los problemas, los identifica como componentes de un par ordenado, halla la expresión algebraica utilizando las operaciones y propiedades mencionadas en el párrafo anterior. A pesar de que en la entrevista menciona las distintas formas de expresar una ecuación de primer grado con dos variables, al resolver los problemas, sólo halla aquella expresada en su forma explícita. Suponemos, entonces, que conoce el concepto de ecuación, la relevancia de los símbolos presentes en ella (variables, magnitudes y parámetros), como también el concepto de par ordenado.

También, podemos mencionar que reconoce y aplica las propiedades de los números reales para hallar la ecuación que da respuesta a la situación problema, aunque parcialmente evoca la identificación de términos y símbolos de la geometría analítica y la aplicación de nociones tales como cociente incremental y su interpretación.

Además, reconoce los conceptos de la función afín y de su inversa, los cuales aplica en la resolución de los problemas 1 y 3, y comprende las características presentes en el comportamiento de las mencionadas funciones y la relación funcional entre las variables intervinientes en la misma.

En cuanto al reconocimiento de la relación funcional existente entre las variables económicas, éste se evidencia parcialmente ya que, en las ecuaciones halladas para cada problema de la secuencia didáctica, sólo en el problema 1 ubica al precio unitario como primera componente del par ordenado y a la cantidad como segunda componente. En los dos restantes establece que relación funcional precio en función de la cantidad, hecho que puede observarse cuando establece la ubicación de las variables económicas en los pares ordenados.

Consideramos importante resaltar que únicamente utiliza expresiones simbólicas algebraicas para realizar la lectura e interpretación de la representación de la función afín, dejando de lado otras que le permitirían corroborar los resultados hallados.

Cabe mencionar que, en cuanto a las unidades de medida de las variables económicas, éstas solamente se observan parcialmente en la fase de formulación, ya que, en la fase de resolución, descontextualiza el problema al utilizar las variables x e y, desde el contexto matemático, sin traducir o expresar la ecuación que encuentra en el contexto del problema.

Por último, de acuerdo a las actuaciones de cada resolutor, interpretamos que existe una marcada disparidad, entre uno y otro, respecto a las competencias que han puesto en juego al resolver los problemas. El conjunto de ellas manifestadas por el resolutor 1 están comprendidas en un conjunto más amplio formada por las actuaciones del resolutor 2.

TERCERA PARTE

Conclusiones y Reflexiones Finales

CAPÍTULO 6

Conclusiones sobre un MTL para la Función Afín aplicada a la Oferta y la Demanda y consideraciones sobre su Enseñanza y Aprendizaje

CAPITULO 6

Conclusiones sobre un MTL para la Función afín aplicada a la oferta y demanda y consideraciones sobre su enseñanza y aprendizaje

En este apartado se presentan las conclusiones obtenidas a partir del desarrollo del trabajo de investigación y se integran algunas consideraciones surgidas durante la construcción de cada capítulo de la tesis. En primer lugar, se muestran los resultados que permitieron diseñar un MTL para la función afín y su relación con la oferta y la demanda. En segundo lugar, consideraciones sobre la enseñanza y aprendizaje de estos objetos de conocimiento que surgieron del estudio anterior. Por último, se discuten los aportes y las limitaciones de este trabajo, así como posibles problemáticas para ser investigadas como continuación de la presente.

6 – A. Conclusiones que surgen a partir de la elaboración de un MTL sobre función afín y su aplicación en problemas de oferta y demanda

En el inicio de esta investigación nos habíamos planteado como hipótesis que era posible recurrir a un modelo que permita organizar la información para facilitar el análisis de problemas sobre Oferta y Demanda que requieran la aplicación de la matemática.

Por ese motivo, nos propusimos elaborar un MTL que nos ayude a entender el problema de la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales aplicado a las leyes de la oferta y la demanda. De hecho, en los diferentes capítulos presentados precedentemente, pudimos encontrar elementos que conforman a los componentes de dicho modelo: del Capítulo 3 surge el modelo o componente de competencias, del Capítulo 4, el modelo de enseñanza y comunicación y del Capítulo 5, elementos del modelo de actuación o cognición.

Uno de los objetivos que esta investigación tenía, era poder explicitar las competencias matemáticas que se requieren para poder hallar solución a problemas planteados en un contexto económico; nos preguntábamos ¿qué competencia matemáticas y competencias en el campo de la economía son necesarias para enfrentar la resolución de problemas donde la oferta y la demanda se toman como aplicación de la función afín?, para encontrar respuesta a este interrogante, nos abocamos a la concreción de un Modelo de Competencias, realizado a partir del análisis e interpretación de las soluciones de ese tipo de problemas, por parte de un resolutor ideal, considerado experto en el tema.

De este estudio, se logró poner en evidencia competencias, tanto matemáticas como económicas, entendidas como lo que hay que saber y lo que hay que saber hacer con lo que se sabe, para encontrar las soluciones de los problemas, las que se presentan en la siguiente figura:

Figura 30

Modelo de Competencias Matemáticas elaborado para la resolución de problemas de la Oferta y la Demanda

Nota. Imagen de elaboración propia.

Entendemos que las competencias halladas predicen las actuaciones posibles frente a problemas de este tipo, siendo factible tener dominio no sólo de lo que sabe y sabe hacer en relación a las funciones, sino también a las demás áreas de la matemática que, evidentemente, son necesarias considerara la hora de encarar la resolución de problemas con estas características.

Desde el marco funcional, no sólo saber definiciones sino poder identificar la situación como representativa de una relación funcional, y entender qué características tiene una función para que sea lineal, es decir, identificar cuándo su comportamiento es lineal. Así también, reconocer sus diferentes representaciones y saber qué hacer con ellas, la conveniencia de sus usos, y el pasaje de una a otra, de manera pertinente.

Desde el marco de la economía, el resolutor necesita, en primer lugar, comprender el fenómeno, es decir, tener el dominio de las relaciones que deben satisfacer para que una situación sea catalogada como una situación de oferta o de demanda, y en segundo lugar, reconocer los modelos que se podrían utilizar para poder obtener un resultado, y poseer también recursos como para anticipar si el resultado es factible, coherente con la situación, así como los valores numéricos y las cantidades de las magnitudes halladas.

Relacionando con el marco teórico adoptado, a partir de la mirada de una configuración epistémica analítica de la función, considerar su notación algebraica, y su relación con las nociones de ecuaciones y rectas, ofrecidas por la matemática en sus áreas álgebra y geometría analítica. Desde una configuración conjuntista, considerar no sólo sus definiciones sino aquellas propiedades que la distinguen de una relación no funcional. Considerando la configuración gráfica, poder realizar la lectura e interpretación de la función representada gráficamente, fuertemente vinculada con los conceptos de geometría analítica sobre ejes, planos cartesianos, coordenadas, etc. Así mismo, las características que ofrece una configuración tabular, proporcionando al resolutor la posibilidad de leer, comprender y estimar el tipo de comportamiento de la función y en particular su linealidad.

En cuanto a la constitución de un modelo de enseñanza, la interpretación de las propuestas de enseñanza de algunos libros de textos, destinados a la enseñanza de la matemática en niveles universitarios, nos permitió encontrar elementos que describen cierto tipo de procesos para la enseñanza y consecuente aprendizaje que prevalecen para los objetos función, función afín y referidos a la matematización de la oferta y la demanda.

Bajo la óptica de las configuraciones epistémicas elaboradas desde el EOS para el objeto función y utilizadas como marco de referencia, las propuestas de enseñanza se encuadran en gran medida bajo configuraciones Analítica y Gráfica, y en menor medida Conjuntista.

De esta forma, creemos que no puede establecerse un único Modelo de enseñanza de los temas analizados, dado que los elementos que lo componen estarán imbricados por la postura epistemológica que sostienen los autores, sobre los significados de las funciones, y sobre el uso de las mismas en el estudio matematizado de ellas, aplicándolas al tratamiento de la oferta y la demanda.

De igual modo, lo expuesto anteriormente, influye en la posibilidad de determinar un único Modelo de comunicación, siendo que sus elementos surgen del modo en que se propone el texto, el discurso empleado, la secuenciación de las acciones de la propuesta y el tipo de representación de la función que se utiliza. Y estas cuestiones se relacionan con los posicionamientos epistemológico sobre el saber y sobre la enseñanza de las funciones y de la matemática aplicada a otros contextos disciplinares, tanto de los autores de los libros de textos como de los docentes que los utilizan.

En relación al discurso utilizado en la comunicación de los conocimientos, se destaca una fuerte influencia de los enfoques analítico y gráfico, dado que consiste en abundante presentación de modelos simbólicos algebraicos tanto de la función afín como de las ecuaciones de oferta y demanda, y el recurso de la representación gráfica para mostrar estos conocimientos desde el dibujo de una línea rectal.

Si bien, encontramos que el lenguaje y las definiciones que utilizan los resolutores reales son los utilizados por los textos, no se ven en las presentaciones de los mismo propuestas para que se desprendan las distintas formas de las ecuaciones de la recta, a partir de su definición como lugar geométrico.

Una de las nociones que involucra al lenguaje de la representación gráfica de una función es la de pendiente de la recta. Se presenta habitualmente asociada casi exclusivamente al valor y signo del coeficiente del término lineal de la expresión polinómica de la función, pero no se vislumbró a partir de los textos una interpretación de la pendiente tanto desde la definición de recta como lugar geométrico ni desde el punto de vista económico, donde el valor numérico de la pendiente surge como el cociente entre variaciones de las variables dependientes e independientes y en economía, variación de la cantidad de productos (ofertados o demandados) y variación del precio por unidad de cada producto.

Cabe aquí la advertencia del poco uso de las unidades de medida del valor de la pendiente, hecho que incidiría fuertemente en el significado que se le atribuye a ese número, como resultado de una razón entre dos cantidades.

El uso de los términos “sube” o “baja” para referirse, al momento de la lectura de la representación gráfica de la función afín, a las propiedades de crecimiento o decrecimiento de una función que crece o decrece, es de carácter puramente ostensivo, es decir, parecería suficiente para comprender el significado del término que se muestre directamente la representación gráfica y que esta referencia directa determina su significado.

Para encontrar un modelo de actuación o cognición, tomamos en cuenta las expresiones de Puig, ya referenciado en el Capítulo 2, quien sostiene que en el proceso de resolución de problemas se pueden identificar elementos que responden a las competencias que poseen los resolutores, en términos de conocimientos disciplinares, como así al considerar los modos al resolver problemas y los medios que requieren como parte de ese proceso.

Del análisis de la resolución de los problemas por dos resolutores reales, estudiantes universitarios en carreras de Economía y de una entrevista realizada, encontramos que, en gran medida, lo que han puesto en juego los resolutores reales pueden relacionarse con las competencias matemáticas y económicas que forman parte del modelo de competencias.

No obstante, y como se advirtió en el Capítulo 5, las actuaciones de los resolutores reales son relativamente similares, en tanto ponen en acto idénticas competencias. A pesar de ello, también presentan marcadas diferencias, dado que uno de ellos despliega un número mayor de actuaciones, dentro de las posibles que se enuncian en el modelo de competencias.

Y como ya lo expresamos anteriormente, por este hecho, concluimos que no sería posible encontrar un único modelo de actuaciones o cognición, pero sí, sería factible encuadrar dichas actuaciones con las competencias que estaría dando el modelo de competencias o formal.

En cuanto al aporte teórico de las configuraciones epistémicas del EOS, a partir del análisis de sus actuaciones, dejan entrever ciertos rasgos que caracterizan a cada uno de los objetos primarios tomados como categorías de análisis.

Es factible que en uno de ellos se destacaría una configuración epistémica sobre función, por sobre las demás. Por ejemplo, en uno de los resolutores, sus actuaciones se acercan más a una postura epistémica tabular, cuando al resolver en cada problema acude a la representación de la función en una tabla, y trabajo con pares ordenados. En tanto que, en otro resolutor, hay preponderancia de actuaciones que estarían relacionadas con las configuraciones epistémicas analítica y conjuntista. Por ejemplo, sería analítica cuando reconoce y utiliza las propiedades de los números reales para hallar la expresión algebraica que da respuesta a los problemas, y conjuntista porque usa y aplica el concepto de función afín y de su inversa como modelos matemáticos para resolverlos.

Es notable, en ambos casos, la ausencia de las características que se relacionan con la configuración gráfica (salvo el caso de que uno de los problemas se presentaba mediante la representación gráfica de la función en un sistema de ejes cartesianos). No utilizan confeccionar por sí mismo el gráfico de la función, como recurso, por ejemplo, para la corroboración de los resultados hallados, si no está pedido explícitamente en el problema que lo realicen.

6 – B. Conclusiones sobre enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales aplicadas a oferta y demanda

Tal como lo planeamos en el Capítulo 1, en este trabajo se presentaba la necesidad de indagar sobre las cuestiones que influyen en la enseñanza y aprendizaje de la función afín aplicada al contexto de las Ciencias Económicas, como así también, poder entender las relaciones que se suscitan entre las variables económicas puestas en juego en situaciones de oferta y demanda donde los conocimientos matemáticos funcionen como herramienta en la resolución de los problemas de esta temática.

Situados en un proceso de aprendizaje, una posible pregunta del estudiante sería ¿Por qué se utilizan las funciones afines para poder resolver problemas de oferta y demanda? ¿cuál es la relación entre estos conceptos? Seguramente, podría encontrar algunas respuestas en las propuestas de enseñanza que están a su alcance, como los libros de textos, o las secuencias didácticas.

Del estudio realizado sobre los libros de texto, entendemos que no sería así, dado que todo indica que el tratamiento que dan a esta cuestión no tendrían como propósito (por lo menos no de manera exhaustiva) establecer la relación entre dos mundos, el real, de la situación de la economía y el matemático y así mismo, del tratamiento de la función afín como modelo óptimo para los casos donde se supone, desde la economía, un comportamiento lineal entre sus variables.

Podemos pensar entonces que las respuestas serían encontradas a partir de las propuestas didácticas de los docentes, o bien, terminen recayendo esa responsabilidad en el estudiante.

Así, nos habíamos planteado como hipótesis que el conocimiento y el uso de la función afín facilitaría considerablemente la interpretación económica de los problemas relacionados con la oferta y la demanda. Creemos que sería en gran medida posible, si el significado personal del objeto función del estudiante, se relaciona con los atributos de una función como modeladora de situaciones de otra disciplina.

Tener competencias relacionadas con las funciones lineales, facilitaría considerablemente la interpretación económica de los problemas relacionados con la oferta y demanda, siempre y cuando la enseñanza se ocupe de lograr esas competencias en los estudiantes. Por ejemplo, no solo abordar la función desde su representación simbólica o fórmula, sino también aprovechar las bondades de la representación tabular y desde la representación gráfica en actividad de introducción al tema, o bien, comenzar con una interpretación a partir de la lectura del gráfico de la función, para avanzar sobre los registros analítico y simbólico. O también, prácticas educativas en las que los estudiantes tengan que tomar decisiones sobre las representaciones de la función que resulte más conveniente, según sea el caso.

No obstante, no pudimos advertir este tipo de propuestas ni en los libros de texto ni en las actuaciones de los estudiantes al resolver los problemas.

Encontramos que no se percibe con claridad la diferenciación entre el objeto función afín y el objeto recta como su representación gráfica. Es decir, desde un aspecto más dinámico de la función como relación entre cambios de dos variables, una dependiendo de la otra, aspecto más asociado del tratamiento de la función en el análisis matemático y el uso de la gráfica de la función para analizar este comportamiento "dinámico" y un aspecto "estático" de la función, habitualmente desarrollado en el álgebra o en la geometría analítica. Podría estar relacionado al hecho de que son libros de textos de uso corriente para la enseñanza de matemática de nivel universitario de distintas asignaturas matemáticas (Álgebra Lineal, Cálculo, Geometría Analítica) en general abordadas en forma separadas, como espacios curriculares diferentes en los planes de estudio de las carreras.

En relación a un modelo de Comunicación, nos preguntamos si para el aprendizaje o para la enseñanza influyen los diferentes tipos de representación de una función, o del lenguaje utilizado para comunicar situaciones de oferta y demanda relacionadas a las funciones lineales.

Al respecto, considerando la presentación de los conceptos de la economía, en los tres textos analizados hay una marcada influencia de la matematización, tal vez relacionado con el hecho de que son textos para la enseñanza de la matemática. En cuanto a las representaciones gráficas, las de oferta y demanda se presentan como líneas continuas, sin hacer aclaraciones de que esto puede modificarse dependiendo del conjunto numérico sobre el cual esté definido la variable q "cantidad de productos".

Parece oportuno citar a Mochón y Beker (1996), quienes sobre esta cuestión afirman:

> *L*os procedimientos empleados en Economía para explicar los fenómenos a estudiar y poder formular las relaciones entre variables son: el literario (verbal), el matemático y el geométrico (representaciones gráficas), destacando que las funciones expresadas en forma gráfica y analítica permiten simbolizar comportamientos complejos de problemas económicos, apelando a la función lineal como la representación teórica más simple para expresar las relaciones entre variables en forma algebraica, tabular y gráfica.(pp.2-4)

En este sentido, desde la Economía se sobre entiende que oferta y demanda son conceptos que se pueden estudiar utilizando la función afín o ecuaciones como herramienta.

