

Resolución numérica del flujo a través de una expansión simétrica brusca



FRADES, Sebastián

PROYECTO INTEGRADOR PROFESIONAL

Presentado a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del
Comahue como requisito para la obtención del grado de
INGENIERO MECÁNICO

Neuquén - Argentina

AÑO 2024

Resolución numérica del flujo a través de una expansión simétrica brusca

FRADES, Sebastián Alexis

Director: Dr. **PRADO, Ricardo Adolfo**

Presentado a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del
Comahue como requisito para la obtención del grado de
INGENIERO MECÁNICO

Neuquén - Argentina

AÑO 2024

Resolución numérica del flujo a través de una expansión simétrica brusca

FRADES, Sebastián Alexis

Aprobado en fecha X de XXXXX de 20XX

Tribunal evaluador:

- Dr. LÓPEZ, Ezequiel.
- Dra. JACA, Rossana.
- Ing. MESQUIDA, César.
- Mg. BOCCANERA, Daniel.

AGRADECIMIENTOS

Primero, agradecer a mis padres Mónica y José Luis.

A mi director de tesis Dr. Ricardo Adolfo Prado por la paciencia y predisposición para transmitir sus conocimientos, y la oportunidad de poder llevar adelante el presente trabajo.

A la Universidad Nacional del Comahue por la oportunidad de formarme académicamente y hacer uso de sus recursos para poder hacer la presente tesis.

Al Dr. Ezequiel López por su ayuda para utilizar el programa OpenFOAM.

Resolución numérica del flujo a través de una expansión simétrica brusca

Autor: FRADES, Sebastián Alexis

Director: Dr. PRADO, Ricardo Adolfo

Resumen

En este trabajo se resolverá de manera numérica el flujo a través de una expansión simétrica abrupta. Se irá aumentando la complejidad del modelado del problema en busca de mejorar la representación de los fenómenos físicos involucrados, partiendo desde el caso no viscoso y bidimensional, pasando por el caso laminar hasta llegar al caso tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. El objetivo es poder resolver el campo de velocidades, presiones y sedimentos con la idea de poder visualizar las zonas críticas por efectos erosivos. Se hará uso tanto de diferencias finitas como de volúmenes finitos como metodologías de resolución numérica. Reconociendo las problemáticas que adolecen dichos métodos de resolución, se buscará hacer hincapié en la contrastación de resultados. Se usarán códigos de elaboración propia para después utilizar el programa de código abierto OpenFOAM.

Palabras clave: Expansión simétrica abrupta, Diferencias finitas, Volúmenes finitos, Flujo potencial, Flujo viscoso, Turbulencia, Transporte de sedimentos.

Numerical study of flow through sudden symmetric expansion

Author: FRADES, Sebastián Alexis

Advisor: D. Eng. PRADO, Ricardo Adolfo

Summary

In this work, the flow through a sudden symmetric expansion will be numerically solved. The complexity of the modeling will be gradually increased to improve the accuracy of the representation of the physical phenomena involved, starting from the non-viscous, two-dimensional case, moving to the laminar case, and finally reaching the three-dimensional turbulent case with sediment transport. The objective is to solve the velocity, pressure, and sediment fields with the aim of visualizing critical areas due to erosive effects. Both finite differences and finite volumes will be used as numerical resolution methodologies. Acknowledging the challenges associated with these resolution methods, emphasis will be placed on comparing results. Self-developed codes will be used initially, followed by the open-source program OpenFOAM.

Keywords: Abrupt symmetric expansion, Finite differences, Finite volumes, Potential flow, Viscous flow, Turbulence, Sediment transport.

Índice

1	INTRODUCCIÓN.....	17
1.1	Motivación	17
1.2	Organización del trabajo	17
2	OBJETIVO	20
2.1	Objetivo General	20
2.2	Objetivos Específicos.....	20
3	MARCO TEÓRICO.....	21
4	METODOLOGÍA	22
5	DESARROLLO.....	24
5.1	Casos bidimensionales	24
5.1.1	Flujo potencial: entrada y salida uniforme	28
5.1.2	Flujo potencial: entrada y salida parabólica	35
5.1.3	Flujo viscoso: 2D plano solución función corriente - vorticidad	40
5.1.3.1	Diferencias centradas.....	41
5.1.3.2	UPWIND 3 ^{er} orden	52
5.1.3.3	Aceleración multigrilla.....	54
5.1.4	Flujo viscoso: solución axialsimétrico	58
5.1.5	Caso bidimensional OpenFOAM	61
5.1.6	Verificación de casos bidimensionales.....	66
5.2	Caso tridimensional turbulento: OpenFOAM.....	71

5.2.1	Teoría de la turbulencia	72
5.2.1.1	Naturaleza aleatoria de la turbulencia.....	72
5.2.1.2	Teoría de variables aleatorias	73
5.2.1.3	Ecuaciones de flujo promedio	74
5.2.1.4	Hipótesis de viscosidad turbulenta	76
5.2.1.5	Modelo de dos ecuaciones	77
5.2.1.6	El modelo $k - \epsilon$	79
5.2.1.7	El modelo $k - \omega$	80
5.2.2	Configuración del caso en OpenFOAM	81
5.2.2.1	Mallado.....	81
5.2.2.2	Propiedades físicas	82
5.2.2.3	Esquemas numéricos	82
5.2.2.4	Condiciones de borde e iniciales	83
5.2.3	Resultados modelo $k - \epsilon$	84
5.2.4	Resultados modelo $k - \omega$	92
5.3	Caso transporte de sedimentos	97
5.3.1	Teoría de transporte de sedimentos	97
5.3.1.1	Clasificación de flujos turbulentos con transporte de partículas	97
5.3.1.2	Método lagrangiano.....	99
5.3.2	Configuración de casos con transporte de sedimentos en OpenFOAM	99
5.3.2.1	Solución transitoria.....	100

5.3.2.2	Definición propiedades físicas de las partículas	100
5.3.2.3	Definición de las fuerzas de partículas relevantes	100
5.3.2.4	Inyección	100
5.3.2.5	Configuración de coeficientes de modelo de interacción partícula-partícula y partícula-pared.	101
5.3.3	Resultados caso transporte de sedimentos.....	103
6	CONCLUSIONES.....	107
6.1	Conclusiones caso bidimensional	107
6.1.1	Flujo potencial: entrada uniforme y entrada parabólica	107
6.1.2	Flujo viscoso laminar: plano, axialsimétrico y OpenFOAM.....	107
6.2	Conclusiones caso tridimensional turbulento.....	108
6.3	Conclusiones caso transporte de sedimentos	108
6.4	Conclusiones generales	109
6.5	Continuación del trabajo	109
7	Referencias.....	111

Índice de Figuras

Figura 1. (Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2003).....	18
Figura 2. (Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2003).....	19
Figura 3. Geometría del problema bidimensional.	22
Figura 4. Geometría del problema tridimensional.....	23
Figura 5. Sistema de referencia inercial.	25
Figura 6. Solución potencial. $N = 32$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.	30
Figura 7. Solución potencial. $N = 32$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.	30
Figura 8. Solución potencial. $N = 32$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$. C_p línea corriente media.	30
Figura 9. Solución potencial. $N = 64$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.	31
Figura 10. Solución potencial. $N = 64$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.	31
Figura 11. Solución potencial zoom x4 en la zona cercana al quiebre. $N = 64$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$	31
Figura 12. Solución potencial. $N = 64$, $L1/h = 1$, $L2/h = 1$, $H/h = 2$. C_p línea de corriente media.	32
Figura 13. Solución potencial. $N = 32$, $L1/h = 1$, $L2/h = 2$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.	32
Figura 14. Solución potencial. $N = 32$, $L1/h = 1$, $L2/h = 2$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.	32

Figura 15. Solución potencial. $N = 32, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$. C_p línea de corriente media.	33
Figura 16. Solución potencial. $N = 32, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 4$. Líneas de corriente.	33
Figura 17. Solución potencial. $N = 64, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 4$. Vectores velocidad.	33
Figura 18. Solución potencial entrada parabólica. $N = 32, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$. Líneas de corriente.....	36
Figura 19. Solución potencial entrada parabólica. $N = 32, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$. Vectores velocidad.	36
Figura 20. Solución potencial entrada parabólica zoom x4 en expansión. $N = 32, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$	36
Figura 21. C_p línea de corriente media. $N = 32, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$	37
Figura 22. Solución potencial entrada parabólica. $N = 64, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$. Líneas de corriente.....	37
Figura 23. C_p línea de corriente media. $N = 64, L1/h = 1, L2/h = 2, H/h = 2$	37
Figura 24. Solución potencial entrada parabólica. $N = 64, L1/h = 1, L2/h = 4, H/h = 2$. Líneas de corriente.....	38
Figura 25. Comparación de líneas de corriente caso 1 y 2.	38
Figura 26. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 3$. Líneas de corriente.	44
Figura 27. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 3$. Isobaras.....	44
Figura 28. Presión línea media. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 3$	45

Figura 29. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 6$. Líneas de corriente.....	46
Figura 30. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 6$. Isobaras.....	46
Figura 31. Presión línea media. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 6$	47
Figura 32. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10, H/h = 2, L2/h = 6$. Líneas de corriente.....	48
Figura 33. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 10, H/h = 2, L2/h = 6$. Isobaras.....	48
Figura 34. Presión línea media. $Re = 10, H/h = 2, L2/h = 6$	49
Figura 35. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10, H/h = 4, L2/h = 6$. Líneas de corriente.....	50
Figura 36. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10, H/h = 4, L2/h = 6$. Isobaras.....	50
Figura 37. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10, H/h = 4, L2/h = 10$. Líneas de corriente.....	51
Figura 38. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 10, H/h = 4, L2/h = 10$. Isobaras.....	51
Figura 39. Solución función corriente-vorticidad UPWIND 3er orden. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 3$. Líneas de corriente.....	53
Figura 40. Solución función corriente-vorticidad. Diferencias centradas. $Re = 1, H/h = 2, L2/h = 3$. Líneas de corriente.....	53
Figura 41. (Balewski, Cwikla, Kowalczyk y Kozakowski, 2004).....	54
Figura 42. Solución número de Reynolds 360. Líneas de corriente.....	55
Figura 43. Solución número de Reynolds 360. Zoom. $xr/h = 12$. Líneas de corriente.....	55

Figura 44. Solución número de Reynolds 300. Líneas de corriente.	55
Figura 45. Solución número de Reynolds 300. Zoom. $xr/h = 10$. Líneas de corriente.....	55
Figura 46. Solución número de Reynolds 200. Líneas de corriente.	56
Figura 47. Solución número de Reynolds 200. Zoom. $xr/h = 6,5$. Líneas de corriente.....	56
Figura 48. Solución número de Reynolds 150. Líneas de corriente.	56
Figura 49. Solución número de Reynolds 150. Zoom. $xr/h = 5$. Líneas de corriente.....	56
Figura 50. Solución número de Reynolds 100. Líneas de corriente.	57
Figura 51. Solución número de Reynolds 100. Zoom. $xr/h = 3,5$. Líneas de corriente.....	57
Figura 52. Solución número de Reynolds 50. Líneas de corriente.	57
Figura 53. Solución número de Reynolds 50. Zoom. $xr/h = 2$. Líneas de corriente.....	57
Figura 54. Solución axialsimétrica. $Re = 100, H/h = 2, L2/h = 8$. Líneas de corriente....	59
Figura 55. (The OpenFOAM Foundation, 2024).....	61
Figura 56. Estructura básica del directorio de un caso simulado en OpenFOAM (The OpenFOAM Foundation, 2024).	62
Figura 57. Solución número de Reynolds 360.....	63
Figura 58. Solución número de Reynolds 360. Zoom. $xr/h = 12$	63
Figura 59. Solución número de Reynolds 300.....	63
Figura 60. Solución número de Reynolds 300. Zoom. $xr/h = 10$	63
Figura 61. Solución número de Reynolds 200.....	64
Figura 62. Solución número de Reynolds 200. Zoom. $xr/h = 6,5$	64
Figura 63. Solución número de Reynolds 150.....	64

Figura 64. Solución número de Reynolds 150. Zoom. $xr/h = 5,5$	64
Figura 65. Solución número de Reynolds 100.....	65
Figura 66. Solución número de Reynolds 100. Zoom. $xr/h = 3,5$	65
Figura 67. Solución número de Reynolds 50.....	65
Figura 68. Solución número de Reynolds 50. Zoom. $xr/h = 2$	65
Figura 69. (Macagno y Hung, 1967).	66
Figura 70. (Macagno y Hung, 1967).	67
Figura 71. (Hung y Macagno, 1966).	68
Figura 72. Readherencia vs número de Reynolds. Verificación.....	69
Figura 73. Solución número de Reynolds 200, oscilaciones.	70
Figura 74. (Clean combustion & energy research lab, 2024)	71
Figura 75. Mallado de expansión súbita tridimensional axialsimétrica.....	81
Figura 76. Resultado bajo modelo $k - \varepsilon$	85
Figura 77. Distancia de readherencia.....	86
Figura 78. (Khezzar, Whitelaw y Yianneskis, 1986).....	86
Figura 79. Velocidad media en función del radio.....	87
Figura 80. Velocidad media en función del radio.....	88
Figura 81. Velocidad fluctuante en función del radio.	89
Figura 82. Velocidad fluctuante en función del radio.	90
Figura 83. Velocidad media en función del radio.....	93
Figura 84. Velocidad media en función del radio.....	94

Figura 85. Velocidad fluctuante en función del radio.	95
Figura 86. Velocidad fluctuante en función del radio.	96
Figura 87. (Elghobashi, 1994)	98
Figura 88. Relación entre parámetro αe y coeficiente de restitución e .(Tsuji, Tanka e Ishida, 1992).	101
Figura 89. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de velocidades.	103
Figura 90. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Líneas de corriente.	103
Figura 91. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de variable α	104
Figura 92. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de variable α , partículas.	105
Figura 93. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de variable U , partículas.	105
Figura 94. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Partículas en función de U	106
Figura 95. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Partículas en función del diámetro.	106

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

El flujo en conducciones con cambios de geometría abruptos es un problema que se suele presentar en varios campos de la ingeniería, como puede ser en intercambiadores de calor, enfriamiento de dispositivos electrónicos, colectores solares y reactores nucleares según Mushatet et al. (2015), en búsqueda de caídas de presión deseadas. Particularmente, este tipo de conducciones tubulares axialsimétricas, con cambios abruptos de geometría se presenta en la industria hidrocarburífera y gasífera. La utilización de un método experimental para estudiar estos flujos se vuelve complicada, laboriosa y costosa al buscar evaluar distintas geometrías, relaciones de expansión, etc. Como alternativa al método experimental, se recurre a la resolución numérica utilizando códigos computacionales, haciendo hincapié en la contrastación de resultados como forma de validación y/o verificación de los resultados.

1.2 Organización del trabajo

La metodología de abordaje será la de dividir el trabajo en tres grandes partes.

La primera parte estará abocada a la resolución del problema bidimensional bajo la metodología de diferencias finitas (salvo el último caso) donde se resolverán los siguientes casos

1. Caso flujo bidimensional plano potencial con entrada uniforme
2. Caso flujo bidimensional plano potencial con entrada parabólica
3. Caso flujo bidimensional plano viscoso, laminar y simétrico
4. Caso flujo tridimensional axialsimétrico y viscoso laminar
5. Caso flujo bidimensional plano viscoso, laminar y simétrico con OpenFOAM

Los primeros cuatro casos de esta primera parte se resolverán con códigos de elaboración propia, siendo los casos 3 y 4 resueltos bajo la metodología función de corriente – vorticidad con dos esquemas numéricos distintos, pero siempre utilizando diferencias finitas. El último caso se resolverá con el programa OpenFOAM, siendo el único en esta primera etapa con resolución con volúmenes finitos, y se contrastará con el resultado del caso 3. Como última instancia se verificarán estos resultados con resultados numéricos externos. Es importante entender que verificación es la contrastación de nuestros resultados numéricos con resultados numéricos externos. El siguiente esquema ilustra esta idea.

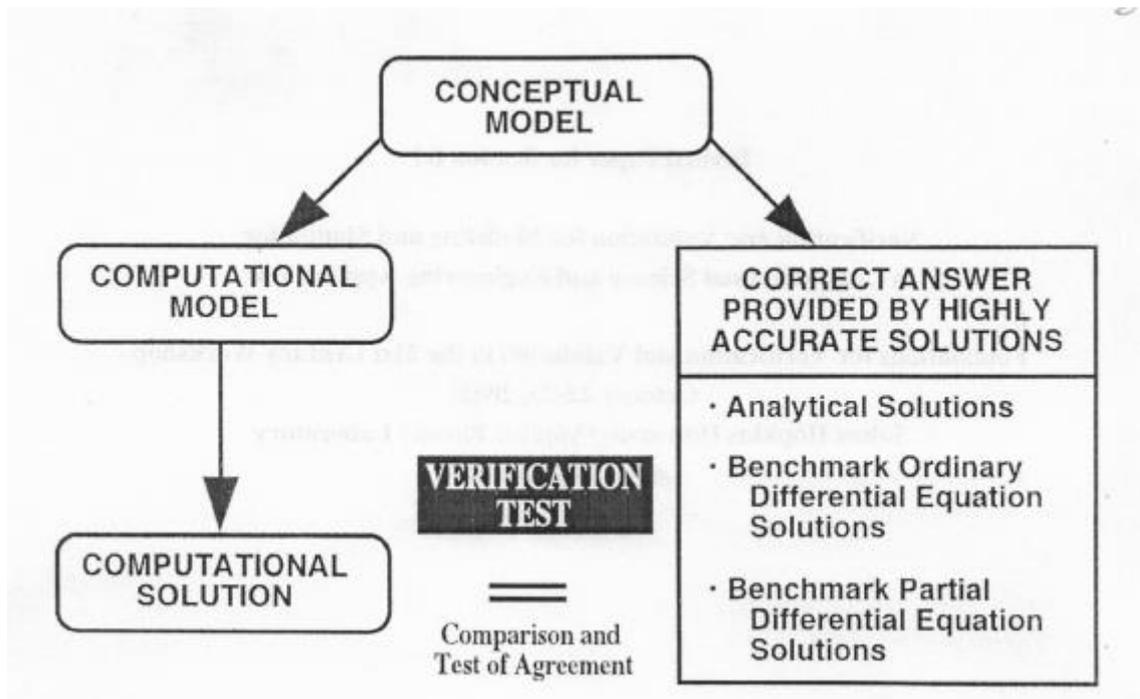


Figura 1. (Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2003).

En la segunda parte se trabajará únicamente con el programa OpenFOAM, ya habiendo pasado por una instancia de evaluación de los resultados obtenidos con el programa tanto con contrastación de resultados externos como propios. Hecho este entrenamiento se resolverá el caso de flujo tridimensional turbulento, la idea será utilizar resultados experimentales para poder justificar el modelo de turbulencia seleccionado, pero siempre bajo la metodología *Reynolds – Averaged Navier – Stokes (RANS)*.

Para la última parte, se trabajará con transporte de sedimentos habiendo seleccionado un modelo de turbulencia adecuado a partir de una instancia de validación con resultados experimentales externos. Se debe entender que validación es cuando se contrastan resultados numéricos propios con resultados experimentales externos o propios.

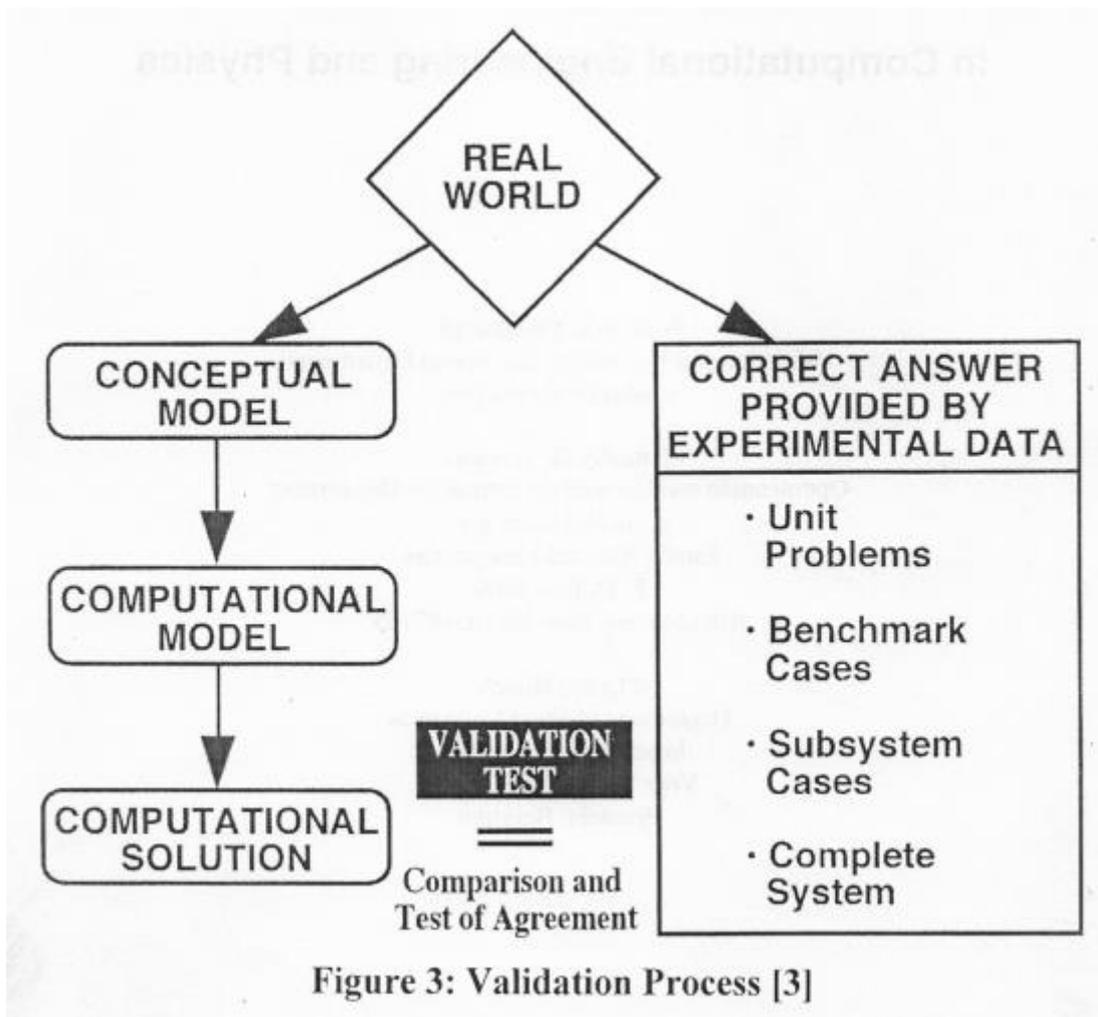


Figura 2. (Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2003).

Para diferenciar el caso de flujo tridimensional axialsimétrico que se reduce a un caso de flujo bidimensional, respecto del caso de flujo tridimensional, se le denominará simplemente flujo axialsimétrico al primero y tridimensional al segundo.

2 OBJETIVO

2.1 Objetivo General

El objetivo principal del presente Proyecto Integrador Profesional es el de la resolución numérica de las ecuaciones de gobierno en un flujo de expansión simétrica brusca con diversas relaciones de radios para el caso axialsimétrico y de altura para el caso bidimensional plano, en ambos casos entre entrada y salida. Se buscará resolver los casos de flujo no viscoso, laminar y turbulento, este último con y sin transporte de sedimentos, con la idea de poder obtener resultado del campo de velocidades, de presiones, y efectos erosivos y fluidodinámicos de recirculación. Nuevamente, con el énfasis puesto en la contrastación de los resultados obtenidos con otros numéricos y/o experimentales.

2.2 Objetivos Específicos

Los objetivos específicos son varios:

- Resolución numérica con diferencias finitas bajo la metodología función de corriente-vorticidad para el régimen laminar y la metodología función de corriente para régimen no viscoso. Se hará uso de diversos esquemas numéricos que permitan la resolución de estos diversos flujos para cada vez mayores números de Reynolds para el caso laminar, siempre bajo condiciones de simetría del flujo. Se verificarán estos resultados con resultados numéricos externos, luego se utilizarán para contrastar con resultados obtenidos con el programa de código abierto OpenFOAM.
- Resolución numérica con el programa de código abierto OpenFOAM que permita avanzar con la resolución ya bajo condiciones de flujo turbulento y tridimensional, de interés en aplicaciones industriales, particularmente permitirá obtener resultados respecto a efectos erosivos, pérdida de carga, etc., que permitan proponer rediseños para minimizar dichos efectos no deseados.

3 MARCO TEÓRICO

Según Wong et al. (2015) los flujos a través de geometrías de expansión bruscas son de interés desde el punto de vista de la Mecánica de los Fluidos y varias aplicaciones prácticas. Los flujos turbulentos a través de expansiones bruscas se encuentran en aplicaciones ingenieriles comunes como en cámaras de combustión, tuberías, reactores nucleares, e intercambiadores de calor. Para la Mecánica de los Fluidos, este flujo tiene todas las complejidades de flujos desprendidos y de readherencia. El flujo de expansión repentina axialsimétrico turbulento ha sido investigado tanto numérica como experimentalmente.

En cuanto a un enfoque experimental, se puede citar el artículo científico de Stieglmeier et al. (1989). De acuerdo a dicho autor, las investigaciones más tempranas de flujo a través de expansiones axialsimétricas estuvieron entorpecidas por la falta de técnicas de medición adecuadas para flujos recirculantes. Las investigaciones de expansiones axialsimétricas han utilizado el láser anemómetro de Doppler para mediciones de velocidad. De todas formas, el uso de este último ha traído dificultades para obtener las componentes de velocidad o medir cerca de la región de la pared, debido a la refracción de los láseres con las superficies cilíndricas. Según Wong et al. (2015), en 1979 Smyth estudió experimentalmente el flujo turbulento con separación y recirculación sobre una expansión repentina simétrica.

Los estudios numéricos más tempranos de flujos de fluido a través de cambios abruptos en la geometría interna llegan al trabajo de Macagno y Hung (1967, citado en Ray, 2012), usando procesos computacionales con dos enfoques; discretización en diferencias finitas estacionarias y no estacionarias para un campo de flujo simétrico bidimensional (2D). Luego hacia 1970 se trabajó en el caso laminar a través de la discretización de función corriente-vorticidad (Ray, 2012). Siguiendo a Wong et al. (2015), hacia 1963 Chaurdevi investigó y analizó las características del flujo en la expansión axialsimétrica usando el modelo $k - \varepsilon$ modificado estándar para curvatura de líneas de corriente. Este último autor no encontró la resolución de este problema con la metodología *Direct Numerical Solution (DNS)*, pero según Kopera et al. (2009), se puede hacer acudir a la publicación del autor Le Hung (1995) para la resolución del caso tridimensional de *backward – facing step* con resolución DNS.

4 METODOLOGÍA

Se presenta en la figura 3 el problema de expansión de un flujo 2D rectangular

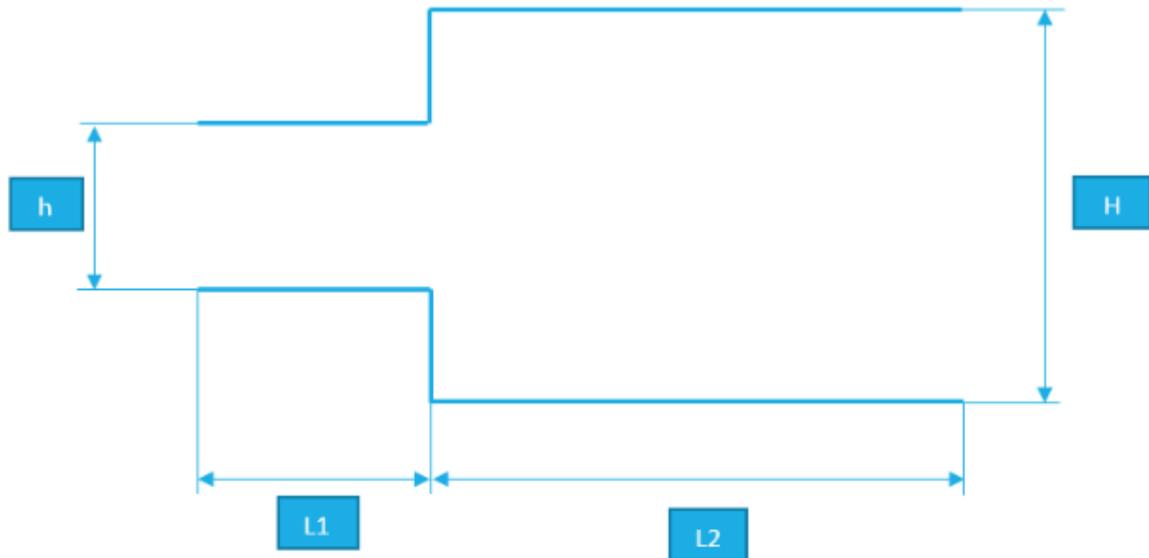


Figura 3. Geometría del problema bidimensional.

La metodología propuesta para resolver este problema consiste en resolverlo, en principio, bajo condiciones de flujo laminar bidimensional plano y axialsimétrico, ambos con la metodología de función de corriente-vorticidad (Tannehill, Anderson y Pletcher, 1997) haciendo uso de diversos esquemas numéricos mediante la utilización de códigos propios, siempre bajo el método de diferencias finitas.

Los resultados alcanzados serán contrastados con los obtenidos mediante el uso del código OpenFOAM, y así verificar por una parte lo realizado personalmente y, por otra parte, llevar adelante la práctica en la utilización de este software.

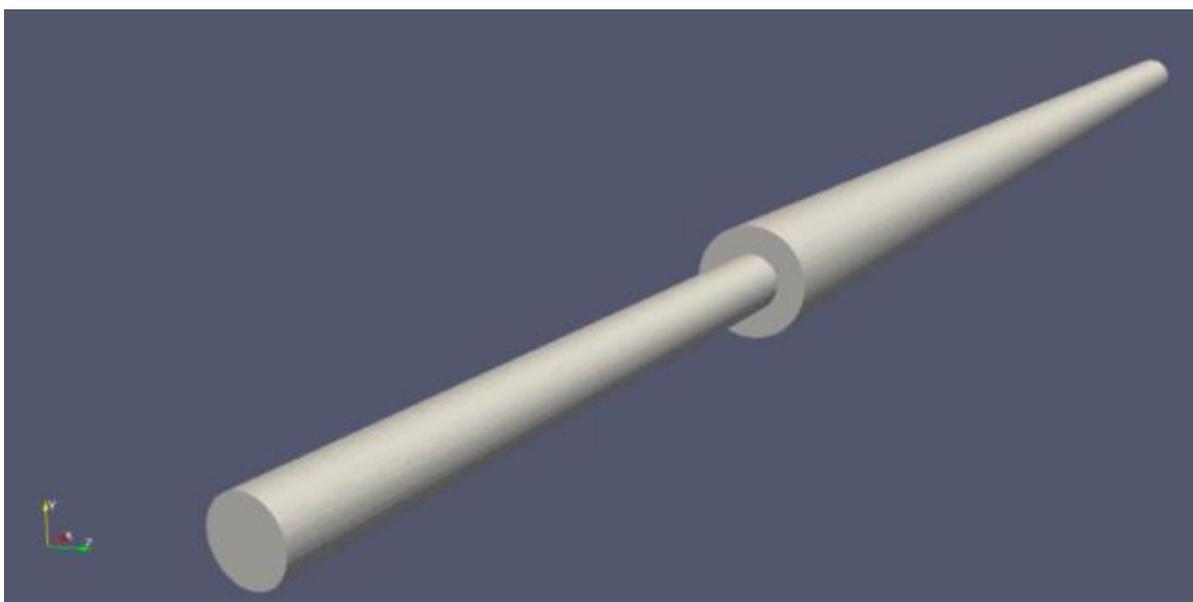


Figura 4. Geometría del problema tridimensional.

Habiendo resuelto el caso laminar que es la base para el aprendizaje del software OpenFOAM, se sigue con la formulación del problema en régimen turbulento tridimensional bajo geometría cilíndrica axialsimétrica (ver figura 4) resolviendo únicamente con el software de código abierto OpenFOAM, buscando según la literatura disponible, el modelo más adecuado dentro de la resolución tipo RANS, pudiendo ser dicho modelo el $k - \varepsilon$, el $k - \omega$, etc. Resuelto esto último, se buscará modelar el transporte de sedimentos para poder visualizar y reconocer los efectos erosivos.

5 DESARROLLO

Se empieza trabajando con el caso bidimensional utilizando la metodología de diferencias finitas para los primeros cuatro casos, con códigos de elaboración propia. Habiendo resuelto esto, se pasará al caso de flujo tridimensional con el método de volúmenes finitos con OpenFOAM.

5.1 Casos bidimensionales

En esta sección se resolverán los siguientes casos

1. Caso flujo bidimensional plano potencial con entrada uniforme
2. Caso flujo bidimensional plano potencial con entrada parabólica
3. Caso flujo bidimensional plano viscoso, laminar y simétrico
4. Caso flujo tridimensional viscoso laminar y axialsimétrico (flujo bidimensional)
5. Caso flujo bidimensional plano viscoso, laminar y simétrico con OpenFOAM

La geometría del problema se presentó en la figura 3. Se tiene la altura h como la de la sección menor, de entrada, y la altura H como la de la sección mayor, de salida. Por otro lado, se tendrá U_m como la velocidad media de entrada, L_1 será la longitud hasta la expansión brusca y L_2 será la longitud hasta la salida.