Así mismo, relacionado con la presentación de los gráficos de la función, se presenta una situación que podría ser conflictiva: En matemática se ubica a la variable independiente como valores del eje horizontal o de abscisas, y la variable dependiente en el eje vertical o de ordenadas, cuestión que, en el contexto económico, la variable independiente "precio unitario" se representa en el eje vertical y la variable dependiente cantidad de productos, en el eje horizontal.

Lo único que prevalece como criterio para decidir si la situación que se plantea en los problemas a resolver se trata de oferta o demanda, sería desde el signo de la "pendiente" considerando su expresión simbólica algebraica, o desde su inclinación relativa al eje de abscisas desde su representación gráfica.

Así mismo, el lenguaje verbal utilizado por los estudiantes para hablar de los conceptos oferta y demanda, se limita frecuentemente a expresiones banales, por ejemplo, al referirse a la relación que se presenta entre las variables económicas oferta o demanda, es expresada como “a mayor precio, mayor oferta” o “a mayor precio menor demanda”, más apropiado para una situación de proporcionalidad directa, asociada a la función lineal, no así para el comportamiento de una función afín.

Esta situación podría estar afectando a la comprensión del fenómeno económico (leyes de oferta y demanda) y de su relación con un comportamiento lineal, porque el resolutor de problemas debería poner en acción competencias matemáticas que involucra conocimientos de estas áreas de la matemática. Es decir: los significados que tienen las variables, los parámetros, el valor de la pendiente

Por otra parte, uno de los objetivos de esta tesis proponía reconocer los elementos que hacen a la función afín un modelo matemático óptimo para el estudio de las leyes de la oferta y la demanda.

De hecho, para un resolutor ideal éste sería el significado que pueda darle a esta cuestión un resolutor ideal, no obstante, al hacer el estudio de las competencias se puso en evidencia la complejidad que presenta el tratamiento del tema, y el conjunto de relaciones que se establecen entre los saberes tanto de la matemática como de la economía. Esta complejidad podría ser un factor que produzca un desempeño poco exitoso por parte del estudiante, dado que para resolver satisfactoriamente un problema sobre oferta o demanda debe considerar un conjunto de conocimientos tanto del área disciplinar económica como de diferentes áreas de la matemática.

En este sentido, desde lo hallado en este trabajo como un posible modelo de actuación de los estudiantes, no es posible asegurar que esto se esté cumpliendo. Hay que tener en cuenta que para el nivel universitario hay conocimientos matemáticos que se suponen ya fueron adquiridos y asimilados en algún momento dentro de su escolarización anterior; creemos que sería uno de los motivos por los que la presentación de los textos no es exhaustiva, o que la propuesta que hacen los docentes no aborde el conocimiento considerando estos aspectos, quedando en general en el estudiante la responsabilidad de crear vínculos entre los objetos matemáticos con los fenómenos de la economía.

Los problemas que involucren las leyes de la oferta y la demanda pueden dar significado al trabajo matemático con funciones, siempre que éstos sean presentados como actividad inicial, que propongan un desafío intelectual que produzca un aprendizaje constructivo, pero este hecho no siempre está presente en las propuestas de enseñanza sobre funciones. En general, tanto en libros de textos o secuencias de enseñanza se inicia el desarrollo del tema matemático y luego suceden las aplicaciones, con abundantes ejercicios de aplicación, donde predominan las acciones algebraicas sobre las ecuaciones.

Siguiendo el proceso de modelización para la resolución de problemas que desarrollamos en capítulos anteriores, no puede dejarse de tener en cuenta una perspectiva desde la Microeconomía sobre la enseñanza de la Oferta y la Demanda, siguiendo un proceso que parta del problema real, pase al modelo matemático, se realice el trabajo matemático sobre el modelo descontextualizado, se pase a la interpretación de los resultados en el contexto. No obstante, no fue advertido este tratamiento en los textos analizados.

6 – C. Aportes, limitaciones y continuidad de trabajos de investigación

6 – C.1. Aportes

Como uno de los objetivos de esta investigación, nos propusimos producir aportes para la didáctica de la matemática, vinculada a problemas de contexto económico. Desde este lugar, de acuerdo a los resultados de la investigación y a partir de la elaboración de los diferentes componentes MTL, podemos afirmar que, abordar el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento matemático y su aplicación a un contexto extra matemático, resultó satisfactorio.

Permitió sacar a la luz la amplia y compleja red de saberes y de competencias que implica su tratamiento, donde el reconocimiento de esta vasta red, podría significar una revisión de las prácticas de enseñanza de los docentes.

Proponer la introducción del objeto de enseñanza a través de situaciones contextualizadas donde el conocimiento matemático se constituya en herramienta de resolución. Unas prácticas de enseñanza más asociadas a los enfoques de las configuraciones epistémicas Analítica o Gráfica encontradas en los libros de texto de Matemática Aplicada analizados, caracterizados por una presentación que pone el énfasis en el desarrollo teórico de conceptos y propiedades matemáticas de manera abstracta y dejando como último para ser tratada la aplicación a través de problemas de la economía, no sería oportuno para un aprendizaje significativo.

En la resolución de los problemas, se insiste con la obtención del modelo matemático, en este caso la función afín y sobre todo en su forma simbólica, a partir de la cual se obtiene su representación gráfica, sin que aparezca como necesaria la reinterpretación del modelo o del resultado dentro del contexto del problema. Por ello, creemos que la secuencia de enseñanza debería contemplar lo que sostiene Godino, ya mencionado en el Capítulo 2, diciendo que la resolución de problemas se considera un medio esencial para lograr el aprendizaje, donde los estudiantes tienen oportunidades de plantear, explorar y resolver situaciones que requieran un esfuerzo significativo.

Así también, en esta investigación se puso en evidencia que, en la resolución de problemas aplicados de oferta y demanda, el estudiante debe poner en juego un conjunto bastante amplio de competencias matemáticas comprendidas en el tratamiento de distintas áreas, como ser, Aritmética, Álgebra, Geometría analítica y Cálculo infinitesimal y numérico. En este punto, parece importante reconocer que el estudiante no sólo debe poseer competencias matemáticas, sino que además contar con aquellas necesarias para poder comprender el fenómeno involucrado, para establecer la relaciones entre los conceptos y para tener dominio y control de los resultados hallados. Este hecho no menor, obliga a dimensionar la complejidad que presenta reconocer la matemática cuando modeliza a problemas de otras disciplinas.

6 – C.2. Limitaciones

Teníamos como objetivo de esta investigación, generar prácticas docentes significativas de la función afín que se ajusten a contextos extra matemáticos, hecho que no puedo concretarse en este trabajo. No se contó con el tiempo necesario para diseñar situaciones de enseñanza que puedan ser puestas en práctica por los docentes, considerando los elementos constitutivos de las componentes de un MTL alcanzado a construir en este trabajo.

6 – C.3. Cuestiones para continuar investigando

Ya se ha mencionado que una de las características principales de los MTL es su carácter recursivo, lo cual quiere decir que partir de las observaciones obtenidas a partir de su implementación se puede plantear el diseño de uno nuevo. En este caso, a partir de los elementos encontrados en los modelos de competencias, de enseñanza, de comunicación y de actuación, se podría llevar a cabo el rediseño del MTL de la investigación

Sería factible proponer una línea de investigación para avanzar sobre el diseño de situaciones de enseñanza que sitúe la problemática aquí planteada o bien, diseñar situaciones didácticas para fomentar aprendizajes significativos, ubicando en este caso al estudiante como sujeto de investigación.

Así mismo, considerar otros temas dentro de la Microeconomía y su relación con la Matemática, como ser el Punto de Equilibrio entre la Oferta y la Demanda, las funciones Ingreso y Costo total, el punto de equilibrio entre éstas últimas, y su significado en ambos casos, para ser estudiados en el marco del MTL, y poder, por ejemplo, investigar sobre los conocimientos previos y competencias matemáticas que se ponen en juego en el momento de resolver problemas, como así también las dificultades que se presentan.

.

ANEXOS

ANEXO I

Protocolo de resolución de los problemas realizados por un resolutor ideal

<u>Problema N° 1</u>: Después de dos meses de trabajo, María hace un estudio de mercado. Los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo que ella fabrica. Si el precio es de \$35 puede vender 30 pantalones mensualmente, pero si lo lleva a \$30 podría vender 60 pantalones. A medida que disminuye el precio, podría aumentar la demanda siguiendo un comportamiento lineal.

a) Hallar la ecuación que representa la situación planteada.

b) Según la tendencia implícita en los datos, un cliente estaría dispuesto a comprar 90 pantalones por mes. ¿A qué precio debería María venderle sus pantalones?

<u>Información conocida</u>:

Desde el enunciado del problema: Se trata de un Estudio de mercado y los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo. Se conocen los valores de precios unitarios y cantidad de artículos:

p_1 = \$/unidad 35 (precio unitario/1 pantalón); **q_1 = 30 pantalones** (cantidad de pantalones)

p_2 = \$/unidad 30 (precio unitario/1 pantalón); **q_2 = 60 pantalones** (cantidad de pantalones)

Si disminuye el precio unitario, puede aumentar la demanda. El comportamiento es lineal. Se conoce un valor dado: **q_3 = 90 pantalones** a comprar por mes.

<u>Información por conocer</u>:

a) La Ecuación de demanda que representa la situación planteada.

Considerando la dependencia $q = f\ (p)$: $q - q_1 - m_1 . (p - p_1) = 0$ **… (1);** o bien:

Considerando la dependencia $p = g\ (q)$: $p - p_1 - m_2 . (q - q_1) = 0$ **… (2);**

b) Precio a pagar para vender 90 pantalones, es decir: **p_3 (90)**

Solución del ítem a)

Procedimiento N°1:

Al conocer los precios unitarios de los pantalones y las cantidades a que los consumidores están dispuestos a comprar a dichos precios, se puede considerar resolver de las siguientes maneras:

1°) Desde la Economía: como se sabe que, si disminuye el precio unitario, puede aumentar la demanda, que la cantidad demandada por el consumidor depende del precio, es decir, $q = f\ (p)$ y que el comportamiento es lineal, se puede asegurar que la razón entre la variación de la cantidad "q" y la variación del precio "p" será constante, pudiendo designar a dicha constante como "m".

En símbolos: $\frac{\Delta q}{\Delta p} = k = m$

Desde la Matemática: se sabe que la variación es la diferencia entre dos valores y, además, como el comportamiento es lineal, la constante "m" siempre tendrá el mismo valor. Utilizando los datos, se procede a determinar el valor de "m", como sigue;

En símbolos:

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \Rightarrow m = \left[\frac{(60-30)pant}{(30-35)\$/pant}\right] \Rightarrow m = \frac{30\ pant}{-5\ \$/pant} \Rightarrow m = -\frac{6\ pant}{1\ \frac{\$}{pant}}$$

$$= -6\ \frac{pant}{\frac{\$}{pant}}.$$

Desde la Economía: se interpreta que este resultado expresa que se demandarán 6 pantalones por cada peso que disminuye el precio de cada uno.

Desde la Matemática: Por la condición de linealidad, el parámetro "m" se mantiene como razón entre las variaciones de cualquier par de valores (p_i; q_i), como así también para pares ordenados genéricos (p; q). Por ello, si se toman los pares (p; q) y (p_1; q_1) o (p; q) y (p_2; q_2), se obtiene:

En símbolos: $\frac{q-q_1}{p-p_1} = m$, o bien $\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1} = m$

Reemplazando los datos: $\frac{q-30}{p-35} = -6 \Rightarrow q - 30 = -6\ (p - 35)$ **(3)**

Así mismo: $\frac{q-60}{p-30} = -6 \Rightarrow q - 60 = -6\ (p - 30)$ **(4)**

Respuesta: Las ecuaciones señaladas con **(3)** o **(4)** son la solución al problema.

Procedimiento N°2: Desde la Matemática, saber que el comportamiento es lineal, lleva a calcular la pendiente "m" de la recta y luego utilizar el modelo "ecuación punto - pendiente"

Solución I): Se establece la relación $q = f\ (p)$

Al conocer los precios unitarios de los pantalones y las cantidades a que los consumidores están dispuestos a comprar a dichos precios y que el comportamiento es lineal, se descontextualiza, asignando al precio unitario "*p*" y a la cantidad de pantalones "*q*", las denominaciones "*x*" e "*y*" respectivamente; luego se procede a expresar dichos datos como pares ordenados (x_1; y_1) y (x_2; y_2), por ejemplo, (35; 30) y (30; 60). Luego, hallar la pendiente m_1, realizando el cociente entre la variación de "*y*" y la variación de "*x*" (cociente incremental):

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_1 = \left[\frac{(60-30\ )}{(30-35)}\right] = \frac{30}{-5} \Rightarrow m_1 = \ -6$$

Seguidamente, se utiliza la "ecuación punto – pendiente de la recta", dada por la expresión:

$y - y_1 = m_1.(x - x_1)$, y se reemplazan los valores de m_1 y de uno de los pares ordenados, por ejemplo, $x_1 = 35$ e $y_1 = 30$;

$$y - 30 = (-6).(x - 35) \quad \textbf{(5)}$$

Desde la Economía, se interpreta que la ecuación hallada es: $q - 30 = (-6).(p - 35)$ **(6)**

Además, al tener la pendiente "m" signo negativo, se trata de una *ecuación demanda*.

Solución II): Se establece la relación $p = g\ (q)$

Asignando a la cantidad de pantalones "*q*" y al precio unitario "*p*" las denominaciones "*x*" e "*y*" respectivamente; luego se procede a expresar dichos datos como pares ordenados $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$, por ejemplo, (30; 35) y (60; 30). Para hallar la pendiente m_2**,** se realiza el cociente entre la variación de "*y*" y la variación de "*x*" (cociente incremental**)**:

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_2 = \left[\frac{(30 - 35)}{(60 - 30)}\right] = \frac{-5}{30} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{6}$$

Seguidamente, se utiliza la ecuación punto – pendiente de la recta, dada por la expresión:

$y - y_1 = m_2.(x - x_1)$, reemplazando el valor de "m" y uno de los pares ordenados, por ejemplo, $x_1 = 30$ e $y_1 = 35$;

$$y - 35 = \left(-\frac{1}{6}\right).(x - 30) \quad \textbf{(7)}$$

Desde la Economía, se interpreta que la ecuación hallada es: $p - 35 = \left(-\frac{1}{6}\right).(q - 30)$ **(8)**

Además, por tener signo negativo la pendiente, se trata de una *ecuación demanda*.

Procedimiento N°3: Desde la Matemática, saber que el comportamiento es lineal, lleva a utilizar el modelo "ecuación de la recta que pasa por dos puntos"

Solución I): Si se parte de la relación $q = f\ (p)$

Asignando al precio unitario "*p*" y a la cantidad de pantalones "*q*", las denominaciones *x* e *y* respectivamente; luego se procede a expresar dichos datos como pares ordenados (x_1; y_1) y (x_2; y_2), por ejemplo, (35; 30) y (30; 60) y reemplazar los datos en la expresión:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right).\ (x - x_1) \ \Rightarrow\ y - 30 = \left(\frac{60-30}{30-35}\right).\ (x - 35) \Rightarrow\ y - 30 = -6.\ (x - 35)$$

Luego, contextualizar para obtener la ecuación solicitada**:** $q - 30 = -6.\ (p - 35)$.

<u>Solución II)</u>: Si se parte de la relación $p = g\ (q)$

Se asigna a la cantidad de pantalones "*q*" la denominación "*x*" y al precio unitario "*p*" la denominación "*y*"; luego se procede a expresar dichos datos como pares ordenados (x_1; y_1) y (x_2; y_2), por ejemplo, (30; 35) y (60; 30). Luego, reemplazar los datos en la expresión:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right).\ (x - x_1) \ \Rightarrow\ y - 35 = \left(\frac{30-35}{60-30}\right).\ (x - 30)\ )\Rightarrow\ y - 35 = \left(-\frac{1}{6}\right).\ (x - 30)$$

Luego, contextualizar para obtener la ecuación solicitada**:** $p - 35 = \left(-\frac{1}{6}\right).\ (q - 30)$.

<u>Procedimiento N°4</u>: Obtener una expresión del tipo $y + \text{m}.\ x = y_0$

Corresponde al modelo matemático que se obtiene al considerar el par ordenado (0; y_0) donde en la ecuación el valor "y_0" representa a la "ordenada al origen".

<u>Solución I):</u> Se puede partir de las ecuaciones (5) o (6) y luego aplicar propiedades (distributiva del producto respecto a la suma y uniforme de la igualdad):

$$y - 30 = (-6).(x - 35) \ \Rightarrow\ y\ = (-6).x + 210 + 30 \ \Rightarrow\ y\ + 6\ .\ x = 240 \quad \textbf{(9)}$$

<u>Desde la Economía</u>, se interpreta que la ecuación hallada es: $6.\ p + q = 240$ **(10)** donde el precio unitario *"p"* debe ser estrictamente positivo.

<u>Solución II):</u> Se puede partir de las ecuaciones (7) o (8) y luego aplicar propiedades (distributiva del producto respecto a la suma y uniforme de la igualdad):

$$y - 35 = \left(-\frac{1}{6}\right).(x - 30) \Rightarrow\ y\ = \left(-\frac{1}{6}\right).x + 5 + 35 \Rightarrow\ y\ + \left(\frac{1}{6}\right).\ x = 40 \quad \textbf{(11)}$$

Desde la Economía, se interpreta que la ecuación hallada es: p + $\left(\frac{1\$/pant}{6\,pant}\right)$.q = 40 **(12)**

En ésta última expresión, el valor **p_0** = \$40 representa el precio unitario al que el consumidor no está dispuesto a comprar pantalones (la cantidad demanda es nula, q_0 = 0) y se considera el par (0; p_0).

Solución del ítem b): ¿A qué precio debería María vender sus 90 pantalones?

Para hallar la solución de este ítem, se debe tener en cuenta el dato que informa que un consumidor está dispuesto a comprar 90 pantalones

Solución I):

Se considera un par conocido, por ejemplo (35; 30) y un par (p_3; q_3), donde q_3 = 90 y p_3 se desconoce; teniendo en cuenta el comportamiento lineal, se puede afirmar que: $\frac{q_3 - q_1}{p_3 - p_1} = -6$. Se reemplaza por los valores dados: : $\frac{90-30}{p_3-35} = -6 \Rightarrow \frac{60}{-6} = p_3 - 35 \Rightarrow p_3$ = 35 – 10 = 25

Respuesta: María debe vender sus 90 pantalones a \$25 cada uno.

Solución II):

Se podría partir de cualquiera de las ecuaciones halladas al resolver el ítem a) en los cuatro procedimientos posibles, asignando a "q" el valor 90, por ejemplo en: $q - 30 = -6\ (p - 35)$ **(3).**

$90 - 30 = -6\ (p - 35) \Rightarrow 60 = -6\ (p - 35)\ ) \Rightarrow 10 = -1\ (p - 35) \Rightarrow p$ = 35 – 10 = \$ 25.

Problema N° 2: Un restaurante tiene una promoción de pizzas para un determinado día de la semana. La siguiente tabla proporciona la información sobre el precio unitario y la cantidad de pizzas.

Precio (\$/unidad)	Cantidad de pizzas
10	0
8	10

6	20
4	30

a) Encuentre la expresión que modeliza la situación.

b) Determine si la relación hallada refleja a la oferta o a la demanda.

Información conocida:

i) Desde el enunciado: Promoción de pizzas en un día determinado.

ii) Desde la tabla: precios unitarios "p" (en pesos por unidad y cantidad de pizzas) y la cantidad de pizzas "q" que se compran a ese precio por unidad.

Información por conocer: a) Expresión que modeliza la situación. Podría interpretarse que el modelo es una función, de la forma: $\mathbf{q = m. p + q_0}$ **(1)**

b) Hay que decidir si la función hallada en a) refleja a la oferta o a la demanda.

Solución I:

En la tabla se informan los precios unitarios de las pizzas **p** y las cantidades **q** que los consumidores están dispuestos a comprar a dichos precios y de su lectura se saca en claro que:

- Los valores del precio unitario varían de 2 en 2, con $4 \leq p \leq 10$,
- Los valores de la cantidad de pizzas varían de 10 en 10, con $0 \leq q \leq 30$,
- En la primera columna los precios unitarios disminuyen y en la segunda columna la cantidad de pizzas aumentan de valor,

De esto último se interpreta que hay una dependencia entre las variables económicas de tal manera que a medida que el precio unitario disminuye, la cantidad de pizzas que se están dispuestas a comprar aumenta.

Luego, se calculan las variaciones sucesivas de ambas variables:

Variación de "p": $\Delta p_1 = p_1 - p_0 = 8 - 10 = -2$

$\Delta p_2 = p_2 - p_1 = 6 - 8 = -2$

$\Delta p_3 = p_3 - p_2 = 4 - 6 = -2$

De igual forma:

Variación de "q": $\Delta q_1 = q_1 - q_0 = 10 - 0 = 10$

$\Delta q_2 = q_2 - q_1 = 20 - 10 = 10$

$\Delta q_3 = q_3 - q_2 = 30 - 20 = 10$

<u>Desde la Economía</u>, se pueden plantear cocientes de variaciones para cada subintervalo:

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} = \frac{\Delta q_3}{\Delta p_3} = \frac{10}{-2} = -5 \text{ (pizza/(\$/pizza))}$$

Además, tomando dos pares de valores cualesquiera, se cumple que:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \left[\frac{(20-0)pizzas}{(6-10)\,\$/pizza}\right] = \left[\frac{20\ pizzas}{(-4)\$/pizza}\right] = \left[\frac{(-5)pizza}{1\ \$/pizza}\right]$$

<u>Desde la Matemática</u>, cuando el cociente incremental se mantiene constante, se está en presencia de una relación de comportamiento lineal y que la pendiente es **m =** $\frac{(-5)pizza}{\$/pizza}$.

Entonces, también se cumplirá la misma constante tomando un par de valores genérico (p; q).

En símbolos:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q-q_1}{p-p_1} = -5 \Rightarrow \frac{q-10}{p-8} = -5 \Rightarrow q - 10 = -5(p-8) \Rightarrow q = -5p + 40 + 10 \Rightarrow q = -5p + 50$$

<u>**Respuesta**</u>**:** La ecuación que representa la situación planteada es **q = - 5.p + 50**

<u>Solución II</u>: Suponiendo "*p*" en función a "*q*", al leer en la tabla el par (q; p) = (0; 10), este dato nos da el valor p_0; es decir cuando q = 0, p_0 = 10. Además, del cálculo $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ = m, se obtiene:

$$m = \frac{\frac{-1\ \$}{unid}}{5\ unid}$$

Luego, reemplazar en el modelo preestablecido: D: p = m. q + p_0, hallando:

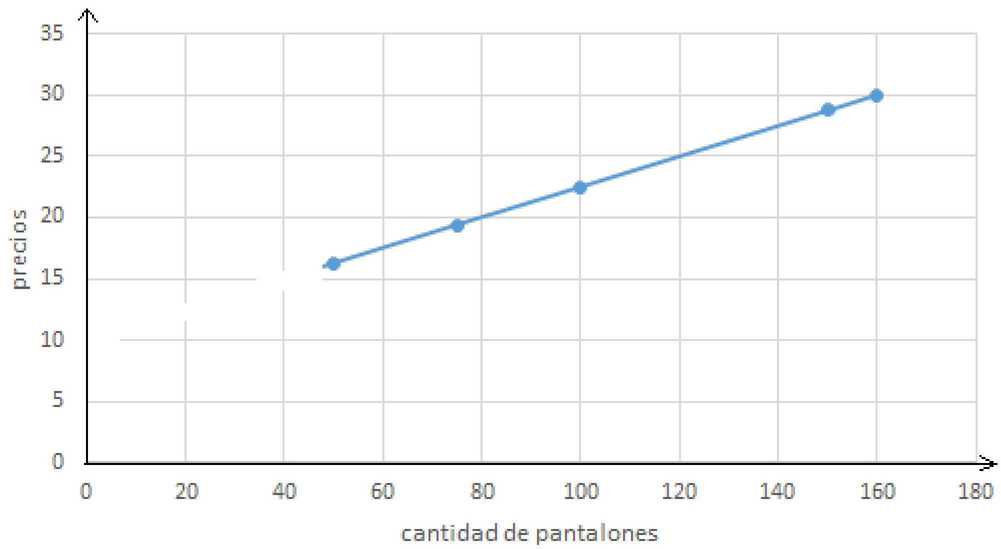
$$D{:}p = \frac{-1\$/unid}{5\ unid}\ .\ q + 10\ \$/unid$$

b) Determine si la relación hallada refleja a la oferta o a la demanda.

Retomando la información tenida en cuenta para responder el ítem (a), se tiene, desde la Economía, la interpretación de los valores de la tabla, y desde la Matemática, el signo de la pendiente **m** es negativo (-5)**,** lo cual significa que a medida que disminuye el precio unitario de pizzas, la cantidad que los consumidores están dispuestos a comprar aumenta, en 5 pizzas por cada $ que disminuye el precio unitario. Desde la Economía, se concluye que la relación cantidad - precio responde a la ley de Demanda.

<u>Respuesta</u>: La relación hallada refleja que se trata de la ley de la Demanda.

<u>Problema N° 3</u>: Dos amigas realizan un estudio de mercado y observaron que los precios que pagan los consumidores varían según los meses del año, es decir que encontraron que, en verano, difícilmente el público compre pantalones que cuesten más de $20. En cambio, en invierno están dispuestos a pagar hasta $30. Con estos datos, realizaron el siguiente gráfico, pensando en la cantidad de pantalones que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellos en cada época.



Hallar la forma algebraica de la función representada

<u>Información conocida</u>:

i) Desde el enunciado del problema:

$p >$ \$20 (precio unitario/1 pantalón), difícilmente compren pantalones en verano

$p \leq$ \$30 (precio unitario/1 pantalón), están dispuestos a comprar "q" pantalones en invierno.

Se aclara que "cantidad de pantalones que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellos en cada época".

ii) Desde la lectura del gráfico:

Las coordenadas de ciertos puntos o pares de valores que se distinguen con claridad siendo:

$p_1 =$ \$25 (precio unitario/1 pantalón); $q_1 = 120$ pantalones (cantidad de pantalones)

p_2 = \$30 (precio unitario/1 pantalón); q_2 = 160 pantalones (cantidad de pantalones)

Se observa un segmento de recta con una inclinación dada. Por la designación de los ejes, se sobreentiende que "q" es variable independiente y "p" es variable dependiente.

Información por conocer: Forma algebraica de la función representada

O: $p = m.\, q + p_0$ (1) o bien **$q = m.p + q_0$ (2)**

Solución:

El enunciado verbal del problema proporciona la información general en cuanto al precio unitario de los pantalones y la cantidad que los consumidores están dispuestos a comprar en ciertas estaciones del año (verano e invierno). Además, se aclara que la cantidad de pantalones que las productoras estarían dispuestas a producir es según el precio unitario que se pague por ellos en cada época, por lo cual se interpreta que "La cantidad de pantalones a producir *depende* del precio unitario que se pague por los mismos", es decir una función de la forma $q = f(p)$.

Además, desde la lectura del gráfico en cuanto a la designación de los ejes, se interpreta que la cantidad "*q*" es variable independiente y el precio unitario "*p*" es variable dependiente. En cuanto al dibujo del gráfico, que es un segmento de recta con pendiente positiva, se interpreta desde la Matemática que es un comportamiento lineal con pendiente positiva y desde la Economía, estar frente a la actividad económica denominada **oferta**, ya que a medida que aumentan los precios unitarios, también aumenta la cantidad de pantalones que se ponen en venta, es decir, que las productoras están dispuestas a ofrecer a dichos precios unitarios.

Procedimiento N°1:

<u>Solución I</u>: Para encontrar la función requerida, se debe realizar en el gráfico la lectura de las coordenadas de dos puntos que pertenezcan al segmento de recta, de los cuales sea más preciso visualizar los valores, por ejemplo, p_1 = 25$/pant. y q_1 = 120 pantalones, p_2 = 30$/pant. y q_2 = 160 pantalones.

Suponiendo que "p" depende de la cantidad "q", en primer lugar, se calcula el valor del parámetro "m", definido como el cociente incremental entre la variación de precios y la variación de la cantidad de pantalones;

En símbolos:

$$\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = m \Rightarrow \left[\frac{(30-25)\$/pant}{(160-120)pant}\right] = m \Rightarrow m = \frac{5\$/pant}{40\ pant} \Rightarrow m = \frac{1\$/pant}{8\ pant} = \frac{1\left(\frac{\$}{pant}\right)}{8\ pant}.$$

Para un punto de coordenadas (120; 25) y un punto genérico de coordenadas (q; p), o sea un precio unitario y una cantidad cualquiera, pertenecer a la misma línea recta implica tener comportamiento lineal, por lo tanto, se cumplirá que:

$$\frac{p - p_1}{q - q_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow p - 25 = \frac{1}{8}(q - 120)$$

De donde se obtiene que:

$$p = \frac{1}{8}(q - 120) + 25$$

$$p = \frac{1}{8}.q - 15 + 25 \Rightarrow p = \frac{1}{8}.q + 10$$

<u>Respuesta</u>: La forma algebraica de la función inversa representada es **O:** $\mathbf{p = \frac{1}{8}.\ q + 10}$ o bien **q = 8.p – 80** que responde a la expresión económica **q = f(p)**

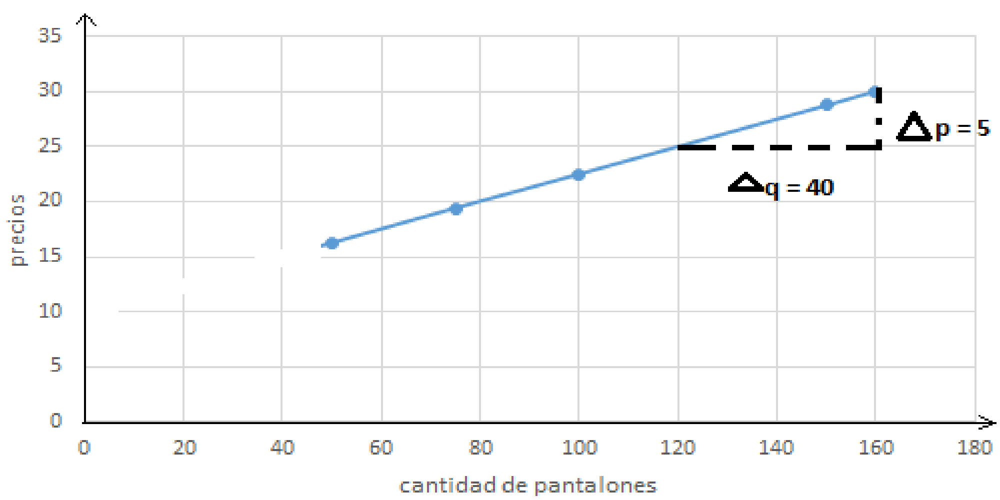
Solución II: Considerar las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la recta, y utilizar alguna de las ecuaciones utilizadas en los Procedimientos 2 o 3 del Problema N°1.

Solución III: una vez hallada la pendiente "m", y con un punto conocido, por ejemplo (120; 25) se reemplaza en el modelo explícito de la recta: O: p = m. q + p_0 **(1)**, luego de realizar los cálculos encontrar el valor p_0, para obtener la función inversa de oferta: O: $p = \frac{1}{8}. q + 10$.

Procedimiento N°2:

Solución:

Una posibilidad para hallar el valor de "m" es el cálculo de las variaciones de las variables económicas a partir de la observación en el gráfico, como se muestra en la figura:



Se plantea simbólicamente el cociente incremental:

$$m = \frac{\Delta p}{\Delta q} \Rightarrow m = \frac{5\$/pant}{40\ pant} \Rightarrow m = \frac{1\$/pant}{8\ pant}$$

De igual modo, se comprueba que este resultado se mantiene igual, si se toman dos puntos cualesquiera que estén sobre el dibujo de la recta. De ahí que se puede continuar utilizando las soluciones tipo I, II o III del Procedimiento 1.

Respuesta: La forma algebraica de la función inversa representada es $\mathbf{p = \frac{1}{8}. q + 10}$ o bien como la función $\mathbf{q = 8.p - 80}$.

ANEXO II

Análisis de las resoluciones del Resolutor ideal mediante el esquema de las fases

Problema N° 1: Después de dos meses de trabajo, María hace un estudio de mercado. Los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo que ella fabrica. Si el precio es de \$35 puede vender 30 pantalones mensualmente, pero si lo lleva a \$30 podría vender 60 pantalones. A medida que disminuye el precio, podría aumentar la demanda siguiendo un comportamiento lineal.

a) Hallar la ecuación que representa la situación planteada.

b) Según la tendencia implícita en los datos, un cliente estaría dispuesto a comprar 90 pantalones por mes. ¿A qué precio debería María venderle sus pantalones?

1- FASE DE FORMULACIÓN:

a) Reconocimiento de la información

Se reconocen los siguientes conceptos, todos ellos presentados en forma escrita en el texto:

Estudio de mercado; Consumidores; Demanda; Cantidad de artículos, como dato numérico; Precio unitario del artículo, como dato numérico, en pesos (\$); Comportamiento lineal.

b) Relaciones entre componentes de la información

CONCEPTO	RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS, dadas por la Economía (Mundo REAL)
Consumidores	El consumidor es una persona u organización que consume bienes o servicios, que los productores o proveedores ponen a su disposición en el mercado y que sirven para satisfacer algún tipo de necesidad.

Demanda "D"	La ley de la demanda establece que a medida que aumenta el precio de un producto (precio unitario o precio por unidad), disminuye la cantidad de unidades del producto que los consumidores están dispuestos a comprar, e inversamente, cuando el precio unitario del producto disminuye, la cantidad que los consumidores están dispuestas a adquirir, aumenta. En otras palabras, es una función y la relación de dependencia q = f(p).
Mercado	Un mercado es un mecanismo mediante el cual los consumidores y los vendedores interactúan para determinar precios e intercambiar bienes y servicios. La principal función del mercado es determinar el precio de bienes y servicios.
Estudio de mercado	El estudio de mercado es una investigación utilizada por diversos ramos de la industria para garantizar la toma de decisiones y entender mejor el panorama comercial al que se enfrentan al momento de realizar sus operaciones.
Precio de venta "p"	Es el dinero que debe abonar el consumidor para comprar una unidad de un determinado producto. Unidades: Unidad monetaria / unidad
Cantidad de productos "q"	En Economía, un producto se define como el resultado que se obtiene del proceso de producción dentro de una empresa. Unidad: unidades producidas.
Comportamiento lineal	Si la razón entre las variaciones de ambas variables es constante, asegura que el comportamiento de la demanda es lineal.