Se llevará a cabo el planteo de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y continuidad que son las ecuaciones de gobierno para el problema en cuestión. Previo a esto, se realizarán las siguientes hipótesis simplificativas comunes a los casos 3, 4 y 5

1. Medio continuo
2. Flujo bidimensional
3. Régimen estacionario
4. Fluido newtoniano
5. Sistema de referencia inercial
6. Flujo laminar
7. Efectos gravitatorios despreciables
8. Propiedades físicas constantes
9. Flujo incompresible

Se trabajará con un sistema de referencia inercial como se ve observa en la figura 5. A partir del mismo se definen: vector velocidad \mathbf{V} , en negrita los vectores en el presente trabajo, con sus componentes u, v, w según el sentido positivo del eje x, y, z respectivamente.

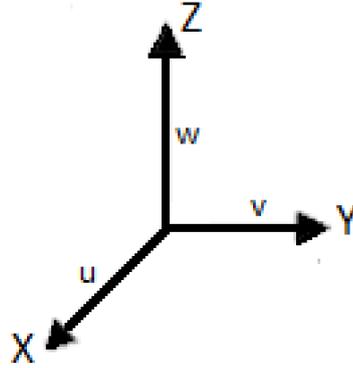


Figura 5. Sistema de referencia inercial.

A continuación, se tienen las ecuaciones de Navier-Stokes bajo las hipótesis mencionadas anteriormente:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

donde p es la presión. A partir del mismo se deduce el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que nace de utilizar las definiciones de función de corriente y vorticidad.

Según Tannehill, Anderson y Pletcher (1997) resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible, en principio, podría hacerse a partir de resolver el caso compresible donde simplemente a , velocidad del sonido en el medio, tienda a infinito, o sea $a \rightarrow \infty$. Esto significaría que el número de Mach

$$M = \frac{V}{a} \quad (4)$$

tienda a cero, $M \rightarrow 0$.

Esto requeriría un tiempo computacional muy grande, no solo por el agregado adicional de dificultad por trabajar con el caso compresible sino también por la limitación del paso temporal. Se tiene que la velocidad del sonido, conforme aumenta la misma, hace que el paso del tiempo disminuya, por lo que el paso del tiempo debería tender a cero y esto se traduciría en un tiempo computacional extremadamente grande. Por esta razón, el caso incompresible se trabajará de forma especial.

Uno de los métodos más populares para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales incompresibles es el método de función corriente-vorticidad (Tannehill, Anderson y Pletcher, 1997). En este método, se realiza un cambio de variables por la definición del módulo vector vorticidad ζ , y de la función de corriente ψ . Esto es,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (7)$$

Se parte del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes adimensionalizadas, ecuaciones (8) a (10), donde se hace uso de h y U_m , la altura y velocidad media a la entrada respectivamente, para adimensionalizar.

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right\} \quad (8)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (10)$$

donde

$$V^* = \frac{V}{U_m} \quad (11)$$

$$x^* = \frac{x}{h} \quad (12)$$

$$y^* = \frac{y}{h} \quad (13)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U_m^2} \quad (14)$$

Se introducen las variables vorticidad y función de corriente adimensionalizadas

$$\zeta^* = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = u^* \quad (16)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -v^* \quad (17)$$

De esta forma, lo que se consigue es combinar las dos ecuaciones de cantidad de movimiento más la ecuación de continuidad para obtener el siguiente sistema, ecuaciones (18) a (19):

$$u^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial y^{*2}} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = -\zeta^* \quad (19)$$

siendo el número de Reynolds definido como $Re = \frac{U_m h}{\nu}$.

Por último, se graficará el coeficiente de presión a lo largo de la línea media. A partir de la misma, se tiene que, si V_1 y p_1 son la velocidad y la presión en la entrada respectivamente

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho V_1^2} \quad (20)$$

5.1.1 Flujo potencial: entrada y salida uniforme

En primera instancia se resuelve para el caso de flujo potencial. Las hipótesis que reemplazan a las hipótesis 4, 6 y 8 anteriormente mencionadas son:

- Flujo irrotacional
- De despreciar los efectos viscosos

de tal forma de obtener vorticidad nula. Se llega entonces a la siguiente ecuación, la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (21)$$

Las condiciones de contorno serán:

- Parte inferior del contorno de la figura 3, $\psi^* = 0$.
- Parte superior del contorno de la figura 3, $\psi^* = 1$.
- Entrada y salida con distribución lineal entre $\psi^* = 0$ y $\psi^* = 1$. Al ser la distribución de velocidad axial uniforme, siguiendo la ecuación (16) se tendrá una distribución lineal de función de corriente al integrar la misma.

Para resolver esta ecuación, se hace uso de diferencias centradas. En particular se resolverá el caso con una malla cuadrada, o sea, $\Delta x^* = \Delta y^*$. De esta forma, se tiene la ecuación en diferencias finitas para la ecuación de flujo potencial,

$$4\psi_{i,j}^* = \psi_{i+1,j}^* + \psi_{i-1,j}^* + \psi_{i,j+1}^* + \psi_{i,j-1}^* \quad (22)$$

con un orden de error de truncamiento de $O[(\Delta x^*)^2]$ para este esquema. Se tiene que los subíndices i y j representan el i -ésimo y j -ésimo nodo del mallado.

Por último, se define el coeficiente de presión para un flujo potencial haciendo uso de la ecuación de Bernoulli, válida desde ya en flujo potencial. Se tiene que

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho V_1^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2 \quad (23)$$

de esta forma, el valor de C_p está definido para cada punto si en dicho punto está definida la velocidad. Esto es válido tanto para la parte 1 y 2 puesto que en ambos casos se resuelve el caso potencial.

Los resultados tienen un salto espacial $\Delta x^* = \Delta y^* = h/N$, siendo N un número a elección que a medida que aumenta, densifica el mallado.

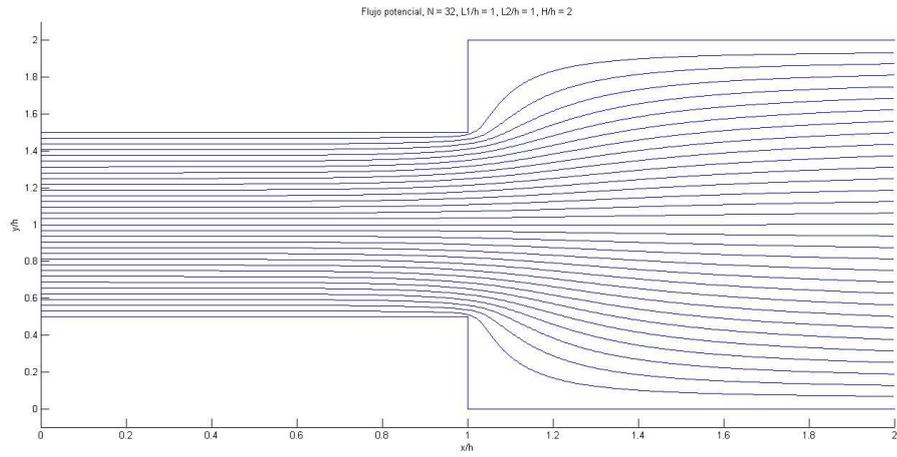


Figura 6. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.

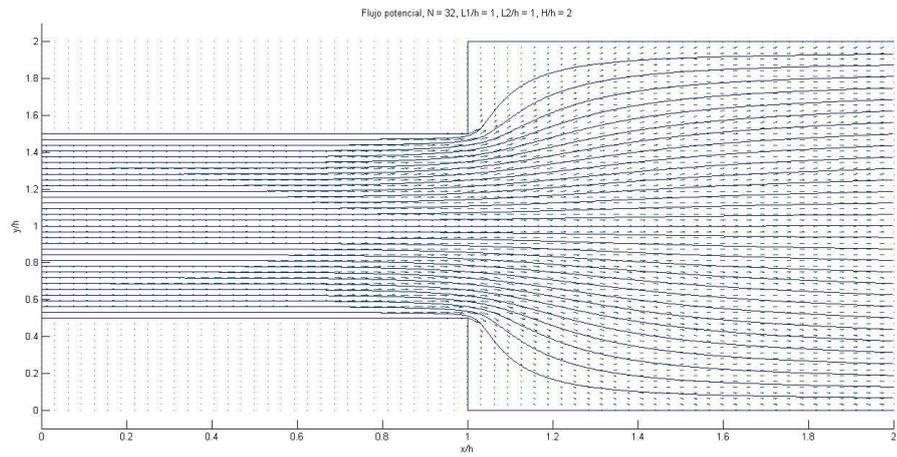


Figura 7. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.

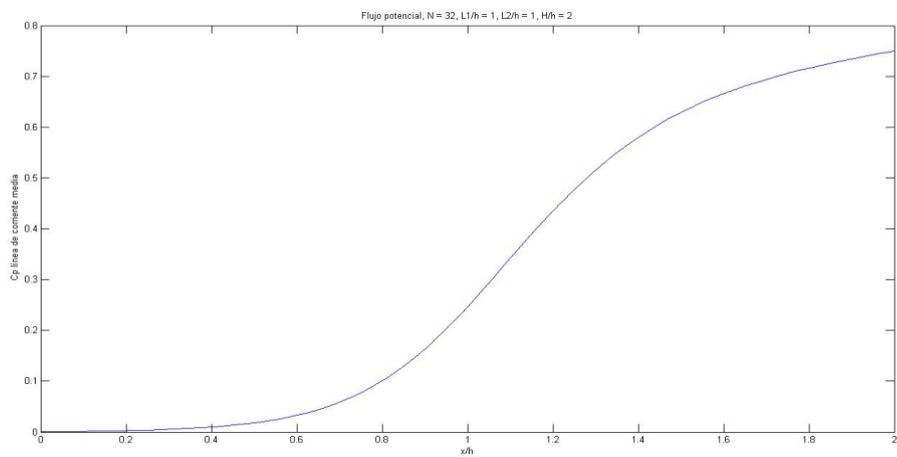


Figura 8. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$. C_p línea corriente media.

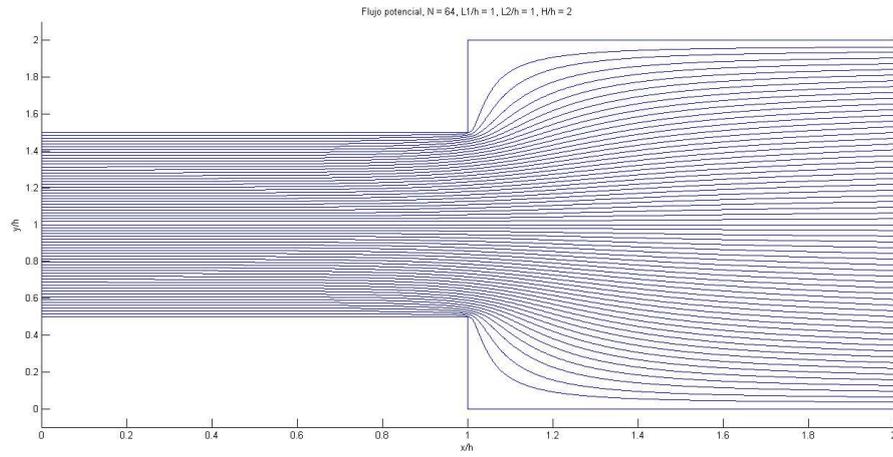


Figura 9. Solución potencial. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.

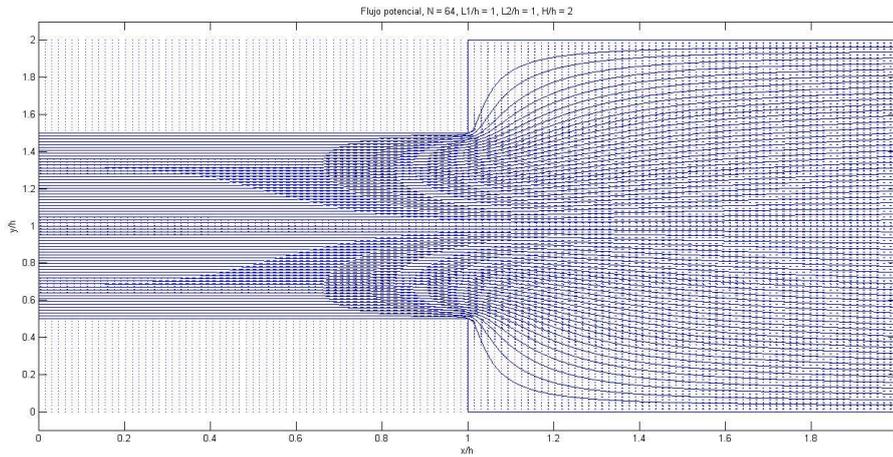


Figura 10. Solución potencial. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.

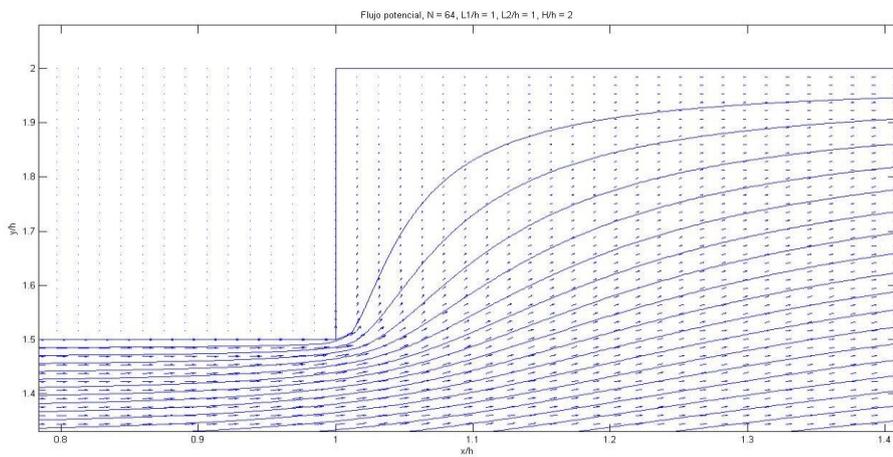


Figura 11. Solución potencial zoom $x4$ en la zona cercana al quiebre. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$.

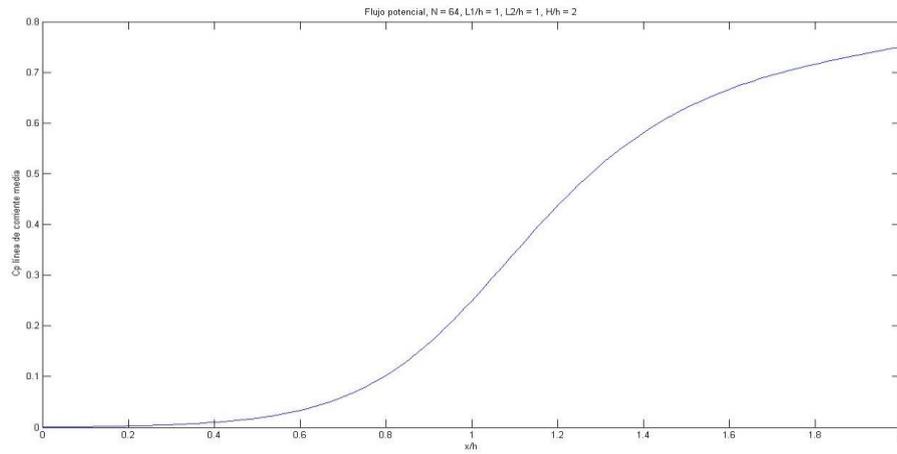


Figura 12. Solución potencial. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 1$, $H/h = 2$. C_p línea de corriente media.

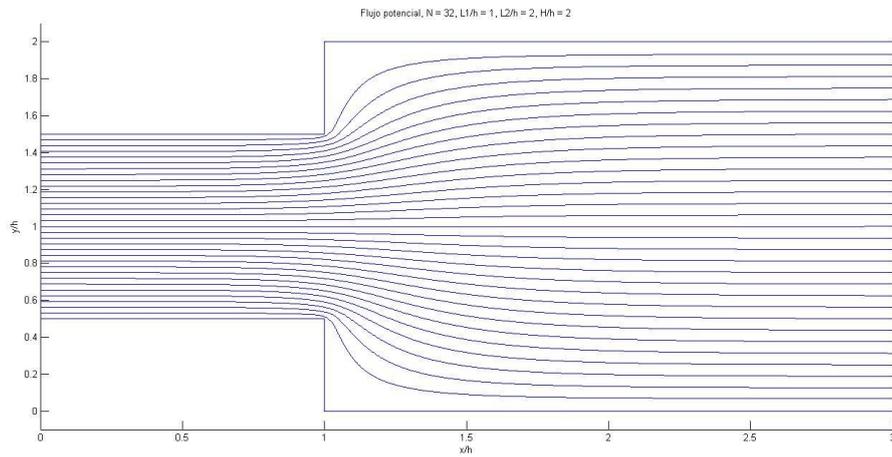


Figura 13. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.

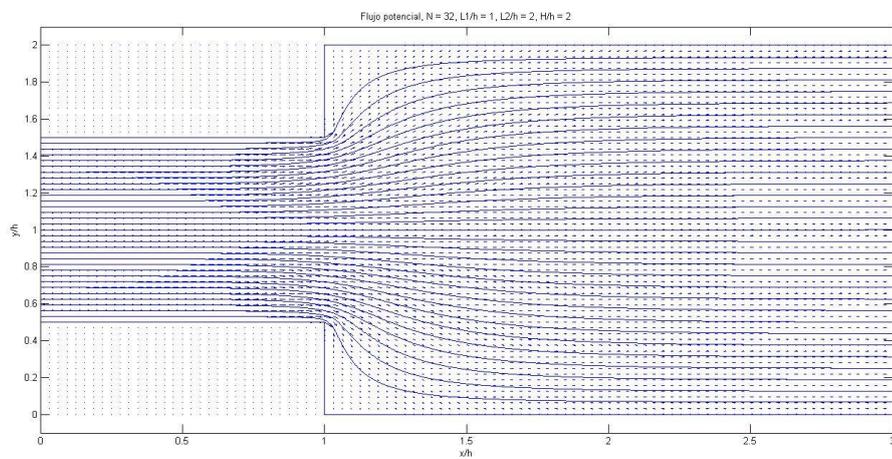


Figura 14. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.

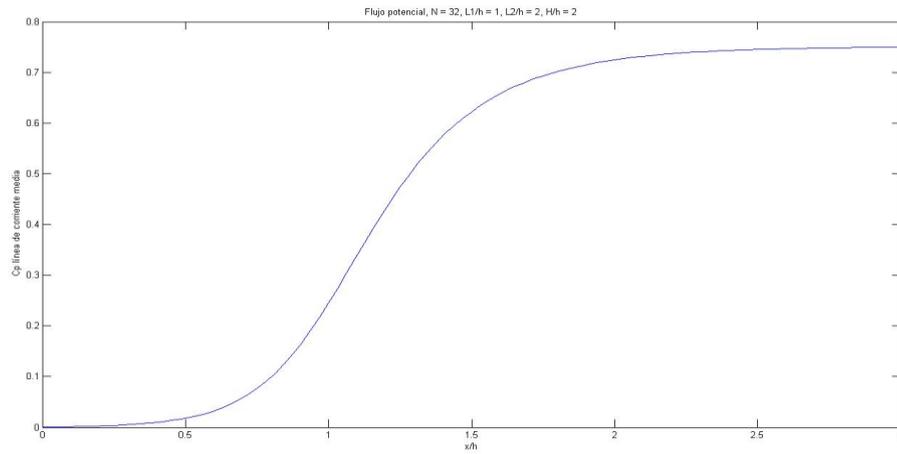


Figura 15. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$. C_p línea de corriente media.

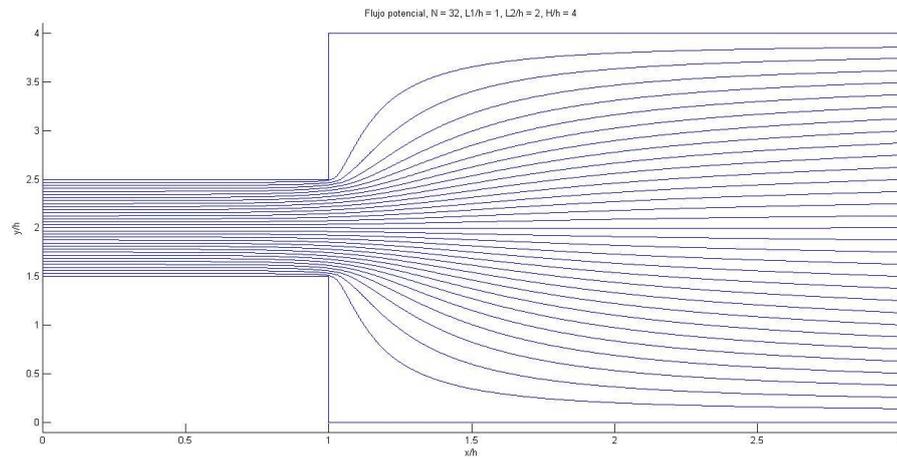


Figura 16. Solución potencial. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 4$. Líneas de corriente.

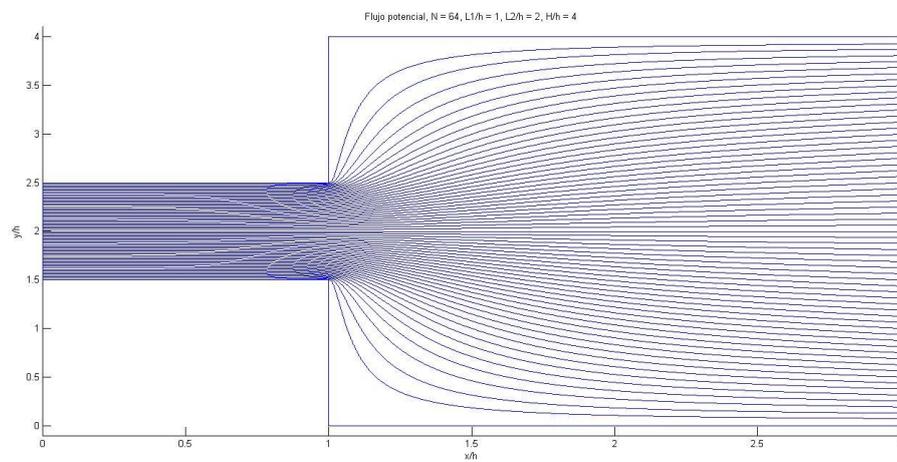


Figura 17. Solución potencial. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 4$. Vectores velocidad.

Se puede observar que, debido a la naturaleza del flujo potencial, no se presentan vórtices en los peldaños. Las figuras 6 y 9 corresponden a casos que tienen exactamente la misma geometría, pero difieren en la discretización, en particular el caso de la figura 9 corresponde a una discretización del doble de nodos. Se puede observar comparando dichas figuras que las líneas de corriente cercanas a la pared están, justamente, más cerca de la misma, ya que el programa obtiene las líneas de corriente a partir de las velocidades las cuales son aproximadas por ser una solución numérica, al mejorar la discretización mejora la aproximación a las velocidades y, por consiguiente, las líneas de corriente.

Se puede recalcar también, comparando las figuras 6 y 13, que en el primer caso no se alcanza a desarrollar la solución, puesto que, en este caso, se le impone una salida de flujo uniforme a una distancia demasiado corta, en el caso de la figura 13, donde la longitud L_2 se ha duplicado respecto al caso de la figura 6, hay un pasaje más suave y menos forzada a la salida uniforme de flujo impuesta.

Además, se tiene las figuras 16 y 17, donde se aumentó la relación H/h de la geometría, es notorio que hay un ensanchamiento también de las líneas de corriente y también es necesario una mayor densificación de mallado para representar mejor las líneas de corriente.

Por último, en todos los casos, la representación de C_p es análoga, se produce un aumento del mismo dado que la presión debe aumentar debido a que la velocidad está disminuyendo, esto siguiendo los lineamientos de la ecuación de Bernoulli.

5.1.2 Flujo potencial: entrada y salida parabólica

No se agregan hipótesis nuevas en cuanto al flujo. La única diferencia es que se fuerza una entrada y salida viscosa, de distribución parabólica tipo Poiseuille 2D. Para ello, se utiliza la expresión de dichas distribuciones:

$$u_{ent} = \frac{4u_{max}}{h^2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (24)$$

$$u_{ent} = \frac{3Q}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (25)$$

$$u_{sal} = \frac{4u_{max}}{H^2} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (26)$$

$$u_{sal} = \frac{3Q}{H^3} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (27)$$

Por definición de línea de corriente se tiene que

$$u_{ent} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{3Q}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (28)$$

$$u_{sal} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{4u_{max}}{H^2} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (29)$$

$$\psi_{ent} = \frac{3Q}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 y - \frac{y^3}{3} \right] + \mathbb{C} \quad (30)$$

$$\psi_{sal} = \frac{3Q}{H^3} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^2 y - \frac{y^3}{3} \right] + \mathbb{C} \quad (31)$$

La idea de forzar esta entrada y salida es la de poder obtener una solución inicial para el proceso iterativo del siguiente caso.

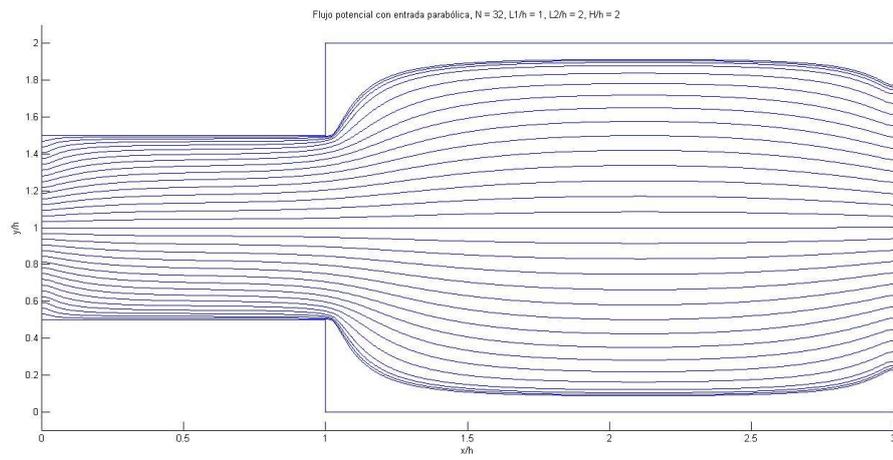


Figura 18. Solución potencial entrada parabólica. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.

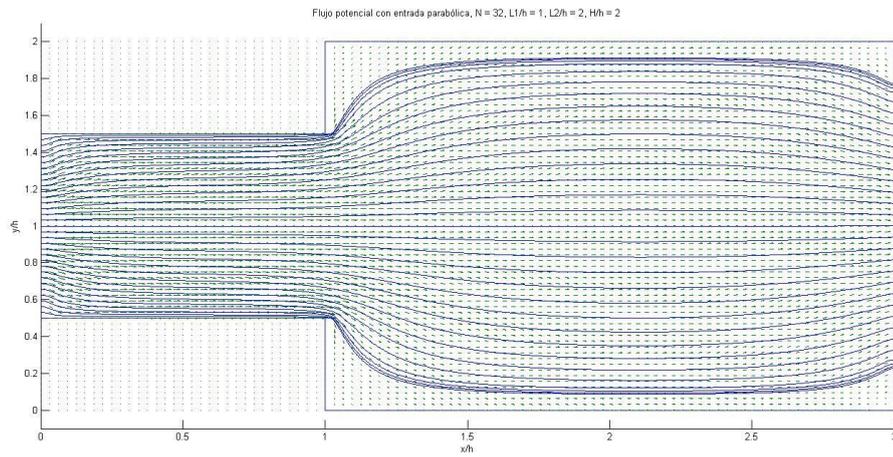


Figura 19. Solución potencial entrada parabólica. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$. Vectores velocidad.

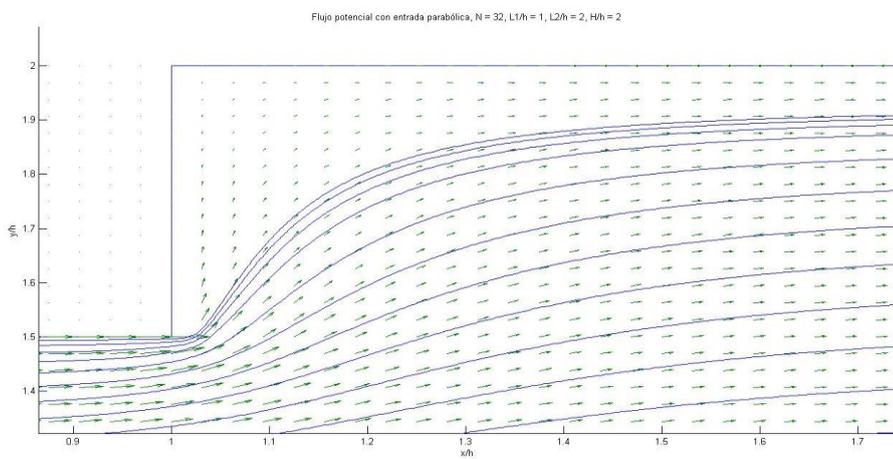


Figura 20. Solución potencial entrada parabólica zoom $\times 4$ en expansión. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$.

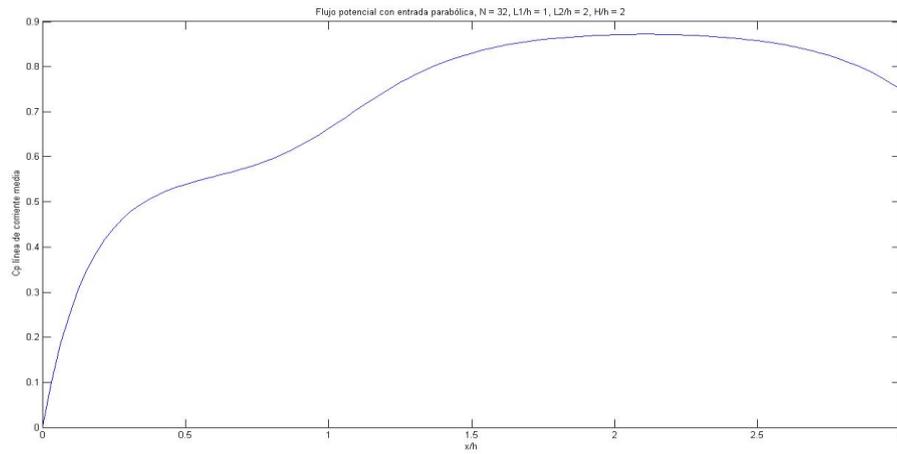


Figura 21. C_p línea de corriente media. $N = 32$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$.

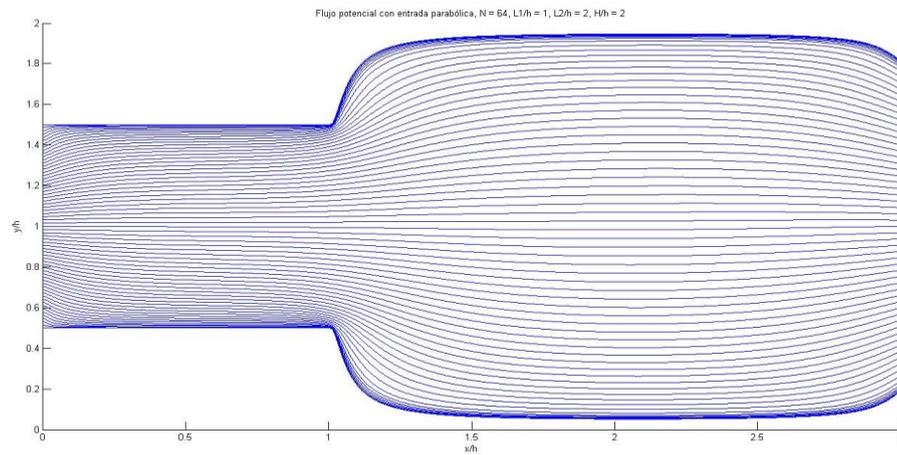


Figura 22. Solución potencial entrada parabólica. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.

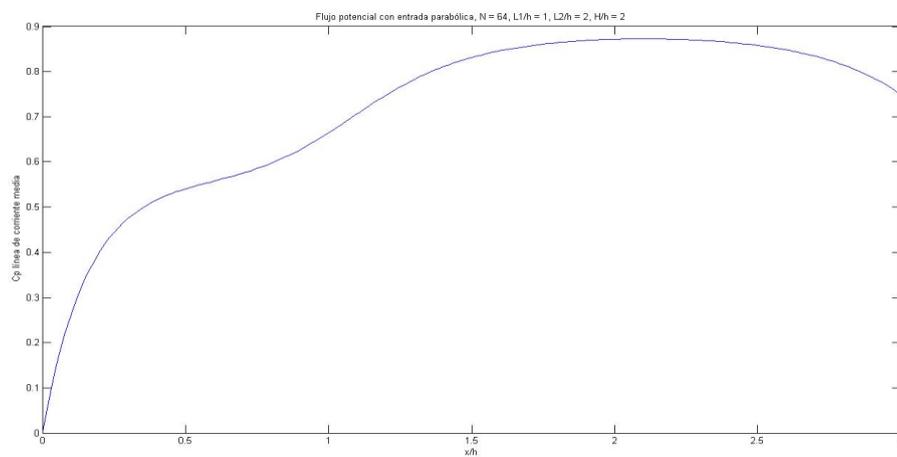


Figura 23. C_p línea de corriente media. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 2$, $H/h = 2$.

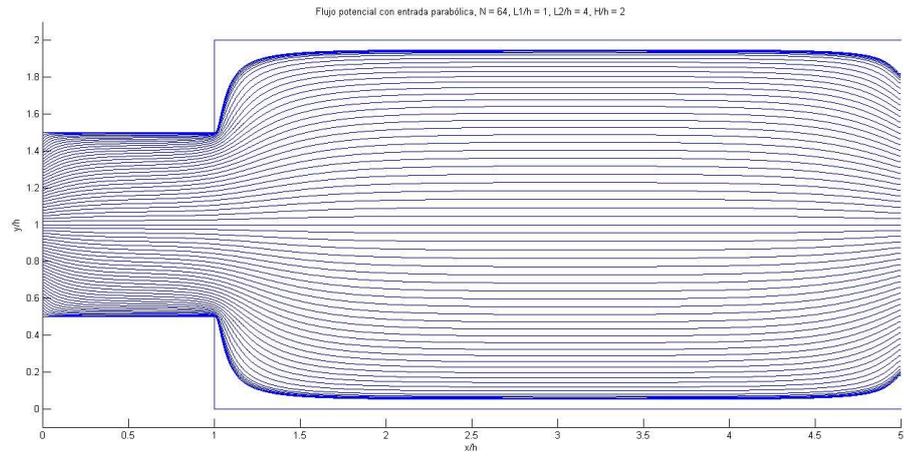


Figura 24. Solución potencial entrada parabólica. $N = 64$, $L_1/h = 1$, $L_2/h = 4$, $H/h = 2$. Líneas de corriente.

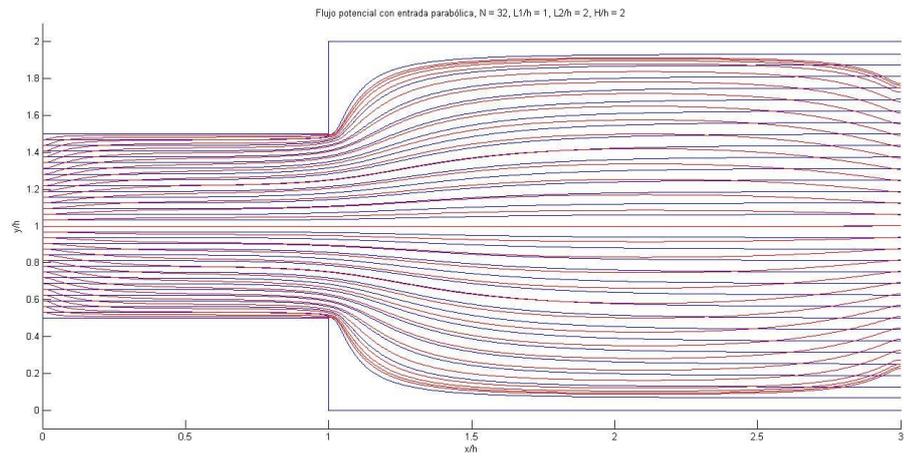


Figura 25. Comparación de líneas de corriente caso 1 y 2.

En primera instancia, se propuso resolver este caso para tener una solución inicial para poder resolver el siguiente caso. Debido a la naturaleza del flujo potencial, por más que se impongan condiciones viscosas a la entrada y salida, el flujo tiende a una solución no viscosa, por lo que no es una buena solución para iniciar el proceso iterativo debido a que la vorticidad sería nula.

Por otro lado, se puede ver como, por más de que se impongan condiciones de entrada y salida más reales propias de un flujo con una viscosidad no despreciable, la misma ecuación de Laplace hace que aun así no se presenten los vórtices que deberían aparecer en la zona de expansión súbita de flujo.

5.1.3 Flujo viscoso: 2D plano solución función corriente - vorticidad

Para este caso, se resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las ecuaciones 18 a 19.

Se puede resolver el problema, que originalmente incluía dos ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento y una de continuidad, únicamente con dos ecuaciones diferenciales, una parabólica (la ecuación de vorticidad) y una elíptica (la de función de corriente). Por un lado, esto resulta beneficioso puesto que para el sistema de ecuaciones originales (1 a 3), no había una ecuación explícita de la presión. Por otro lado, esta forma de resolver el problema trae consigo dificultades en las condiciones de borde (Tannehill, Anderson y Pletcher, 1997).

Se puede obtener una ecuación para la presión a partir de derivar la ecuación (7) y la ecuación (8) respecto de x e y , respectivamente, para luego sumar dichas expresiones y agregar la ecuación de continuidad y obtener

$$\nabla^2 p^* = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^{*2}} = 2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \quad (32)$$

De esta manera, para los nodos interiores se puede obtener que, según diferencias centradas, para una malla cuadrada,

$$\begin{aligned} & p^*_{i-1,j} + p^*_{i+1,j} + p^*_{i,j-1} + p^*_{i,j+1} - 4p^*_{i,j} \\ &= \frac{1}{2} [(u^*_{i+1,j} - u^*_{i-1,j})(v^*_{i,j+1} - v^*_{i,j-1}) \\ & - (u^*_{i,j+1} - u^*_{i,j-1})(v^*_{i+1,j} - v^*_{i-1,j})] \end{aligned} \quad (33)$$

el mismo tiene un orden de error de truncamiento de $O[(\Delta x^*)^2]$.

Mientras que para las paredes podemos escribir una ecuación diferencial para la presión.

$$\frac{\partial p^*}{\partial s^*} = -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial n^*} \right) \quad (34)$$

donde s^* y n^* son las direcciones tangente y normal a la superficie correspondiente, respectivamente (Tannehill, Anderson y Pletcher, 1997).

5.1.3.1 Diferencias centradas

Se propondrá un esquema centrado. Utilizando dicho sistema se tiene que el sistema a resolver es el siguiente, para el caso de una malla cuadrada,

$$\begin{aligned} & \alpha (\zeta_{i+1,j}^* - \zeta_{i-1,j}^*) + \beta (\zeta_{i,j+1}^* - \zeta_{i,j-1}^*) \\ &= \frac{4}{Re} \left(-4\zeta_{i,j}^* + \zeta_{i+1,j}^* + \zeta_{i-1,j}^* + \zeta_{i,j+1}^* + \zeta_{i,j-1}^* \right) \\ & \alpha = \psi_{i+1,j}^* - \psi_{i-1,j}^* \\ & \beta = \psi_{i,j+1}^* - \psi_{i,j-1}^* \end{aligned} \quad (35)$$

$$-4\psi_{i,j}^* + \psi_{i+1,j}^* + \psi_{i-1,j}^* + \psi_{i,j+1}^* + \psi_{i,j-1}^* = -\Delta x^{*2} \zeta_{i,j}^* \quad (36)$$

y se tiene que el error de truncamiento es de orden $O[(\Delta x^*)^2]$.

El método de resolución es el siguiente:

Se resolverá de manera iterativa, además, se aprovechará la simetría. Para ello, se empieza con unos valores de nodos interiores de líneas de corriente y de vorticidad.

En el caso de líneas de corriente se utiliza la solución potencial obtenida anteriormente y para vorticidad se suponen unos valores intermedios (ya que serían nulos para una solución potencial).

En cuanto a las condiciones de contorno, para las líneas de corriente las mismas están definidas ya que la pared superior es una línea de corriente en sí, se tiene la entrada y salida del flujo que obedecen una distribución parabólica y, como se resolverá la mitad de la geometría, el eje de simetría es también una línea de corriente. Siendo así las condiciones de contorno:

$$\psi_{sup}^* = 1 \quad (37)$$

$$\psi_{inf}^* = \frac{1}{2} \quad (38)$$

$$\psi_{izq}^* = ay^{*3} + by^{*2} + cy^* + d \quad (39)$$

$$\psi_{der}^* = a'y^{*3} + b'y^{*2} + c'y^* + d' \quad (40)$$

La entrada tiene una distribución polinómica de tercer grado ya que la velocidad tiene una distribución polinómica de segundo grado. Se evalúan los valores de función de corriente y su derivada para distintos valores de y^* a cumplir para la entrada:

$$\psi^* \left(\frac{H}{2h} \right) = \frac{1}{2} \quad (41)$$

$$\psi^* \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} + 1 \right) \right] = 1 \quad (42)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \left(\frac{H}{2h} \right) = u \left(\frac{H}{2h} \right) = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} + 1 \right) \right] = u_{max} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} + 1 \right) \right] = 0 \quad (44)$$

Mientras que para la salida se tiene que las condiciones a cumplir son

$$\psi^* \left(\frac{H}{2h} \right) = \frac{1}{2} \quad (45)$$

$$\psi^* \left(\frac{H}{h} \right) = 1 \quad (46)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \left(\frac{H}{2h} \right) = u \left(\frac{H}{2h} \right) = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \left(\frac{H}{h} \right) = u_{max} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \left(\frac{H}{h} \right) = 0 \quad (48)$$

Para la vorticidad se conocen los valores en los contornos laterales, a partir de la definición de la misma, ecuación 5, y de conocer la distribución de velocidades en dichos contornos. En cuanto a contornos cuyos valores de vorticidad sean desconocidos, se referirá a la fórmula de Jensen, (Tannehill, Anderson y Pletcher, 1997),

$$\zeta_w^* = \frac{3,5\psi_w - 4\psi_{w+1} + 0,5\psi_{w+2}}{\Delta y^{*2}} \quad (49)$$

donde dicha aproximación del valor de la vorticidad en la pared será utilizada en las paredes superiores e inferiores, y será parte del proceso iterativo.

Por último, hay dos esquinas filosas en la pared superior, justo en el quiebre. Según Kamal, Abdalla y Sarhan (1997), esas esquinas son puntos de singularidad, por lo que requieren un tratamiento especial. La función de corriente es, efectivamente, unitaria en dichos puntos, se propone un promedio de la vorticidad de los puntos adyacentes.

El proceso iterativo empieza calculando los valores de vorticidad en los contornos de forma aproximada a partir de los valores de líneas de corriente. Luego se calculan los valores de nodos interiores de función de corriente y de vorticidad según el sistema correspondiente a las ecuaciones 35 a 36, y se repite el proceso hasta llegar a un valor de error ingenierilmente aceptable.

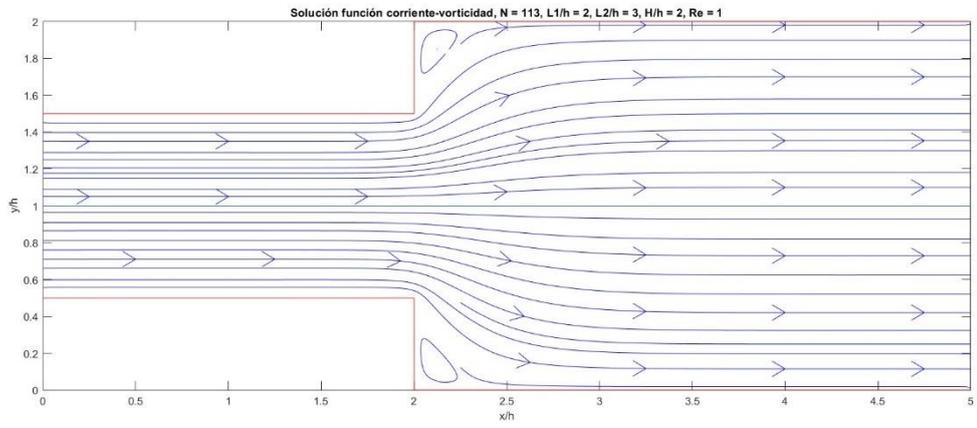


Figura 26. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 3$. Líneas de corriente.

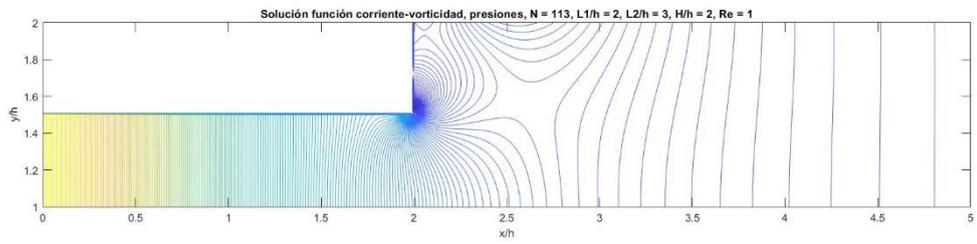


Figura 27. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 3$. Isobaras.

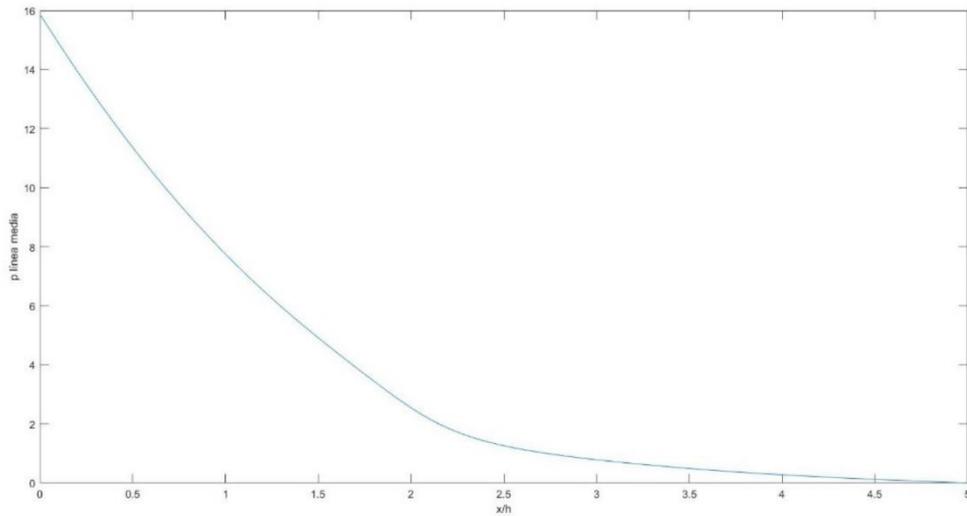


Figura 28. Presión línea media. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 3$.

Se puede ver en la figura 26 en primera instancia las recirculaciones que son de esperarse en este problema. Por otro lado, en la figura 27 se pueden ver las isobaras, se puede ver una zona de bajas presiones próximo a lo que sería la expansión súbita del flujo, y además se pueden ver las isobaras verticales correspondientes a una solución de tipo Poiseuille a la entrada y salida. Por último, viendo la presión en la línea media que todavía se tiene una salida forzada, la longitud L_2 debería ser mayor. Se presenta este mismo caso a continuación.

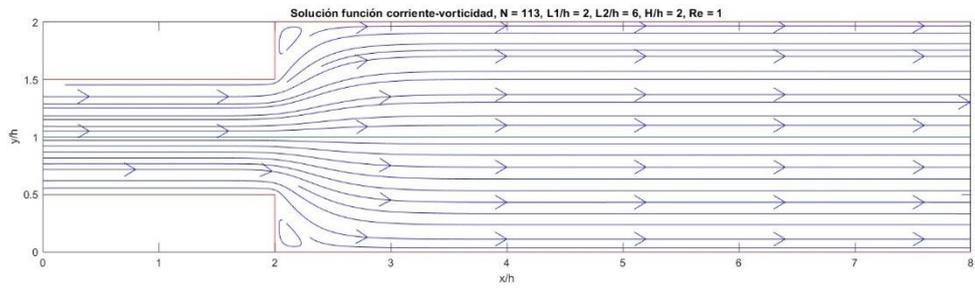


Figura 29. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 6$. Líneas de corriente.

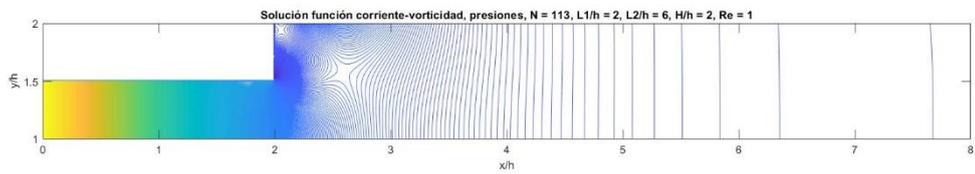


Figura 30. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 6$. Isobaras.

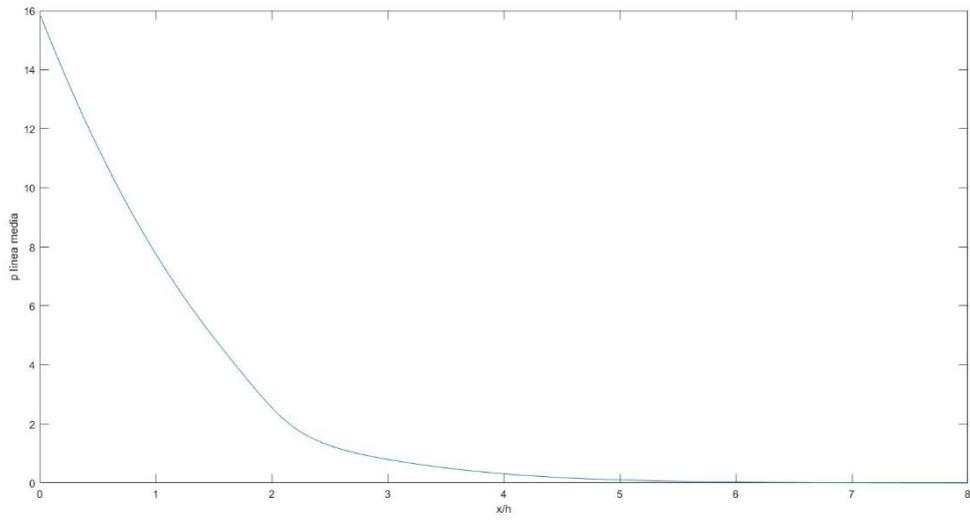


Figura 31. Presión línea media. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 6$.

A continuación, se presenta la solución para un número de Reynolds de 10.

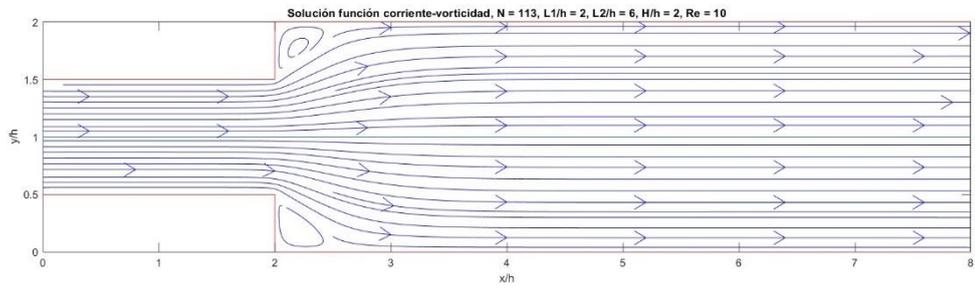


Figura 32. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10$, $H/h = 2$, $L_2/h = 6$. Líneas de corriente.

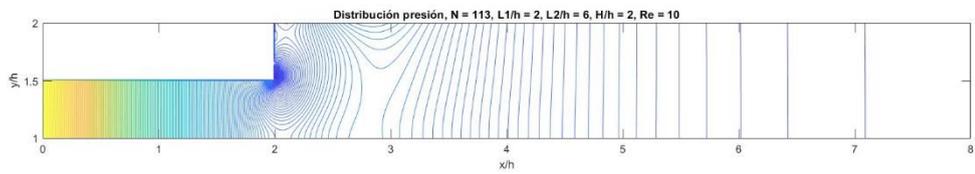


Figura 33. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 10$, $H/h = 2$, $L_2/h = 6$. Isobaras.

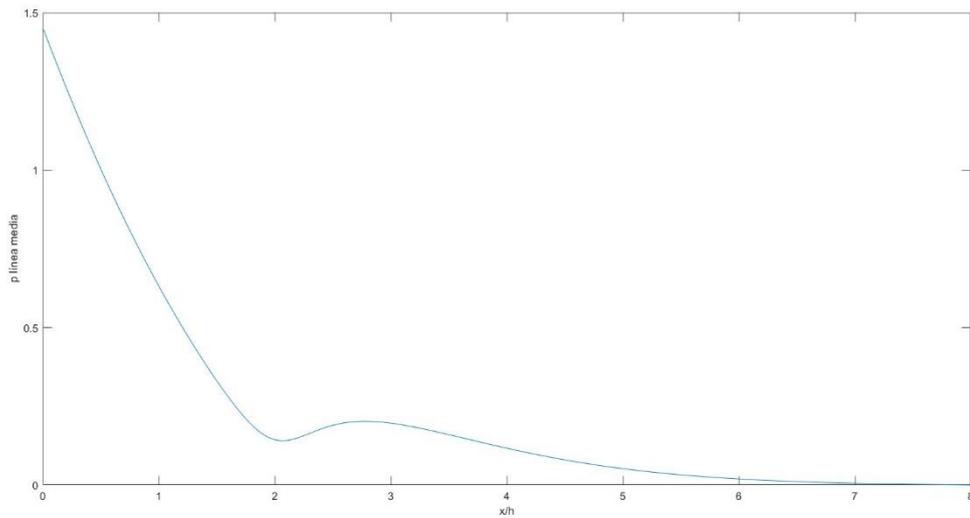


Figura 34. Presión línea media. $Re = 10$, $H/h = 2$, $L_2/h = 6$.

Se puede observar al comparar las figuras 29 y 32 que al haber duplicado la distancia L_2 la presión ha llegado a un valor constante a la salida. Así, se ha conseguido una solución donde la salida no ha sido impuesta de manera forzosa muy cerca de la expansión.

Se puede recalcar también, comparando las figuras 29 y 32, que la distancia hasta la readherencia se ha duplicado prácticamente debido al aumento del número de Reynolds, esto es debido a que los efectos inerciales se han incrementado notoriamente.

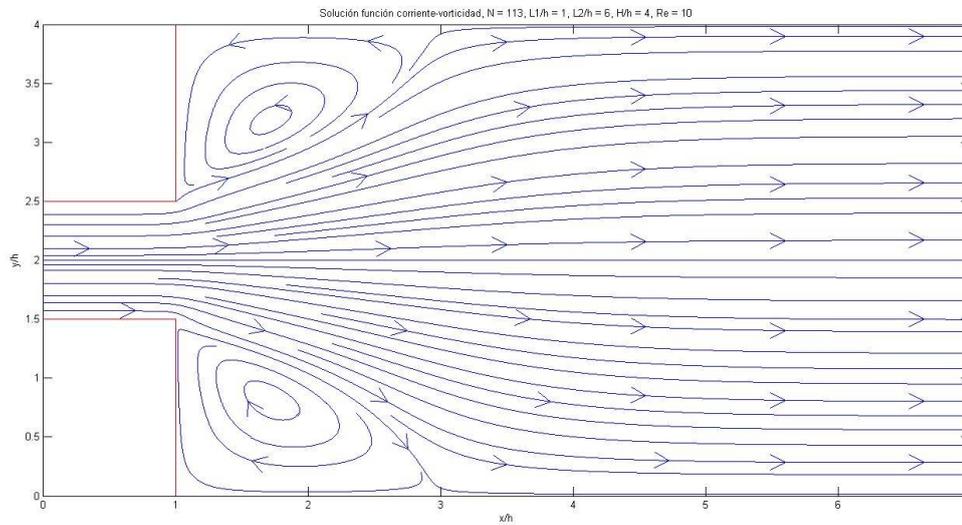


Figura 35. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10$, $H/h = 4$, $L_2/h = 6$. Líneas de corriente.

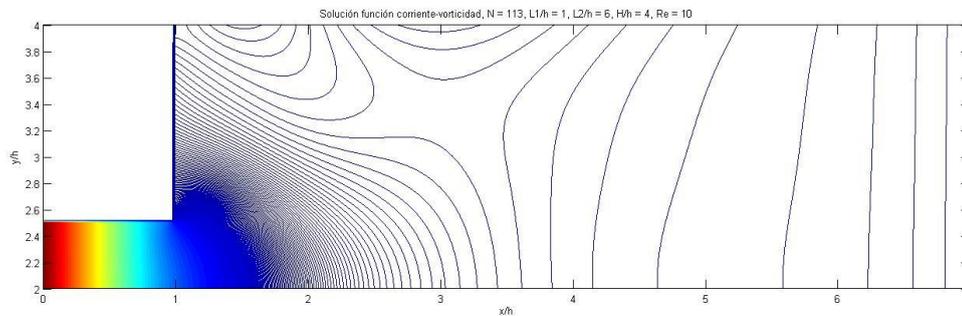


Figura 36. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10$, $H/h = 4$, $L_2/h = 6$. Isobaras.

Es notorio también, la dependencia de las recirculaciones con la relación de expansión, en este caso se ha duplicado la misma y se puede apreciar que la readherencia se produce a una distancia considerablemente mayor para el mismo número de Reynolds, esto se puede ver comparando las figuras 31 y 35, donde la readherencia se da a una distancia aproximada de $0,5h$ y $2h$, respectivamente. Dichas recirculaciones se obtienen de forma visual.

A continuación, se reproduce el mismo problema, pero aumentando la longitud de expansión aguas abajo.

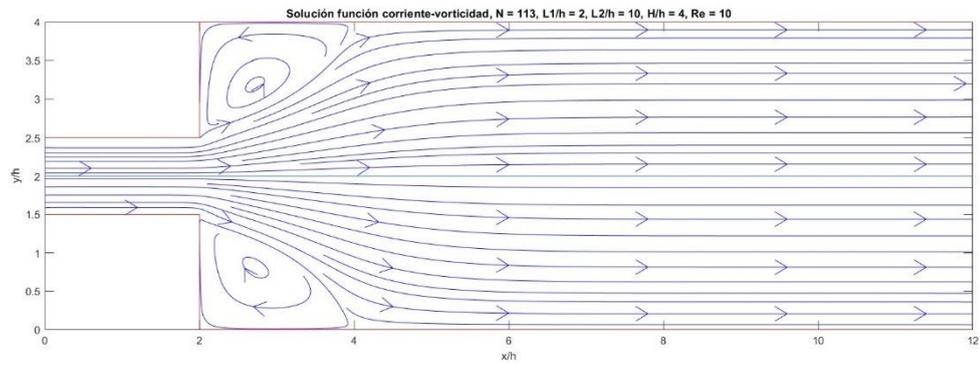


Figura 37. Solución función de corriente-vorticidad. $Re = 10$, $H/h = 4$, $L_2/h = 10$. Líneas de corriente.

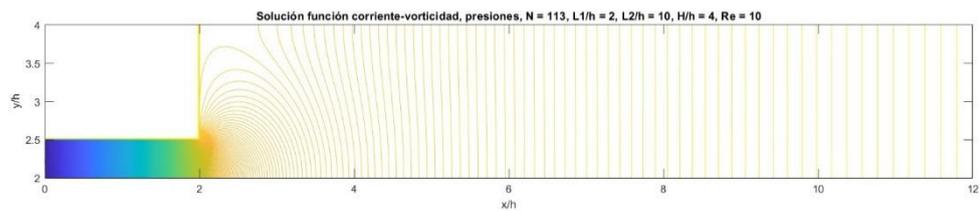


Figura 38. Solución función de corriente-vorticidad, presiones. $Re = 10$, $H/h = 4$, $L_2/h = 10$. Isobaras.

5.1.3.2 UPWIND 3^{er} orden

Se propondrá un UPWIND de 2^{do} orden según Salih (2013), un esquema UPWIND busca “tomar” información de un punto aguas arriba del punto siendo analizado para aproximar a la derivada. A partir del mismo se tiene que el esquema a resolver es el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias finitas:

$$\begin{aligned}
 & u_{i,j} + \left(\frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + q(u^+ \zeta_x^- + u^- \zeta_x^+) + v_{i,j} \left(\frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 & + q(v^+ \zeta_y^- + v^- \zeta_y^+) \\
 & = v \left(\frac{\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \\
 & \quad u^- = \min(u_{i,j}, 0) \\
 & \quad u^+ = \max(u_{i,j}, 0) \\
 & \quad v^- = \min(v_{i,j}, 0) \\
 & \quad v^+ = \max(v_{i,j}, 0) \\
 & \quad \zeta_x^- = \frac{\zeta_{i-2,j} - 3\zeta_{i-1,j} + 3\zeta_{i,j} - \zeta_{i+1,j}}{3\Delta x} \\
 & \quad \zeta_x^+ = \frac{\zeta_{i-1,j} - 3\zeta_{i,j} + 3\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i+2,j}}{3\Delta x} \\
 & \quad \zeta_y^- = \frac{\zeta_{i,j-2} - 3\zeta_{i,j-1} + 3\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j+1}}{3\Delta y} \\
 & \quad \zeta_y^+ = \frac{\zeta_{i,j-1} - 3\zeta_{i,j} + 3\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j+2}}{3\Delta y} \\
 & -4\psi_{i,j}^* + \psi_{i+1,j}^* + \psi_{i-1,j}^* + \psi_{i,j+1}^* + \psi_{i,j-1}^* = -\Delta x^{*2} \zeta_{i,j}^*
 \end{aligned} \tag{50}$$

Para un valor de $q = 0,5$, el mismo es un parámetro a definir, se tiene que esto representa una fórmula UPWIND de 3^{er} orden (Salih, 2013). Esto supone una mejora en el orden de error de truncamiento respecto al esquema utilizado anteriormente.

Debido a la dificultad de convergencia, se hizo uso de un factor de subrelajación que iba variando. Tomando valores desde 0,5 hasta 0,1 para mantener una velocidad relativamente alta de convergencia, pero asegurándose la misma. Aun así, se usaron pocos nodos espaciales para lograr la convergencia.

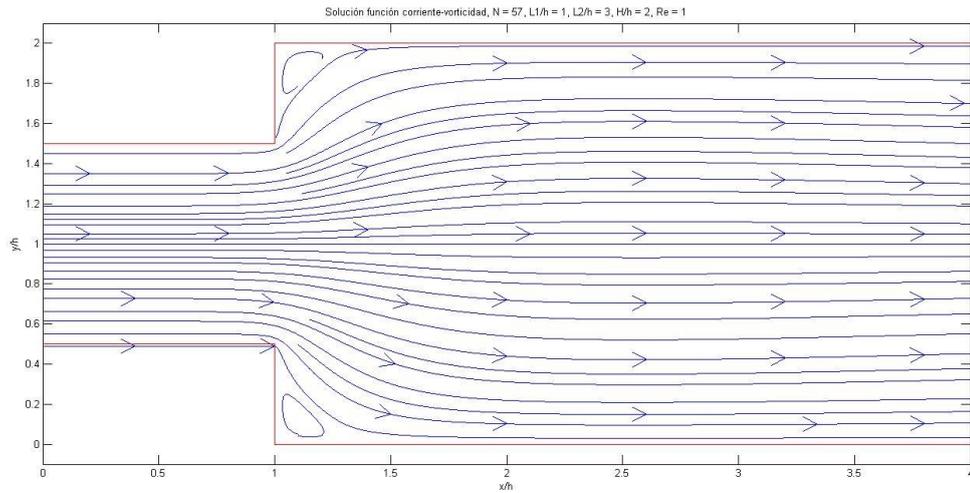


Figura 39. Solución función corriente-vorticidad UPWIND 3er orden. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 3$. Líneas de corriente.

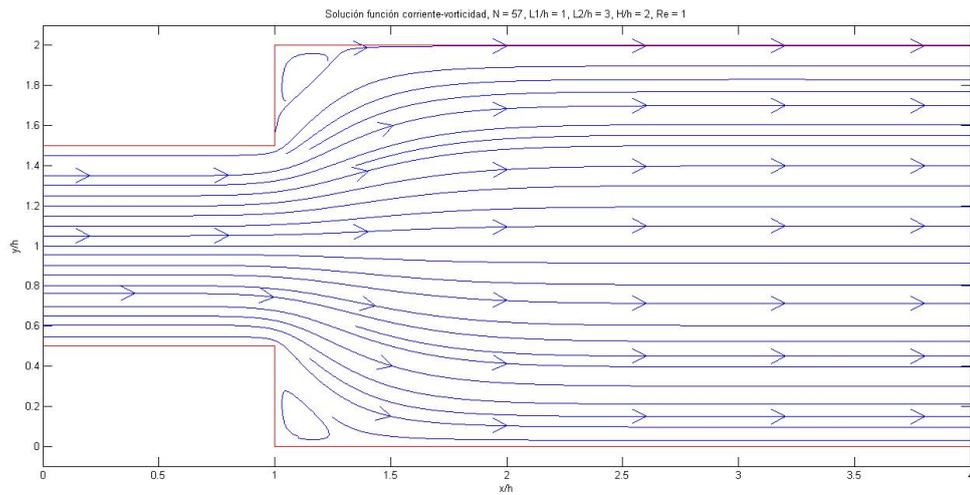


Figura 40. Solución función corriente-vorticidad. Diferencias centradas. $Re = 1$, $H/h = 2$, $L_2/h = 3$. Líneas de corriente.

Se puede observar comparando estas últimas dos figuras, (39 y 40), que corresponden a la misma solución de número de Reynolds unitario para diferencias centradas y UPWIND 3er orden, que la readherencia se da en una distancia igual a $1/4$ de la altura h .