2-FASE DE RESOLUCIÓN MATEMÁTICA

Modelo matemático de la situación (aplicado a la Economía)	**Modelo matemático independiente**	
	Lo que debe saber	**Lo que debe saber hacer**
Considerando la dependencia $q = f(p)$: $q - q_1 - m_1.(p - p_1) = 0$ **… (1);** o bien: Considerando la dependencia $p = g(q)$: $p - p_1 - m_2.(q - q_1) = 0$ **… (2);**	Dependencia entre variables. Concepto de par ordenado Conceptos de ecuación de primer grado con dos	Determinar variable independiente y variable dependiente. Lectura e identificación de las componentes del par ordenado. Encontrar la expresión simbólica algebraica a partir de los datos. Cálculo de coeficientes numéricos

	variables y parámetros	(parámetros)
$\frac{\Delta q}{\Delta p} = k = m$	**a** = $\frac{b}{c}$	
El comportamiento es lineal ⇒ la razón entre la variación de la cantidad q y la variación del precio p será constante, pudiendo designar a dicha constante como "m". En símbolos: $\frac{\Delta q}{\Delta p} = k = m$	Variación: es la diferencia entre dos valores de la variable. Razón: cociente entre dos cantidades. $a = \frac{b}{c}$ Pendiente: cociente de dos incrementos.	Realizar el cálculo (diferencia) de los valores de la variable. Encontrar el resultado del cociente de incrementos, utilizando los valores de dos pares ordenados conocidos de la función. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$
	En una función lineal la razón de incrementos o bien cociente incremental, es igual al mismo número, para cualquier par de puntos.	Considerar un par de valores de un par ordenado genérico (x;y) que representa a cualquiera de la función. $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$
	Con los datos: $\frac{y-30}{x-35} = -6 \Rightarrow$ $y - 30 = -6\,(x - 35)$	Reemplazar los valores, aplicar propiedades de la igualdad y encontrar la ecuación
	Ecuación de la recta "punto-pendiente): $y - y_1 =$ m. $(x - x_1)$,	Reemplazar los datos: m y $(x_1; y_1)$
	Ecuación de la recta "por dos puntos": $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right).\ (x - x_1)$	Reemplazar los datos: $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$
	Ecuación del tipo $y +$ m. $x = y_0$	Reemplazar los datos: m y $(x_0; y_0)$, siendo $x_0 = 0$ e y_o la "ordenada al origen"
Para el ítem b), con $q_3 = 90$ pantalones y p_3 desconocida: $\frac{q_3 - q_1}{p_3 - p_1} = -6$	Ecuación con una incógnita x_3: $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = -6$	Encontrar la incógnita x_3

3 – FASE DE INTERPRETACIÓN

En el contexto de este problema, el resolutor debe ser capaz de notar que no solamente se proporcionan datos tales como los precios unitarios y la cantidad de pantalones disponibles, sino que además se informa que existe una relación de demanda entre las magnitudes mencionadas. Por esta razón, está en condiciones de predecir o anticipar el signo del valor del parámetro "m", lo que se comprueba luego de realizar el cálculo en la fase anterior, dado que si m < 0 se trata de una situación de Demanda.

Un manejo adecuado de las unidades de cada una de las magnitudes puestas en juego en el contexto del problema, cumplen un papel significativo para la adecuada interpretación de resultados que se obtienen para modelizar la situación Tal modelización puede ser expresada como ecuación, donde $m = -\frac{6\ pant}{1\ \$/pant}$.

Desde la Economía, se interpreta que este resultado expresa que se demandarán 6 pantalones por cada peso que disminuye el precio de cada uno.

Luego de encontrar la ecuación, procederá a significar las variables "x" e "y" como precio unitario "p" y cantidad demandada "q", respectivamente, para obtener la expresión:

$$\frac{q-30}{p-35} = -6 \Rightarrow q - 30\ pant = -\frac{6\ pant}{1\ \$/pant}(p - 35\ \$/pant).$$

En el caso de establecer la relación $p = g\ (q)$, asignando a "*x*" e "y" las denominaciones *"q"* y "*p"* respectivamente, se hallará un valor del parámetro: $\mathrm{m} = -\frac{1\ \$/pant}{6\ pant}$; desde la Economía, se interpreta que por cada peso ($) que disminuye el precio unitario del producto, se demandan 6 pantalones. Luego de encontrar desde el modelo matemático, se contextualiza mediante el uso de las variables económicas involucradas, obteniendo la ecuación:

$$p - 35\ \$/pant = -\frac{1\ \$/pant}{6\ pant}.(q - 30\ pant).$$

En caso de haber hallado la expresión y + m. $x = y_{0,}$ la interpretación en el modelo económico corresponde contextualizar a las variables “x” e “y”, como “p” y “q” respectivamente, siendo y_0= = 240, se encuentra la ecuación buscada: q + 6 ($/pant)/*pant*). p = 240 *pant* con p > 0.

O vienen el caso de “x” e “y” se contextualicen como “q” y “p” respectivamente, se encontrará el valor y_0 = 40 , y la ecuación buscada es: p + $\left(\frac{1\$/pant}{6\ pant}\right)$.q = 40 $/pant.

El valor $\mathbf{p_0}$ = 40 ($/pant) representa el precio al que el consumidor no está dispuesto a comprar pantalones (la cantidad demanda es nula, $q_0 = 0$).

Del ítem b), una vez encontrado el valor de la incógnita x_3 = 25, se contextualiza diciendo que, si la demanda será de 90 pantalones, entonces el precio por unidad tendría que ser de p = $ 25.

<u>Problema N° 2</u>: Un restaurante tiene una promoción de pizzas para un determinado día de la semana. La siguiente tabla proporciona la información sobre el precio unitario y la cantidad de pizzas.

Precio ($/unidad)	Cantidad de pizzas
10	0
8	10
6	20
4	30

a) Encuentre la expresión que modeliza la situación.

b) Determine si la relación hallada refleja a la oferta o a la demanda.

1- FASE DE FORMULACIÓN:

a. Reconocimiento de la información

Se reconocen los siguientes conceptos, presentados en forma escrita en el texto:

Tabla de precios y cantidades, representado por una tabla; Tipo de producto; Precio de venta, como dato numérico, en pesos /unidad. Modelo de la situación

Presentada en una tabla de dos columnas: valores numéricos que representan Cantidad de productos, en un día para un precio determinado por unidad de producto. Variaciones de precios unitarios proporcionales a las variaciones de las cantidades. Un par de valores particular, donde dentro del contexto, si q = 0, corresponde al precio al que los consumidores no están dispuestos a pagar, en este caso p = 10 $/unid.

b. Relaciones entre componentes de la información

CONCEPTO	**RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS, dadas por la Economía (Mundo REAL)**
Demanda "D"	La ley de la demanda establece que a medida que aumenta el precio de un producto (precio unitario o precio por unidad), disminuye la cantidad de unidades del producto que los consumidores están dispuestos a comprar, e inversamente, cuando el precio unitario del producto disminuye, la cantidad que los consumidores están dispuestas a adquirir, aumenta. Se trata de una función económica y existe una relación de dependencia expresada como $q = f(p)$
Precio de venta "p"	Es el dinero que debe abonar el consumidor para comprar un producto. Unidades: Unidad monetaria / unidad
Producto "q"	En Economía, un producto se define como el resultado que se obtiene del proceso de producción dentro de una empresa. Unidades: cantidad de artículos producidos.
Comportamiento lineal	Si la razón entre las variaciones de ambas variables es constante, asegura que el comportamiento de la demanda es lineal.

2- FASE DE RESOLUCIÓN MATEMÁTICA

Modelo matemático de la situación (aplicado a la Economía)	**Modelo matemático independiente**

	Lo que debe saber	Lo que debe saber hacer
Considerando la dependencia $q = f\ (p)$: $q - q_1 - m_1. (p - p_1) = 0$ **….(1);** o bien: Considerando la dependencia $p = g\ (q)$: $p - p_1 - m_2. (q - q_1) = 0$ **….(2)**; o bien: D: $q = -\ m.\ p + q_0$, ó D: $p = -\ m.\ q + p_0$	Dependencia entre variables. Concepto de par ordenado Conceptos de ecuación de primer grado con dos variables y parámetros	Determinar variable independiente y variable dependiente. Lectura e identificación de las componentes del par ordenado. Encontrar la expresión simbólica algebraica a partir de los datos. Cálculo de coeficientes numéricos (parámetros)
$\frac{\Delta q}{\Delta p} = k = m$	**a =** $\frac{b}{c}$	
La razón entre la variación de la cantidad q y la variación del precio p es constante ⇒ el comportamiento es lineal. En símbolos: $\frac{\Delta q}{\Delta p} = k = m$	Variación: es la diferencia entre dos valores Razón: cociente entre dos cantidades. $a = \frac{b}{c}$	Realizar el cálculo (diferencia) de las variaciones de las dos variables. Encontrar el resultado del cociente de incrementos, utilizando los valores de dos pares ordenados conocidos de la función. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$
Pares ordenados: (10; 0); (8; 10), etc.	$(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$; etc.	Considerar segunda componente del par ordenado en función a la primera componente.
	En una función lineal la razón de incrementos o bien cociente incremental, es igual al mismo número, para cualquier par de puntos: $\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} = \frac{\Delta q_3}{\Delta p_3} = .= k$	Considerar un par de valores de un par ordenado genérico (x; y) que representa a cualquiera de la función. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = -5$

	Con los datos: $\frac{y-10}{x-8} = -5 \Rightarrow$ $\Rightarrow y - 10 = -5\,(x-8)$	Reemplazar los valores, aplicar propiedades de la igualdad y encontrar la ecuación
q = -5p + 50	Ecuación explícita de la "Función afín": $y = m.\,x + y_0$	Reemplazar los datos: m y $(x_0;\, y_0)$, siendo $x_0 = 0$ e y_o la "ordenada al origen"

3 – FASE DE INTERPRETACIÓN:

Una vez hallado el modelo matemático, se contextualiza dando a las variables x e y las denominaciones p y q respectivamente: $q - 10 = -5(p-8)$, o bien: $q + 5.p = 50$, ó $q = -5.p + 50$

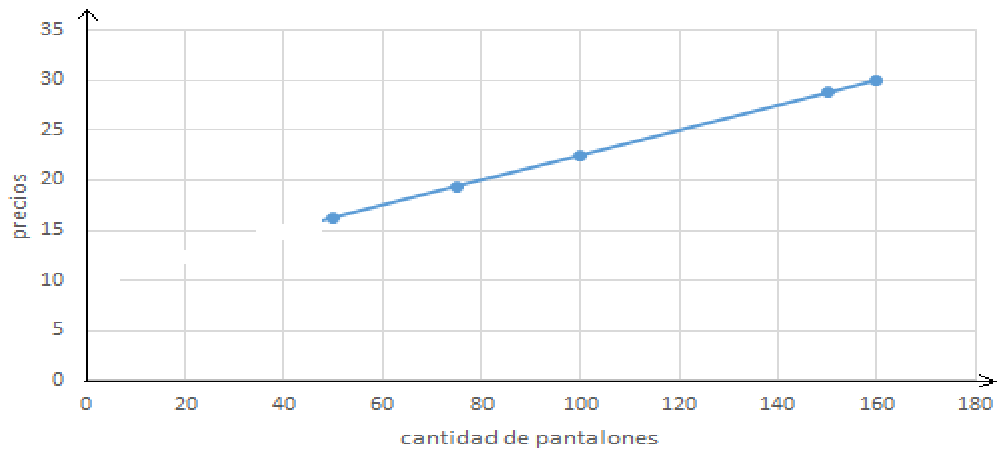
También, se puede interpretar que x e y corresponden a q y p, respectivamente, suponiendo una relación $p = g\ (q)$. En ese caso, se tendrá: $m = \frac{-1\$/unid}{5\,unid}$. Se interpreta que a medida que disminuye el precio unitario de pizzas, la cantidad que los consumidores están dispuestos a comprar aumenta, en 5 pizzas por cada $ que disminuye el precio unitario.

Una vez obtenido el valor del cociente, puede modelizar la situación en el mundo económico, utilizando la ecuación explícita de la función inversa D: $p = m.\,q + p_0$. Quedando:

$$D: p = \frac{-1\$/unid}{5\,unid}\,.\,q + 10\ \$/unid$$

Para dar respuesta al ítem b). al calcular el valor del parámetro "m" y éste tener signo negativo, desde la Economía, se interpreta que la relación cantidad - precio responde a la ley de Demanda.

<u>Problema N° 3</u>: Dos amigas realizan un estudio de mercado y observaron que los precios que pagan los consumidores varían según los meses del año, es decir que encontraron que, en verano, difícilmente el público compre pantalones que cuesten más de $20. En cambio, en invierno están dispuestos a pagar hasta $30. Con estos datos, realizaron el siguiente gráfico, pensando en la cantidad de pantalones que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellos en cada época.



Hallar la forma algebraica de la función representada

1 - FASE DE FORMULACIÓN:

a) Reconocimiento de la información

Se reconocen los siguientes conceptos, presentados en forma escrita en el texto del enunciado o en el gráfico:

Estudio de mercado; Precios que pagan, como dato numérico y leído en el gráfico, en pesos ($); Consumidores, Compra, Cantidad de artículos a producir (como dato específico, pantalones); Precio de venta, como dato numérico, en pesos ($); Lectura del gráfico: Comportamiento lineal, segmento de recta con pendiente positiva, sistema de ejes cartesianos, abscisas y ordenadas, Coordenadas, primer cuadrante. Variables independiente y dependiente. Forma algebraica de la función. Ecuación explícita de la función afín. Función creciente

b) Relaciones entre componentes de la información

CONCEPTO	RELACIÓN ENTRE LOS CONCEPTOS
Consumidores	El consumidor es una persona u organización que consume bienes o servicios, que los productores o proveedores ponen a su disposición en el mercado y que sirven para satisfacer algún tipo de necesidad.
Precios que pagan	El precio a pagar es la cantidad de dinero que el consumidor

p	entrega por la adquisición de un bien o servicio.
Compra	La compra es la acción mediante la que un agente (el comprador), adquiere un bien o un servicio de otro agente (el vendedor), a cambio de una contraprestación monetaria o en especie.
Estudio de mercado	El estudio de mercado es una investigación utilizada por diversos ramos de la industria para garantizar la toma de decisiones y entender mejor el panorama comercial al que se enfrentan al momento de realizar sus operaciones.
Precio de venta ***p***	Es el dinero que debe abonar el consumidor para comprar un producto. Unidades: Unidad monetaria / unidad
Cantidad de artículos a producir ***q***	La cantidad de artículos a producir se define como la actividad que aprovecha los recursos y las materias primas para poder elaborar o fabricar bienes y servicios, que serán utilizados para satisfacer una necesidad.
Oferta “O”	Cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a vender a los consumidores bajo determinadas condiciones de mercado. Cuando estas se caracterizan por el precio en conjunto de todos los "pares de precios" de mercado se forma la denominada "curva de la Oferta". Se trata de una función económica y existe una relación de dependencia expresada como $q = f(p)$
Comportamiento lineal $\frac{\Delta p}{\Delta q}$	Si la razón entre las variaciones de ambas variables es constante, asegura que el comportamiento de la oferta es lineal.

3- FASE DE RESOLUCIÓN MATEMÁTICA

Modelo matemático de la situación (aplicado a la Economía)	**Modelo matemático independiente**	
	Lo que debe saber	**Lo que debe saber hacer**
Función Oferta: Considerando la dependencia $q = f\ (p)$: **O: q = m. p + q₀ (1);** o bien: Considerando la dependencia $p = g\ (q)$:	Dependencia entre variables. Concepto de coordenadas de puntos sobre el plano.	Determinar variable independiente y variable dependiente. Lectura e identificación de las coordenadas en el plano cartesiano. Leer e interpretar la

O: $p = m.\ q + p_0$ …. (2);	Lectura e interpretación del gráfico de la función. Conceptos de función lineal y función afín: la función afín es la más simple dentro de las funciones polinómicas. Forma algebraica de una función afín: *y = f(x) = a. x + b* Función creciente: Para todo par de puntos de la función cuyas coordenadas son (x_1; y_1) y (x_2; y_2); se debe cumplir que, si $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$.	información del gráfico. Encontrar la expresión simbólica de la función lineal y afín a partir de los datos. Cálculo de coeficientes numéricos (parámetros)
$\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = m$	**a** = $\frac{b}{c}$	
Como desde el gráfico se ve que el comportamiento es lineal ⇒ la razón entre la variación del precio p y de la cantidad q, será constante, pudiendo designar a dicha constante como "m".	Variación: es la diferencia entre dos valores Razón: cociente entre dos cantidades. $a = \frac{b}{c}$ Cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Pendiente de la recta es el cociente entre las variaciones de la variable dependiente "y" y de la variable de la variable independiente "x": $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = m, y corresponde al valor de la tangente geométrica del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas "x".	Realizar el cálculo (diferencia) de las variaciones de las dos variables. Efectuar la operación división. Encontrar el resultado del cociente de incrementos, utilizando coordenadas de dos puntos del segmento de recta, a partir del gráfico; por ejemplo, (120; 25) y (160; 30): $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \frac{1}{8}$

	Cuando m > 0, el ángulo es agudo, la recta posee inclinación, creciente hacia el primer cuadrante; si m < 0, el ángulo es obtuso, la recta posee inclinación, decreciente hacia el tercer cuadrante; si m = 0, el ángulo es nulo, la recta es paralela al eje de abscisas.	
	Segmento de recta con pendiente positiva es una parte de la recta, y está delimitado por dos puntos, de manera que tiene un inicio y un final. La recta es la representación gráfica de una función lineal, en un sistema de ejes cartesianos. Si la pendiente es positiva se cumple para todo par de puntos que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > \mathbf{0}$. La pendiente positiva de la recta implica la función lineal creciente. Sistema de ejes cartesianos: Son dos rectas perpendiculares que limitan al plano (espacio) en 4 cuadrantes (8 octantes). En el plano: los ejes cartesianos representan al conjunto de los números reales; se denominan abscisas (horizontal) y ordenadas (vertical). Para ubicar un punto se necesitan sus coordenadas, tomando un valor de abscisas y un	Considerar un punto, por ejemplo, de coordenadas (120; 25) y un punto genérico de coordenadas (x; y) y reemplazar m: $\frac{y-25}{x-120} = m$

	valor de ordenada. A cada punto del plano le corresponde un par ordenado siendo sus componentes las coordenadas cartesianas del punto. Primer cuadrante es la parte del plano que corresponde a los valores $x \geq 0$ e $y \geq 0$.	
	Con los datos: $\frac{y-25}{x-130} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ $\mathbf{y = \frac{1}{8}.\, x + 10}$	Reemplazar los valores, aplicar propiedades de la igualdad y encontrar la expresión simbólica.