5.1.3.3 Aceleración multigrilla

Al tratar de resolver este mismo problema para mayores números de Reynolds, el mismo se volvía más complicado debido a los errores numéricos, a medida que aumentaba el número de iteraciones, la convergencia llegaba a una meseta de la cual no disminuía. Para resolver esto, se hizo uso de la metodología de aceleración multigrilla, la idea de la misma es acelerar la convergencia de un método básico de iteración, a partir de acudir a una malla más gruesa para disminuir los *high – frequency errors*, errores de alta frecuencia, esto se conoce como *error smoothing*, suavizado de errores. Resuelto en el mallado más grueso se traslada esa solución a una malla más fina a partir de un método de interpolación, con el fin de, obviamente, tener mejores resultados. La idea es poder resolver el problema en una malla fina de manera más rápida.

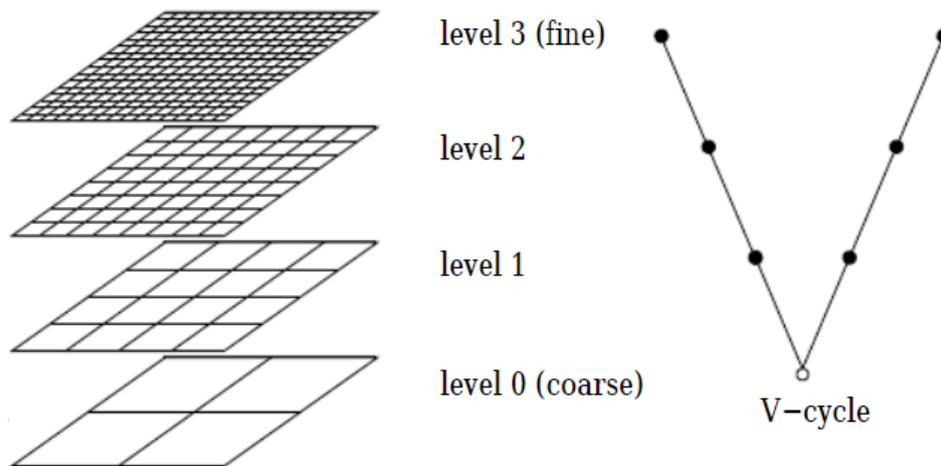


Figura 41. (Balewski, Cwikla, Kowalczyk y Kozakowski, 2004)

La utilización de esta técnica permitió llegar hasta un número de Reynolds de 360, el cual es un umbral antes de entrar a una zona de solución oscilatoria pero aún laminar (Hung y Macagno, 1966). Esto permitió contrastar las distancias de readherencia para varios números de Reynolds con la idea de poder contrastar los resultados.

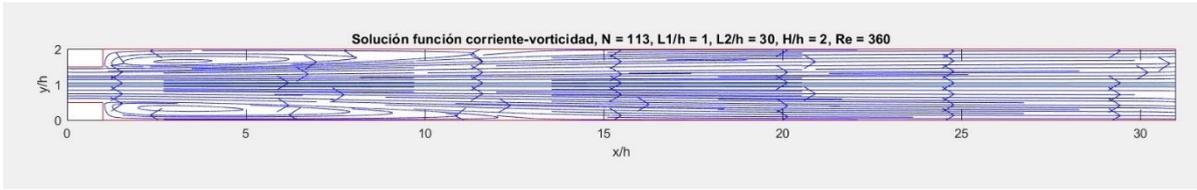


Figura 42. Solución número de Reynolds 360. Líneas de corriente.

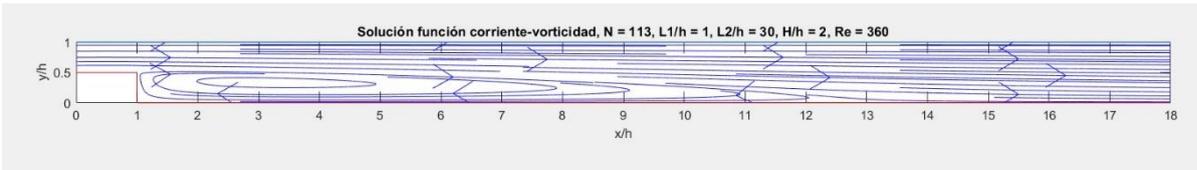


Figura 43. Solución número de Reynolds 360. Zoom. $x_r/h = 12$. Líneas de corriente.

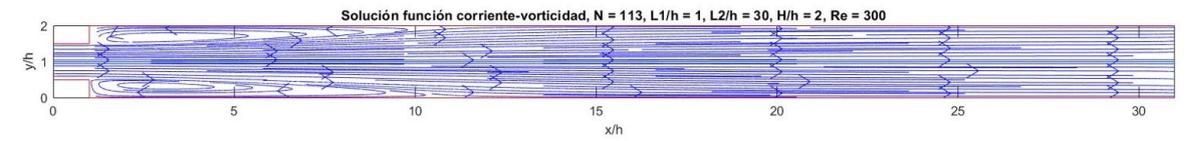


Figura 44. Solución número de Reynolds 300. Líneas de corriente.

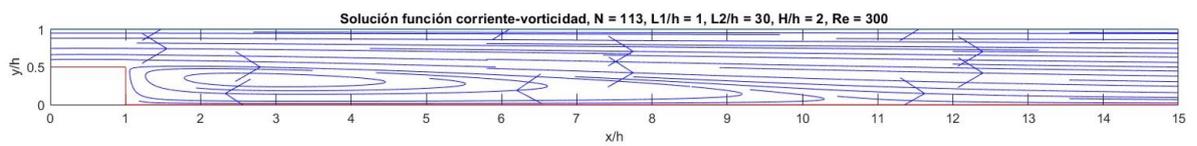


Figura 45. Solución número de Reynolds 300. Zoom. $x_r/h = 10$. Líneas de corriente.

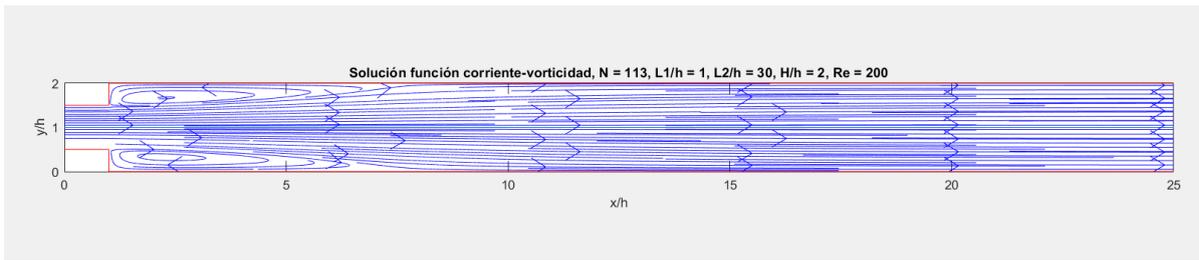


Figura 46. Solución número de Reynolds 200. Líneas de corriente.

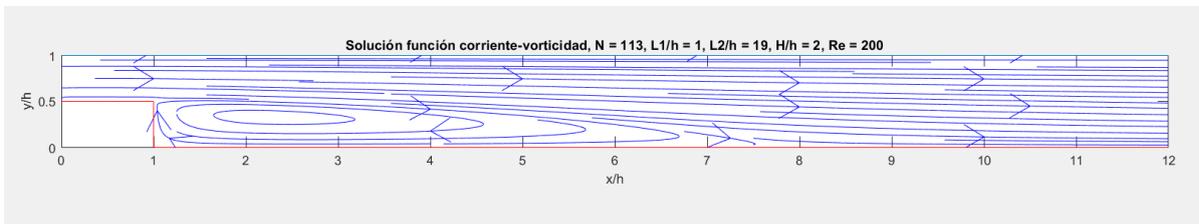


Figura 47. Solución número de Reynolds 200. Zoom. $x_r/h = 6,5$. Líneas de corriente.

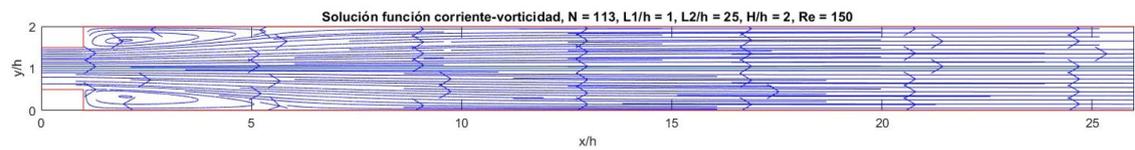


Figura 48. Solución número de Reynolds 150. Líneas de corriente.

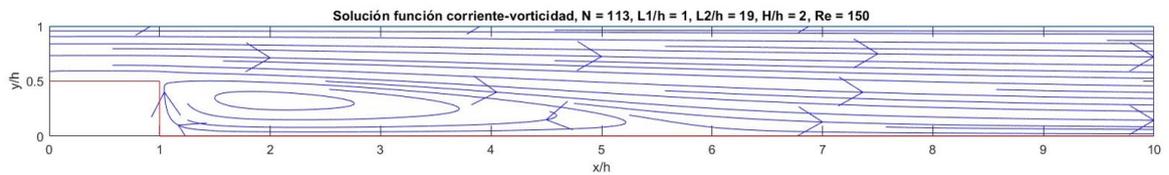


Figura 49. Solución número de Reynolds 150. Zoom. $x_r/h = 5$. Líneas de corriente.

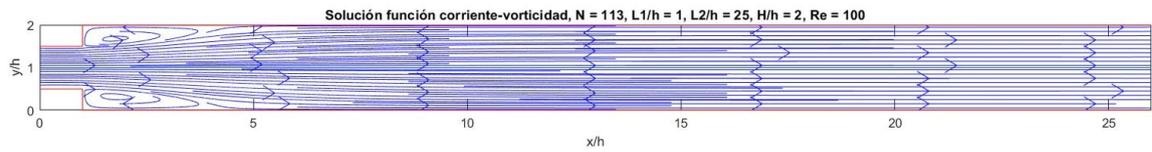


Figura 50. Solución número de Reynolds 100. Líneas de corriente.

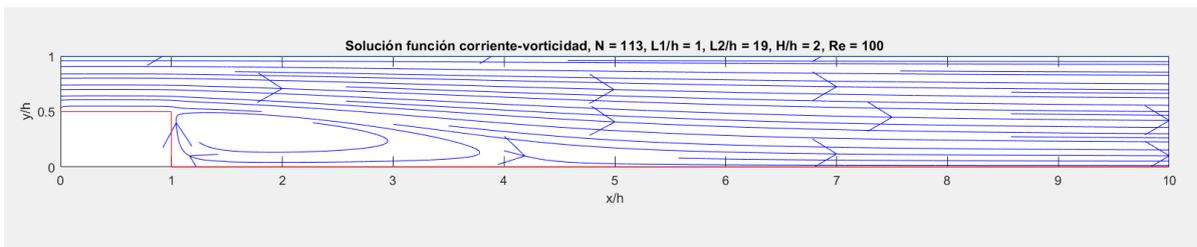


Figura 51. Solución número de Reynolds 100. Zoom. $x_r/h = 3,5$. Líneas de corriente.

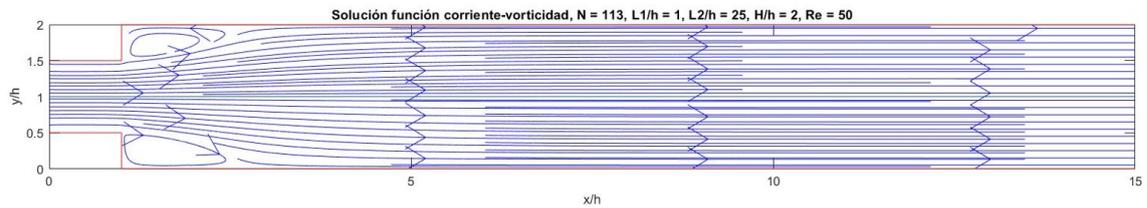


Figura 52. Solución número de Reynolds 50. Líneas de corriente.

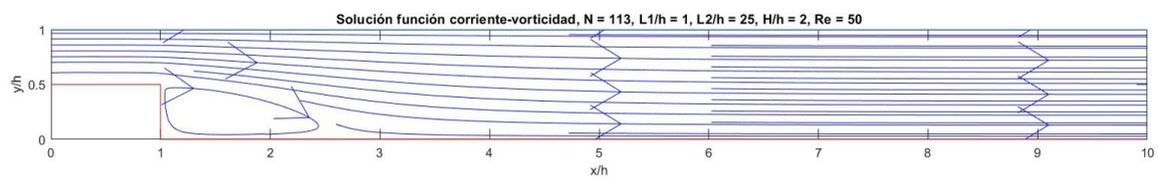


Figura 53. Solución número de Reynolds 50. Zoom. $x_r/h = 2$. Líneas de corriente.

5.1.4 Flujo viscoso: solución axialsimétrico

Según Brieda (2016), las componentes de velocidad en un flujo axialsimétrico se pueden describir en términos de la función de corriente ψ :

$$u_z = u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (52)$$

$$u_r = v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (53)$$

Para este caso particular, $u_\theta = 0$. Por otro lado, la vorticidad se define como $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$. Para el flujo axialsimétrico donde $\partial/\partial\theta = 0$ y $u_\theta = 0$, se tiene que

$$\omega = \omega_\theta = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (54)$$

La ecuación de gobierno de función corriente se obtiene de sustituir las definiciones de velocidad en término de la función corriente de Stokes:

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (55)$$

es decir,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\omega r \quad (56)$$

La ecuación de transporte de vorticidad es:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (57)$$

De esta forma, para un flujo axialsimétrico se obtiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial z} + v \frac{\partial \omega}{\partial r} = \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \quad (58)$$

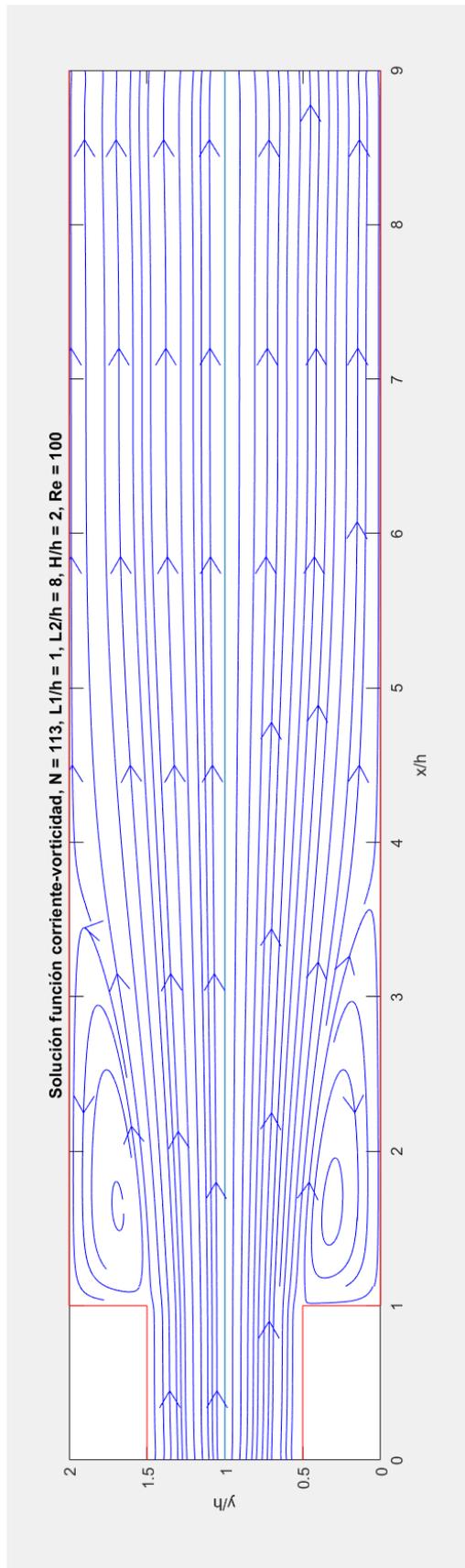


Figura 54. Solución axisimétrica. $Re = 100$, $H/h = 2$, $L_2/h = 8$. Líneas de corriente.

Si se compara con la figura 51 se tiene que la distancia de readherencia es ligeramente menor en el caso axialsimétrico respecto del 2D plano. En el caso axialsimétrico se tiene una distancia de readherencia de $x_r/h \approx 3$, mientras que en el plano 2D es de $x_r/h \approx 3,5$.

5.1.5 Caso bidimensional utilizando OpenFOAM

El OpenFOAM es un software para fluidodinámica computacional (*computational fluid dynamics*, CFD por su acrónimo en inglés). Incluye una colección de *applications*, aplicaciones, que llevan a cabo un rango de tareas en CFD. Dichas aplicaciones utilizan funcionalidad empaquetada contenida dentro de más de 150 librerías. Además de llevar adelante cálculos de dinámica de fluidos, hay aplicaciones que configuran e inician simulaciones, manipulan geometría de casos, generan mallas computacionales y procesan y permiten visualizar resultados.

Las aplicaciones caen principalmente en dos categorías: *solvers*, que llevan adelante cálculos en mecánica de fluidos (u otro continuo); y *utilities*, que llevan adelante las ya mencionadas tareas anteriormente (The OpenFOAM Foundation, 2024).

El OpenFOAM está acompañado de ambientes de pre y post procesamiento, estos son *utilities* en definitiva. Se muestra la estructura a continuación.

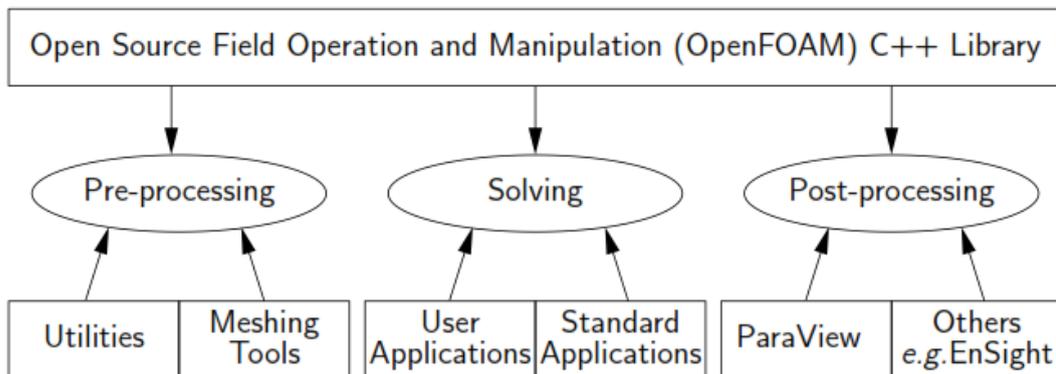


Figure 1.1: Overview of OpenFOAM structure.

Figura 55. (The OpenFOAM Foundation, 2024).

Se empieza por la fase de preprocesamiento donde se configura el problema a resolver. Para ello, se partirá de algún ejemplo dentro del mismo OpenFOAM para después poder modificarlos y llevarlo a nuestro caso de interés. Lo primero que se va a hacer es elegir un ejemplo relativamente parecido, que esté resuelto con algún *Solver* bajo las hipótesis anteriormente mencionadas. Particularmente se utilizará el ejemplo *Couette*.

- Directorio 0. Es un directorio que guarda el tiempo 0, tiene los datos de los campos particulares al problema, en este caso velocidad y presión. Se detallan valores iniciales (sin importancia puesto que se busca la solución estacionaria) y las condiciones de contorno (valores de velocidad y presión a la entrada y condiciones de no deslizamiento en las paredes).
- Directorio *constant*. El mismo contiene una descripción de la malla de casos en un subdirectorio *polyMesh* y archivos donde se especifican las propiedades físicas, en este caso en *transportProperties*.
- Directorio *system*.
 - El archivo *controlDict* es donde se establecen parámetros de control de la simulación como el *solver*, en este caso es *icoFoam*, apropiado para flujos laminares, incompresibles de fluidos newtonianos. También el tiempo inicial y final de la misma, el paso temporal, etc.
 - El archivo *fvSchemes* donde se detallan los esquemas de discretización utilizados, se dejan los utilizados en el caso modelo en cuestión.
 - El archivo *fvSolution* donde se definen los *solvers* de las ecuaciones, tolerancias y algoritmos.
 - En el archivo *blockMeshDict* se especifica la geometría del problema y también se subdividirá la geometría en bloques, que a su vez facilitará el poder determinar partes de la superficie que serán la entrada y salida de flujo, mientras que otras partes de la geometría serán simplemente paredes impermeables.

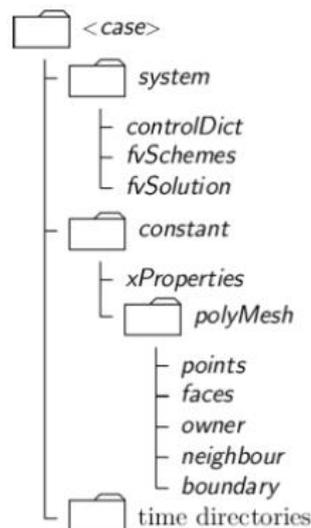


Figura 56. Estructura básica del directorio de un caso simulado en OpenFOAM (The OpenFOAM Foundation, 2024).

Se resolverá el caso número 3 nuevamente, para los mismos flujos de diversos números de Reynolds resueltos en la sección 5.1.3.3.

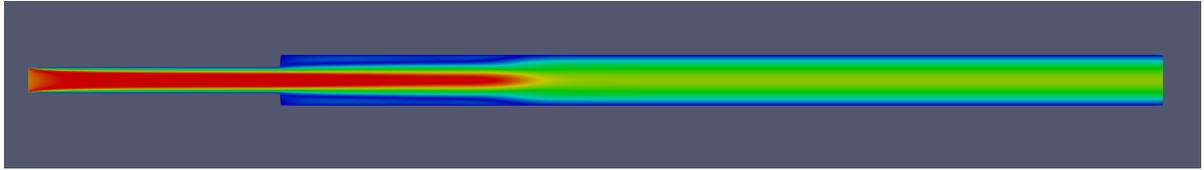


Figura 57. Solución número de Reynolds 360.

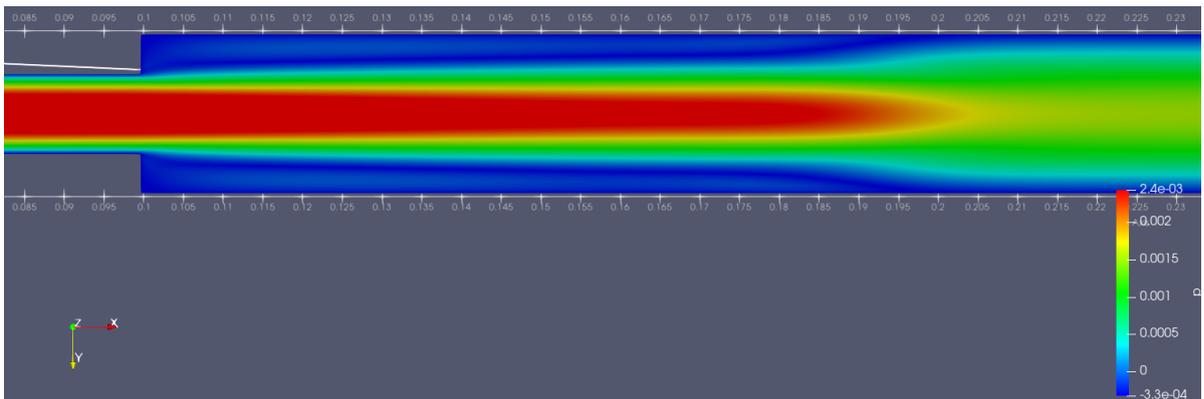


Figura 58. Solución número de Reynolds 360. Zoom. $x_r/h = 12$.

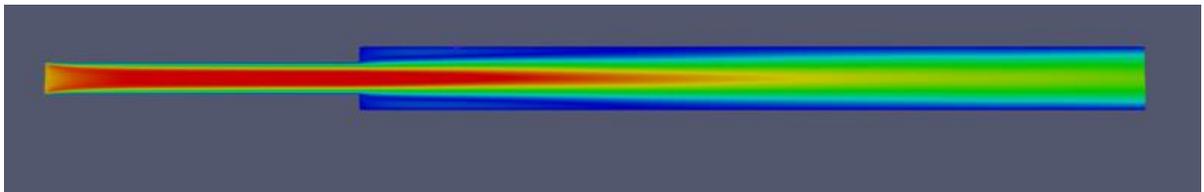


Figura 59. Solución número de Reynolds 300.

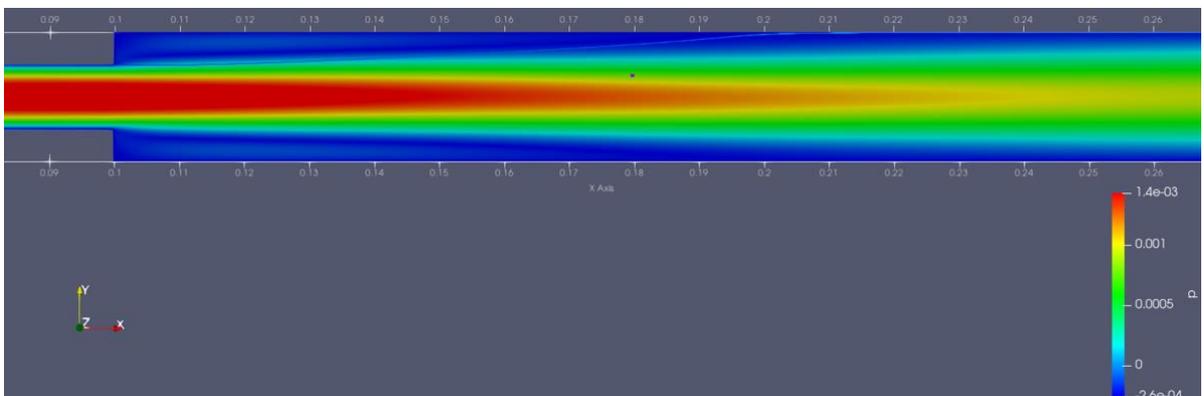


Figura 60. Solución número de Reynolds 300. Zoom. $x_r/h = 10$.

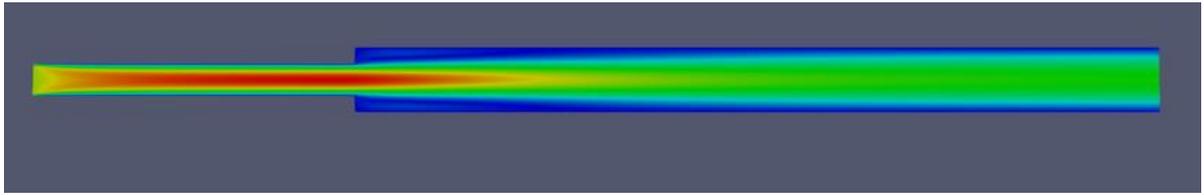


Figura 61. Solución número de Reynolds 200.

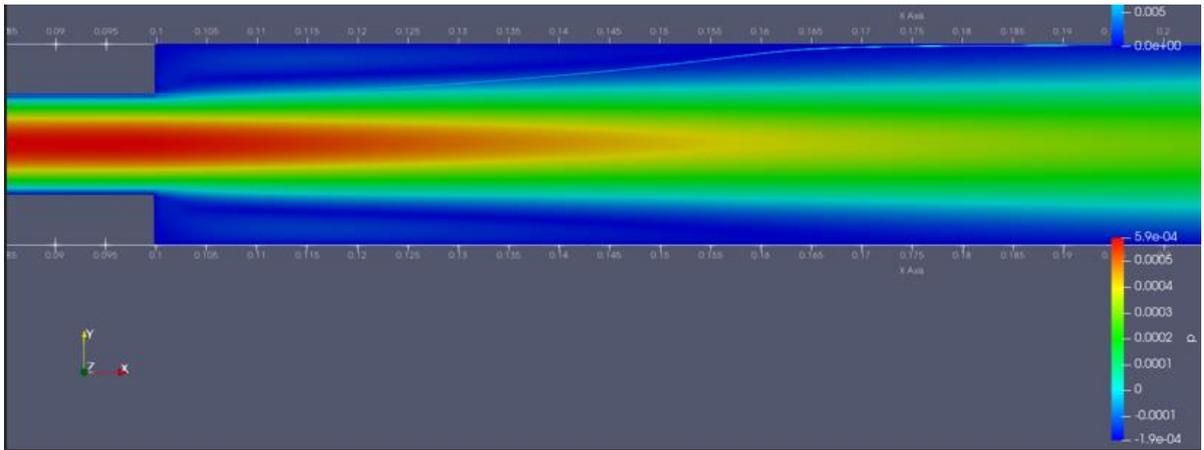


Figura 62. Solución número de Reynolds 200. Zoom. $x_r/h = 6,5$.

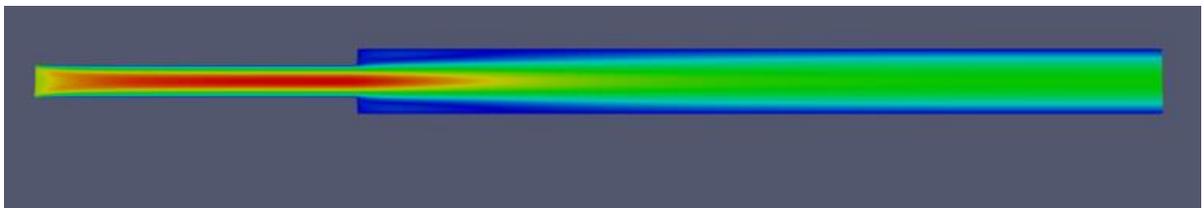


Figura 63. Solución número de Reynolds 150.

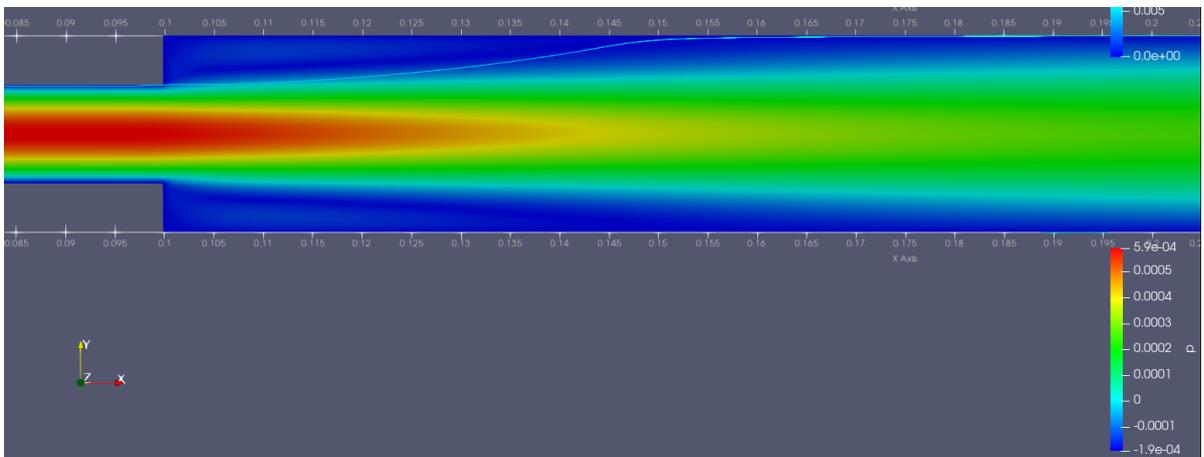


Figura 64. Solución número de Reynolds 150. Zoom. $x_r/h = 5,5$.

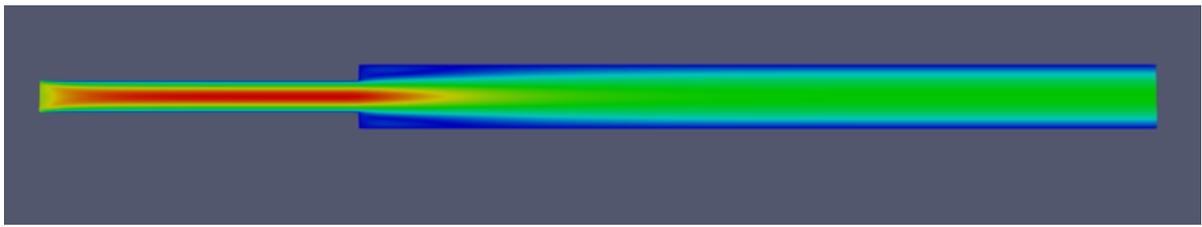


Figura 65. Solución número de Reynolds 100.

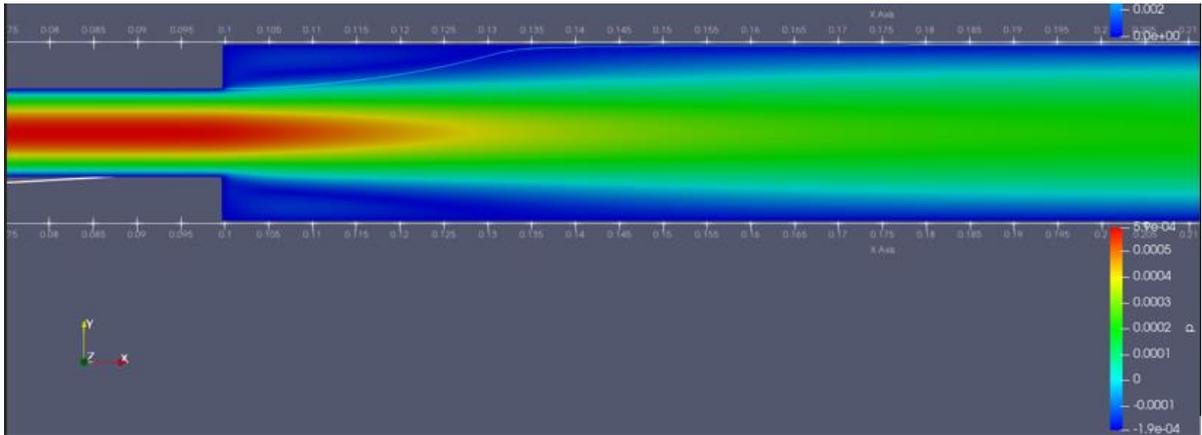


Figura 66. Solución número de Reynolds 100. Zoom. $x_r/h = 3,5$.

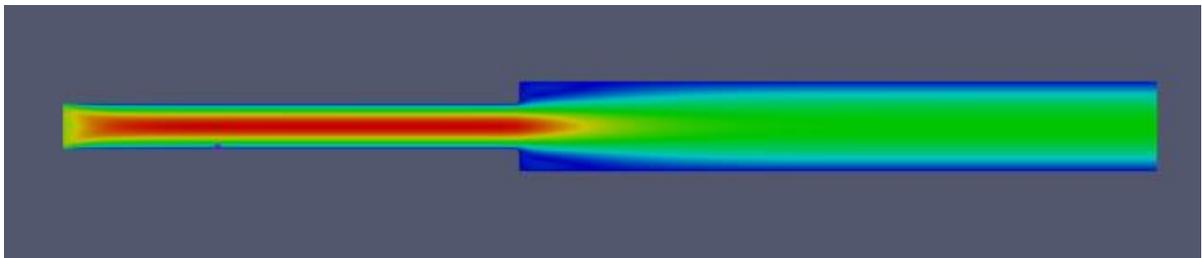


Figura 67. Solución número de Reynolds 50.

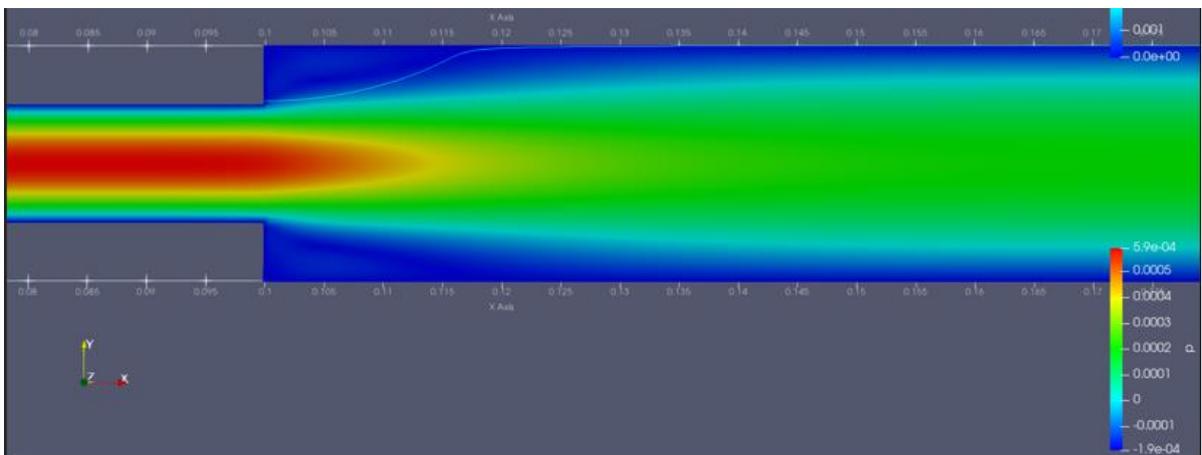


Figura 68. Solución número de Reynolds 50. Zoom. $x_r/h = 2$.

5.1.6 Verificación de casos bidimensionales

Para finalizar esta sección, se adjuntan resultados computacionales externos para poder contrastar los resultados encontrados en este trabajo. En particular, se presenta el caso de un número de Reynolds unitario y uno correspondiente al valor de 10, en ambos casos el número de Reynolds está definido como se definió en el presente trabajo, utilizando como longitud característica la altura de entrada h y como velocidad característica la velocidad media de entrada U_m .

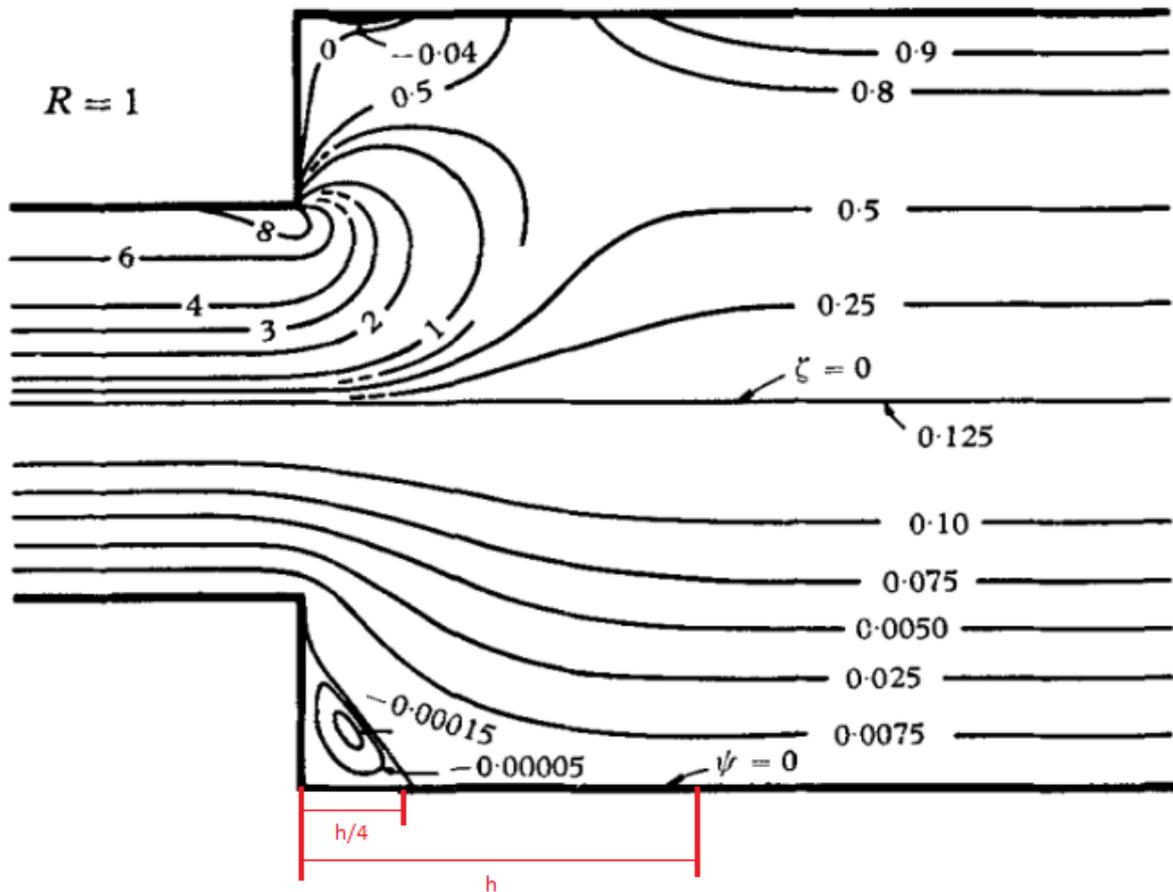


Figura 69. (Macagno y Hung, 1967).

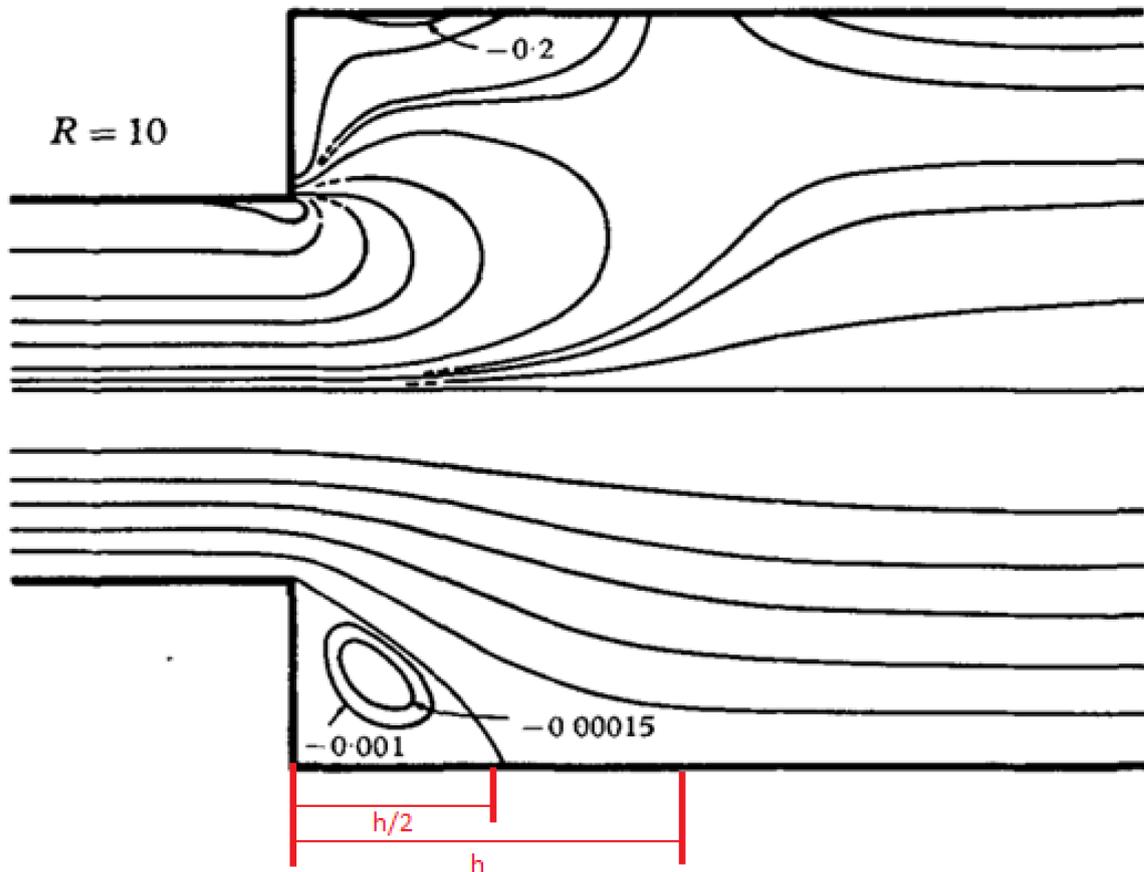


Figura 70. (Macagno y Hung, 1967).

Tanto la figura 69 como 70 hacen referencia al número de Reynolds como R y no como Re cómo ha sido presentado en el presente trabajo.

Se puede comparar la figura 69 con las figuras 29 y 39 que corresponden a un número de Reynolds unitario, en todos estos casos se tiene que la readherencia se da una distancia $h/4$ de la expansión propiamente dicha.

Por otro lado, si se compara la figura 70 con la figura 32, la readherencia se da una distancia de $h/2$ respecto del punto de expansión, para un número de Reynolds de 10.

Por último, se tiene la figura 71. El número de Reynolds está definido de la misma forma que en el presente trabajo, basado en la altura h de entrada (D_0 según la nomenclatura del artículo citado) y la velocidad media a la entrada, y está construido para una relación de expansión de 2:1. Se puede observar la curva lineal que presenta la distancia de readherencia L normalizada con D_0 según la nomenclatura del paper en cuestión, en función del número de Reynolds.

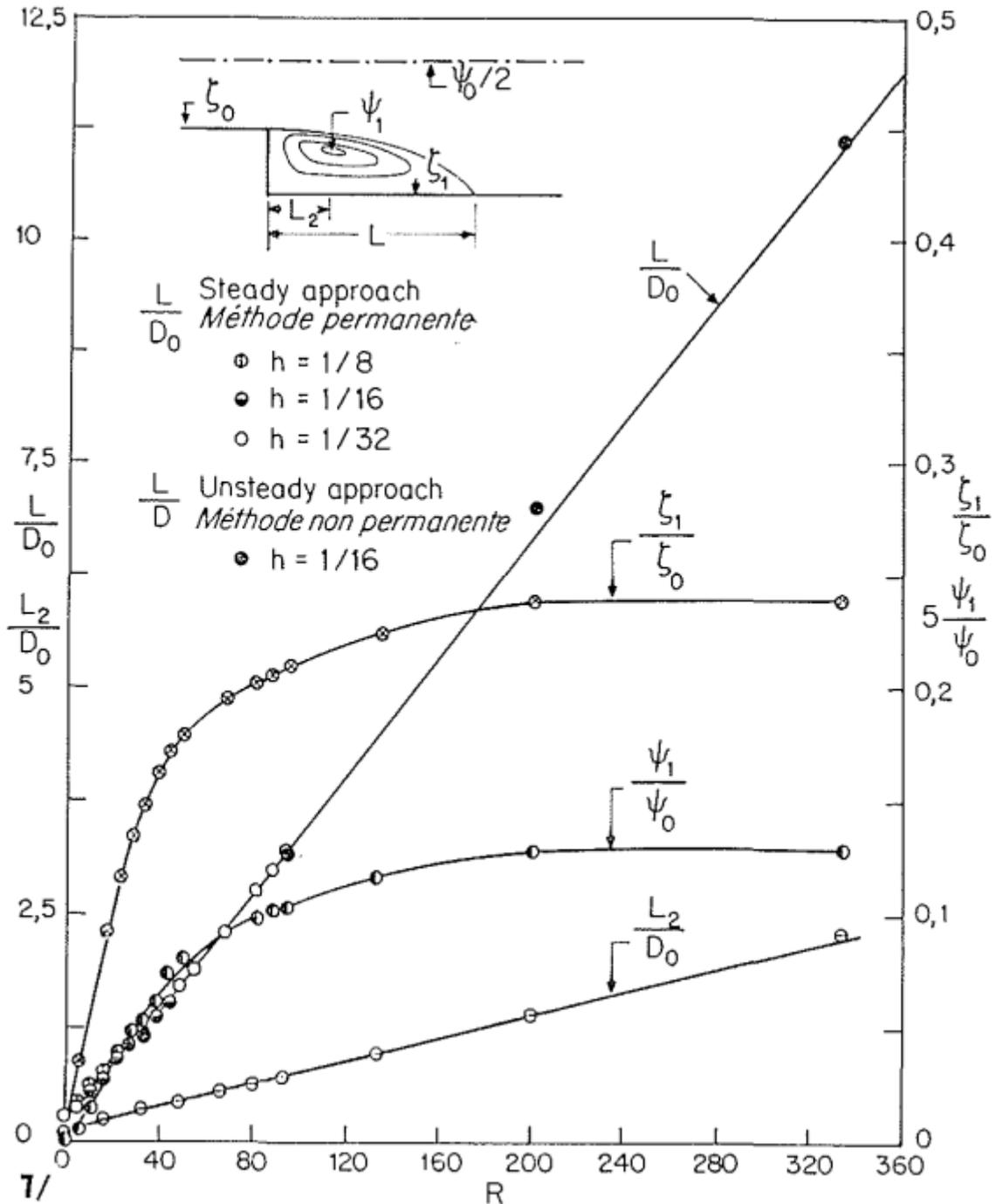


Figura 71. (Hung y Macagno, 1966).

En la figura 72 se puede ver una verificación entre los resultados numéricos propios, los obtenidos por diferencias finitas (figuras 42 a 53) y según OpenFOAM (figuras 57 a 68), comparándolos con los provistos por Hung y Macagno, donde se tiene la tendencia entre el número de Reynolds (definido de la misma forma entre este presente trabajo y el artículo citado) y la distancia de readherencia adimensionalizada con el ancho del canal de entrada, h , según la nomenclatura del presente trabajo.

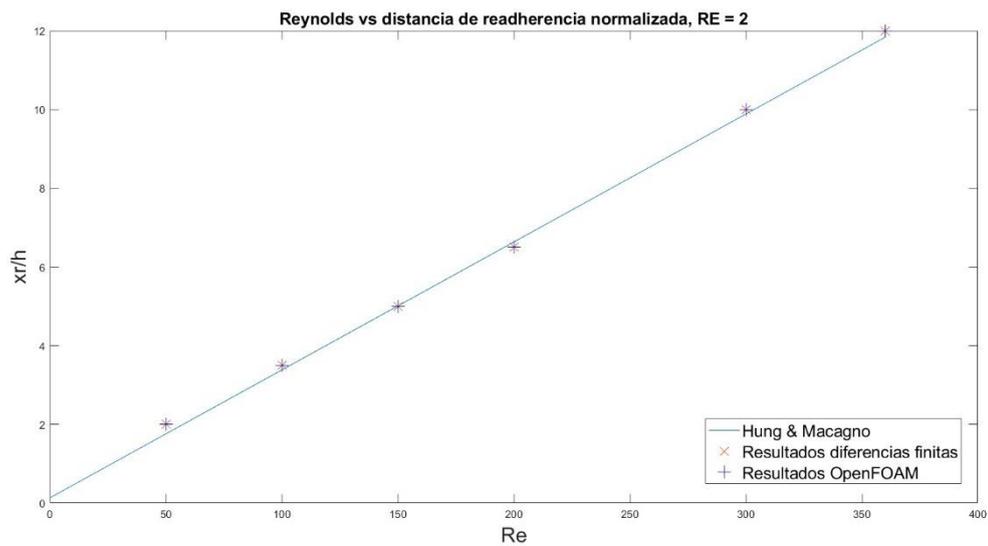


Figura 72. Readherencia vs número de Reynolds. Verificación.

Durante la resolución de la sección 5.1.5. se obtuvo el siguiente resultado para el caso de un número de Reynolds de 200 que merece una breve discusión.

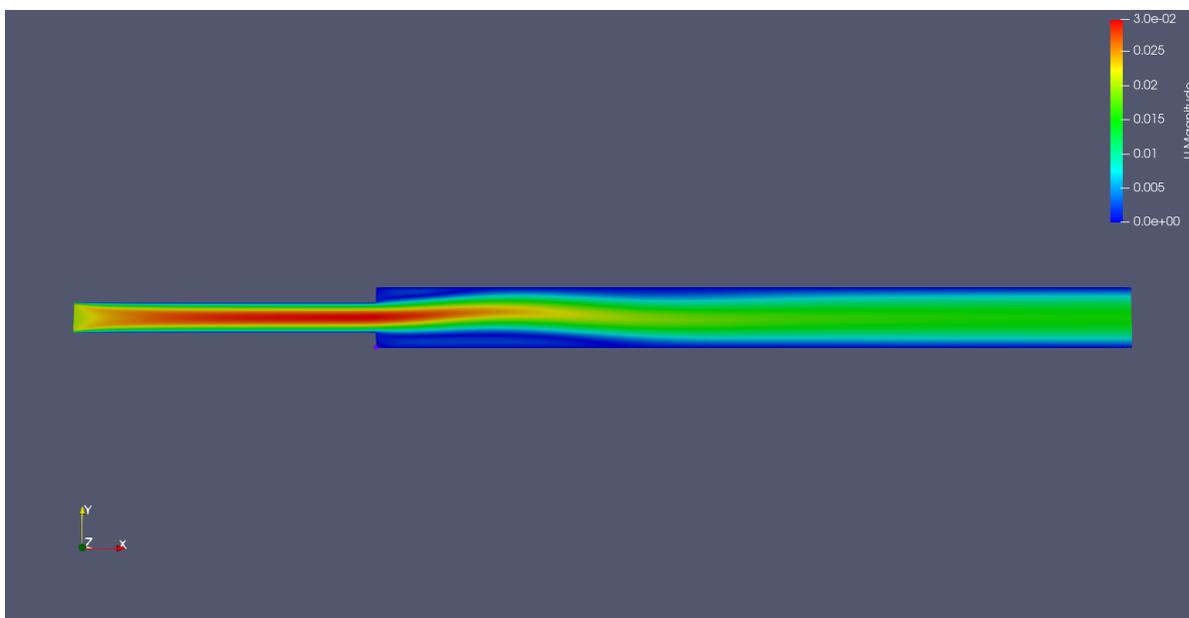


Figura 73. Solución número de Reynolds 200, oscilaciones.

El resultado de la figura 73 en comparación con el de las figuras 61 y 62 es causado simplemente por el mallado. En el resultado de la figura 73 se tiene un mallado más grueso que en el mallado presentado en las figuras 61 y 62, y esto deviene en un resultado que, a pesar de no ser una solución que diverge, es un resultado totalmente erróneo desde el punto de vista de la física. El esquema utilizado para resolver los casos bidimensionales en OpenFOAM fue *Gauss linear*, siendo este un esquema centrado el cual adolece de ser un esquema subdifusivo (Tannehill, Anderson y Pletcher, 1997). Dicha subdifusión, que se ve reflejada en un término extra que aparecería en el sistema de ecuaciones en diferencias finitas, genera que el sistema de EDP sea distinto al que se busca resolver, esto es simplemente debido hecho de estar trabajando con una formulación discreta. Particularmente se estaría resolviendo un caso equivalente con un número de Reynolds mayor al que se busca resolver, $Re = 200$ para este caso; esto deviene en una solución no física, puesto que se traspasa el umbral de solución laminar sin oscilaciones, para entrar en la zona de solución laminar con oscilaciones.

Este problema se soluciona refinando el mallado, disminuyendo así el grado de subdifusión. Otra opción podría ser utilizar un esquema Upwind, que sería sobredifusivo según Tannehill et al. (1997) y no generaría este problema, aunque a costa de obtener una solución sobredifusiva y terminar nuevamente con un resultado convergente pero erróneo, obteniendo una solución asociada a un número de Reynolds menor al buscado.

5.2 Caso tridimensional turbulento: OpenFOAM

Antes de presentar los resultados de este caso, se presentarán brevemente los fundamentos de la teoría de la turbulencia y se presentarán los distintos modelos de cierre de las ecuaciones, comparando sus resultados en búsqueda de seleccionar el modelo que mejor se adecúa al problema en cuestión. Por otro lado, se presenta la figura 74 que busca orientar al lector acerca de la diferencia en el costo computacional entre la metodología *Reynolds – Averaged Navier – Stokes (RANS)*, *Large Eddy Simulation (LES)* y *Direct Numerical Simulation (DNS)*. La metodología DNS busca, básicamente, resolver todas las escalas espaciales y temporales del flujo, por lo tanto, el costo computacional es enorme, teniendo que trabajar con mallas extremadamente refinadas y con pasos temporales muy pequeños.

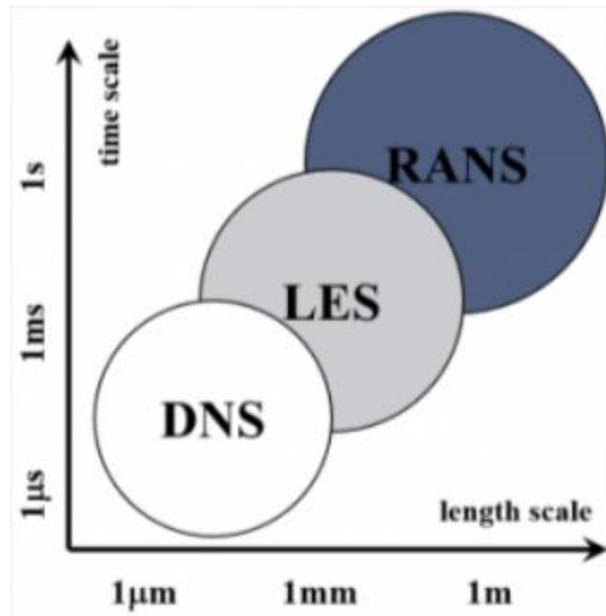


Figura 74. (Clean combustion & energy research lab, 2024)

Según Pope (2018),

$$\frac{\eta}{\ell_0} \approx Re^{-3/4} \quad \frac{u_\eta}{u_0} \approx Re^{-1/4} \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \approx Re^{-1/2} \quad (59)$$

se tienen las relaciones adimensionales entre:

- La longitud característica de Kolmogorov η y la longitud característica integral ℓ_0 .
- La velocidad característica de Kolmogorov u_η y la velocidad característica integral u_0 .
- El tiempo característico de Kolmogorov τ_η y el tiempo característico integral τ_0 .

Según las ecuaciones 59, un mayor número de Reynolds, trae consigo una disminución del tamaño más pequeño de remolino, el de Kolmogorov, η . Si se optara por la metodología *DNS* se debería resolver hasta la escala de este remolino, aumentando notoriamente el costo computacional, particularmente para los números de Reynolds de aplicaciones industriales, se llega a valores inadmisibles de tamaño de mallado para la práctica. Habiendo explicado de forma breve esto, y recordando que el fin del presente trabajo es el de aplicabilidad industrial, se optará por el uso de la metodología RANS para la resolución del problema.

5.2.1 Teoría de la turbulencia

Cada subsección dentro de la presente sección 5.2.1. corresponderá enteramente a capítulos y secciones de la bibliografía de referencia de turbulencia, Pope (2018) y Wilcox (1988) mencionados al inicio de cada subsección.

5.2.1.1 Naturaleza aleatoria de la turbulencia

Según el capítulo 3, sección 1 de Pope (2018) un flujo turbulento se caracteriza por tener un campo de velocidades $V(\mathbf{x}, t)$ aleatorio. Se entiende por aleatorio un evento A , que bajo condiciones C fijas, puede o no ocurrir, no es ni certero ni imposible. De esta forma, decimos que el campo de velocidades es aleatorio, no tiene un único valor, o sea, no es el mismo valor cada vez que se repite un experimento bajo condiciones fijas C .

Resulta contradictorio en pensar en una naturaleza aleatoria de los flujos turbulentos dentro del marco de la teoría de la Mecánica Clásica, siendo esta última de naturaleza determinística, pero hay que considerar dos aspectos:

- En cualquier flujo turbulento hay, al igual que en cualquier flujo laminar, perturbaciones en las condiciones iniciales, en las condiciones de contorno y en las propiedades de materiales. Por ejemplo: vibraciones de los aparatos, detalles finales de superficies “lisas”, o incluso inhomogeneidades en temperatura o presencia de impurezas. Así, las condiciones C son incompletas, por lo cual no se puede determinar de forma unívoca la evolución del flujo turbulento.
- Los flujos turbulentos presentan una sensibilidad acusada a dichas perturbaciones, a diferencia de los flujos laminares, esta sensibilidad se entiende en el estudio de sistemas dinámicos. Esto genera que después de cierto punto, el estado del sistema no se pueda predecir. Esto es movimiento caótico.

De esta forma, las ecuaciones de Navier-Stokes se aplican también a flujos turbulentos, pero el objetivo de la teoría es diferente. Como la velocidad es una variable aleatoria, su valor es inherentemente impredecible, se opta entonces por buscar determinar la probabilidad de que ocurra un cierto evento.

5.2.1.2 Teoría de variables aleatorias

Siguiendo el capítulo 3, sección 2 de Pope (2018); sea U una componente del vector velocidad V . Se dice que la misma es una variable aleatoria y está completamente caracterizada por su función de densidad de probabilidad (PDF). Sea V una variable de velocidad independiente, se tendrá el evento B tal que $B = \{U < V\}$, se tiene la probabilidad del evento B como $p = P(B) = P\{U < V\}$, es la probabilidad de ocurrencia del evento. Tanto la PDF como la función de distribución acumulativa (CDF) caracterizan completamente a la variable aleatoria U .

- *Función de distribución acumulativa.* La probabilidad de cualquier evento se puede determinar de la CDF, definida como $F(V) = P\{U < V\}$, es una función no decreciente, o sea $F(V_b) \geq F(V_a)$ si $V_b \geq V_a$.
- *Función de densidad de probabilidad.* Se define a la misma, PDF, como la derivada de la CDF,

$$f(V) = \frac{dF(V)}{dV} \quad (60)$$

Debido a que la CDF es no decreciente, esta función es siempre no negativa, $f(V) \geq 0$. Satisface el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(V)dV = 1 \quad (61)$$

$$P\{V_a \leq U < V_b\} = F(V_b) - F(V_a) = \int_{V_a}^{V_b} f(V)dV \quad (62)$$

- *Medias y momentos.* Se define la media de la variable aleatoria U como

$$\langle U \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Uf(V)dV \quad (63)$$

Lo mismo para una variable aleatoria función de U , $Q(U)$

$$\langle Q(U) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q(V)f(V)dV \quad (64)$$

Se define la fluctuación de U como $u = U - \langle U \rangle$.

La varianza como la fluctuación cuadrática media

$$var(U) = \langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (V - \langle U \rangle)^2 f(V) dV \quad (65)$$

La raíz cuadrada de esta varianza es la desviación estándar, $sdev(U) = \sqrt{var(U)} = \langle u^2 \rangle^{1/2}$, también es conocida como u' , referida como *r. m. s. (root mean square)* de U .

Esta teoría es luego extendida a dos o más variables aleatorias, por ejemplo, para poder ya caracterizar los componentes de velocidad (U_1, U_2, U_3) en cierta posición y tiempo en un flujo turbulento.

5.2.1.3 Ecuaciones de flujo promedio

Para esta sección y la siguiente se referirá al capítulo 4 de Pope (2018). Se vieron cantidades estadísticas para poder describir campos de velocidad turbulenta. Se derivan ecuaciones para la evolución de todas estas cantidades, partiendo desde las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el flujo turbulento. La más básica de estas ecuaciones es la que gobiernan el campo de velocidad media, $\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle$.

Se tiene la descomposición de Reynolds que descompone la velocidad $U(\mathbf{x}, t)$ en su valor promedio y su fluctuación

$$U(\mathbf{x}, t) = \langle U(\mathbf{x}, t) \rangle + u(\mathbf{x}, t) \quad (66)$$

A partir de la ecuación de continuidad, tanto la media como la fluctuación tienen divergencia nula

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (67)$$

$$\nabla \cdot \langle U \rangle = 0 \quad (68)$$

Al tomar la media de la ecuación de cantidad de movimiento, es más complicado por el término no lineal convectivo. Al tomar la media en la forma conservativa de la derivada sustancial y operando se obtiene

$$\left\langle \frac{DU_j}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle \quad (69)$$

Se introduce la derivada sustancial media

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DU_j}{Dt} \right\rangle &= \frac{\bar{D}}{\bar{D}t} \langle U_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle \\ \frac{\bar{D}}{\bar{D}t} \langle U_j \rangle &= \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (70)$$

Se ve entonces que la media de la derivada sustancial no es igual a la derivada sustancial media. De esta forma, se toma la media de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene la cantidad de movimiento medio o ecuación de Reynolds

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}t} \langle U_j \rangle = \nu \nabla^2 \langle U_j \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} \quad (71)$$

Dicha ecuación es igual a la de Navier-Stokes, salvo por la aparición de un término que nace de tomar la media de las ecuaciones de Navier-Stokes para campos de velocidades turbulentas, interpretados como esfuerzos. Se los denomina esfuerzos de Reynolds, cuestión crucial en la teoría de turbulencia.

Esfuerzos de Reynolds

Los esfuerzos de Reynolds $\langle u_i u_j \rangle$ hacen que las ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds no sean iguales, la diferencia del comportamiento entre $U(\mathbf{x}, t)$ y $\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle$ es atribuido a estos esfuerzos de Reynolds. Estos se pueden interpretar como esfuerzos que nacen del flujo de cantidad de movimiento medio debido a la velocidad fluctuante.

Se trata de un tensor simétrico, $\langle u_i u_j \rangle = \langle u_j u_i \rangle$. Las componentes de la diagonal son esfuerzos normales, $\langle u_i^2 \rangle = \langle u_i u_i \rangle$, mientras que el resto son esfuerzos de corte. Se define la energía cinética turbulenta $k(\mathbf{x}, t)$ como la mitad de la traza del tensor de esfuerzos de Reynolds, esto sería la energía cinética media por unidad de masa en el campo de velocidad fluctuante.

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle \quad (72)$$

Se tiene un problema de cierre, para un flujo tridimensional, hay cuatro ecuaciones independientes que gobiernan el campo de velocidad media: las tres componentes de las ecuaciones de Reynolds, junto con la ecuación de continuidad media. Pero hay más de cuatro incógnitas, además de $\langle U \rangle$ y $\langle p \rangle$, están los esfuerzos de Reynolds. Se dice que el conjunto de ecuaciones está no cerrado, se deben determinar mediante modelos los esfuerzos de Reynolds.

5.2.1.4 Hipótesis de viscosidad turbulenta

Uno de los primeros modelos de turbulencia fue el de la hipótesis de viscosidad turbulenta. Es matemáticamente análoga a la ley de Newton para los esfuerzos cortantes. Según esta hipótesis, los esfuerzos de Reynolds desviadores son proporcionales a la tasa media de esfuerzo, donde ν_T es la viscosidad cinemática turbulenta. Así, se introduce dentro de la ecuación de momento medio para obtener

$$\frac{\overline{D}\langle U_j \rangle}{\overline{D}t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu_{eff} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle p \rangle + \frac{2}{3} \rho k \right) \quad (73)$$

$$\nu_{eff}(\mathbf{x}, t) = \nu + \nu_T(\mathbf{x}, t)$$

Se define a ν_{eff} como la viscosidad efectiva, compuesta de la viscosidad física y la viscosidad turbulenta o viscosidad de remolino ν_T . Se termina así con una ecuación análoga a la de Navier-Stokes. Esto es la aproximación de viscosidad de remolino de Boussinesq.