3 – FASE DE INTERPRETACIÓN

En ésta fase, se contextualizan los resultados hallados. En el problema se aclara que la cantidad de pantalones que las productoras estarían dispuestas a producir es según el precio que se pague por ellos en cada época, por lo cual se interpreta que "La cantidad de pantalones a producir *depende* del precio que se pague por los mismos". En el caso del parámetro m, el valor $m = \frac{1\$/pant}{8\ pant}$ corresponde a decir que, por cada $ por unidad de aumento del precio, se ofertan 8 pantalones más.

El signo positivo del parámetro confirma que la situación responde a la función económica de la Oferta. Queda a criterio del resolutor expresar el parámetro en su forma decimal m = 0,125.

Para hallar la función, se contextualiza la expresión $y = \frac{1}{8}.\ x + 10$, haciendo x = q e y = p, obteniendo así: O: $p = \frac{1}{8}.\ q + 10$.

ANEXO III

Protocolos de los análisis de las Actividades Matemáticas en Libros de Textos

REFERENCIAS: 1) Configuración epist. conjuntista, 2) Configuración epist. Analítica, 3) Configuración epist. Gráfica, 4) Configuración epist. Tabular

Tabla I

Libro de texto Matemáticas Aplicadas a los Negocios *(Código T1)*

OBJETOS PRIMARIOS	ACTIVIDADES MATEMÁTICAS
LENGUAJE 1)Notaciones conjuntistas 2) Simbólico – literal 3) Gráfico 4) Numérico	[1] Recta real, números reales, correspondencia biunívoca o aplicación biyectiva, lenguaje gráfico (dibujo de la recta). Línea recta, segmento de la recta. Se “cruzan”. [2] <u>Gráfico (págs. 213 – 216)</u>: rectas que se cortan formando ángulos agudos, obtusos y rectos (90 grados). Sistema de ejes coordenados rectangulares, sistema rectangular de coordenadas cartesianas. Gráficos con ejes rectangulares, abscisas, ordenadas, plano, cuadrantes. Pares ordenados. Inclinación. Pendiente (letra “m”). Ordenada al origen. [3] <u>Pág. 228</u>: ecuaciones de la recta. Modelo lineal. Forma ordinaria. Forma general. Forma punto – pendiente. Forma punto – punto. [4] <u>Expresión simbólica (pág. 217)</u>: Y = m X + b En general: Ax + By + C = 0 (A, B y C coeficientes). F(x, y) = 0, m X – Y + b = 0. Utiliza mayúsculas para las variables y minúscula para los parámetros. [5] <u>Gráfico</u>: Recta en forma ordinaria.

	Recta ascendente. Recta descendente. (Imagen o dibujo que lo válida).
SITUACIONES-PROBLEMAS 1) Descripción general de cualquier tipo de relación. 2) Estudio analítico de definiciones entre variables 3) Estudio de curvas 4) Predicción de cantidades	[6] Pág. 217: Propone ejercicios con la ecuación general de la recta y solicita que se grafique en un sistema de ejes coordenados cartesianos utilizando las coordenadas de un punto. Luego pide analizar si la pendiente de la recta es positiva o negativa y su valor.
CONCEPTOS –DEFINICIÓN 1) Dominio. Rango. Tipos de funciones 2) Variables y fórmulas 3) Coordenadas cartesianas. Curvas 4)Magnitudes y cantidades	[7] Pág. 213: La inclinación de la recta con respecto al eje “x” se conoce con el nombre de pendiente y se representa con la letra “m”. [8] Pág. 214: El punto donde la recta corta al eje “Y” se llama ordenada al origen y se denota con la letra “b”. [9] Pág. 216: En un sistema cartesiano, si una línea recta se expresa mediante una ecuación empleando la pendiente y la ordenada al origen, se dice que la recta se expresa en forma ordinaria. [10] Pág. 217: Si la ecuación de la forma ordinaria se iguala a cero, se obtiene la forma general de la recta.
PROPIEDADES - PROPOSICIONES 1) Inyectiva. Biyectiva 2) Derivabilidad. Continuidad. 3) Suavidad. Conexión. 4)Variación. Regularidad	[11] Pág. 212: La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional o línea recta, la cual contiene todos los números reales, ya sea mediante una correspondencia biunívoca o una aplicación biyectiva; se extiende sin límite en dos sentidos, no comenzando ni terminando en un punto específico. Se la emplea para representar, gráficamente, los números como puntos especialmente marcados. [12] Pág. 216: Todas las líneas rectas se pueden expresar en forma matemática mediante una ecuación. Para definir la ecuación se emplean la pendiente y la ordenada al origen. Cualquier línea recta puede expresarse en cuatro formas: ordinaria, general, punto – pendiente y punto – punto.
ACCIONES -	[13] Pág. 212 – Gráfico 6.1: En la recta numérica o recta graduada entera, representa algunos números

PROCEDIMIENTOS 1) Operaciones conjuntistas 2) Manipulación algebraica. Cálculo de límites 3) Graficar 4)Interpretar. Extrapolar datos.	enteros en la que éstos se encuentran ordenados y separados con la misma distancia. [14] Pág. 218: Escribe la ecuación general de la recta y procede a despejar la variable “y”. Para ello realiza operaciones algebraicas y halla la ecuación ordinaria correspondiente señalando el valor de la pendiente y de la ordenada al origen.
ARGUMENTOS 1) Deductivos. 2) Inducción matemática 3) Visuales ostensivas 4)Inducción empírica	

Fuente: Rodríguez Franco, J., Pierdant Rodríguez A. I. y Rodríguez Jiménez, E. C., (2018)

Tabla II

Libro de texto Matemáticas Básicas para Administradores *(Código T2)*

OBJETOS PRIMARIOS	ACTIVIDADES-MATEMÁTICAS
LENGUAJE 1) Notaciones conjuntistas 2) Simbólico – literal 3) Gráfico 4) Numérico	[15] Unidad 4 - Pág. 200: Funciones. Regla de correspondencia. Elemento de entrada. Conjunto. Elemento de salida. Dominio. Rango. Variable. Imagen. Preimagen. Pares ordenados. Conjunto de valores. Eje horizontal. Eje vertical. Intervalo. Función creciente. Función decreciente. Función lineal afín. Rectas. Pendiente. Ordenada al origen. [16] Expresión simbólica (pág. 252): Entrada “x” → Regla “f” → Salida “y” $y = f(x)$ $f(x) = mx + b$ [17] Pág. 250 : Lenguaje gráfico: Diagramas de Venn.
SITUACIONES--PROBLEMAS 1) Descripción general de cualquier tipo de relación. 2) Estudio analítico de definiciones entre variables 3) Estudio de curvas 4) Predicción de cantidades	[18] Ejemplo 1: Da los elementos de los conjuntos A y B y designa como “f” como regla de correspondencia. [19] Ejemplo 2: El dato es un conjunto de pares ordenados “g”. Solicita que se complete los elementos del dominio y el rango de la función, pero aclara que no puede hallar la regla de correspondencia de la función. [20] Ejemplo 4: Da la regla de definición de la función “f” para un determinado intervalo real. Solicita determinar dominio, rango, la imagen y la preimagen de algunos elementos del dominio. [21] Da una serie de reglas de correspondencia y solicita el análisis completo de las mismas.
CONCEPTOS –	[22] Una función “f” es una regla en la que cada elemento de entrada “x” de un conjunto se le asigna un único elemento de salida “y”. Al conjunto de elementos de entrada se le denomina dominio de “f” y se denota dom(f).

DEFINICIÓN 1) Dominio. Rango. Tipos de funciones 2) Variables y fórmulas 3) Coordenadas cartesianas. Curvas 4) Magnitudes y cantidades	Al conjunto de elementos de salida, rango de “f”; se denota ran(f). [23] Función con dominio implícito: cuando no se especifica el dominio de una función “f”, entonces se considera que el dominio es el conjunto de valores de la variable independiente para el cual la función está definida. [24] La gráfica de una función “f” es la gráfica de la ecuación y = f(x) para todo “x” en el dominio de “f”. [25] Una función “f” es creciente en un intervalo “I”, si para cada par de valores a;b de I, donde a < b, entonces f(a) < f(b). Una función “f” es decreciente en un intervalo “I”, si para cada par de valores a;b de I, donde a < b, entonces f(a) > f(b). [26] Las funciones lineales son aquellas cuya regla de correspondencia puede escribirse de la forma f(x) = mx + b, donde “m” y “b” son constantes, dom(f) = R, excepto cuando m = a. Las gráficas de estas funciones son rectas en las que “m” es la pendiente y “b” es la ordenada del punto (0;b) por donde la gráfica interseca al eje Y.
PROPIEDADES - PROPOSICIONES 1) Inyectiva. Biyectiva 2) Derivabilidad. Continuidad. 3) Suavidad. Conexión. 4) Variación. Regularidad	[27] El valor de la variable “y” depende del valor de la variable “x” mediante la regla “f”. Al valor de f(x) se le llama imagen de “x”, y a “x”, preimagen de f(x). Una función real de variable real es aquella cuyos valores de entrada y de salida son números reales. [28] Se localiza el dominio de “f” en el eje horizontal y su rango en el eje vertical. Si la gráfica asciende, se dice que es creciente (mirando de izquierda a derecha) y si desciende es decreciente.
ACCIONES - PROCEDIMIENTOS 1) Operaciones conjuntistas 2) Manipulación algebraica. Cálculo de límites 3) Graficar	[29] <u>Ejemplo 1</u>: Representa gráficamente, mediante diagramas de Venn, la correspondencia entre los elementos de los conjuntos A y B, establece el dominio y el conjunto imagen de “f”.

4)Interpretar. Extrapolar datos.	
ARGUMENTOS 1) Deductivos. 2) Inducción matemática 3) Visuales ostensivas 4)Inducción empírica	[30] Ejemplo 1: Deduce que la regla de correspondencia es $f(x) = x^2$ de acuerdo a la correspondencia establecida en la relación conjuntista entre los elementos del conjunto A y del conjunto B.

Fuente: Curo Cubas, A. y Martínez Miraval, M., (2016)

Tabla III

Libro de texto Matemáticas. Conceptos previos al Cálculo. Aplicaciones a Ingeniería y Ciencias Económicas *(Código T3)*

OBJETOS PRIMARIOS	ACTIVIDADES MATEMÁTICAS
LENGUAJE 1)Notaciones conjuntistas 2) Simbólico – literal 3) Gráfico 4) Numérico	[31] Pág. 434 - 466: Geometría analítica bidimensional. Números reales. Conjunto de puntos definidos por expresiones en dos variables. Recta real. [32] Lenguaje gráfico: Pares ordenados. Puntos del plano. Mapa o plano de una ciudad. Plano cartesiano. Par de rectas numéricas. Rectas que se cortan (perpendicular). Eje de abscisas. Eje de ordenadas. Origen. Coordenadas cartesianas. Cuadrantes. Proyección de las coordenadas de un punto en los ejes cartesianos. Cuadrantes. Recta vertical. Recta horizontal. Triángulo rectángulo. Vértices. Catetos. Distancias. Dibujo de la recta. Puntos colineales. Pendiente (letra “m”). Inclinación de la recta. Intersecto [33] Expresión simbólico – literal: Teorema de Pitágoras. Ecuaciones de la recta. $\|x_1 - x_2\|$ y $\|y_1 - y_2\|$ (catetos) $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y}{x} = \frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x}$ con $x_1 \neq x_2$ i) $p(x_1 , y_1)$: punto por donde pasa la recta. ii) m: pendiente de la recta. y = m x + b: forma estándar o común de la recta ax + by + c = 0: ecuación general o implícita de la recta con “a” y “b” constantes y distintas de cero. Ecuación explícita de la recta. Variable dependiente. Variable independiente. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ donde $m = -\frac{a}{b}$ y el intersecto con el eje “y” es $b = -\frac{c}{b}$

	[34] Numérico: Signo positivo. Signo negativo.
SITUACIONES-PROBLEMAS 1) Descripción general de cualquier tipo de relación. 2) Estudio analítico de definiciones entre variables 3) Estudio de curvas 4) Predicción de cantidades	[35] Pág. 435: Ubicar los puntos (1;3), (5;0), (-2;2), (-3; -2) y (2; 4) en el plano cartesiano. [36] Pág. 440: Demuestre que los tres puntos siguientes son colineales, es decir, están sobre la misma recta: A(-3;2), B(5;2) y C(9;4) [37] Pág. 440: Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2;4) y (1;6). El siguiente ejemplo es similar [38] Pág. 449: Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 2 y pasa por (2; 4) [39] Pág. 450: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2;4) y (7;6). [40] Pág. 452: Halle la pendiente y el intersecto en la recta 2x + 3y – 1 = 0. [41] Pág. 453: Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1(4;6) y P_2(1;3). Proporciona la gráfica de la misma.
CONCEPTOS – DEFINICIÓN 1) Dominio. Rango. Tipos de funciones 2) Variables y fórmulas 3) Coordenadas cartesianas. Curvas 4)Magnitudes y cantidades	[42] Pág. 434: La representación de pares ordenados de números reales por medio de puntos del plano, así como el estudio de los conjuntos de esos puntos definidos por medio de expresiones en dos variables, recibe el nombre de “geometría analítica bidimensional”. [43] Pág. 435: Cuando se toman rectas que se cortan y además son perpendiculares, al par ordenado se lo denomina coordenadas cartesianas del punto y a las rectas se les llama ejes. [44] Pág. 435: El punto de corte de los ejes se lama “origen”. [45] Pág. 435: Los ejes coordenados dividen al plano “xy” en cuatro regiones llamadas “cuadrantes” y se definen I, II, III y IV (primer cuadrante, segundo cuadrante y así sucesivamente). [46] Pág. 436: La distancia entre dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2; y_2) está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

	[47] <u>Pág. 444</u>: La pendiente “m” de una recta es el incremento en “y” dividido por el incremento en “x”. [48] <u>Pág. 451</u>: A la recta expresada en forma general también se la conoce con el nombre de ecuación implícita, ya que la variable dependiente “y” no está expresada en términos de “x”. Para llevarla a la forma estándar y así conocer la pendiente de la recta y el punto de corte al eje “y”, se debe despejar la variable “y”. [49] <u>Pág. 452</u>: Propone otro ejemplo donde los datos son las coordenadas de un punto y la pendiente: P (-3; 5) y m = $-\frac{3}{4}$
PROPIEDADES - PROPOSICIONES 1) Inyectiva. Biyectiva 2) Derivabilidad. Continuidad. 3) Suavidad. Conexión. 4)Variación. Regularidad	[50] <u>Pág. 434</u>: Si escogemos un par de rectas numéricas que se cortan, podemos corresponder a cada punto del plano un par ordenado de números reales que nos permitan localizar un punto. [51] <u>Pág. 435</u>: Eje de las “x” o eje de las abscisas. Eje de las “y” o eje de las ordenadas. [52] <u>Pág. 435</u>: Las coordenadas de un punto tienen signo positivo o negativo, dependiendo de la ubicación del cuadrante en que se encuentre.
ACCIONES - PROCEDIMIENTOS 1) Operaciones conjuntistas 2) Manipulación algebraica. Cálculo de límites 3) Graficar 4)Interpretar. Extrapolar datos.	[53] <u>Pág. 436</u>: Recurre a la gráfica del plano cartesiano para ubicar los puntos en sus respectivos cuadrantes. [54] <u>Pág. 437</u>: Para hallar la expresión de la distancia entre dos puntos, ubica en el plano cartesiano a dos puntos no colineales y procede a realizar las proyecciones de las coordenadas de los mismos sobre los ejes coordenados formándose así un triángulo rectángulo para determinar gráficamente la distancia entre los mismos en forma analítica. [55] <u>Pág. 440 - 441</u>: Aplica la definición de distancia entre dos puntos y realiza los cálculos algebraicos al utilizar la fórmula hallada llegando a la conclusión de que $\lvert AB\rvert + \lvert BC\rvert = \lvert AC\rvert$. En el sistema cartesiano ubica los puntos y los une con una línea recta. [56] <u>Pág. 445</u>: Aplica la fórmula de la pendiente, opera algebraicamente y halla que m = 2. Luego, representa gráficamente la recta en un sistema de ejes cartesianos.

	[57] Pág. 449: Para hallar la ecuación de la recta estándar o común con los datos proporcionados, reemplaza los mismos en dicha ecuación: 4 = 2 .2 + b. Luego opera algebraicamente y halla b = 0. Así, y = 2x [58] Pág. 450: Para comenzar, calcula la pendiente reemplazando en la fórmula las coordenadas de los puntos dados. Mediante operaciones algebraicas llega a que m = $\frac{2}{5}$. Para hallar la ecuación de la recta, reemplaza las variables “x” e “y” por las coordenadas de uno de los puntos dados, y operando algebraicamente obtiene b = $\frac{16}{5}$. Rearmando la ecuación de la recta queda y = $\frac{2}{5}$ x + $\frac{16}{5}$ [59] Pág. 452: Despeja la variable “y” de la ecuación dada y obtiene la forma estándar y = $-\frac{2}{3}$ x + $\frac{1}{3}$ donde m = $-\frac{2}{3}$ y b = $\frac{1}{3}$ [60] Pág. 453: Utiliza la ecuación $y - y_1 = m (x - x_1)$ en la que reemplaza la pendiente y las coordenadas del punto y halla la fórmula o ecuación de la recta general 3x + 4y – 11 = 0 [61] Pág. 453: Utiliza la fórmula de la pendiente y halla m = $\frac{3}{5}$. Seguidamente, mediante la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente, y tomando el punto P_1, obtiene la forma general de la recta: 3x – 5y + 18 = 0. Valida la misma reemplazando las variables por las coordenadas de los dos puntos dados.
ARGUMENTOS 1) Deductivos. 2) Inducción matemática 3) Visuales ostensivas 4)Inducción empírica	[62] Pág. 445: Para hallar la pendiente de una recta es imprescindible tener dos coordenadas; de esta forma, podemos determinar el cambio de “y” dividido sobre el cambio de “x”. [63] Pág. 449: Para encontrar la ecuación de la recta sólo basta con tener la pendiente y el punto por donde pasa la recta.

Fuente: Soler Fajardo, F., Rojas Cortés, L. y Rojas Cárdenas, L. (2012)

ANEXO IV

Protocolos de los análisis de las Actividades Aplicadas A La Economía en Libros de Textos

TABLA I	LIBRO 1: Rodríguez Franco, J., Pierdant Rodríguez, A. I. y Rodríguez Jiménez, E. C. (2018). Matemáticas aplicadas a los negocios. 1. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Patria. Recuperado de https://elibro.net/es/ereader/elibrounam/40544?page=10.
OBJETOS PRIMARIOS	ACTIVIDADES APLICADAS A LA ECONOMÍA
LENGUAJE	[64] 6.3- pág. 239: precio de venta. Producto de mercado. Oferta. Función oferta. Demanda. Ecuación de oferta y ecuación de demanda. Cantidad de productos. Precio. [65] Notación para la oferta (pág. 226): Fo = p.X + p_o, donde p_o es el precio de venta mínimo que el productor desea para el producto en el mercado o precio de partida; p es el precio de venta unitario; X es la cantidad de productos a elaborar (a ofrecer); p.X es la venta lograda. [66] Pág. 228: Función Demanda. Cantidad de unidades de un producto o servicio. Consumidores. Pagar o adquirir el bien o servicio. Función con pendiente negativa. Precio del producto muy alto. [67] Notación para la demanda)pág. 228): Fd = -p.X + POp_o , donde POp_o es el nivel de ventas no alcanzado por precio por unidad excesivo del producto; p es el precio por unidad; X es la cantidad de productos (a comprar).
SITUACIONES-PROBLEMAS	[68] Oferta: Propone dos problemas similares a los ejemplos resueltos y uno donde da la fórmula de la función oferta para representarla gráficamente. [69] Demanda: Propone dos problemas similares a los ejemplos resueltos y uno donde da la fórmula de la función demanda para representarla gráficamente.
CONCEPTOS –	[70] Pág. 226: La función de oferta (Fo) tiene como objetivo determinar la cantidad de productos o servicios que

DEFINICIONES	un productor, fabricante o prestador de servicios está dispuesto a producir para un mercado específico con base en un precio por unidad de dicho producto o servicio. [71] Pág. 228: La función de demanda (Fd) tiene como objetivo determinar la cantidad de unidades X de un producto o servicio, que se vende a un precio (p), al que están dispuestos los consumidores a pagar y adquirir el bien o servicio en ese mercado.
PROPIEDADES - PROPOSICIONES	[72] Pág. 215: La recta representa modelos de procedimientos que son de gran utilidad en la Administración. Permite observar el comportamiento de la oferta de un producto – la promoción que hace una empresa sobre un celular, una computadora, un refresco, etc.- en el mercado, así como el comportamiento de su demanda, es decir, el comportamiento que se tiene como consumidor de esos productos en ese mercado. [73] Pág. 216: En la Administración, sólo se trabaja con valores numéricos positivos (reales positivos), o sea que únicamente se empleará el cuadrante I del sistema de coordenadas cartesianas para obtener las gráficas de rectas y los modelos lineales que pueden construirse con esos valores.
ACCIONES - PROCEDIMIENTOS	[74] Ejemplo 1: Enuncia el problema de oferta, escribe la fórmula de la función oferta, grafica la situación en el primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos, ubicando en el eje de las abscisas el número de productos (cantidad ofrecida) y en el eje de las ordenadas representa las ventas en pesos. El ejemplo 2 es similar. [75] Ejemplo 1: Enuncia el problema de demanda, escribe la fórmula de la función demanda, grafica la situación en el primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos, ubicando en el eje de las abscisas el número de productos (cantidad demandada) y en el eje de las ordenadas representa el valor de las compras en pesos. El ejemplo 2 es similar.
ARGUMENTOS	[76] Ejemplo 1 (pág. 226): Explica el significado de cada punto representado en términos económicos. Dichos puntos están unidos por una semirrecta con origen en el punto (0; 5). [77] Ejemplo 1 (pág. 227): Explica el significado de cada punto representado en términos económicos. Dichos puntos están unidos por una semirrecta con origen en el punto (0; 100).

Fuente: Rodríguez Franco, J., Pierdant Rodríguez A. I. y Rodríguez Jiménez, E. C., (2018)

TABLA II	Libro 2: Curo Cubas, Agustín; Martínez Miraval, Mihály. Matemáticas Básicas Para Administradores. Tercera Edición E-Book 2016. Ed. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas- Perú
OBJETOS PRIMARIOS	ACTIVIDADES APLICADAS A LA ECONOMÍA
LENGUAJE	[78] (pág. 307 – 313): Conceptos económicos básicos. Oferta y demanda lineales. Mercado. Equilibrio de mercado. Relación. Precio. Cantidad demandada de un bien. Consumidores. Cantidad ofrecida. Productores. Cantidad de equilibrio. Precio de equilibrio. Dominio. Función de demanda. Función de oferta. Exceso de oferta. Exceso de demanda. Pendiente. Comportamiento lineal. Escala adecuada. [79] Notación para la demanda: p = f(q) = b – m.q [80] Notación para la demanda: p = f(q) = b + m.q [81] Notación para la pendiente: $m = \frac{\Delta p}{\Delta q}$ [82] Gráfico: segmento de recta.
SITUACIONES-PROBLEMAS	[83] (pág. 252): La cantidad demandada “q” de un producto está relacionada con su precio “p”, es decir, la cantidad demandada de un artículo depende del precio unitario del mismo. ¿Qué características debe tener la regla de correspondencia para que se refleje este comportamiento? [84] Presenta un problema donde los datos son la función demanda y el precio de un producto. Solicita hallar la cantidad demandada. [85] Da un ejemplo donde presenta la función oferta y dos valores del precio para hallar las respectivas cantidades ofrecidas. [86] Problema 3: Da como dato una función y aclara que el precio está en dólares, y pregunta si se trata de una función de oferta o de demanda. Solicita que se la grafique y que se identifique el dominio de la misma (para el lector). [87] Problema 4: Proporciona como dato las funciones de oferta y de demanda. Una de las preguntas que realiza

	es si a un determinado precio "p" existe exceso de oferta o de demanda y el valor del mismo (para el lector) [88] Problema 5- (pág. 310): proporciona como dato el precio por docena de un producto que se ofrece (p = \$360) y además dice que si se ofrecen q = 16 unidades del mismo producto, el precio sería de \$38. Solicita que se halle la función oferta, que tiene comportamiento lineal, y pregunta a partir de qué precio se ofrecen los productos en el mercado. También pide que se interprete económicamente el valor de la pendiente. [89] (pág. 314): En los ejercicios propuestos para el lector, los datos son: tabla de valores y el gráfico de una de las funciones, para encontrar la otra función. Además recuerda que se utilice la escala adecuada.
CONCEPTOS – DEFINICIONES	[90] Demanda es la relación entre el precio y la cantidad demandada de un bien determinado en un periodo dado. A mayor precio del artículo, los consumidores demandarán menos unidades. [91] Oferta es la relación entre el precio y la cantidad ofrecida de un bien determinado en un periodo dado. A mayor precio del artículo, los productores ofrecerán más unidades.
PROPIEDADES - PROPOSICIONES	
ACCIONES - PROCEDIMIENTOS	[92] Ejemplo de demanda: Si p = 20 soles, halla el valor de q = 15 utilizando la función de demanda, y explica que se demandarán 15 unidades si cada una de las mismas tiene un precio de 20 soles. Si el precio es de 30 soles, se demandarán solamente 10 unidades. [93] Ejemplo de oferta: Si p = 40 soles, halla el valor de q = 5 utilizando la función de oferta, y explica que ofrecerán 5 unidades si cada una de las mismas tiene un precio de 40 soles. Si el precio es de 50 soles, se ofrecerán 10 unidades.
ARGUMENTOS	

Fuente: Curo Cubas, A. y Martínez Miraval, M., (2016)

TABLA III	LIBRO 3: Soler Fajardo, F. Rojas Cortés, L. y Rojas Cárdenas, L. E. (2012). Matemáticas conceptos previos al cálculo: aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas. Bogotá, Ecoe Ediciones. Recuperado de https://elibro.net/es/ereader/elibrounam/122456?page=14.
OBJETOS PRIMARIOS	ACTIVIDADES APLICADAS A LA ECONOMÍA
LENGUAJE	[94] Pág. 461: Precio unitario. Producto. Número de unidades. Reglas del mercado. Oferta. Ecuación de la oferta. Demanda. Ecuación de demanda. Relaciones lineales. Exceso de demanda. Exceso de oferta. Coeficientes. Precio máximo. Precio mínimo. [95] Notación Simbólica – Pág. 461: Ecuación de la oferta: $p = m_1.x + b_1$, donde $m_1 > 0$. [96] Ecuación de la demanda: $p = m_2.x + b_2$, donde $m_2 < 0$. [97] Expresión gráfica: Plano. Comportamiento lineal.
SITUACIONES-PROBLEMAS	[98] Ejemplo 1 - Pág. 462: Dadas las ecuaciones $p + q = 100$ y $p – q = 20$, a) Identifique cuál corresponde a la oferta y cuál a la demanda; explique qué significan los coeficientes. (b) Explique para $p = 40$ y $p = 80$ qué sucede. Represente en el mismo plano las ecuaciones. [99] Ejemplo 2 - Pág. 465 - 466: Supone un comportamiento lineal de la demanda y establece que a \$5000 (precio unitario) se demandan 4000 unidades y por cada \$1000 que se rebaja el precio, la demanda crece en 500 unidades. Solicita hallar la ecuación de la demanda, el precio máximo que se está dispuesto a pagar, la cantidad demandada a un precio unitario de \$4500, y el precio unitario por la demanda de 5250 unidades. [100] En los ejercicios 9 y 10 proporciona las ecuaciones de la oferta y la demanda de manera similar al ejemplo 1 y deja la resolución al lector.
CONCEPTOS – DEFINICIONES	[101] Pág. 461: Si el precio “p” aumenta, la oferta tiende a crecer, mientras que la demanda tiende a disminuir, y si el precio “p” disminuye, la demanda tiende a crecer, mientras que la oferta tiende a disminuir.
PROPIEDADES -	

PROPOSICIONES	
ACCIONES - PROCEDIMIENTOS	[102] Ejemplo 1 – Pág. 462 - 463: Para responder el ítem (a), primero despeja “p” de ambas ecuaciones y para la primera halla que m = - 1 ($0 \leq q > 100$) y explica que, si la demanda aumenta en una unidad, el precio disminuye en una unidad, y el corte con el eje “y” es (0; 100) significa el precio máximo que se está dispuesto a pagar. La ecuación de la oferta es p – q = 20 con $m_2 = 1$ y $q \geq 0$ y significa que, al aumentar la oferta en una unidad, el precio también aumenta en una unidad. El corte al eje “y” es (0; 20) y significa que es el precio mínimo con el cual se está dispuesto a ofrecer 20 unidades. En el ítem (b), cuando p = 40, la oferta es q = 20 y la demanda es q = 60, es decir que hay exceso de demanda. Por lo tanto, el precio tiende al alza. Si el p = 80, la oferta es q = 60 y la demanda es q = 20, es decir que hay exceso de oferta y, por ende, el precio tiende a bajar. En el ítem (c), muestra la situación en un sistema de ejes cartesianos considerando sólo el primer cuadrante. Ejemplo 2: Deja la interpretación de los datos y la resolución al lector, y en la pág. 696 solamente proporciona los resultados.
ARGUMENTOS	[103] Pág. 463: En el eje “x” ubica las cantidades (unidades físicas) y en el eje “y” el precio unitario del producto.

Fuente: Soler Fajardo, F., Rojas Cortés, L. y Rojas Cárdenas, L. (2012)

ANEXO V

Protocolos de soluciones de los problemas realizadas por los estudiantes

RESOLUTOR 1 (JOSÉ)

Ejercicio 1:

Cantidad (q)	Precio (P)
30	35
60	30

$m = \dfrac{\$30 - \$35}{60q - 30q}$

$\dfrac{1}{q}\left(\dfrac{-5}{30}\right) = \dfrac{1}{q}\left(-\dfrac{1}{6}\right)$

$P(q) = -\dfrac{1}{6}(q - 30) + 35$

$P(q) = -\dfrac{1}{6} q + 5 + 35 \Rightarrow P(q) = -\dfrac{1}{6} q + 40$

a) Respuesta: la ecuación que representa la situación planteada es:

$$\boxed{P(q) = -\dfrac{1}{6} q + 40}$$

b) Cantidad de pantalones $q = 90$

$P(90) = -\dfrac{1}{6}(90) + 40$

$P(90) = \$25$

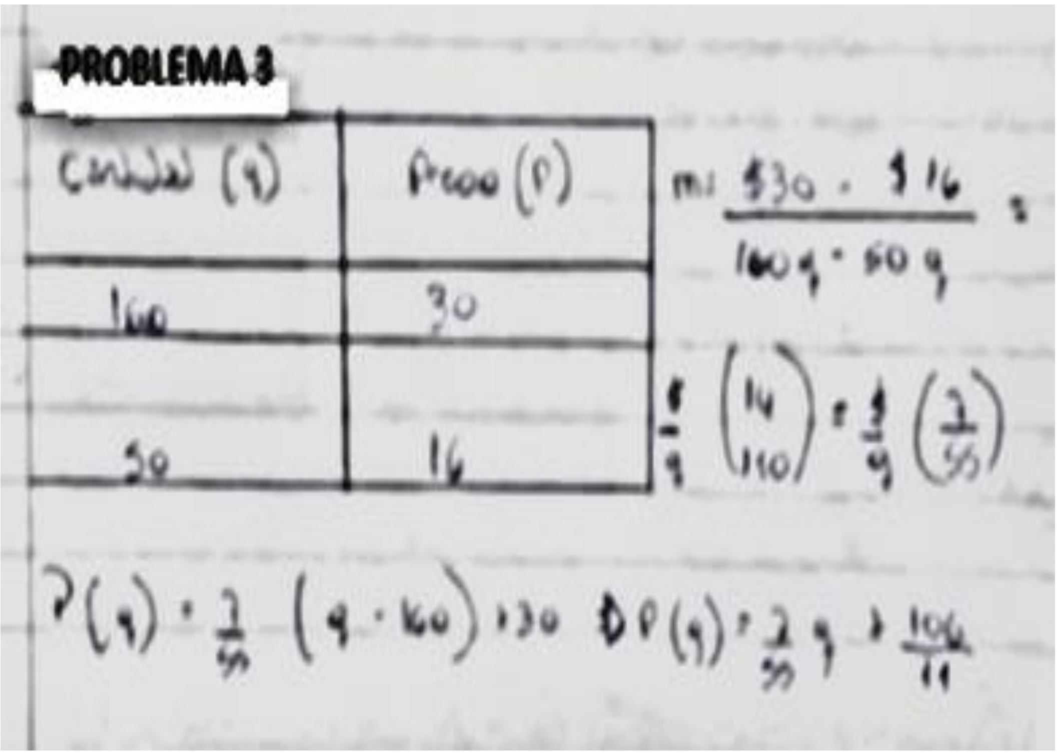
Respuesta: Si el cliente estaría dispuesto a comprar 90 pantalones, maría debería venderles \$25

Problema 2

$m = \dfrac{8 - 10}{10 - 0} = \dfrac{-2}{10} = -0,2$

$D(q) = -0,2(q - 10) + 8 = \boxed{-0,2q + 10}$ Respuesta "a"

b) Respuesta: la relación determinada indica una relación de demanda.