Para poder calcular esta viscosidad de remolino hay varias formas según Wilcox (1988):

- Modelos algebraicos. Son fáciles y simples de utilizar, pero son incompletos, se deben tener resultados experimentales para poder calibrarlos, por lo que solamente se pueden utilizar para casos de interpolación, no extrapolación.
- Modelos de una ecuación. Se basan en la ecuación para la energía cinética de turbulencia. También son incompletos ya que relacionan la escala de longitud integral con alguna dimensión típica de flujo.
- Modelos de dos ecuaciones. Se basan también en la ecuación de la energía cinética de turbulencia. Se elegirá uno de estos modelos.

5.2.1.5 Modelo de dos ecuaciones

Esta sección y las siguientes dos están basadas en el capítulo 4, sección 3 del libro de Wilcox (1988) pero siguiendo la nomenclatura correspondiente al libro de Pope (2018). Estos modelos están basados en la ecuación de la energía de turbulencia, con la idea de incorporar efectos de la historia del flujo y no locales en la viscosidad de remolino. Prandtl eligió k como base de su escala de velocidad, siendo la energía cinética (por unidad de masa) de las fluctuaciones turbulentas definida anteriormente en la ecuación 72.

En términos de k y una escala de longitud de turbulencia ℓ según análisis dimensional se tiene que la viscosidad cinemática de remolino es

$$\nu_T = cte \cdot k^{1/2} \cdot \ell \quad (74)$$

Se tiene la ecuación para determinar k , la cual se deriva tomando la traza de la ecuación para los esfuerzos de Reynolds, se tiene una ecuación de transporte para la energía cinética de turbulencia

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \tau_{ij} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \langle u_i u_i u_j \rangle - \frac{1}{\rho} \langle p u_j \rangle \right] \\ \varepsilon &= \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (75)$$

Para cerrar esta ecuación se debe especificar

- Tensor de esfuerzo de Reynolds. Se asume como válida la aproximación de Boussinesq. $\tau_{ij} = 2\nu_T \mathbf{S}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$. Siendo \mathbf{S}_{ij} el tensor promedio de tasa de deformación y δ_{ij} la función delta de Kronecker.
- Transporte turbulento y difusión por presión. Se utiliza la aproximación estándar de gradiente-difusión. De forma análoga al proceso de transporte molecular, se dice que $-\langle u_j \phi \rangle \sim \frac{\nu_T \partial \Phi}{\partial x_j}$. Se agrupa el de presión también, y se tiene $\frac{1}{2} \langle u_i u_i u_j \rangle - \frac{1}{\rho} \langle p u_j \rangle = -\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$, donde σ_k es un coeficiente de cierre.
- Disipación. Se modela como una propiedad que es función de parámetros propios de la turbulencia, según análisis dimensional, $\varepsilon \sim k^{3/2} / \ell$, los modelos se diferencian en la forma de cálculo de este término.

Así, se llega a que

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \tau_{ij} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \tau_{ij} &= 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}\end{aligned}\tag{76}$$

Los modelos de dos ecuaciones proveen un cálculo para k pero también para la tasa de disipación o una magnitud relacionada. Así, decimos que el modelo está completo, esto es, se pueden predecir las propiedades de un flujo turbulento sin conocimiento previo de la estructura de turbulencia. Los modelos de dos ecuaciones se diferencian en la elección de la segunda variable, puede ser la tasa de disipación específica ω , o ε , etc.

5.2.1.6 El modelo $k - \varepsilon$

Es el modelo de dos ecuaciones más popular. Se tendrá en este caso que

$$v_T \sim \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \ell \sim \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad (77)$$

Se tiene el modelo estándar $k - \varepsilon$ (Launder y Sharma, 1974):

$$v_T = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (78)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (79)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (80)$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad C_\mu = 0,09 \quad \sigma_k = 1 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (81)$$

$$\omega = \frac{\varepsilon}{(C_\mu k)} \quad \ell = \frac{C_\mu k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad (82)$$

Este modelo no es adecuado para flujos con gradientes de presión adversos, es decir, no es adecuado para flujos separados como el desarrollado en el presente trabajo. Las predicciones para flujos libres de corte son algo erráticas también. Por lo demás, se ha utilizado en varios flujos con diversos grados de éxito. Los coeficientes de la ecuación 81 corresponden a coeficientes globales, utilizables dentro del rango de uso de este modelo $k - \varepsilon$, no son coeficientes de ajustes como es el caso de los modelos de 0 o 1 ecuación.

5.2.1.7 El modelo $k - \omega$

Según Kolmogorov (1942)

$$v_T \sim \frac{k}{\omega} \quad \ell \sim \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\omega} \quad \varepsilon \sim \omega k \quad (83)$$

A partir de dichas definiciones según 83, se tiene la propuesta de Wilcox (1988)

$$v_T = \frac{k}{\tilde{\omega}} \quad \tilde{\omega} = \max \left\{ \omega, C_{lim} \sqrt{\frac{2S_{ij}S_{ij}}{\beta^*}} \right\} \quad C_{lim} = \frac{7}{8} \quad (84)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (85)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (86)$$

$$\alpha = \frac{13}{25} \quad \beta = \beta_o f_\beta \quad \beta^* = \frac{9}{100} \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad \sigma^* = \frac{3}{5} \quad \sigma_{do} = \frac{1}{8} \quad (87)$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0 & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0 \\ \sigma_{do} & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0 \end{cases} \quad (88)$$

$$\beta_o = 0,0708 \quad f_\beta = \frac{1 + 85X_\omega}{1 + 100X_\omega} \quad X_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta^*\omega)^3} \right| \quad (89)$$

$$\varepsilon = \beta^* \omega k \quad \ell = k^{1/2}/\omega \quad (90)$$

Este modelo ha mostrado mejor exactitud para capas límites bidimensionales tanto con gradientes de presión favorables como desfavorables. También funciona bien en flujos libres de corte.

5.2.2 Configuración del caso en OpenFOAM

Se explicará brevemente la configuración del caso tridimensional turbulento en OpenFOAM.

5.2.2.1 Mallado

Para hacer el mallado se hizo uso del utilitario *blockMesh*, la cual es una herramienta generadora de mallas de bloques hexaédricos estructurados, que pueden ser de bordes curvos o rectos. El mallado se genera a partir un archivo de tipo diccionario llamado *blockMeshDict* en el directorio *system* de un caso. *blockMesh* lee dicho diccionario, generando la malla y escribe los datos de la misma en los archivos *points*, *faces*, *cells* y *boundary* en el directorio *polyMesh* (The OpenFOAM Foundation, 2024).

Se fueron definiendo una serie de vértices, que permitieron definir los bordes haciendo uso del tipo de borde *arc*. Definido esto, se prosiguió con los bloques, que son hexaedros. Por último, se definieron los contornos, uno para la entrada, otro para la salida y otro para el resto de la geometría, que permiten luego definir las condiciones de contorno.

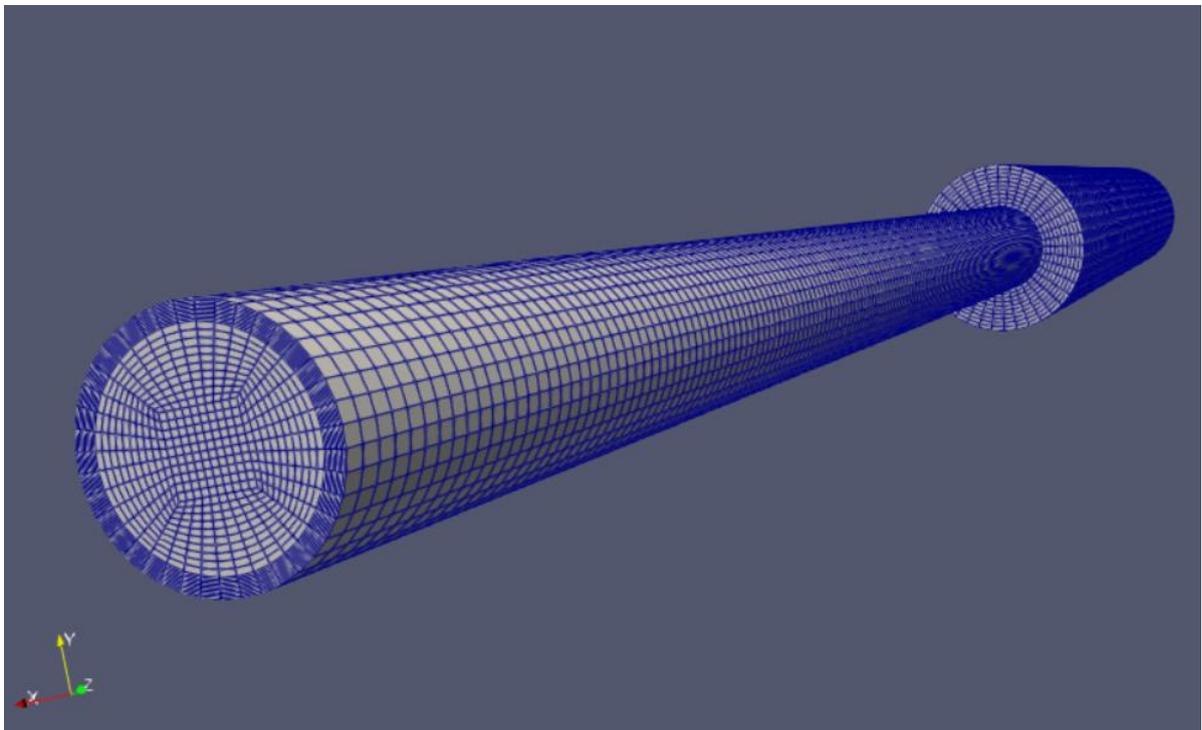


Figura 75. Mallado de expansión súbita tridimensional axialsimétrica.

5.2.2.2 Propiedades físicas

Dentro del directorio *constant* está el archivo *physicalProperties*, donde se puede indicar el modelo y el valor de la viscosidad. Particularmente, se trabajará con un modelo newtoniano, de viscosidad cinemática del agua para 20°C, $\nu = 1e - 06 \text{ m}^2/\text{s}$.

5.2.2.3 Esquemas numéricos

Dentro del directorio *system* está el archivo *fvSchemes* donde se pueden detallar los esquemas numéricos utilizados.

- Esquema de interpolación. En *interpolation schemes* se seleccionó el esquema lineal por defecto para interpolar los valores de los centros de las celdas a las caras de la misma. Por lo que se elige *default linear*.
- Esquema para gradientes normales de superficie. Se utilizó *corrected* que es una corrección no ortogonal explícita.
- Esquema para gradientes. En este caso se utilizó *Gauss linear*, el utilizar *Gauss* significa que se utiliza la discretización de volúmenes finitos estándar de integración gaussiana, y se usa *linear* por ser la elección del esquema de interpolación que suele ser una elección efectiva.
- Esquema para laplaciano. Se seleccionó nuevamente *Gauss* como elección de discretización, además se especifica el esquema de interpolación para el coeficiente de difusión, se eligió *linear* y otro para el gradiente normal de superficie, *corrected* en este caso.
- Esquema para divergencia. Se seleccionó *Gauss*, para término convectivo $\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\mathbf{U})$ se identifica como $div(phi, U)$ siendo $\phi = \rho \mathbf{U}$, se tendrá *bounded Gauss linearUpwind grad(U)* que será de primer o segundo orden, para los demás se utilizó *bounded Gauss limitedLinear 1*
- Esquema temporal, para *time scheme* se utilizó simplemente *steadyState* porque se busca la solución estacionaria. Además, dentro del directorio *system* en el archivo *controlDict* se especifica un Δt , se toma el mismo unitario para indicar que se busca la solución estacionaria.

5.2.2.4 Condiciones de borde e iniciales

- Velocidad. En el archivo U se especifica un valor fijo a la entrada, determinado por el número de Reynolds a simular, sujeto al experimento con el que se busca comparar. En la salida será un valor determinado por la simulación, tipo *zeroGradient*. En el resto de las paredes será condición de no deslizamiento, *type noSlip*.
- Presión. En el archivo p se especifica una salida con una presión estática nula.
- Energía cinética turbulenta. En el archivo k , se especifica un valor a la entrada, determinado por la intensidad de turbulencia dado por los experimentos a comparar, asumiendo turbulencia isotrópica, según la ecuación

$$\begin{aligned}k &= \frac{3}{2} \langle u \rangle^2 \\ \langle u \rangle &= IU\end{aligned}\tag{91}$$

siendo I la intensidad de turbulencia. Para las paredes se modelará como *kqRWallFunction*, la misma hace uso de la ley de la pared, esto se utiliza para evitar tener que hacer mallados muy refinados cerca de la pared, de nuevo porque la finalidad es industrial, se tiene entonces como condición tener una distancia de la pared hasta el centro de la primera celda mayor a $y^+ = 30$, donde y^+ se define como

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\tag{92}$$

- Viscosidad cinemática turbulenta. Especificada dentro del archivo *nut*. La misma se especifica para la entrada según la ecuación determinada por el modelo utilizado. Para las paredes, nuevamente, se hace uso de *nutkWallFunction* que utiliza la ley de la pared para modelar la interacción con la pared.

5.2.3 Resultados modelo $k - \varepsilon$

A continuación, se presentan los resultados numéricos obtenidos bajo el modelo $k - \varepsilon$. Se simuló el experimento de Khezzar, Whitelaw y Yianneskis (1986), este trabajo experimental investiga flujos de agua a través de expansiones axialsimétricas y asimétricas. Aporta los siguientes datos:

- Expansión desde un diámetro aguas arriba de $d = 48 \text{ mm}$ a uno de $D = 84 \text{ mm}$, con longitud aguas arriba de $l = 300 \text{ mm}$ y de aguas debajo de $L = 2,5 \text{ m}$.
- Número de Reynolds de 40000, calculado según el diámetro de aguas arriba y la velocidad media aguas arriba.
- Intensidades de turbulencia u/U_0 del 1% en el núcleo y de 8% cerca de las paredes.

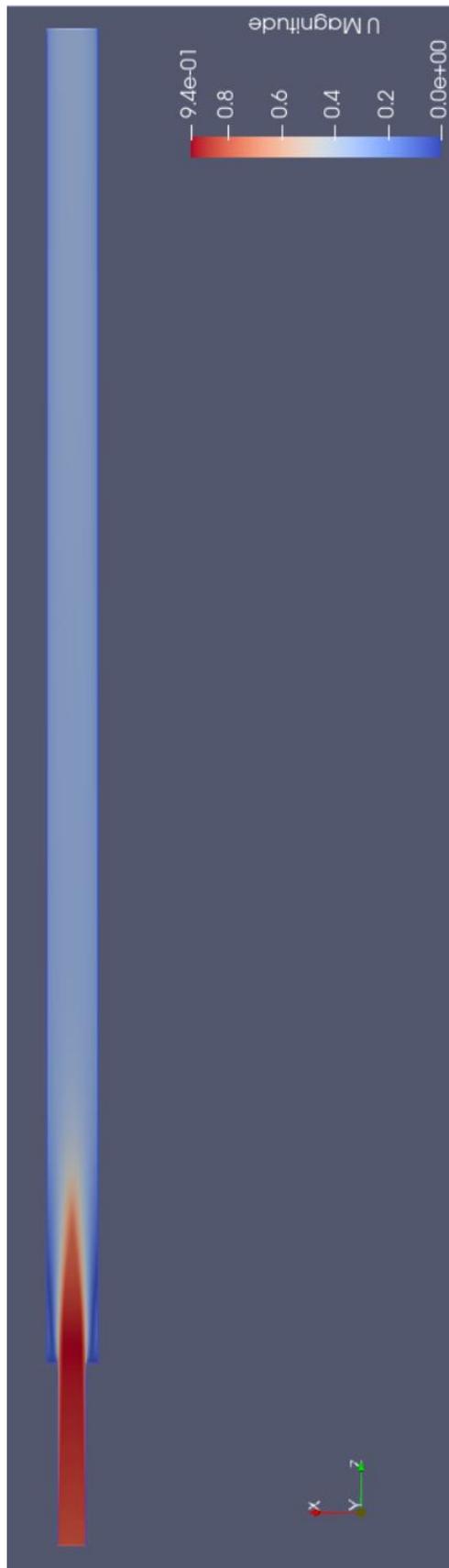


Figura 76. Resultado bajo modelo $k - \epsilon$.

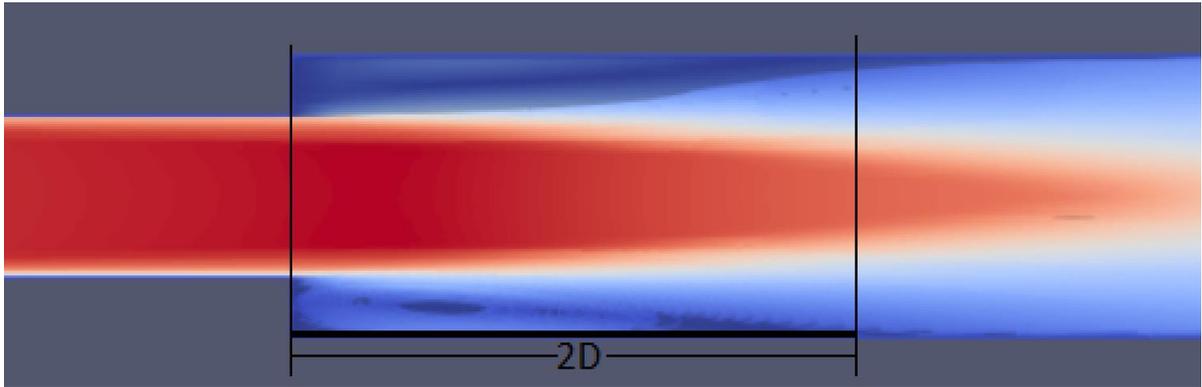


Figura 77. Distancia de readherencia.

Se puede observar en la figura 77 que el punto de readherencia está a una distancia de $x_R/D = 2$. Esto es congruente con los resultados experimentales del paper, que para el número de Reynolds dado, $Re = 40000$, la distancia de readherencia x_R es aproximadamente 2 veces el diámetro mayor D según se observa en la figura 78.

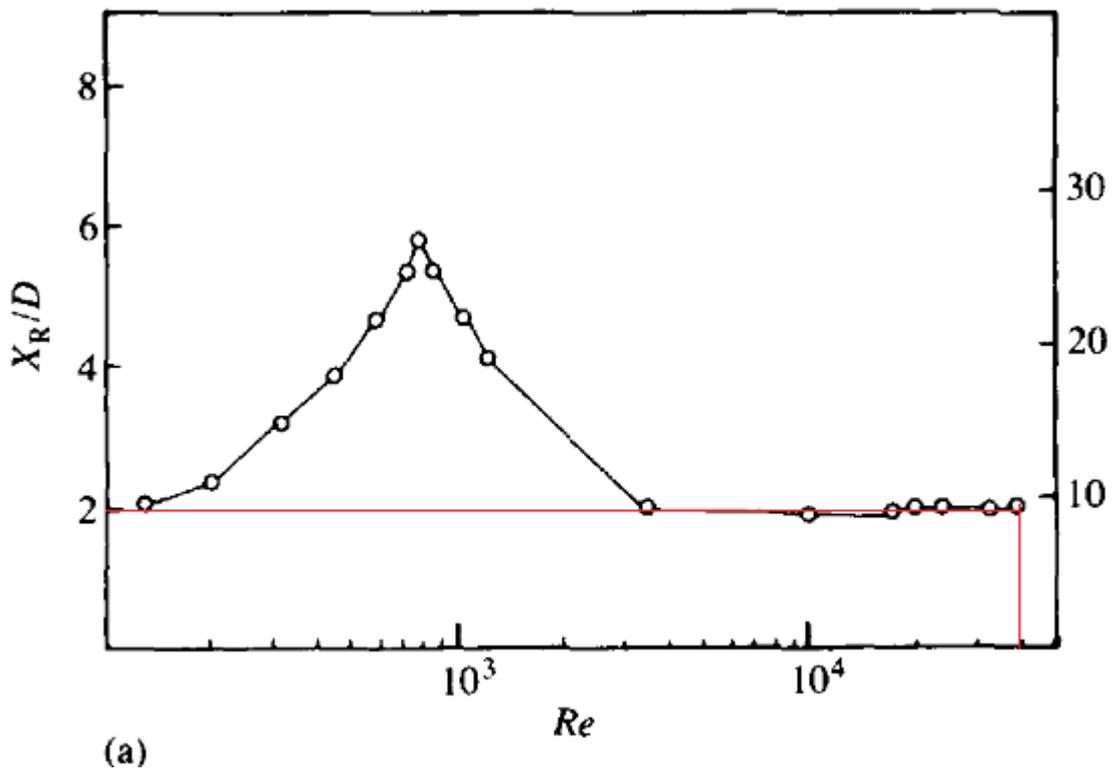


Figura 78. (Khezzar, Whitelaw y Yianneskis, 1986).

Se compararán los perfiles de velocidad media y velocidad fluctuante para varias posiciones entre los experimentos y los resultados numéricos obtenidos para poder validar estos últimos. En las figuras 79 a 86, el valor de $x/D = 0$ indicado en los títulos corresponde al cambio abrupto de sección.

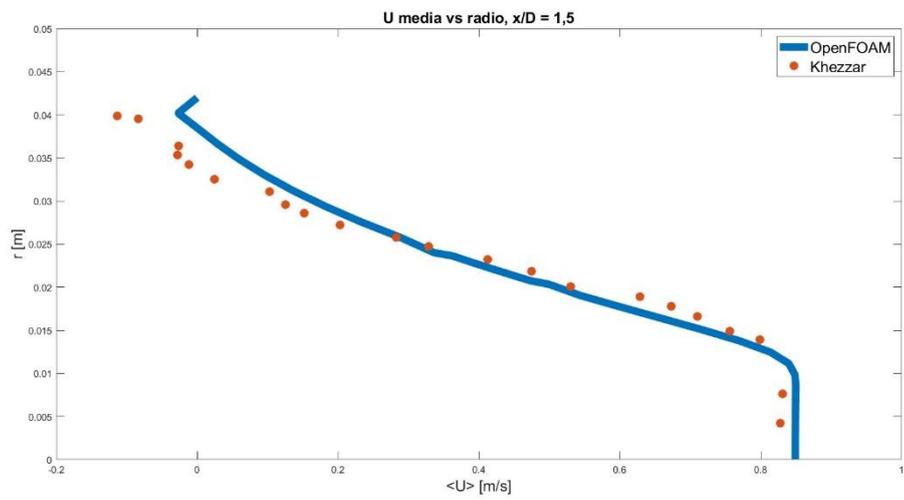
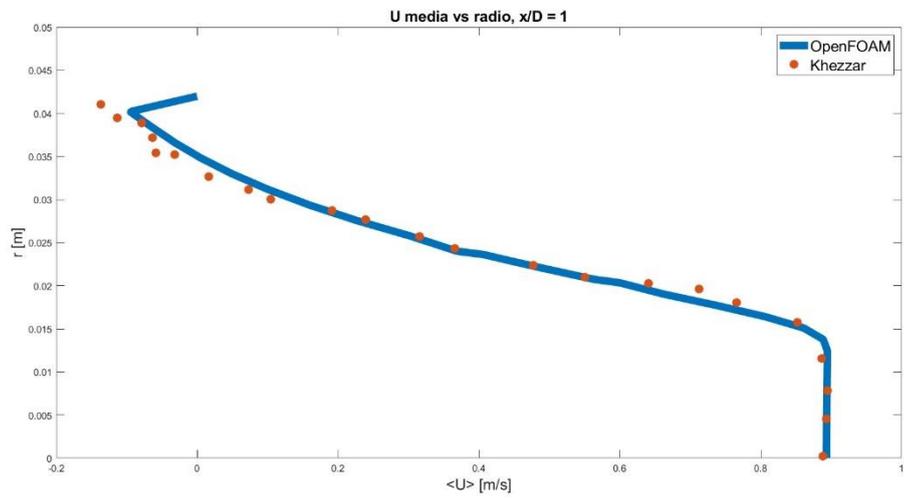
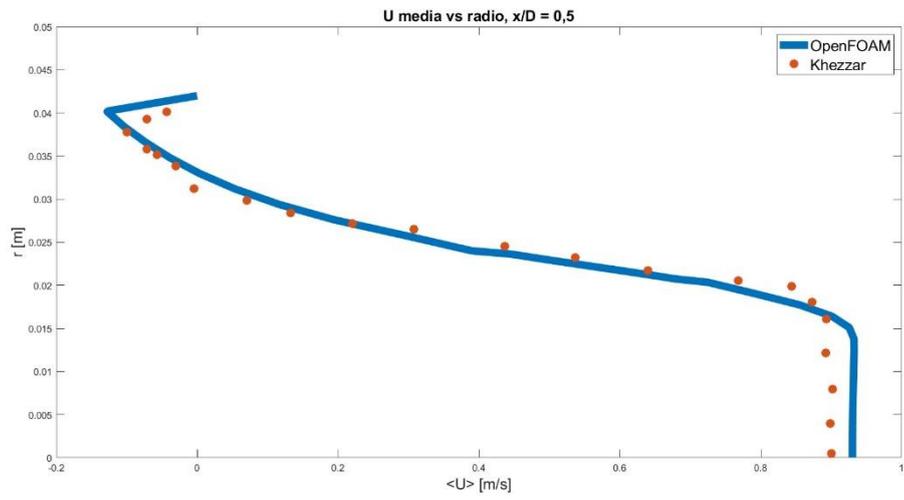


Figura 79. Velocidad media en función del radio.

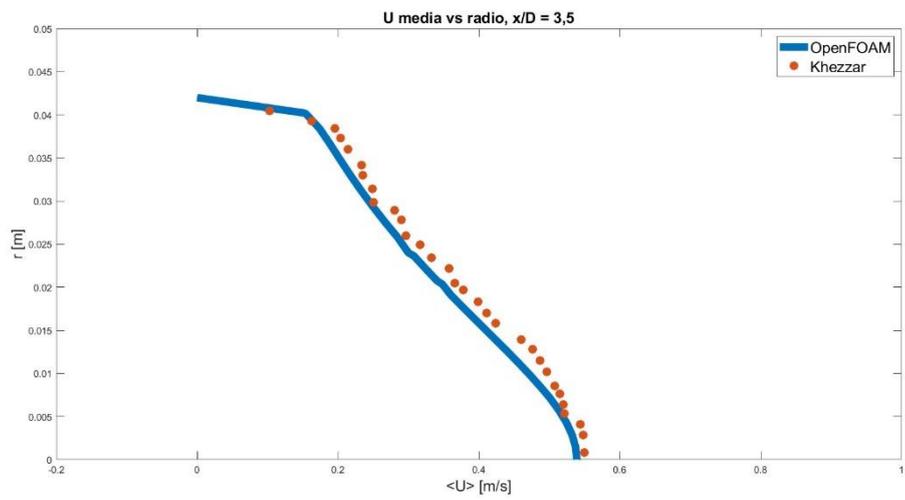
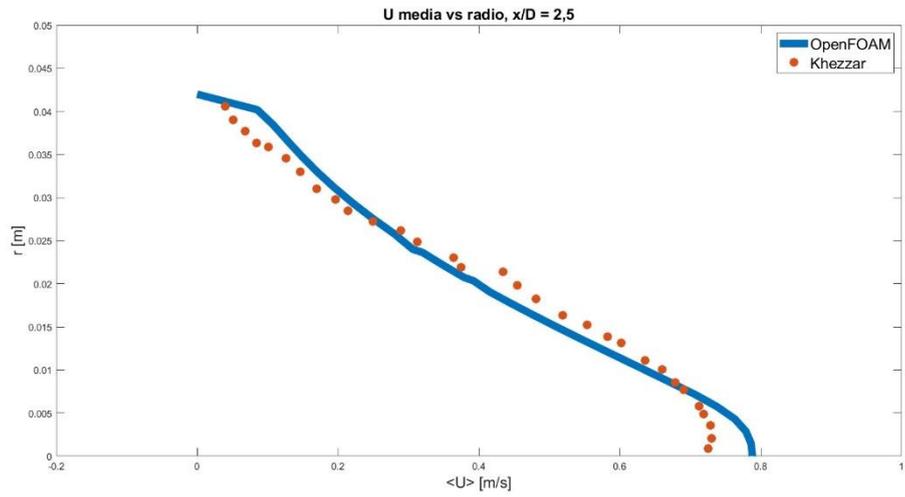
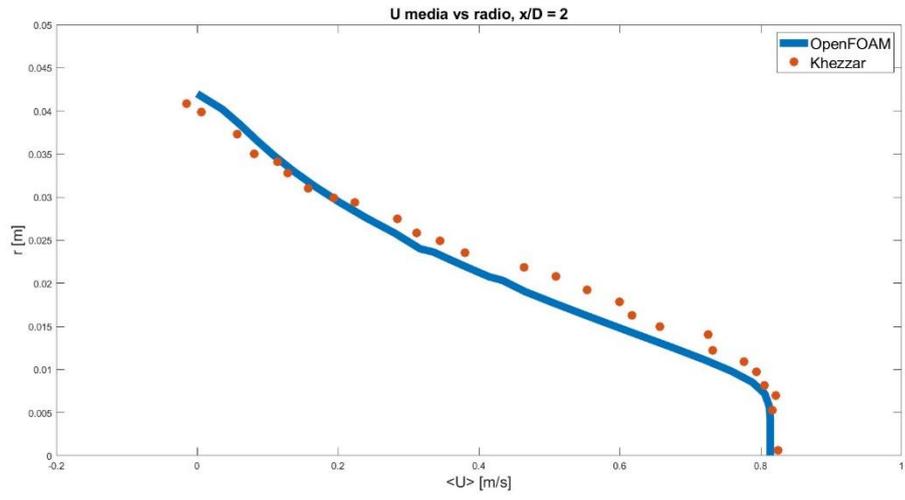


Figura 80. Velocidad media en función del radio.

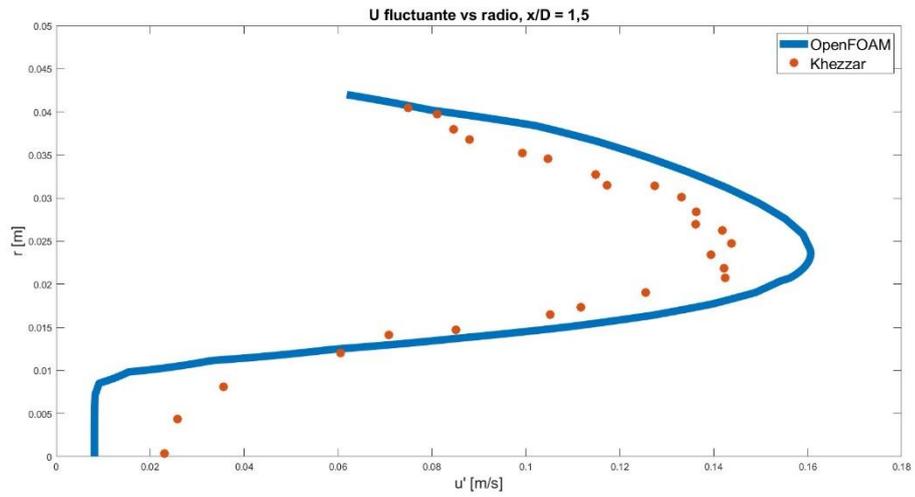
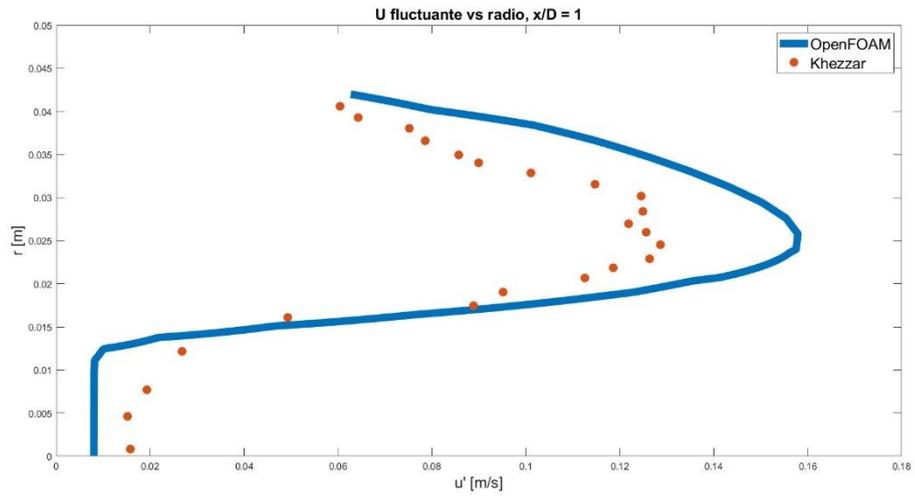
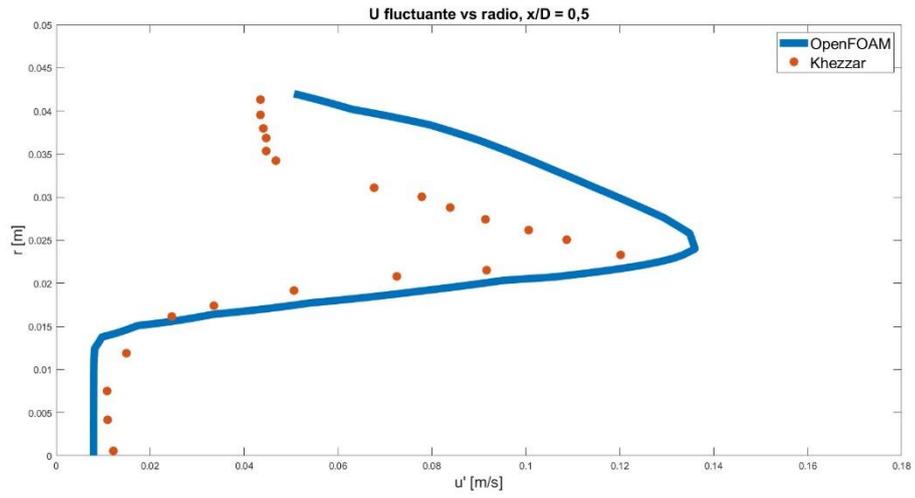


Figura 81. Velocidad fluctuante en función del radio.