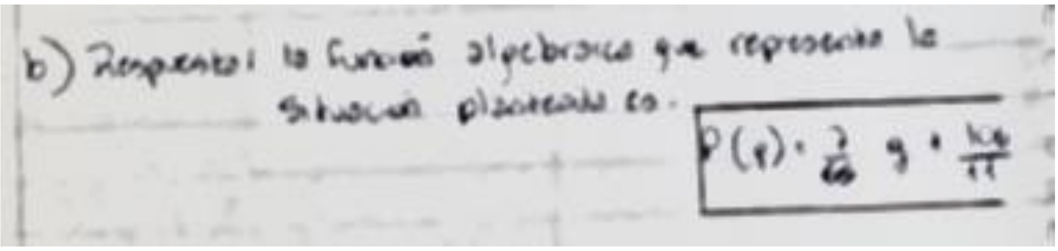


PROBLEMA 3

Cantidad (q)	Precio (P)
160	30
50	16

$m = \frac{\$30 - \$16}{160q - 50q} = \frac{\$}{q}\left(\frac{14}{110}\right) = \frac{\$}{q}\left(\frac{7}{55}\right)$

$P(q) = \frac{7}{55}(q - 160) + 30 \quad P(q) = \frac{7}{55}q + \frac{106}{11}$



b) Respuesta: la función algebraica que representa la situación planteada es:

$\boxed{P(q) = \frac{7}{55}q + \frac{106}{11}}$

RESOLUTOR 2 (LEO)

Problema 1

- Si el precio es de $ 35, puede vender 30 pontalones → ($ 35; 30 p)
- Si el precio es de $ 30, puede vender 60 pontalones → ($ 30, 60 p)

DATOS:

$x_0 = 35 \quad y_0 = 30$

$x_1 = 30 \quad y_1 = 60$

a) $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$y - 30 = \dfrac{60 - 30}{30 - 35}(x - 35)$

$y - 30 = \dfrac{30}{-5}(x - 35)$

$y - 30 = -6(x - 35)$

$y = -6x + 210 + 30$

$y = -6x + 240$

Inversa: $y = -6x + 240$

$y - 240 = -6x$

$\dfrac{y - 240}{-6} = x$

$-\dfrac{1}{6}y + 40 = x$

$f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{6}x + 40$

b) Según la tendencia implícita de los datos, para una cantidad de 90 pontalones

$f(90) = -\dfrac{1}{6} \cdot 90 + 40 = 25$

María debería vender los pontalones a un precio de $ 25

Problema 2:

10 pizzas → \$ 8.10 = \$ 80

20 pizzas → \$ 6.20 = \$ 120

(10; 80) y (20; 120)

$$y - 80 = \frac{120 - 80}{20 - 10}(x - 10)$$

$$y = \frac{40}{10}(x - 10) + 80$$

$$y = 4x - 40 + 80$$

$$y = 4x + 80$$

La función es de oferta porque la pendiente

m = 4 es positiva y la función es creciente.

Problema 3:

Hay variación de los precios según los meses del año.

En verano difícilmente paguen precios mayores de \$20.

En invierno están dispuestos a pagar hasta \$30.

Para 160 pantalones → \$30 (160; \$ 30)

Para 80 pantalones → \$20 (80; \$20)

usando: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$$y - 20 = \frac{30 - 20}{160 - 80}(x - 80)$$

$$y - 20 = \frac{10}{80}(x - 8)$$

$$y - 20 = \frac{1}{8}x - 10$$

$$y = \frac{1}{8}x - 10 + 20$$

$$y = \frac{1}{8}x + 10$$

DATOS

$x_1 = 160$ $y_1 = \$30$

$x_0 = 80$ $y_1 = \$20$

ANEXO VI

Protocolos de las Entrevista a los estudiantes

Entrevista N°1 al Resolutor 1 (José) sobre la resolución de problemas

Referencias: E (entrevistador) y J (José)

PROBLEMA 1

[1] E: acá te pregunto con respecto al primer problema que se trataba de encontrar la expresión.
Desde el contexto expresado en el texto del problema, ¿qué hiciste para encontrar o dar respuesta al ítem (a)?

J: y que lo que hice fue identificar la información que me brinda el problema que me dan cantidades y precios asociados a esas cantidades, y armé una tabla. También decía que el comportamiento era lineal.

[2] E: te informaba acerca de qué ecuación se trataba?

José: Sí. Decía que se trataba de la ecuación de demanda, ya tenía la cantidad y el precio, armé los puntos y calculé la pendiente, que me tenía que dar un valor negativo.

[3] E: ¿Y trabajaste con las variables económicas o lo descontextualizaste llamándoles x a la cantidad e y al precio?

J: trabajé con las variables x e y, y utilicé la ecuación punto pendiente. Ahí sustituí por los valores y cuando encontré la fórmula, le cambié por q y p.

[4] E: ¿Llegaste a analizar las unidades de cada variable económica?

José: Si. El precio está en unidades monetarias y q en cantidades de pantalones.

[5] E: Y para dar respuesta al ítem (b), ¿qué procedimiento realizaste?

J: lo que hice fue sustituir mi variable por la cantidad que me están dando, que, cuando para que un cliente está dispuesto a comprar los 90 pantalones, María debería ofrecer o vender a $25 cada pantalón.

[6] E: Según lo que terminaste de decir, ¿cómo interpretaste los valores que tabulaste?

J: Tomé como que se vendía un combo de 30 pantalones a 35 pesos y el otro combo de 60 pantalones a 30 pesos. La verdad es que no lo pensé como el precio de cada pantalón. Evidentemente no razoné bien.

PROBLEMA 2

[7] E: Y el problema de las pizzas, ¿cómo lo resolviste? Porque en ese, la información se proporcionó en una tabla.

J: Ese problema hice como el de los pantalones y por el signo que me dio de la pendiente me di cuenta de que se trataba de la demanda. Al principio, pensé que se trataba de una oferta porque el problema hablaba de una promoción de pizzas.

PROBLEMA 3

[8] E: Ahora, contame sobre tu interpretación del texto y del gráfico del problema que también trata sobre pantalones.

J: Para ese ejercicio, tomé valores visibles del gráfico para armar los puntos. Uno de los que tomé fue por aproximación, que fue el que está entre los valores 30 y 40 en el eje x y supuse que sería 15 su imagen. Armé la tabla como en los otros casos y como la recta es creciente, me di cuenta de que la expresión que debía encontrar era de la demanda. Entonces calculé la pendiente, me dio un valor negativo. Después reemplacé los valores en la ecuación punto pendiente y encontré la función. Por último, cambié la x por q, la y por p y escribí la respuesta.

[9] E: Y con la información del texto, ¿creés que podría haber hallado la respuesta?

J: Si si, yo creo que se puede, pero me pareció más práctico usar los datos del gráfico.

Entrevista N° 2 al Resolutor 2 (Leo) sobre la resolución de problemas

Referencias: E (entrevistador) y L (Leo)

PROBLEMA 1

[10] E: Hola Leo. Contame qué hiciste primero antes de explicitar lo que escribiste en la hoja.

L: Leí el enunciado, leí el marco teórico que venía incluido en el enunciado.

[11] E: ¿Cuál era ese marco teórico?

L: El de la oferta, cómo se ofertaba. En el enunciado nos decía como información: dado un precio y una cantidad. Entonces lo que hice fue considerar los datos numéricos del precio para vender a 35 pesos para vender 30 pantalones y el precio de 30 pesos para vender 60 pantalones.

[12] E: Ese valor del precio, ¿cómo lo consideraste? ¿Por el total de pantalones que ofrecían o por cada uno?

L: Por cada uno.

[13] E: Perfecto.

L: Entonces, a partir de ahí, consideré puntos coordenados pensando en que la información del problema me decía que era un modelo lineal. Entonces consideré una de las posibles herramientas matemáticas, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

[14] E: Pero, ¿qué te hace usar esa ecuación de la recta que pasa por dos puntos o qué tiene que ver, en todo caso, la linealidad con la ecuación de la recta que pasa por dos puntos? ¿Qué importa de esa ecuación, qué relaciona, digamos, qué factor relaciona esa ecuación con la linealidad que está informándote?

L: Me permite relacionar las variables involucradas.

[15] E: ¿Para hallar qué?

L: Para encontrar la función.

[16] E: ¿Toda la función o qué cosa de la función?

L: Una parte de la función.

[17] E: ¿Cuál?

L: La que está restringida a un dominio positivo.

[18] E: ¿Y la pendiente? ¿No te da pie para que halles la pendiente de la recta al ser lineal?

L: Si, podría calcular la pendiente haciendo el cociente entre las variaciones y, por otro lado, utilizar la ecuación punto – pendiente para determinar para determinar la ecuación de la recta

[19] E: Exactamente. Bueno, entonces acá lo importante es rescatar, de esa información que te dieron, que la linealidad se asocia con ese cociente incremental de variables, y en función a ese número y a su signo, determinás de qué tipo de función se trata.

L: Si.

[20] E: ¿Por qué le llamaste “x” e “y” y no “p” y “q”? ¿Descontextualizaste el problema?

L: Si. Descontextualicé el problema porque estoy acostumbrado a trabajar con esas dos variables en la mayoría de los problemas, “x” e “y” como variables genéricas y, a lo sumo, uno dice: bueno, en este caso, “x” puede representar cantidad e “y” puede representar precio, o al revés.

[21] E: Perfecto, porque al principio veo que vos acá sí lo escribiste, armaste los pares ordenados de una determinada manera. Contame, para vos, ¿por qué armaste el par ordenado colocando como primera componente el precio y como segunda componente la cantidad?

L: Por lo que leí en el enunciado, entendía que la cantidad dependía del precio y no al revés.

[22] E: Ok. ¿y ahí hallaste?

L: Consideré los dos puntos. Sí bien es cierto que acá utilicé sus magnitudes, en este caso, pesos y cantidad de pantalones.

[23] E: ¿Y a vos te parece que es sólo pesos o pesos por unidad?

L: Pesos por unidad.

[24] E: Pero te faltó aclarar.

L: Si. Y luego para llevar, al momento de llevar al cálculo lo que hice fue simplemente considerar los valores numéricos para no tener que trabajar con la simplificación de unidades.

[25] E: Desde el contexto matemático puramente, no.

L: Exactamente.

[26] E: Perfecto. Estás acostumbrado a trabajar con la ecuación punto – punto, de la recta punto – punto.

L: Si.

[27] E: O la de punto – pendiente. ¿No se te ocurrió otra forma, otra ecuación de la recta?

L: Y podría haber utilizado alguna otra ecuación, pero de igual manera hubiese llegado al resultado, como por ejemplo la paramétrica o vectorial.

[28] E: ¿Por qué hallaste la inversa?

L: Porque en economía nosotros tenemos o siempre consideramos que la cantidad va a depender del precio, y en este caso, como yo inicié el cálculo, lo que estaba llegando a obtener es una función en donde las variables estaban invertidas según los términos económicos. Tenía que la cantidad dependía del precio y no el precio de la cantidad. Es por eso que calculé la función inversa teniendo, en este caso, la función de demanda.

[29] E: Ok. ¿Por qué decís que es de demanda?

L: Porque la pendiente o el coeficiente principal es negativo, entonces estamos ante una función que es decreciente y la demanda es una función decreciente.

[30] E: ¿No te diste cuenta de eso desde que armaste los puntos?

L: No.

[31] E: Ok. ¿No contextualizaste tampoco?

L: No.

[32] E: Bien. ¿Y para el ítem (b), para saber el precio de los 90 pantalones que iba a pedir el hombre, cuál tomaste?

L: Tomé la función inversa y calculé, como tenía la cantidad, entonces obtenía el precio a través de calcular la imagen de la función de la cantidad de 90 pantalones.

[33] E: Por último, ¿qué hiciste?

L: Enuncié la respuesta: María debería vender los pantalones a un precio de 25 pesos.

[34] E: Perfecto. Acá da a entender que el precio de los 90 pantalones es de 25. ¿Te parece que hay que aclarar que, en un futuro, digamos, en tu carrera para decir que los precios son unitarios siempre y no por combo?

L: Si. Es necesario conocer el precio unitario porque o sino nos obliga a tener que calcular.

PROBLEMA 2

[48] E: Y en cuanto a las pizzas…

L: Si.

[49] E: Acá. Contame cómo entendiste este problema? Porque tenía el cuadro donde decía el precio unitario y la cantidad de pizzas promocionadas en un determinado día. Esa promoción, ¿a vos te sonó a que se trataba de qué función?

L: A mí me pareció que era una función de proporcionalidad hasta que al momento de encontrar la ecuación me di cuenta que no era de proporcionalidad, porque para ser de proporcionalidad tenía que encontrar una función lineal y lo que encontré fue una función afín, una función polinómica con el coeficiente o término independiente diferente de cero.

[50] E: ¿Algún dato de la tabla te dio esa pista? ¿De que era una afín y no una lineal?

L: Al principio, no. Pensé, en su momento que era una situación de proporcionalidad, además de que estaba contando con el precio unitario, entonces lo primero que se me ocurrió fue "voy a encontrar una función lineal". No pude darme cuenta de que no era lineal hasta el momento que hice los cálculos.

[51] E: ¿Y por qué, cuando armaste los puntos, o para armar los puntos, multiplicaste 6 x 20? Hiciste el producto del precio por la cantidad.

L: El precio unitario por la cantidad.

[52] E: ¿Por qué hiciste eso?

L: Porque para encontrar los puntos tenía que…consideré que, al tener ese precio unitario y yo necesitaba, para encontrar el modelo, la cantidad y el precio. El precio para 10 pizzas y el precio para 20 pizzas. Entonces lo que hice fue, para 10 pizzas, multipliqué por el precio unitario de esa promo, para 20 pizzas multipliqué por el precio unitario de esa promo, entonces consideré que el punto coordenado para 10 pizzas sería 10 pizzas, 80 pesos, 20 pizzas, 120 pesos. Consideré que esos serían los puntos.

[53] E: Vos, entonces, consideraste los precios totales y el total de pizzas promocionadas.

L: Si.

[54] E: Ahora te pregunto, ¿no pensaste que al multiplicar el precio unitario por la cantidad de pizzas estabas hallando otra función económica?

L: La función ingreso. Ahora lo pienso. En su momento lo único que quise hacer fue mantener la lógica de los problemas anteriores y encontrar puntos coordenados y ahí entré en un error.

[55] E: ¿Ese error a qué te llevó?

L: Me llevó a encontrar una función que no representa la situación.

[56] E: Exactamente, ¿Por qué?

L: Porque eh….

[57] E: Hay dos situaciones que acá no te hicieron llegar a responder la pregunta acerca del modelo o la ecuación que representa esa promoción. Una es esta: la forma en que lo pensaste desde el momento en que hallaste el ingreso de vender 20 pizzas a 6 pesos y 10 pizzas a 8 pesos cada una. Y la segunda cuál fue: la palabra promoción que figura en el texto del problema, ¿en qué tipo de funciones, de las que estamos tratando, te hizo pensar?

L: Función de oferta.

[58] E: En realidad, fue un distractor.

L: mmm…. Entiendo. Al leer la palabra promoción pensé en oferta, tengo que encontrar el modelo de oferta, una función creciente.

[59] E: Entonces, por ahí hay que mirar un poco… analizar los datos de la tabla para ver qué pasa cuando aumenta el precio, qué pasa con la cantidad.

L: Claro, analizar las variaciones.

[60] E: Exacto.

L: Entonces en ese caso, lo que hice mal fue querer utilizar solamente dos valores particulares para los puntos coordenados. Tendría que haber analizado el cociente de variaciones o las variaciones a través de la tabla para aproximar el modelo de otra manera.

[61] E: Más allá que, seguramente decía que era lineal, o que encontrabas que había un comportamiento lineal de la función que se buscaba, tomaste una función de función, porque planteaste el ingreso en función de la cantidad.

L: Claro, una función compuesta.

[62] E: Exacto. Pero es interesante que te hayas dado cuenta ahora de que hay cuestiones que hay que leer, releer y comprobar con una cierta cantidad, si es que el precio tabulado responde o coincide según el modelo que hallaste porque los datos están para ser corroborados también de esa manera cuando se te dan por tabla, por gráfico.

PROBLEMA 3

[35] E: Bien. Ahora respecto al problema de, bueno, también siguen con los pantalones en el problema 3, ¿qué viste de raro respecto al anterior?

L: ¿En el tercer problema? No, hablaba de una existencia de una variación de los precios según los meses del año; a diferencia del anterior, nos decía que los precios no serían mayores a 20, que en el invierno estarían dispuestos a pagar como máximo 30. Nos daba como información que 160 pantalones equivaldrían a 30 pesos y 80 pantalones, 20.

[36] E: ¿Dónde te daba esa información?

L: En el final del enunciado nos decía lo que valían cada una de estas cantidades de pantalones.

[37] E: ¿En el gráfico te daba esos datos?

L: En el gráfico.