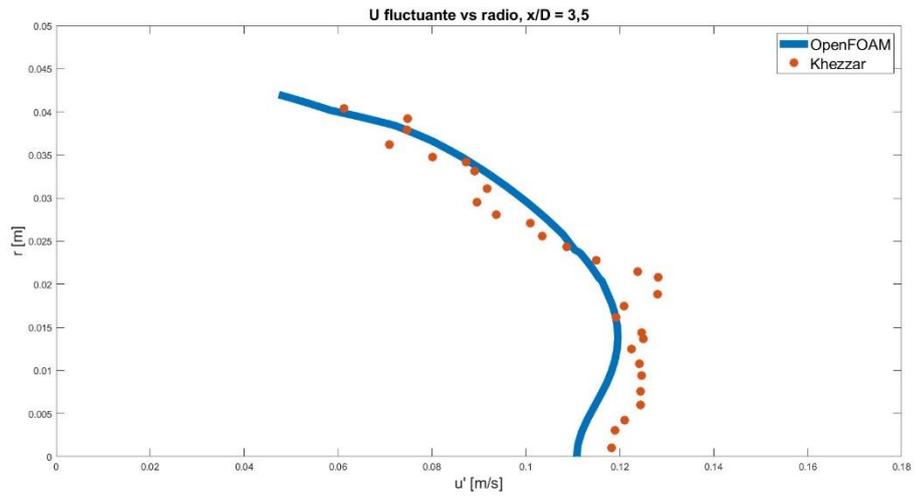
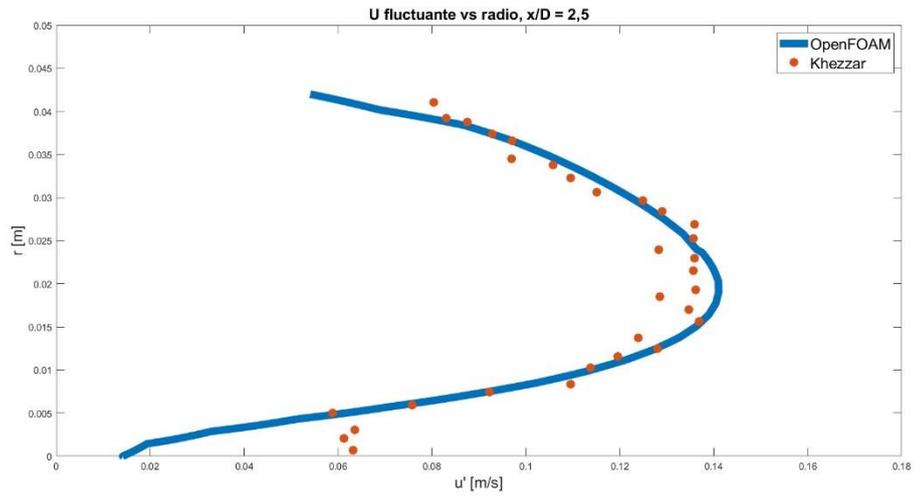
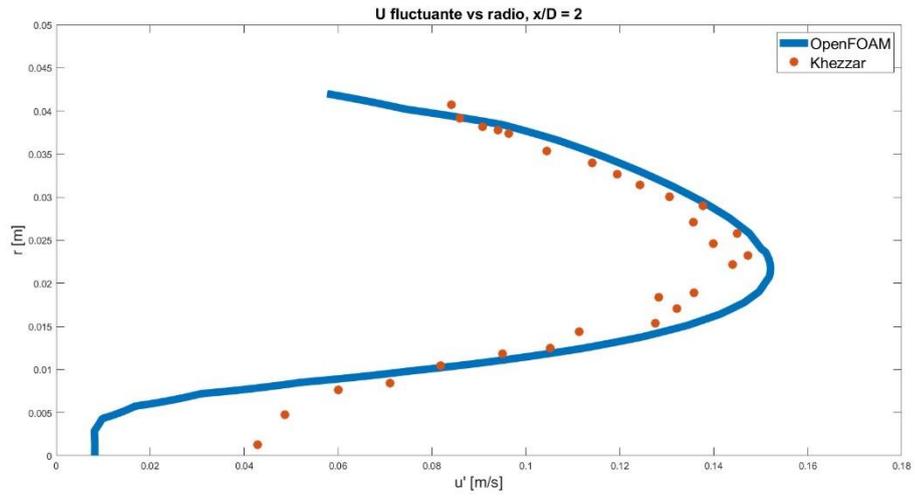


Figura 82. Velocidad fluctuante en función del radio.

Se puede observar según las figuras 79 y 80 que la velocidad media predicha por el modelo $k - \varepsilon$ se ajusta muy bien a los resultados experimentales. Por otro lado, conviene prestar atención a la figura 81, donde se puede observar para la primera imagen, la correspondiente a $x/D = 0,5$ que, entre la pared y la mitad del radio, o sea entre $r = 0,042 m$ y $r = 0,02 m$ aproximadamente, hay un notable desvío entre los resultados experimentales y los resultados numéricos, justamente cerca del denominado *step*. Dicha tendencia se atenúa notablemente conforme aumenta la relación x/D , es decir, conforme nos alejamos de la sección de expansión. En principio uno tendería a creer que hay una falla en el modelo, pero hay que tener en cuenta que el modelo únicamente provee la energía cinética turbulenta. Según Wilcox (1988) en el capítulo 2, la mayoría de los modelos de turbulencia en uso no pueden distinguir los esfuerzos normales de Reynolds, únicamente se provee k , por lo que se debe suponer turbulencia isotrópica, $u \approx v \approx w$ para poder despejar u de k . Pero, según las hipótesis de Kolmogorov del capítulo 6 de Pope (2018), una de las hipótesis es la de isotropía local, se cita

La hipótesis de isotropía local. En cualquier flujo turbulento con un número de Reynolds suficientemente grande, la turbulencia, con una buena aproximación, es localmente isotrópica si el dominio \mathcal{G} es lo suficientemente pequeño y no está cerca de los contornos del flujo o alguna de sus singularidades.

Se concluye que el problema es el de suponer turbulencia isotrópica para poder despejar los valores de u cerca del punto de expansión, donde se tiene una singularidad que nos aleja de estas hipótesis, invalidando las mismas. Esta es la explicación de los desvíos observados en la figura 81 para la velocidad fluctuante en la zona cerca del *step*. Por la misma razón, se puede observar que muy cerca de la pared, este desvío se mantiene presente, justamente por estar cerca del contorno. No se pudo encontrar una explicación a la desviación presentada en la zona central que es máximo para $x/D \approx 2$.

5.2.4 Resultados modelo $k - \omega$

Para la resolución del presente problema bajo este modelo, es fácil observar que tanto la velocidad media como la velocidad fluctuante presentan variaciones importantes con respecto de los resultados experimentales. Esto se acentúa aún más conforme nos alejamos de la sección de expansión, tanto para velocidad media como velocidad fluctuante.

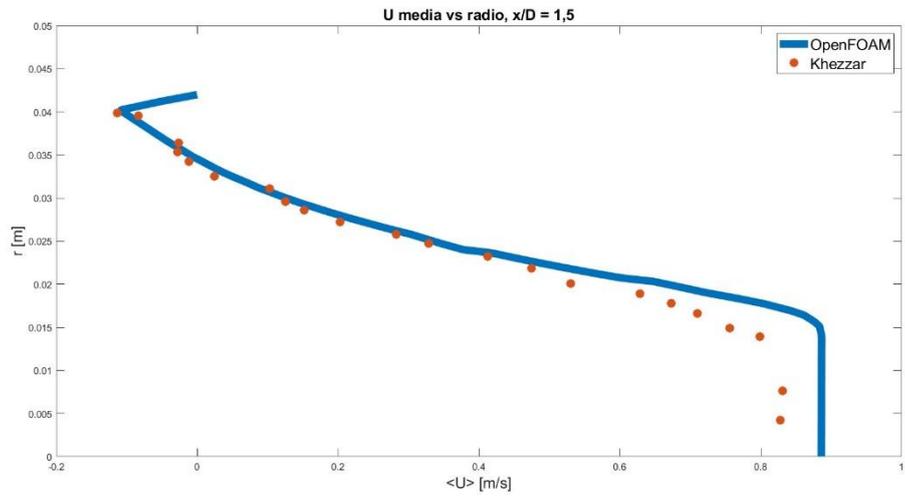
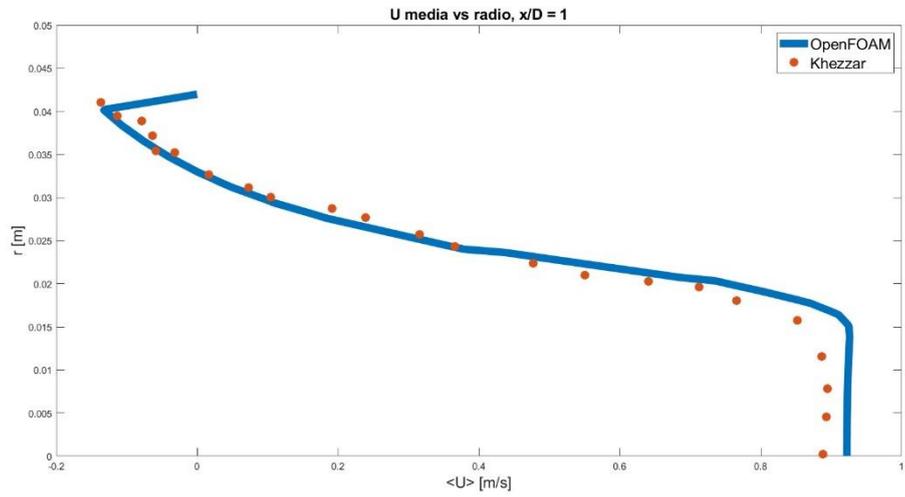
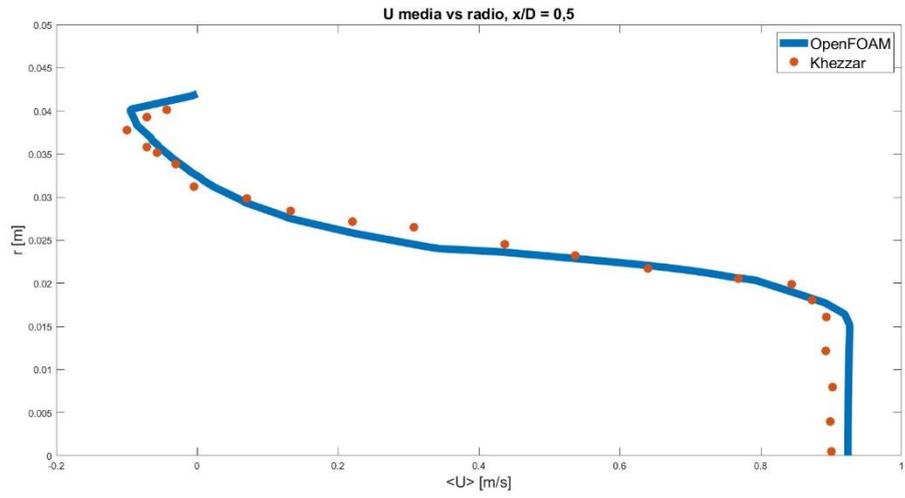


Figura 83. Velocidad media en función del radio.

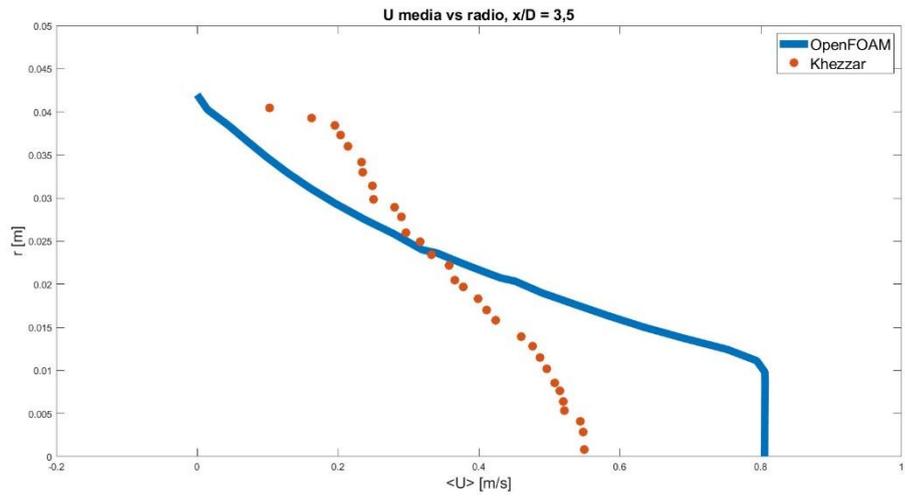
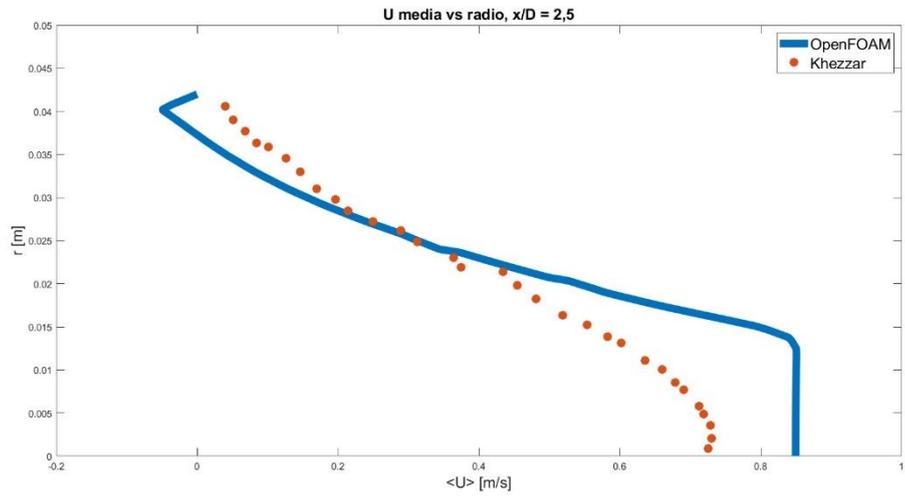
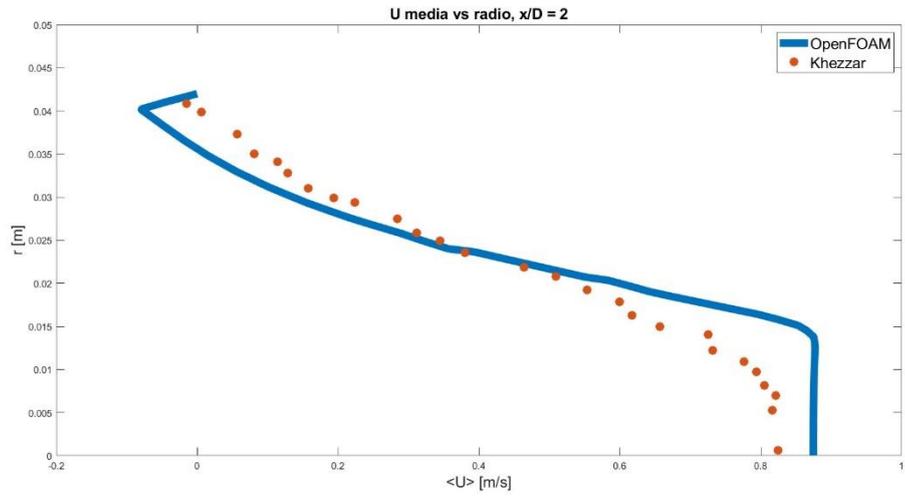


Figura 84. Velocidad media en función del radio.

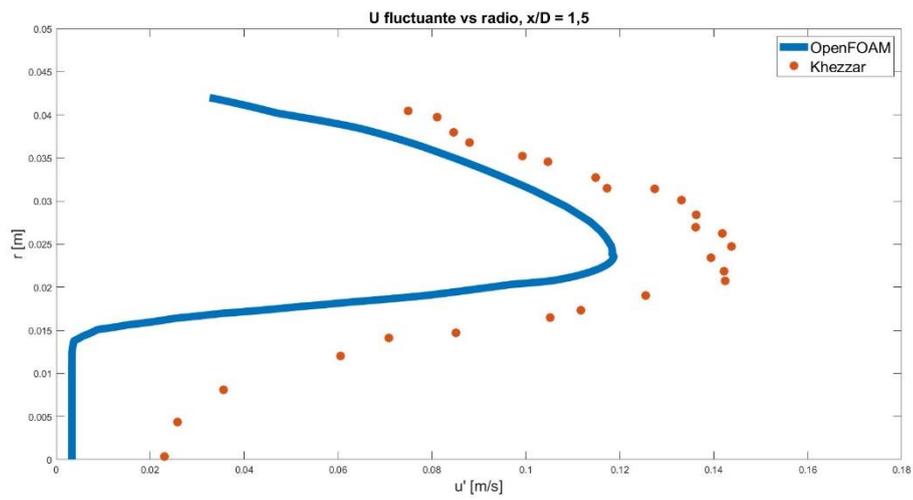
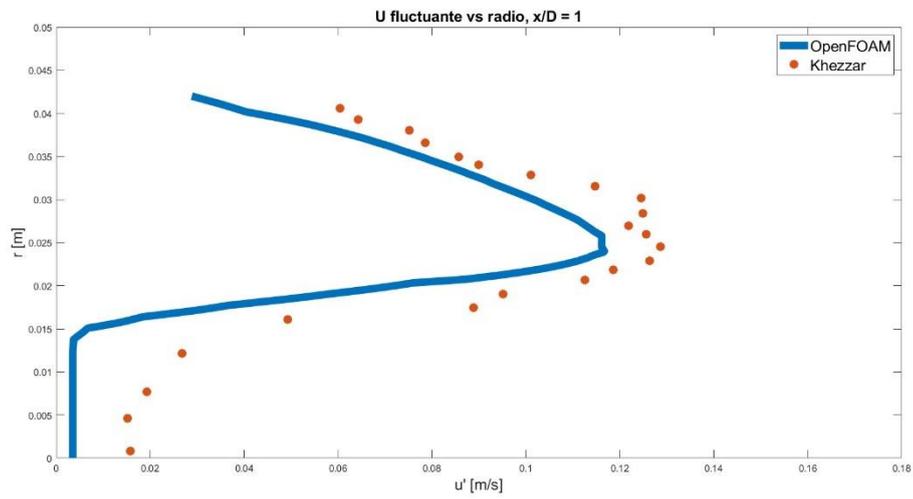
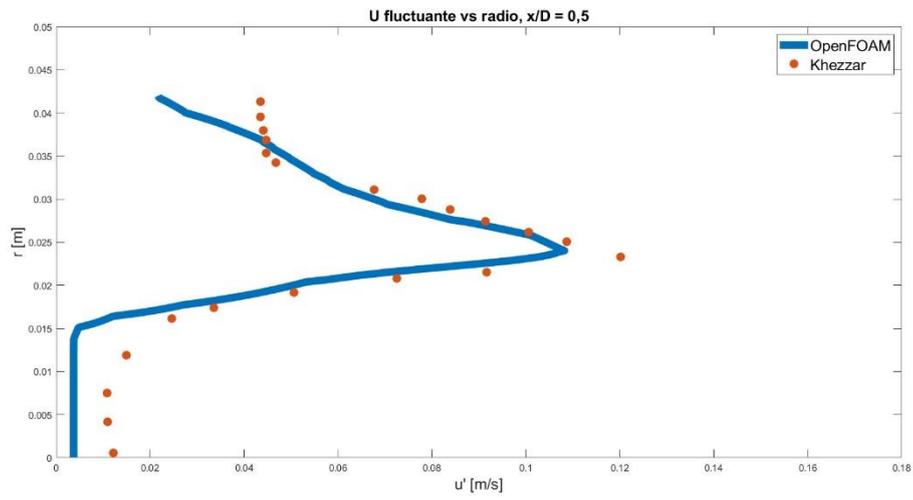


Figura 85. Velocidad fluctuante en función del radio.

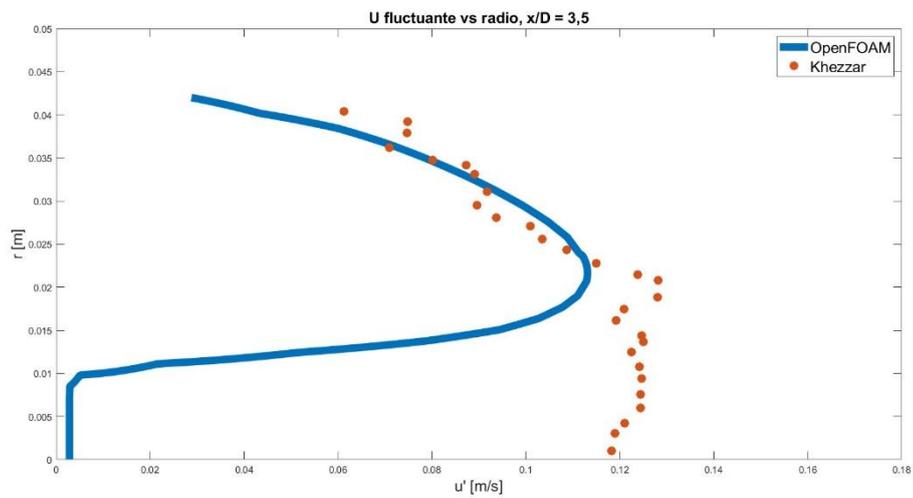
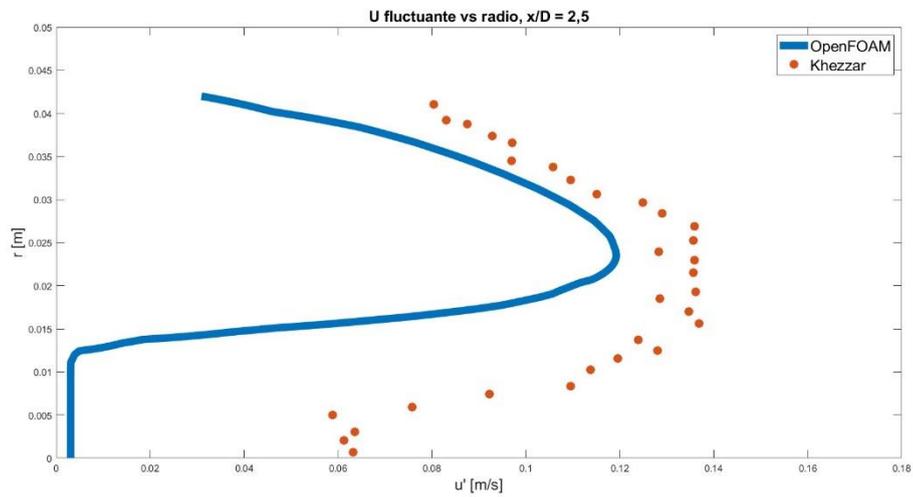
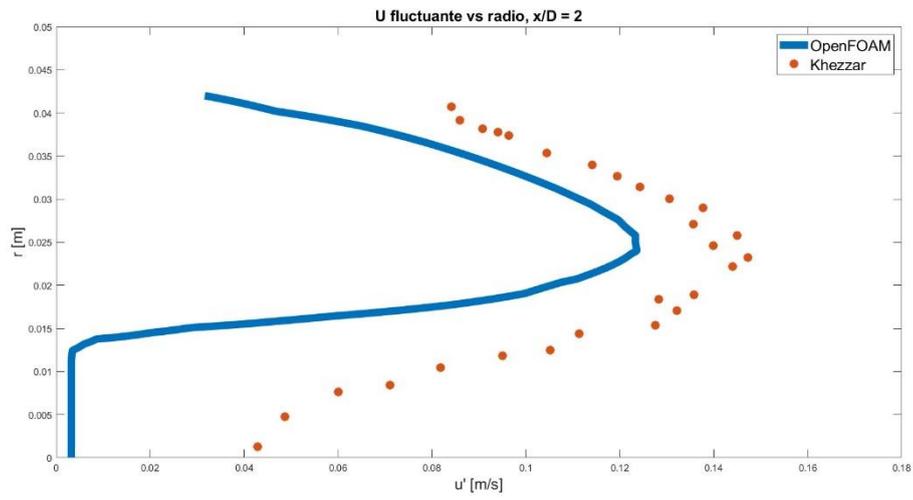


Figura 86. Velocidad fluctuante en función del radio.

5.3 Caso transporte de sedimentos

Se introducirán brevemente en la siguiente subsección algunos conceptos de la teoría de transporte de sedimentos, para luego dar paso a una subsección donde se detallará cómo se modificó el caso para simular en OpenFOAM. Como última subsección se presentarán los resultados obtenidos.

5.3.1 Teoría de transporte de sedimentos

Para la presente subsección se referirá al trabajo del autor Elgobashi (1994) para presentar los lineamientos de la teoría de transporte de sedimentos a menos de que sea indicado lo contrario. Según dicho autor hay dos desafíos al intentar predecir numéricamente flujos turbulentos con transporte de partículas:

- Hay una presencia de un gran espectro de importantes escalas de tiempos y longitudes como característica significativa de estos flujos y que resulta en un gran impedimento en la obtención de una solución detallada. Se deben resolver las escalas de movimiento más pequeñas (partículas) a través de simulaciones numéricas independientes para luego incorporar dicha información a la simulación de las escalas más grandes.
- Hay un límite superior debido a la falta de entendimiento de la turbulencia pura.

Nuevamente, se recurre a modelos matemáticos de distintos niveles de sofisticación para predecir estos flujos, cuya validez recae únicamente en estar en concordancia con los experimentos.

5.3.1.1 Clasificación de flujos turbulentos con transporte de partículas

Los flujos turbulentos con transporte de partículas se clasifican según el tipo de interacción entre las partículas y la turbulencia según la figura 87 donde las cantidades en las coordenadas adimensionales son

- $\Phi_p = MV_p/V$: fracción volumétrica de partículas
- M : número de partículas
- V_p : volumen de una única partícula
- d : diámetro de partícula
- $\tau_p = \rho_p d^2 / (18\rho_f \nu)$: tiempo de respuesta de partícula, ecuación para flujo de Stokes
- $\tau_K = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$: escala de tiempo de Kolmogorov
- $\tau_e = \ell/u$: escala de tiempo asociado a la escala integral de la turbulencia

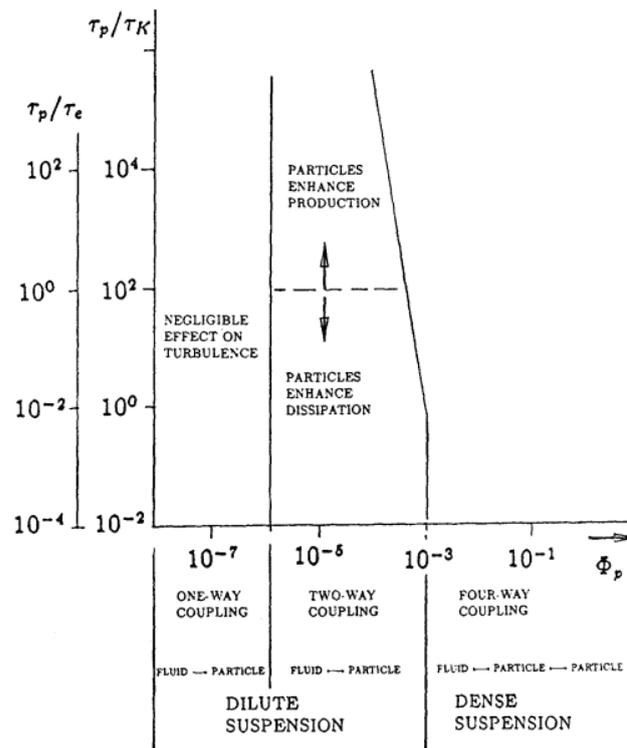


Figura 87. (Elghobashi, 1994)

Se tiene entonces la clasificación:

- Acoplamiento unidireccional. Es para bajos valores de Φ_p ($\leq 10^{-6}$), las partículas tienen un efecto despreciable en la turbulencia. Esto significa que la dispersión de partículas, en este régimen, depende del estado de la turbulencia, pero debido a la concentración despreciable de partículas, la transferencia de cantidad de movimiento de las partículas a la turbulencia tiene un efecto insignificante en el flujo.
- Acoplamiento bidireccional. Se da entre $10^{-6} < \Phi_p \leq 10^{-3}$, la transferencia de momentum de las partículas es suficiente para alterar la estructura de turbulencia. Para un valor de Φ_p dado, disminuir τ_p incrementa el área superficial de la fase de partícula, aumentando la tasa de disipación de la energía turbulenta. Por otro lado, incrementar τ_p incrementa el número de Reynolds R_p , llevando a una producción aumentada de la energía de turbulencia. A los flujos en este régimen se le denominan suspensiones diluidas.
- Acoplamiento tetra direccional. Debido al aumento de carga de partícula, $\Phi_p > 10^{-3}$, se les denomina a estos flujos como suspensiones densas. Además del acoplamiento bidireccional entre partículas y turbulencia, tienen lugar colisiones entre partículas.

Hay dos enfoques para el modelado de flujos turbulentos que transportan partículas, el método de dos fluidos (dos continuos) y el lagrangiano (o trayectoria de partículas). El primero tiene dos métodos diferentes, el determinístico y el estadístico. De acuerdo con Andersson et al. (2012), el modelo Euler-Lagrange es más exacto y funciona mejor para un sistema con un número limitado de partículas, el límite está en unos cientos de miles de partículas, que es el caso del presente trabajo, a costa de un importante costo computacional. De esta forma, se elige el método lagrangiano para poder modelar la fase discreta.

5.3.1.2 Método lagrangiano

En este enfoque las ecuaciones de gobierno del movimiento del flujo de fluido (continuidad, cantidad de movimiento, k y ε) se integran sobre una malla fija cubriendo el dominio del flujo. La fase de partículas se representa por un número de partículas computacionales cuya trayectoria $\mathbf{x}_p(t)$ se obtiene integrando simultáneamente

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p \quad (93)$$

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \Sigma \mathbf{F}_i \quad (94)$$

donde las fuerzas que actúan sobre la partícula son de arrastre, gravitatorias, de flotabilidad, de presión, entre otras, que dependerán del caso a modelar.

5.3.2 Configuración de casos con transporte de sedimentos en OpenFOAM

Se resolverá la geometría propuesta por Khezzer et al. (1986), con transporte de arena, se tomará como referencia el porcentaje de arena presente en las actividades de fractura hidráulica, de gran presencia en la zona neuquina y alrededores. Según Coulter et al. (2004) el agua de fractura hidráulica varía entre 600000 a más de 1500000 galones y de 120000 a más de 400000 de libras de arena. Se puede calcular con estos datos, teniendo en cuenta que la densidad de la arena es de 1602 kg/m^3 , un valor de $\Phi_p = 0,01496$; según la figura 87 nos encontramos en la zona de acoplamiento tetra direccional. Para modelar esta interacción partícula/partícula se asumirá un comportamiento isotrópico del material de las partículas, esto es, las propiedades mecánicas y térmicas son las mismas en todas las direcciones. Estos materiales quedan completamente definidos a partir de dos parámetros: el módulo de elasticidad de Young y la relación de Poisson (Budynas y Nisbett, 2015).

Para el caso en cuestión se utilizará entonces el solver *MPPICFoam* el cual según la guía de OpenFOAM (2024) es un *solver* transitorio para el transporte acoplado de una nube de partículas cinemáticas incluyendo el efecto de fracción volumétrica de partículas en la fase continua. Según Andrews y O’rourke (1996) el método *Multi – Phase Particle In Cell (MPPIC)* tiene una descripción de acoplamiento de interfase de tetra acoplamiento, o sea, las colisiones inter partículas se tienen en cuenta. Este método tiene aplicabilidad en transporte de sedimentos, de hecho, OpenFOAM tiene un caso modelo de ciclón, que es típico en la industria hidrocarburífera. De esta forma, la elección del solver queda justificada.

Para configurar el caso en OpenFOAM, se utilizó el mismo caso ya descrito en la sección 5.2.2. y se tomó como referencia el trabajo de Kasper (2018), donde dentro de la carpeta *constant* se agregó un diccionario llamado *cloudProperties* donde se definieron varios aspectos

5.3.2.1 Solución transitoria

Solución transitoria, con determinación de máximo valor de número de Courant de 0,5, definido como:

$$C = \frac{U\Delta t}{\Delta x} \quad (95)$$

5.3.2.2 Definición de propiedades físicas de las partículas

Se definieron los valores de densidad, módulo de Young, de un valor de 65 GPA según Kalyanasundaram y Goh (2019) y un radio de Poisson para la arena de 0,3 según Suwal y Kuwano (2013).

5.3.2.3 Definición de las fuerzas de partículas relevantes

Se agregaron las fuerzas de arrastre y de gravedad para las partículas de sedimento.