[38] E: ¿Por qué no usaste esta información que te decía en tal estación estarían dispuestos a comprar o a pagar hasta tantos pesos? ¿Qué te pareció? Digamos, ¿no te alcanzó la información y el rango era muy variado?

L: Porque se me facilitaba leer la información del gráfico. Desde esa representación podía leer mejor y determinar los puntos coordenados que son los que me iban a permitir encontrar, a través de alguna ecuación, la función que representa la solución.

[39] E: ¿Cómo armaste los puntos coordenados, comparando con el otro (problema 1)?

L: En este caso, tenía en el eje horizontal la cantidad de pantalones y en el eje vertical los precios, entonces armé los puntos coordenados considerando (160, 30) y (80, 20).

[40] E: O sea que, directamente, trabajaste con la función inversa.

L: Si. Utilicé nuevamente la ecuación punto – punto o la que pasa por dos puntos, tampoco calculé la pendiente de manera separada, entonces incluí el cálculo de la pendiente en el cálculo de la función.

[41] E: ¿El cálculo de la pendiente te llevó a calcularla por el comportamiento de la gráfica que se proporcionó, en el segmento de recta?

L: Si si. Era un segmento de recta, entonces, en ese caso podía ver que el segmento de recta tenía pendiente positiva porque era un segmento creciente, lo que coincide con el valor hallado ya que la pendiente, en este caso, me da una pendiente positiva.

[42] E: Entonces también descontextualizado más allá de que en el rescate de la información planteaste los puntos en términos económicos. Después hiciste cambio de variables y trabajaste en el contexto matemático.

L: Si.

[43] E: Y ese es el modelo que se ajusta a la situación. ¿Pensaste en otra forma de resolver el problema, desde el gráfico, sin tomar los puntos? ¿Hallar directamente ese 10 de alguna forma?

L: Como cociente de variaciones. Podría haber considerado los incrementos que se observan en el gráfico y, a partir del cálculo del cociente de esos incrementos hubiese encontrado también ese coeficiente.

[44] E: Prolongando el segmento de recta, aunque no era a lo mejor, lo más acertado, ¿podrías caer en el valor 10 en el eje de las ordenadas?

L: Si.

[45] E: O sea que, si hubieses pensado en otra forma de expresar la ecuación de la recta, la paramétrica, la más utilizada, $y = m.x + b$, lo único que tendrías que haber hecho era hallar

L: La pendiente.

[46] E: Y después armar simplemente

L: Armar la explícita.

[47]: ¿Te hacía otra pregunta el problema?

L: No. Era encontrar solo el modelo.

E: Bueno. Muchas gracias Leo.

ANEXO VII

Protocolo de las interpretaciones de las actuaciones o competencias de cognición de los resolutores reales

Descripciones de lo realizado paso a paso	**PROBLEMA 1**	**PROBLEMA 2**	**PROBLEMA 3**
CASO JOSÉ	●Realiza la lectura de la información obtenida desde el enunciado textual. ●Confecciona una tabla con los datos informados. ●Utiliza la simbología del precio y la cantidad. ●Realiza el cálculo de la pendiente. ●Interpreta el comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre las variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema. ●Usa la ecuación de la recta punto – pendiente. ●Reconoce operaciones y propiedades aritméticas que evocan conceptos. ●Distingue los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta.	●Realiza la lectura de la información obtenida desde una tabla. ●Utiliza la simbología del precio y la cantidad. ●Realiza el cálculo de la pendiente. ●Interpreta el comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre las variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema. ●Usa la ecuación de la recta punto – pendiente. ●Reconoce operaciones y propiedades aritméticas que evocan conceptos. ●Distingue los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta. ●Opera algebraicamente. ●Reconoce las operaciones y propiedades de las	● Lee el gráfico y extrae información desde el mismo. ●Confecciona una tabla con los datos informados en el gráfico. ●Utiliza la simbología del precio y la cantidad. ●Realiza el cálculo de la pendiente. ●Interpreta el comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema. ●Usa la ecuación de la recta punto – pendiente. ●Reconoce operaciones y propiedades aritméticas que evocan conceptos. ●Lectura e interpretación de la información obtenida del enunciado textual, de una tabla o desde un gráfico

			cartesiano, y organización de los datos utilizando estos recursos**.**
CASO JOSÉ	● Opera algebraicamente. ● Reconoce las operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones. ● Descontextualiza las variables económicas, utiliza "x" e "y" en los cálculos, y expresa la ecuación hallada en el contexto del problema. ● Identifica parcialmente las unidades de las variables económicas. ● No establece los pares ordenados con los datos del problema. ● No toma otros pares ordenados para realizar la verificación desde la ecuación que encuentra.	propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones. ● Descontextualiza las variables económicas, utiliza "x" e "y" en los cálculos, y expresa la ecuación hallada en el contexto del problema ● Identifica parcialmente las unidades de las variables económicas. ● No establece los pares ordenados. ● No toma otros pares ordenados para realizar la verificación desde la ecuación que encuentra.	● Distingue los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta. ● Opera algebraicamente. ● Reconoce las operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones. ● Descontextualiza las variables económicas, utiliza "x" e "y" en los cálculos, y expresa la ecuación hallada en el contexto del problema. ● Identifica parcialmente las unidades de las variables económicas. ● No establece los pares ordenados. ● No toma otros pares ordenados para realizar la verificación desde la ecuación que encuentra.

Nota: Interpretación de las actuaciones o competencias de cognición del resolutor 1. Autoría propia.

	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2	PROBLEMA 3
CASO LEO	Las actuaciones que se evidencian son: ● Realiza la lectura de la información obtenida desde el enunciado textual. ● Establece los puntos y reconoce las unidades de sus coordenadas. ● Realiza la traducción del lenguaje textual al simbólico matemático. ● Descontextualiza las variables económicas, utiliza “x” e “y” en los cálculos. ● Usa la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. ● Demuestra dominio y empleo de procedimientos algebraicos para encontrar una ecuación. ● Distingue los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta. ● Conoce los símbolos aritméticos que denotan operaciones. ● Reconoce operaciones y propiedades aritméticas que evocan conceptos. ● Reconoce y utiliza las operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones.	Las actuaciones que se evidencian son: ● Realiza la lectura de la información obtenida desde el enunciado textual. ● Reconoce la diferencia entre la función lineal y la función afín. ● Descontextualiza las variables económicas, utiliza “x” e “y” en los cálculos. ● Usa la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. ● Distingue los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta. ● Reconoce operaciones y propiedades aritméticas que evocan conceptos. ● Reconoce las operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones. ● Emplea adecuadamente las herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones.	Las actuaciones que se evidencian son: ● Realiza la lectura e interpretación de la información obtenida desde el enunciado textual y gráfico. ● Establece los puntos y reconoce las unidades de sus coordenadas. ● Descontextualiza las variables económicas, utiliza “x” e “y” en los cálculos. ● Realiza la traducción del lenguaje textual al simbólico matemático. ● Usa y aplica el concepto de función afín y de su inversa, y de sus modelos matemáticos, en la resolución de un problema. ● Demuestra entendimiento de las características presentes en el comportamiento de la función afín desde un gráfico. ● Usa la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. ● Distingue los diferentes modelos matemáticos que representan a una recta. ● Reconoce operaciones y propiedades

	• Emplea adecuadamente las herramientas matemáticas básicas en la resolución de operaciones. • Reconoce la relación funcional entre las variables “precio unitario” y “cantidad de productos", determina el dominio de validez de las variables y uso de los términos relacionados a la economía.		aritméticas que evocan conceptos. • Reconoce las operaciones y propiedades de los números reales en la resolución de las ecuaciones. • Conoce los símbolos aritméticos que denotan operaciones. • Demuestra dominio y empleo de procedimientos algebraicos para encontrar una ecuación.
CASO LEO	• Usa y aplica el concepto de función afín y de su inversa, y de sus modelos matemáticos, en la resolución de un problema. • No contextualiza las expresiones que modelizan la situación en términos económicos. • No realiza el control de los resultados encontrados al realizar las operaciones matemáticas. • No asocia el concepto de linealidad con el de cocientes incrementales iguales para pares de valores. • No aplica la noción de recta como lugar geométrico, de coordenadas de puntos y de su simbolización (cociente incremental y pares ordenados). • No interpreta el comportamiento lineal	• Interpreta de forma incorrecta la información proporcionada en la tabla de valores. • No contextualiza las expresiones que modelizan la situación en términos económicos. • No interpreta el comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre variaciones de variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema, en forma tabular. • No realiza correctamente la interpretación de la información obtenida del enunciado textual y tabular. • No reconoce la relación funcional entre las variables “precio unitario” y	• Identifica términos y símbolos de la geometría (lugar geométrico, recta, puntos, segmento de recta). • Aplica la noción de recta como lugar geométrico, de coordenadas de puntos y de su simbolización (cociente incremental y pares ordenados). • No contextualiza las expresiones que modelizan la situación en términos económicos. • No interpreta el comportamiento lineal de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre las variaciones de las variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema. • No controla los resultados

	de las funciones de Oferta y Demanda a partir del valor constante de la razón entre variaciones de variables, para cualquier par de valores informados como datos del problema, sea en forma textual, tabular o gráfica. ● No evidencia la elección y uso pertinente de la unidad de medida de las magnitudes presentes en la expresión para una acertada interpretación de la información que se quiere conocer en el contexto del problema.	"cantidad de productos", ni determina el dominio de validez de las variables y uso de los términos relacionados a la Economía.	encontrados al realizar las operaciones matemáticas. ● No evidencia la elección y uso pertinente de la unidad de medida de las magnitudes presentes en la expresión para una acertada interpretación de la información que se quiere conocer en el contexto del problema.

Nota: Interpretación de las actuaciones o competencias de cognición del resolutor 2. Autoría propia

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Referencias Bibliográficas

Arnal, J., Del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *"Investigación Educativa. Fundamentos y metodologías"*. Editorial Labor. Barcelona.

Arya, J. C. y Lardner, R. W. (2009). *"Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía"*. Quinta edición. ISBN: 978-607-442-302-0. Editorial Pearson.

Bell, E. T. (1945). *"The Development Of Mathematics Second Edition"*. Desde: https://archive.org › details › in.ern...

Chevallard, Bosch y Gascón (1997). *"Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje"*. Editorial ICE-HORSORI

Curo Cubas, A. y Martínez Miraval, M. (2016). *"Matemática básica para administradores",* (3a. ed.). Lima, Perú: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC). Desde https://elibro.net/es/ereader/elibrounam/41269?page=4.

Díaz Godino, J., Gómez Alfonso, B., Gutiérrez Rodríguez, A., Rico Romero, L. y Sierra Vásquez, M. (1991). *"Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática"*. Editorial Síntesis

Etchegaray, S. (2000). *"Análisis Epistemológico y Didáctico de Nociones Elementales de la Teoría de Números"*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Fernández Lajusticia, A. y Puig Espinosa, L. (2001). *"Una actividad matemática organizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales: Razón y Proporción en la escuela primaria"*. VI Simposio de la SEIEM. Desde: Documat-UnaActividadMatematicaOrganizadaEnElMarcoDeLosMode-830963.pdf

Filloy, E. (1998). *Modelos Teóricos Locales (MTL). Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa (Parte 1).* https://www.researchgate.net/publication/282881623

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). *"El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas".* Enseñanza de las Ciencias,25(3), pp. 327-342.

Font, V. y Godino, J. (2006). *"La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores".* Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 67-98, 2006. Desde: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/538/430

Galagovsky, L. R. y Cittadini, P. E. (2008). *"Enseñanza de Ecuaciones Lineales en contexto. Investigación Didáctica".* Enseñanza de las Ciencias, 26(3), pp.359 –374. Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria. Ciudad de Buenos Aires, Argentina. Escuela Argentina de Negocios. Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

García (1969). *"Los supuestos básicos de la función demanda".* [Documento en línea]. Desde:http://www.cepc.es/rap/publicaciones/revistas/11/resp_053_109.pdf. [Consulta: 2009, febrero 07].

García y Molina (1994). *"La economía matemática y la controversia sobre la utilización de las matemáticas en la economía".* Cuadernos 26, 1994, pp25-46.

Godino, J. (2010). *"Perspectiva De La Didáctica De Las Matemáticas Como Disciplina Tecno científica".*

Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. y Botanero, M. (1994). *"Significado institucional y personal de los objetos matemáticos"*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Batanero_1994_RDM.pdf

Godino, J. y Font, V. (2007). *"Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos".*

https://www.researchgate.net/publication/282325799_Algunos_desarrollos_de_la_teor'ia_de_los_significados_sistemicos

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2014). *"Análisis y valoración de la "Idoneidad Didáctica" de procesos de estudio de las Matemáticas"*. See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/28240094

Goles Chacc, E. (1993). *"Algebra".* Primera edición. I.S.B.N. 956-201-189-5. Ediciones Pedagógicas Chilenas S.A. Editorial Universitaria. Desde https://ucampus.uchile.cl

Grueso, Ronald Andrés y González. Gerardo. (2016). *"El concepto de Función como Covariación en la escuela"*. Tesis de Maestría en Educación. Instituto de Educación y Pedagogía. Área de Educación Matemática. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Lagraña, C. (2019). *"Un Modelo de Competencias Matemáticas elaborado para la Resolución de Problemas de Ecología Evolutiva"*. Desde: https://1library.co/document/q734jkky-modelo-competencias-matematicas-elaborado-resolucion-problemas-ecologia-evolutiva.html

Landreth, H. y Colander, D. (2006). *"Historia del pensamiento económico"*. Cuarta edición. Editorial McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U. ISBN: 0-618-13394-1.

Lodoño Orrego, S.M. y Muños Mesa, L. (2011). *"La modelización matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables"*. Maestría en Educación. (p. 48). Universidad de Antioquía. Facultad de Educación. Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia. Disponible en: https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7106/1/SandraLondo%C3%B1o_2011_relacioneslineales.pdf

Martínez Recio, A., Rivaya, F., Águila Ruiz, F., Cara, S., Arnal Navarro, J., Burgos Luque, E., Casado Jiménez, P., Cuenca Ojeda, M., García García, V., Hens Muñoz, M., Moyano Torralbo, M., Palenzuela Rodríguez, A., Romero, E., Rodríguez Jurado, M., Torres López, J. y Torres Mejías E. (1989). *"Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la Geometría elemental"*. Editorial Síntesis.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (compiladores). (2012). *"Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos"*. Editorial Universitaria de Villa María, Villa María.

Puig, L. (2008). "*Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos". Vol. 2 Núm. 3: (Marzo, 2008), Artículos, Páginas 87-107*
DOI: https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6199
https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6199

Rico, L. (2012). *"Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática"*. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática – 2012 – Nº 1, 39 – 63. En http://funes.uniandes.edu.co/1986/1/Rico_Avances.pdf

Rodríguez Cortez, E. (2014). *"Significantes Históricos de la Función afín aplicado a la Economía"*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. ISBN: 978-84-7666-210-6. Artículo 522 (p.4). Universidad Nacional Abierta. Centro Local Lara. Buenos Aires, Argentina.

Rodríguez, E. L. y Valdivé, C. (2011). *"Análisis histórico de la Función Afín y la Ecuación Lineal en la Economía desde el Enfoque Ontosemiótico"*. Trabajo relacionado con el proyecto de Investigación registrado ante el CDCHT de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, código 016-RAC-2009. TEACS, Año 4, Número 08, Diciembre 2011.

Rodríguez Franco, J., Pierdant Rodríguez, A. I. y Rodríguez Jiménez, E. C. (2018). *"Matemáticas aplicadas a los negocios"*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Patria. Desde: https://elibro.net/es/ereader/elibrounam/40544?page=10.

Roldán Cruz, E. O. (2013). *"El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8°y 9° grados de educación básica"*. Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia.

Desde: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21934

Ruiz-Higueras, L. (1994). *"Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico"*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemática. Universidad de Granada.

Samuelson, P. y Nordhaus, W. (2010). *"Economía con aplicaciones a Latinoamérica"*. 19ª edición. ISBN: 978-607-15-0333-6. Editorial Mac Graw Hill.

Servín Campuzano, H. (2017). *"Modelo de enseñanza del concepto función bajo la luz delos Modelos Teóricos Locales y la Educación Matemática Realista en la Educación Superior Intercultural"*. Tesis Doctoral. México, D.F.

Scheifler, X. (1995). *"Historia del Pensamiento Económico".* (5º edición). México. Trillas.

"Significantes Históricos de la Función afín aplicado a la Economía". www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación 2 ISBN: 978-84-7666-210-6– Artículo522SignificantesHistóricosde la Función afín aplicado a la…pdf.

Solares, A., Puig, L. y Rojano, T. (2020). *"Eugenio Filloy Yagüe: un breve recuento de vida y obra".* DOI: 10.24844/EM3201.12. Educación Matemática, vol. 32, Núm. 1. 12REM32-1.pdf.

Soler Fajardo, F. Rojas Cortés, L. y Rojas Cárdenas, L. E. (2012). *"Matemáticas conceptos previos al cálculo: aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas"*. Bogotá, Ecoe Ediciones. Desde: https://elibro.net/es/ereader/elibrounam/122456?page=9.

Vázquez, A. (2002). *"Kart Heinrich Rau y el Diagrama Marshalliano de la Oferta y la Demanda"*. Revista de Historia Económica Año XX, Invierno, Nº 1. Departamento de Economía Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid. Zaratiegui