5.3.2.4 Inyección

Se definieron los siguientes parámetros

- Modelo de inyección y el nombre del *patch* a través del cual se inyecta, en este caso será la entrada de la geometría.
- Tiempo de duración de inyección, que será hasta la finalización de la simulación.

- Número de partículas inyectadas por segundo. Se tomó como referencia el cálculo de Φ_p realizado, se tomará como tamaño de partícula medio de arena un valor de $d_p = 0,305 \text{ mm}$ según Pontotoc Sand & Stone (2024) que indica que la arena mayormente utilizada en fractura hidráulica es 40/70, esto corresponde a un tamaño mínimo de grano de arena de $210 \mu\text{m}$ a $400 \mu\text{m}$. Con esto, se logró calcular el número de partículas a inyectar por segundo, con un valor de $M = 1500000$. De todas formas, el *solver* trabaja con parcelas, que tienen una cantidad de 10 partículas dentro de la misma, para alivianar costos computacionales, sería una “partícula” computacional.
- Inicio de inyección, se empezará la inyección de partículas habiendo pasado el transitorio y habiendo llegado a la solución estacionaria, dicho transitorio es de 5 segundos.
- Velocidad de inyección, se tomará la velocidad media del flujo a la entrada para perturbar lo mínimo posible al mismo.
- Modelo de distribución de tamaño, se seleccionó una distribución normal. Para el modelo de distribución de tamaño se utilizó un modelo de distribución normal, con un mínimo y máximo según lo reportado por Pontotoc Sand & Stone (2024).

5.3.2.5 Configuración de coeficientes de modelo de interacción partícula-partícula y partícula-pared

Se utiliza el modelo de resorte, amortiguador y deslizador (Cundall y Strack, 1979) ya programado en OpenFOAM para modelar las interacciones. Para dicho modelo se debe especificar α_e que sería un coeficiente relacionado al coeficiente de restitución e según el siguiente gráfico

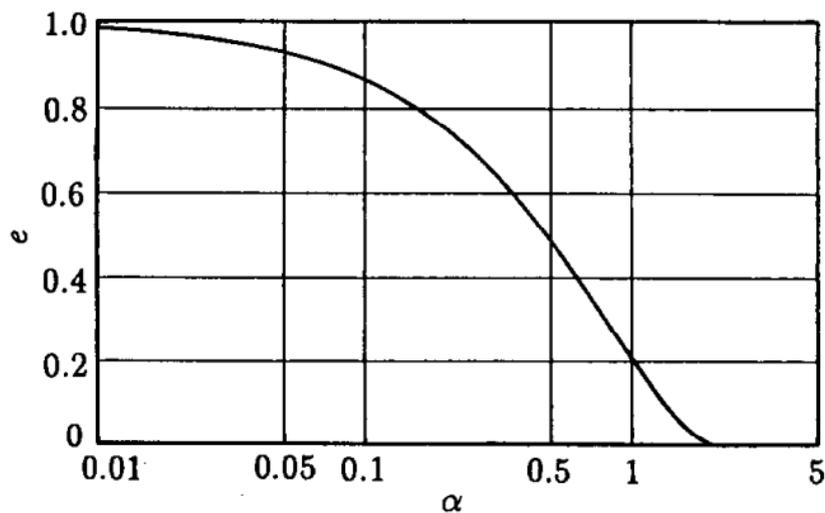


Figura 88. Relación entre parámetro α_e y coeficiente de restitución e . (Tsuji, Tanka e Ishida, 1992).

Según Ge y Monroe (2019) el grano de arena tiene un coeficiente restitución e de 0,7. Así, según la figura 88 se tiene un coeficiente $\alpha_e = 0,3$. Se le denomina α_e para diferenciarlo del α de la ecuación 96.

El otro parámetro a especificar es β , que se toma como $\beta = 3/2$ según la teoría Hertziana. Por último, se especifica el coeficiente de fricción $\mu = 0,8145$ según Kalyanasundaram y Goh (2019).

5.3.3 Resultados del caso con transporte de sedimentos

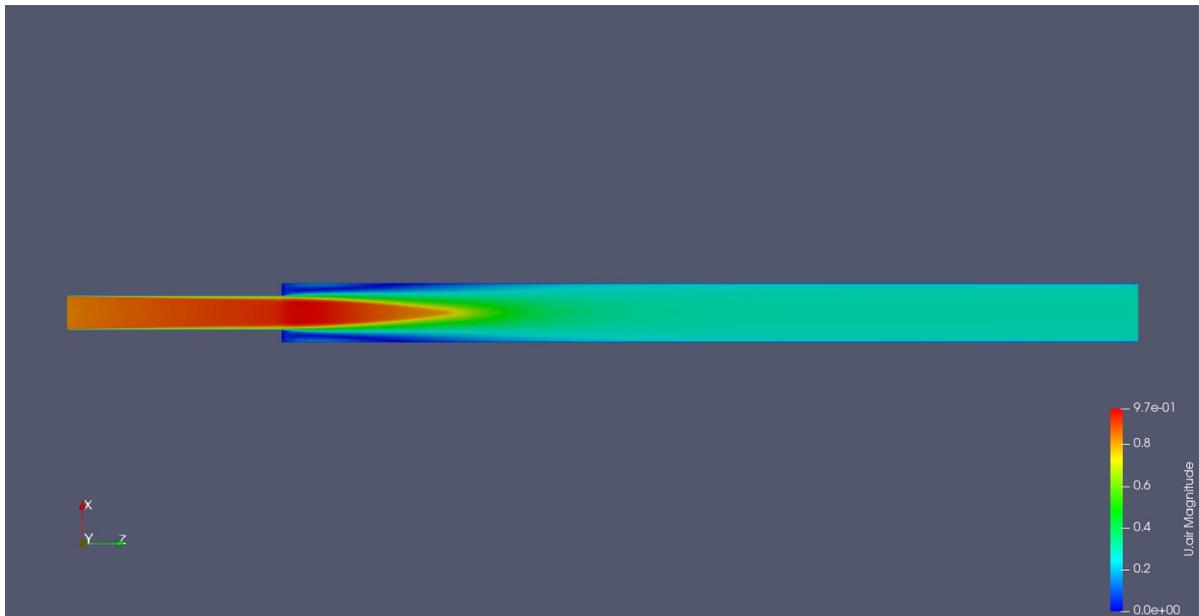


Figura 89. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de velocidades.

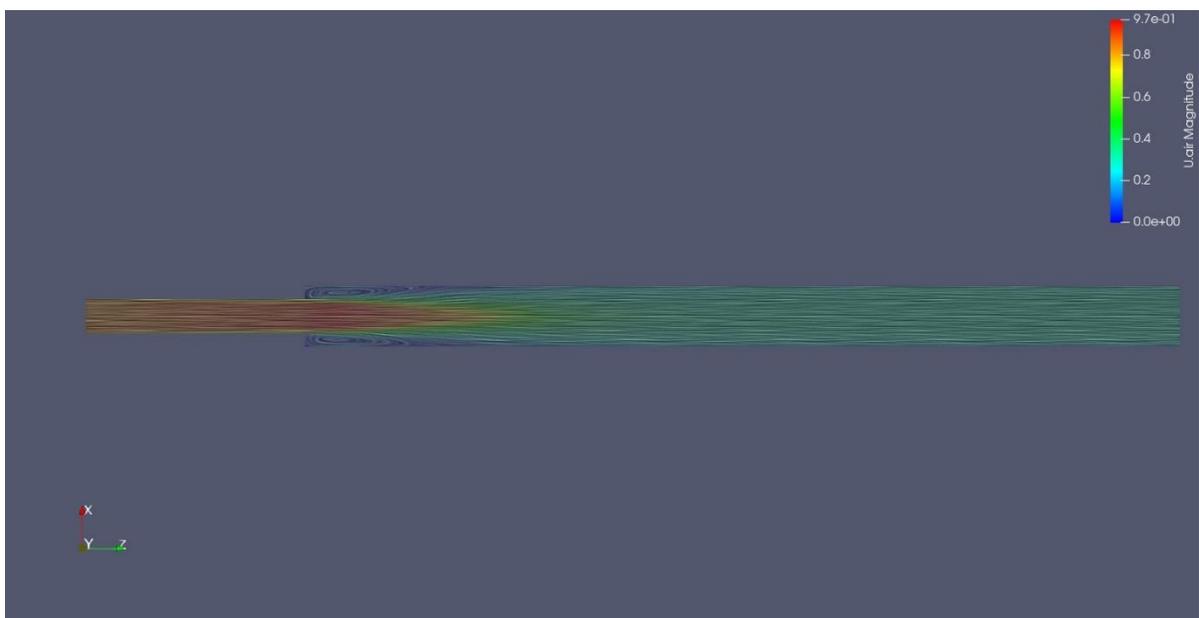


Figura 90. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Líneas de corriente.

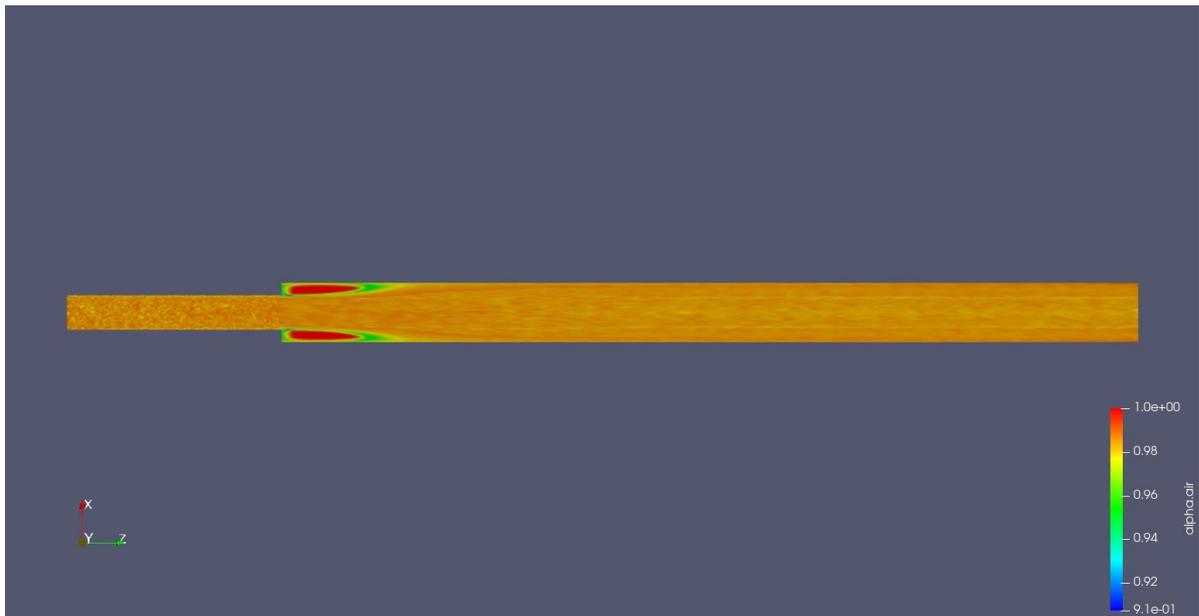


Figura 91. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de variable α

Para la figura 91, se define el parámetro adimensional α como la fracción volumétrica de la fase dispersa:

$$\alpha = \frac{V - V_p}{V} \quad (96)$$

dicho valor va desde 0 hasta 1.

Como se ve en la figura 92 y 93, tendremos una gran presencia de partículas cerca de los remolinos, en la zona de la pared, esto se puede ver gracias a la disminución del valor de α en mencionadas zonas. Dentro del remolino no tenemos una fuerte presencia de partículas posiblemente porque las velocidades de rotación en los contornos arrastran fuera de sí las partículas más livianas que intentan entrar, no así las más grandes que quedan dentro del remolino debido a una mayor inercia, según lo que se puede observar en la figura 95. Por otro lado, se ve una gran simetría en la distribución de partículas que podría deberse a que las velocidades son muy fuertes y arrastran, sin dejar depositarse en el fondo, las partículas de arena, o que simplemente esto se vería en tiempos de simulación más largos.

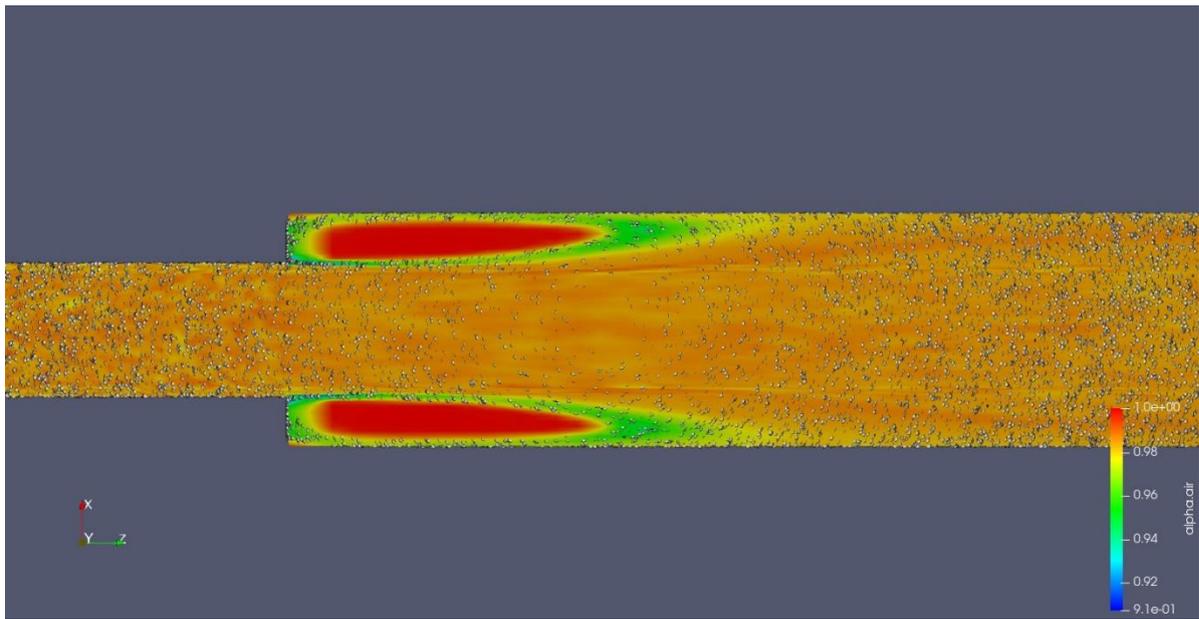


Figura 92. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de variable α , partículas.

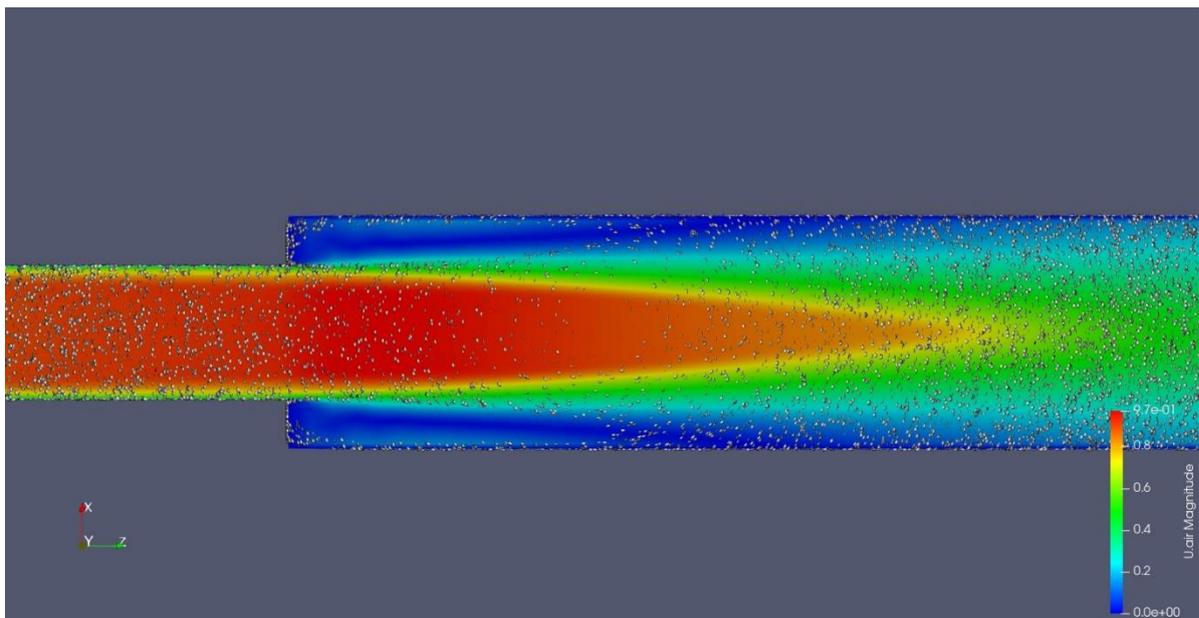


Figura 93. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Campo de variable U, partículas.

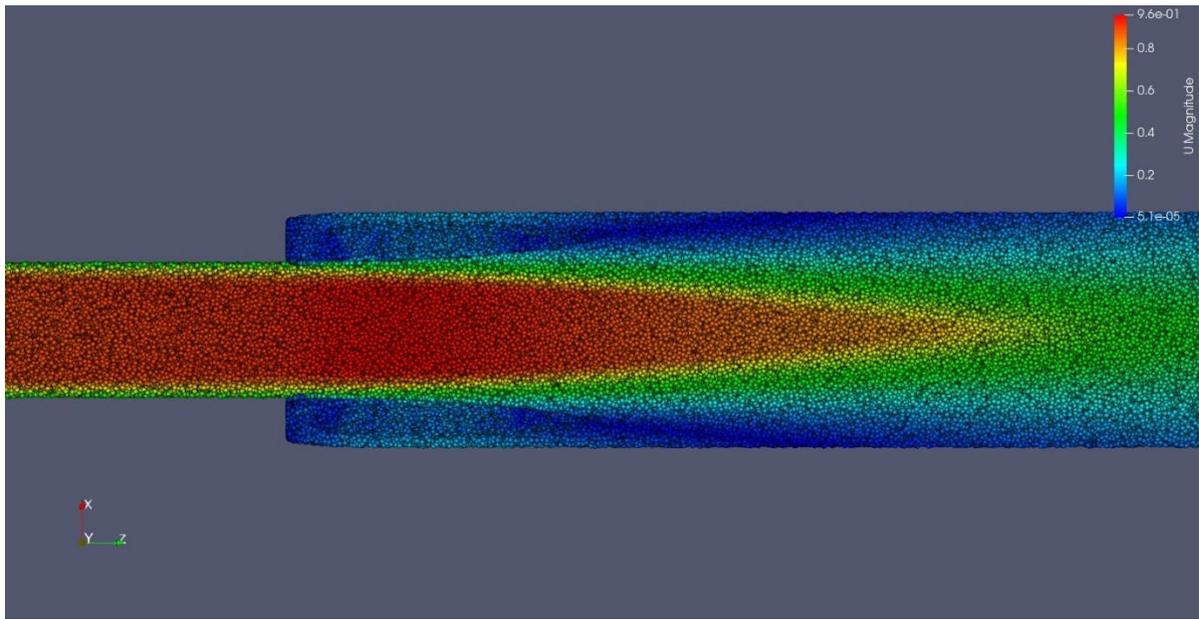


Figura 94. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Partículas en función de U .

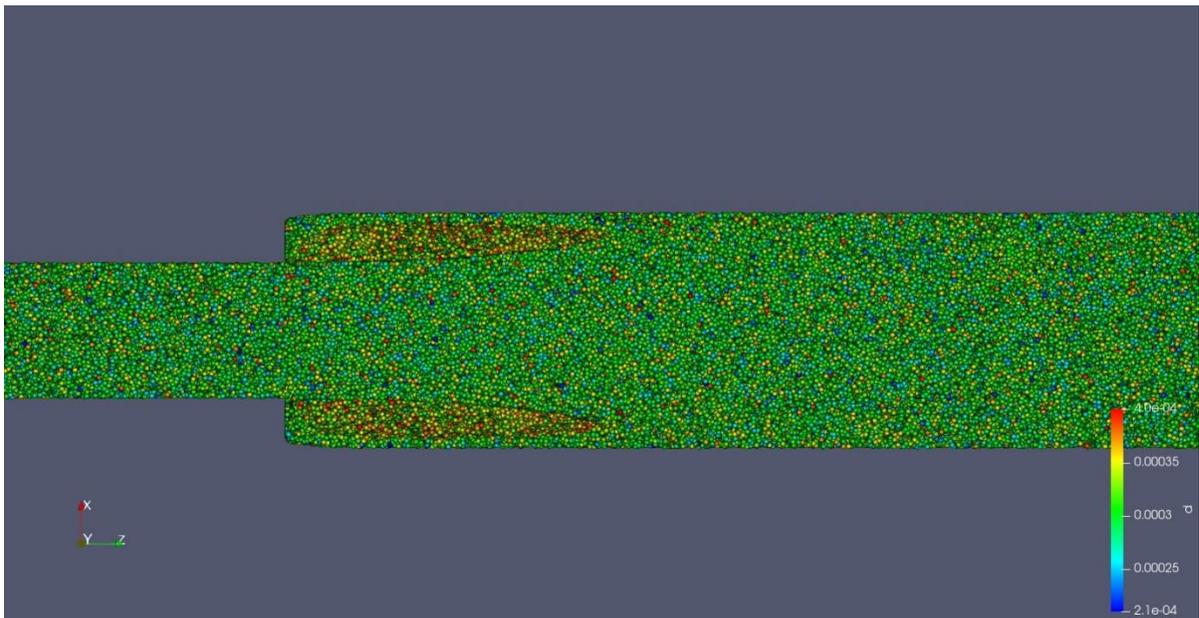


Figura 95. Solución flujo tridimensional turbulento con transporte de sedimentos. Partículas en función del diámetro.

6 CONCLUSIONES

Para la presente sección se harán conclusiones por secciones para luego dar una conclusión general y comentar acerca de posibles líneas futuras de trabajo.

6.1 Conclusiones caso bidimensional

6.1.1 Flujo potencial: entrada uniforme y entrada parabólica

Estos fueron los primeros modelados del flujo de expansión simétrica brusca. Se pudo visualizar cómo el mallado incidía en la representación de la velocidad y, por tanto, en la representación de las líneas de corriente. Además, para el caso no viscoso, no se pudieron visualizar remolinos al no estar presente la viscosidad. Se pudo observar la incidencia de la relación H/h con el mallado, teniendo que aumentar la densificación del último al aumentar dicha relación, además de poner de manifiesto la necesidad de aumentar la longitud de salida L_2 para no imponer una condición de contorno de velocidad a la salida demasiado forzada por su cercanía al escalón. La idea original de resolver el flujo potencial con entrada parabólica era la de conseguir un resultado para poder iniciar las iteraciones para el caso bidimensional viscoso plano. Pero debido a la naturaleza de la EDP, la ecuación de Laplace, ecuación (21), que no tiene términos viscosos, los valores de vorticidad se anulan en el interior de la geometría, siendo así una mala solución para empezar las iteraciones del caso siguiente.

6.1.2 Flujo viscoso laminar: plano, axialsimétrico y OpenFOAM

En este caso, la presencia de viscosidad permite observar las zonas de remolinos. Se puede observar la relación entre el número de Reynolds y la longitud de readherencia, resultando en una relación lineal. También es posible visualizar la incidencia del número de Reynolds para, nuevamente, no especificar una longitud de salida L_2 demasiado corta como para forzar una condición de contorno a la salida; esto es fácilmente observable a través de las isobaras. Se ha ahondado sobre algunas herramientas numéricas vistas de manera superficial en el cursado de la materia Fluidodinámica Computacional, como la aceleración multigrilla, la cual ha permitido conseguir soluciones para números de Reynolds mucho mayores, ya cercanos al inicio de soluciones laminares con oscilaciones. También se ha resuelto el caso axialsimétrico donde cambia el conjunto de ecuaciones originales.

Por otro lado, ha sido durante la resolución de esta sección que se ha aprendido en primera instancia la utilización del programa de código abierto OpenFOAM. Se ha logrado simular el mismo caso, bidimensional viscoso plano, con los mismos números de Reynolds que con aceleración multigrilla, obteniendo una concordancia entre los resultados, que a su vez han sido verificados con soluciones numéricas externas; siempre bajo la condición de flujo laminar sin oscilaciones. Por último, es importante aclarar que el resultado del caso de flujo bidimensional plano laminar con oscilaciones apareció únicamente por una combinación de un mallado deficiente y un esquema subdifusivo. Por todo esto, es significativo recalcar la importancia de la contrastación de resultados, ya sea por validación o por verificación.

6.2 Conclusiones caso tridimensional turbulento

Habiendo transitado una etapa de aprendizaje del programa OpenFOAM, se ha pasado a la utilización del mismo para poder simular un caso ya de interés industrial: el flujo tridimensional turbulento. Para el mismo se tuvo que ahondar en la teoría de la turbulencia de manera exhaustiva. Las resoluciones se llevaron a cabo bajo la metodología RANS debido al interés práctico del presente trabajo, comparando dos de los modelos más utilizados en la industria: el $k - \varepsilon$ y el $k - \omega$. Se concluye que el primer modelo es mejor que el segundo para el presente trabajo, gracias a poder validar los correspondientes resultados con los provenientes de experimentos externos. También se ha podido observar algunas limitaciones en los modelos que asumen la hipótesis de Boussinesq, como el no poder obtener las velocidades de fluctuación de manera aislada y tener que asumir el supuesto de turbulencia isótropa.

6.3 Conclusiones caso transporte de sedimentos

Habiendo validado los resultados del caso de flujo tridimensional turbulento, se ha pasado a resolver el mismo, ahora con transporte de sedimentos. Se ha ahondado en la teoría de sedimentos para poder simular el mismo caso, pero con transporte de arena, tomando datos reales de aplicaciones industriales. Se han podido observar las zonas de recirculaciones con la presencia de dichas partículas de sedimentos que llevan a efectos erosivos no deseados. Desafortunadamente, no fue posible encontrar casos en la literatura de experimentos de transporte de sedimentos de arena para poder validar los resultados.

6.4 Conclusiones generales

El objetivo original del presente trabajo final de grado ha consistido en resolver las ecuaciones de gobierno de un flujo de expansión simétrica brusca de manera numérica. Siendo la motivación de este trabajo principalmente el poder recurrir a otro método para poder obtener resultados en una geometría con una importante presencia en la industria, se puede afirmar que el objetivo principal ha sido logrado durante el desarrollo del presente trabajo. Se ha logrado modelar de manera correcta el flujo bajo condiciones turbulentas, validando los resultados, al igual que caso de transporte de sedimentos, ambos casos de interés industrial.

Durante el desarrollo del proyecto integrador se fue aumentando la complejidad del modelado, adquiriendo conocimiento que permitieran poder simular el problema del flujo de expansión simétrica brusca de manera lo suficientemente sofisticada como para obtener resultados aplicables en la industria. Como se mencionó oportunamente en las secciones 1 y 2, se ha hecho uso de diversas herramientas numéricas aprendidas durante el cursado de la materia Fluidodinámica Computacional, como a lo largo del desarrollo de la beca PPU y del proyecto integrador; además de utilizar conocimientos de la materia básica de Mecánica de los Fluidos y adquirir conocimientos en modelado de turbulencia y de transporte de sedimentos de manera exhaustiva. En la medida de lo posible se ha hecho hincapié en la contrastación de resultados, tanto con validación como con verificación. Los resultados finales han logrado mostrar las zonas más críticas en cuanto a efectos erosivos.

6.5 Continuación del trabajo

Si bien se buscó poder simular la pérdida de material por efectos erosivos (una cuestión complementaria al objetivo propuesto originalmente para el proyecto integrador), uno de los desafíos durante el desarrollo del presente trabajo estuvo relacionado con el limitante personal en cuanto a conocimientos en computación y programación en general, donde el uso de un software de código abierto como OpenFOAM fue un reto en sí mismo, impidiendo lograr estos resultados complementarios buscados. De esta manera, queda como posible continuación de línea de trabajo el poder modelar en OpenFOAM los efectos erosivos y además poder validar y/o verificar los resultados con transporte de sedimentos. Esto permitiría seguir trabajando en generar rediseños que permitieran minimizar efectos erosivos, de la mano con cuestiones de manufactura para resultados aplicables en la industria.

7 REFERENCIAS

- Andersson, B., Andersson, R., Hakansson, L., Mortensen, M., Sudiyo, R., y van Wachem, B. (2012). *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Andrews, M. J., y O'rourke, P. J. (1996). The multiphase particule-in-cell (MP-PIC) method for dense particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 379-402.
- Balewski, L., Cwikla, A., Kowalczyk, P., y Kozakowski, P. (2004). Advances in computational electromagnetics. *15th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications*, (págs. 613-625). Warsaw, Poland.
- Brieda, L. (2016). Vorticity - Stream function Solver in Cylindrical Coordinates.
- Budynas, R., y Nisbett, K. (2015). *Shigley's Mechanical Engineering Design*. McGraw-Hill Education.
- Clean combustion & energy research lab. (13 de Sep de 2024). *DNS of turbulent combustion*. Obtenido de Unist: <https://csyoo.unist.ac.kr/research/turbulent-combustion/>
- Coulter, G. R., Benton, E. G., y Thomson, C. L. (26 de Septiembre de 2004). *OnePetro*. Obtenido de SPE ATCE 2004 Conference Paper: <https://onepetro.org/SPEATCE/proceedings-abstract/04ATCE/All-04ATCE/71796>
- Cundall, P. A., y Strack, O. D. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 47-65.
- Elghobashi, S. (1994). On Predicting Particle-Laden Turbulent Flows. *Applied Scientific Research*, 309-329.
- Ge, J., y Monroe, C. A. (2019). The effect of coefficient of restitution in modeling of sand granular flow for core making: part 1 free-fall experiment and theory. *International Journal of Metalcasting*.
- Hung, T. K., y Macagno, E. O. (1966). Laminar eddies in a two-dimensional conduit expansion. *La Houille Blanche*, 391-401.
- Kalyanasundaram, B., y Goh, S. H. (2019). Characterisation of contact parameters of sand grains to be used for discrete element modelling. *E3S Web of Conferences* 92.

- Kamal, O., Abdalla, H., y Sarhan, A. M. (1997). Finite difference solution of laminar separated around a back step. *7th International conf. on aerospace sciences & aviation technology*. El Cairo, Egipto.
- Kasper, R. (22 de marzo de 2018). Particle Simulation with OpenFOAM. Rostock, Mecklemburgo-Pomerania Occidental, Alemania.
- Khezzar, L., Whitelaw, J. H., y Yianneskis, M. (1986). An Experimental Study of Round Sudden Expansion Flows. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Mechanical Engineering Science*.
- Kolmogorov, A. N. (1942). Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid. *Izvestia Academy of Sciences, USSR; Physics, Vol. 6, Nos. 1 and 2., 56-58*.
- Kopera, M. A., Kerr, R. M., Blackburn, H. M., y Barkley, D. (2009). Direct Numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *62 Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*. Minneapolis, Minnseota.
- Launder, B. E., y Sharma, B. I. (1974). Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. *Letters in Heat and Mass Transfer, Vol. 1, No. 2, 131-138*.
- Macagno, E. O., y Hung, T. K. (1967). Computational and experimental study of a captive annular eddy. *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 28, 43-64*.
- Moallemi, N., y Brinkerhoff, J. R. (2016). Numerical analysis of laminar and transitional flow in a planar sudden expansion. *Computer and Fluids 140, 209-221*.
- Mushatet, K. S., Rishak, Q. A., y Fagr, M. H. (2015). Numerical study of laminar flow in a sudden expansion obstacle channel. *Thermal Science, 657-668*.
- Oberkampf, W. L., Trucano, T. G., y Hirsch, C. (2003). *Verification, Validation, and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics*. Washington, D.C.: USDOE.
- Pettijohn, F. J., Potter, P. E., y Siever, R. (1973). *Sand and Sandstone*. Berlin: Springer-Verlag.

- Pontotoc Sand & Stone. (30 de 9 de 2024). *The Complete Guide To Sand Sizes*. Obtenido de Pontotoc Sand & Stone: <https://pontotocsandandstone.com/understanding-frac-sand-sizes/#:~:text=There%20are%20a%20few%20different,to%200.5mm%20in%20diameter.>
- Pope, S. B. (2018). *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ray, S. (May de 2012). Numerical study of fluid flow through sudden expansion and contraction passages.
- Salih, A. (2013). Streamfunction-Vorticity formulation.
- Stiegelmeier, M., Tropea, C., Weiser, N., y Nitsche, W. (1989). Experimental Investigation of the Flow Through Axisymmetric Expansions. *Journal of Fluids Engineerings*, 464-471.
- Suwal, L., y Kuwano, R. (2013). Statically and dynamically measured Poisson's ratio of granular soils on triaxial laboratory specimens. *Geotechnical testing journal*, 493-505.
- Tannehill, J. C., Anderson, D. A., y Pletcher, R. H. (1997). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis.
- The OpenFOAM Foundation. (9 de Julio de 2024). *OpenFOAM*. Obtenido de User Guide: <https://openfoam.org>
- Tsuji, Y., Tanaka, T., y Ishida, T. (1992). Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder Technology*, 239-250.
- Wilcox, D. C. (1988). Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models. *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 11,, 1299-1310.
- Wong., M. K., Sheng, L. C., Nor Azwadi, C. S., y Hashim, G. A. (2015). Numerical Study of Turbulent Flow in Pipe with Sudden Expansion. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics Vol. 6, No. 1.*, 34-48.